УДК 519.2

Г. П. ЧИСТЯКОВ

О ФАКТОРИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ КЛАССА L Ю. В. ЛИННИКА. 1

В 1957 г. Ю. В. Линник [1, с. 128] установил необходимые условия принадлежности классу I_0 функций распределения (ф. р.) с гауссовой компонентой. Оказалось, что если ф. р. с гауссовой компонентой $\Lambda(x) \in I_0$, то она принадлежит классу $\boldsymbol{L}$ Ю. В. Линника, т. е. ее характеристическая функция (х. ф.) имеет вид

$$\varphi(t;\ \Lambda) = \exp\left\{i\beta t + \int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}\,dG(x)\right\},\quad t \in \boldsymbol{R}^1, \tag{1}$$

где $\beta \in \boldsymbol{R}^1$, $G(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации (о. в.) с точками роста, лежащими во множестве

$$\{\mu_{n2}\}_{n=-\infty}^{\infty} \cup \{0\} \cup \{\mu_{n1}\}_{n=-\infty}^{\infty},$$

$\mu_{n1} > 0$, $\mu_{n2} < 0$, числа $\mu_{n+1,j}/\mu_{nj}$, $j = 1, 2$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — натуральные, отличные от единицы. Возникает вопрос об условиях, которые нужно накладывать на ф. р. $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$, чтобы она принадлежала классу I_0. Заметим, что ф. р. $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$ могут не иметь гауссовой компоненты, т. е. в представлении (1) $G(+0) - G(0) = 0$. В настоящей работе дается ответ на этот вопрос при таком дополнительном ограничении на поведение спектральной функции Леви — Хинчина $G(x)$

$$G(+\infty) - G(x) + G(-x) = O(\exp(-rx)),$$
$$\exists\, r > 0,\ x \to +\infty. \tag{2}$$

Обозначим через $S(G)$ — спектр функции $G(x)$. Справедлива

Теорема 1. *Пусть ф. р.* $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$ *и пусть спектральная функция Леви — Хинчина* $G(x)$ *удовлетворяет условию* (2). *Для того чтобы* $\Lambda(x) \in I_0$, *необходимо и достаточно, чтобы не существовало множества*

$$\{\nu_q\}_{q=1}^{\infty}$$

такого, что $\nu_q \in S(G)$ *для всех* q, $\nu_q \uparrow +\infty$ *или* $\nu_q \downarrow -\infty$, *причем выполняются два условия:*

$$1)\quad \overline{\lim_{q\to\infty}}\,(\ln|\nu_{q+1}|)/|\nu_q| < \infty, \tag{3}$$

$$2)\quad \overline{\lim_{q\to\infty}}\,(-\ln\{G(\nu_q+0) - G(\nu_q)\})/|\nu_q| < \infty. \tag{4}$$

Сам Ю. В. Линник полагал [2], что если потребовать от ф. р. $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$ выполнения условия (2) с $\forall r > 0$, то $\Lambda(x) \in I_0$. Это предположение Ю. В. Линника долгое время не удавалось доказать. Оно было доказано при более жестких ограничениях на поведение функции $G(x)$ на бесконечности [1], [3]. В 1981 г. гипотеза Ю. В. Линника была доказана автором [4]. В связи с этим представляет интерес такое простое следствие теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть ф. р.* $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$ *и пусть выполняется условие (2) для спектральной функции Леви — Хинчина* $G(x)$ *с* $\forall r>0$. *Тогда* $\Lambda(x) \in I_0$.

Теорема 2 следует из теоремы 1, поскольку из соотношения (2) с $\forall r > 0$ вытекает, что не существует бесконечных подмножеств спектра $S(G)$, на которых выполняется соотношение (4).

С помощью теоремы 1 получаем полное описание класса I_0 для ф. р. с гауссовой компонентой при условии, что спектр функции Леви — Хинчина $G(x)$ содержится на полуоси. Это описание содержится в таком следствии теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть ф. р.* $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$ *и пусть* $S(G) \subseteq [b, \infty)$, $b \in \boldsymbol{R}^1$. *Для того чтобы* $\Lambda(x) \in I_0$, *необходимо и достаточно, чтобы не существовало подмножества спектра* $S(G)$, *удовлетворяющего условиям (3), (4).*

Приступая к доказательству теоремы 1, отметим, что необходимость условий теоремы 1 является простым следствием такой теоремы, обобщающей один результат Хеймана [1, с. 218].

Теорема 4. *Пусть* $\varphi(t)$ — *функция вида*

$$\varphi(t) = \exp\left\{\sum_{p=1}^{\infty} a^{\nu_p} e^{i\nu_p t}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{ik\nu_1 t},\ t \in \boldsymbol{R}^1,$$

где $0 < a < 1$, $\nu_1 \geqslant 1$, *числа* ν_{p+1}/ν_p, $(p = 1, 2, \ldots)$ — *натуральные, отличные от единицы. Для того чтобы существовала постоянная* $c_\varphi > 0$ *такая, что* $A_{k+1} \cdot A_k^{-1} \geqslant c_\varphi$, $\forall k \geqslant 0$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$\varlimsup_{p\to\infty} (\ln \nu_{p+1})/\nu_p < \infty.$$

Доказательство теоремы 4 приведем в § 1, а пока покажем, как из нее вытекает необходимость условий теоремы 1. Пусть ф. р. $\Lambda(x)$ такова, что найдется подмножество

$$\{\nu_q\}_{q=1}^{\infty} \subseteq S(G),\ |\nu_q| \uparrow \infty,$$

удовлетворяющее условиям (3), (4). Не уменьшая общности, считаем $\nu_q > 0$, $q \geqslant 1$. В силу теоремы 4 у ф. р. $\Lambda(x)$ имеется компонента $\Lambda_1(x)$ с х. ф. $\varphi(t; \Lambda_1)$ вида

$$\varphi(t; \Lambda_1) = \exp\left\{\sum_{q=1}^{\infty} a^{\nu_q}(e^{i\nu_q t} - 1)\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1(k) e^{ik\nu_1 t},$$

где $0 < a < 1$, коэффициенты $\lambda_1(k)$ обладают свойством: $\exists$ постоянная c_φ, $0 < c_\varphi \leqslant 1/2$, такая, что

$$\lambda_1(k+1)(\lambda_1(k))^{-1} \geqslant c_\varphi, \quad \forall k \geqslant 0.$$

Рассмотрим ф. р. $F_1(x)$ с х. ф. $\varphi(t; F_1)$ $\varphi(t; F_1) = \left(1 - (1/2)c_\varphi^3\right) \times \left(1 - (1/2)c_\varphi^3 e^{i3\nu_1 t}\right)^{-1}$. С другой стороны,

$$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t; \Lambda_1)(\varphi(t; F_1))^{-1} = \left(1 - \frac{1}{2}c_\varphi^3\right)^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \Bigl(\lambda_1(k) - \frac{1}{2}c_\varphi^3 \lambda_1(k-3)\Bigr) e^{ik\nu_1 t}.$$

В этой формуле $\lambda_1(m) = 0$, если $m < 0$. Учитывая свойство коэффициентов $\lambda_1(k)$, видим, что $\tilde{\varphi}(t)$ является х. ф. некоторой ф. р. $F_2(x)$. Эта ф. р. не является безгранично делимой (б. д.) ф. р., что легко усматривается из разложения в ряд Фурье $\ln\tilde{\varphi}(t)$. Таким образом, у ф. р. $\Lambda(x)$ имеется не б. д. компонента $F_2(x)$, что и требовалось доказать.

Достаточность условий теоремы 1 является следствием условной теоремы 5. Перед тем как ее формулировать, отметим, что при доказательстве теоремы 5 будем работать с неубывающими функциями о. в. $V(x)$, для которых выполняются оценки: $\exists$ постоянные $r_1 > 0$ и $B = B(V) > 0$, что для всех $x > 0$

$$V(+\infty) - V(x) + V(-x) \leqslant Be^{-r_1 x}. \tag{5}$$

Теорема 5. *Пусть ф. р.* $\Lambda(x) \in \boldsymbol{L}$ *и пусть спектральная функция Леви — Хинчина* $G(x)$ *удовлетворяет условию* (2). *Предположим, что для ф. р.* $\Lambda(x)$ *и любых ф. р.* $F_j(x)$, $j = 1, 2$, *удовлетворяющих соотношению*

$$(F_1 * F_2)(x) = \Lambda(x), \tag{6}$$

выполняются следующие условия:

а) *существуют положительные, строго возрастающие к* ∞ *последовательности* $\{T\}$, $\{N_T\}$, $\{M_T\}$, $M_T \geqslant \exp(TN_T)$, *такие, что найдутся ф. р.* $F_{jT}(x)$, $j = 1, 2$ с $S(F_{jT}) \subseteq (-\infty, M_T]$; *б. д. ф. р.* $\Lambda_T(x) \in \boldsymbol{L}$ *со спектральными функциями Леви — Хинчина* $G_T(x)$, с $S(G_T) \subseteq (-\infty, N_T]$, *такими, что величины их скачков не превосходят величин скачков функции* $G(x)$; *неубывающие функции о. в.* $Q_T(x)$ *такие, что*

$$Q_T(+\infty) - Q_T(x) \leqslant \exp(-Tx), \quad x \geqslant 0, \tag{7}$$

для которых выполняются соотношения при $T \to \infty$

$$\operatorname{Var}(F_{jT} - F_j) \to 0, \quad j = 1, 2,$$

$$\operatorname{Var}(\Lambda_T - \Lambda) \to 0, \quad \operatorname{Var}(Q_T - E) \to 0; \tag{8}$$

$$\operatorname{Var}(F_{1T} * F_{2T} - Q_T * \Lambda_T) \leqslant \exp(-TM_T), \tag{9}$$

где $E(x)$ — *единичная ф. р.*

Для функций о. в. $\Lambda_T(x)$, $F_{jT}(x)$, $j=1, 2$, $Q_T(x)$ *выполняется условие* (5) *с* $r_1 = 1/2r$ *и одной постоянной* B, *зависящей только от* r, $\Lambda(x)$, $F_j(x)$, $j=1, 2$;

б) *условие* а) *выполняется для ф. р.* $1-\Lambda(-x+0)$ *и ее компонент* $1-F_j(-x+0)$, $j=1, 2$.

Тогда $\Lambda(x)\in I_0$.

Вывод достаточности условий теоремы 1 из теоремы 5 будет сделан в § 3. В § 3 покажем, что для ф. р. $\Lambda(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 1 и любых ф. р. $F_j(x)$, $j=1, 2$, таких, что имеет место соотношение (6), выполняются условия а), б) теоремы 5. При этом, не уменьшая общности, будем в дальнейшем считать, что параметр β из представления (1) равен 0.

В свою очередь доказательство теоремы 5 опирается на следующий теоретико-функциональный результат.

Теорема 6. *Пусть* $\varphi(z)$ — *функция, аналитическая в квадрате*

$$K_R = \{z: 0 < \operatorname{Im} z < R, \ |\operatorname{Re} z| < R/2\}$$

и непрерывная вплоть до границы K_R, $R \geqslant 10$. *Предположим, что для* $\varphi(z)$ *найдутся постоянные* $B_1 \geqslant 1$, $d \geqslant 0$, $0 < a < 1$, $0 < \delta < 1$, *такие, что выполняются следующие оценки*

1) $|\varphi(z)| \leqslant B_1(1+|z|)^d$, $0 \leqslant -iz \leqslant R$;

2) *оценка из пункта* 1 *сохраняется для* $z\in K_R$, $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 2a$;

3) *для каждого* r, $0 < r < R$, *где*

$$M(r, \varphi) = \max_{z\in K_r}|\varphi(z)| \geqslant \exp\left\{\frac{10^4}{a\delta}(r+1)\right\} + \exp\{10^8(d+(\delta(1-\delta))^{-3})\} = \varphi(d, a, \delta; r), \tag{10}$$

найдется число $h(r)$,

$$1 \leqslant h(r)(\delta \ln M(r, \varphi)/(1+r)) \leqslant 10,$$

такое, что на системе вертикальных отрезков $z = iy + lh(r)$, $0 \leqslant y \leqslant r$, $l\in \boldsymbol{Z}$, *лежащих в* K_r, *выполняется*

$$|\operatorname{Re}\varphi(z)| \leqslant B_1(M(r, \varphi))^\delta.$$

Тогда в квадрате $K_{R/3}$ *справедлива оценка*

$$|\varphi(z)| \leqslant \{B_1 c^{d+1}\delta^{-2}(1+|z|)^{d+4}\}^{2/(1-\delta)} + \varphi(d, a, \delta; 2e|z|),$$

$c > 0$ — *абсолютная постоянная.*

В качестве следствия этого результата нетрудно получить такую теорему, имеющую возможно самостоятельное значение и использовавшуюся ранее автором [4] для доказательства гипотезы Ю. В. Линника.

Теорема 7. *Пусть для целой функции* $\varphi(z)$ *найдутся постоянные* $B_1 \geqslant 1$, $d > 0$, $\mu \geqslant 0$ *такие, что выполняются оценки:* 1) $|\varphi(z)| \leqslant B_1(1+|z|)^d e^{\mu|\operatorname{Im} z|}$, $z\in \boldsymbol{R}^1$, $iz \in \boldsymbol{R}^1$; 2) *существует последовательность чисел* $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$, $h_n \uparrow \infty$, *такая, что* h_n *делит* h_{n+1} *нацело для всех* $n\in \boldsymbol{N}$ *и имеют место при* $y\in \boldsymbol{R}^1$ *для* $l\in \boldsymbol{Z}$ *неравенства*

$$|\operatorname{Re}\varphi(iy + 2\pi l/h_{n+1})| \leqslant B_1(1+|z|)^d e^{h_n|y|}.$$

Тогда оценка из пункта 1, где вместо B_1 стоит $2^d B_1$, выполняется для всех $z \in \mathbf{C}^1$.

1. Доказательство теоремы 4. Сначала докажем достаточность условий теоремы 4. Для этого исследуем поведение коэффициентов A_k при условии, что найдется такое $N \geqslant 10$, что

$$\nu_{q+1} \leqslant \exp(N\nu_q), \quad \forall q \in \mathbf{N}. \tag{1.1}$$

Для каждого натурального n рассмотрим функции $\varphi_n(t)$

$$\varphi_n(t) = \exp\left\{\sum_{q=1}^{n} e^{it\nu_q}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} A_n(k)\, e^{itk\nu_1}.$$

Для этих функций докажем лемму.

Лемма 1. *Для $k \geqslant T_n = \nu_n \exp\{(3N+32)\nu_n\}$ коэффициенты $A_n(k)$ удовлетворяют неравенствам*

$$\frac{1}{16} \leqslant 2\pi(\nu_n/\nu_1)\, A_n(k)\,(\varphi_n(-i\sigma(k)))^{-1} \times$$
$$\times \exp\left\{\left(\frac{1}{2}\nu_n + k\nu_1\right)\sigma(k)\right\} \leqslant 16, \tag{1.2}$$

где параметр $\sigma = \sigma(k)$ определяется из уравнения

$$\sum_{q=1}^{n} \nu_q e^{\sigma\nu_q} = k\nu_1. \tag{1.3}$$

Доказательство леммы 1. Учитывая $2\pi/\nu_1$-периодичность функции $\varphi_n(t)$, а также теорему Коши, легко получаем формулу для коэффициентов $A_n(k)$

$$A_n(k) = \varphi_n(-i\sigma)\, e^{-\sigma k\nu_1} \frac{\nu_1}{2\pi} \int_{-\pi/\nu_1}^{\pi/\nu_1} R(t, k, \sigma)\, dt, \quad \sigma > 0, \tag{1.4}$$

в которой функция $R(t, k, \sigma)$ определяется следующим образом:

$$R(t, k, \sigma) = e^{-itk\nu_1} \varphi_n(t - i\sigma)/\varphi_n(-i\sigma).$$

Из определения $R(t, k, \sigma)$ имеем два соотношения

$$-\ln|R(t, k, \sigma)| = 2\sum_{q=1}^{n} e^{\sigma\nu_q} \sin^2\frac{\nu_q t}{2},$$

$$\operatorname{Im}\ln R(t, k, \sigma) = \sum_{q=1}^{n} e^{\sigma\nu_q} \sin(\nu_q t) - tk\nu_1.$$

Параметр $\sigma = \sigma(k)$ в формуле (1.4) определим из уравнения (1.3). Легко видеть, что для $k \geqslant T_n$ у этого уравнения найдется решение $\sigma = \sigma(k)$, для которого выполняется неравенство $\sigma \geqslant 3N + 30$. На отрезке $[-\pi/\nu_1, \pi/\nu_1]$ рассмотрим точки $2\pi p/\nu_n$, $p = 0, \pm 1, \ldots, \pm P_n$, где $P_n = [\nu_n/2\nu_1]$. Если точка $2\pi p/\nu_n$ не попадает на границу отрезка, то обозначим через Γ_p окрестности этих точек

$$\Gamma_p = \left\{t : |t - 2\pi p/\nu_n| < \sigma\nu_n \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma\nu_n\right) = r(\sigma)\right\},$$

через D_p обозначим множества

$$D_p = \{t : r(\sigma) \leqslant |t - 2\pi p/\nu_n| \leqslant \pi/\nu_n\}.$$

Если точка $2\pi p/\nu_n$ попадает на границу отрезка, то под Γ_p, D_p будем понимать множества Γ_p, D_p, построенные выше, пересеченные с отрезком $[-\pi/\nu_1, \pi/\nu_1]$. Через Q_l, $l = 2, \ldots, n$, обозначим множества целых чисел q, по модулю не превосходящих $[\nu_l/2\nu_1]$, и таких, что $q\nu_{l-1}$ не делится нацело на ν_l. При этом считаем $Q_1 = \{0\}$. Тогда множество Γ, являющееся объединением множеств Γ_p, $p = 0, \pm 1, \ldots, \pm P_n$ перепишем в виде

$$\Gamma = \bigcup_{l=1}^{n} \bigcup_{q \in Q_l} \Gamma_{q\nu_n\nu_l^{-1}}.$$

Кроме того, обозначим через $S(j, m, \sigma)$ сумму

$$S(j, m, \sigma) = \sum_{q=j}^{m} \nu_q^2 e^{\sigma\nu_q}, \; j, m \in Z.$$

Поскольку на каждом из множеств $\Gamma_{q\nu_n\nu_l^{-1}}$, $q \in Q_l$, $t = 2\pi q\nu_l^{-1} + v$, $|v| \leqslant r(\sigma)$, и выполняются неравенства

$$\sin^2\left(\frac{1}{2}\nu_p\left(\frac{2\pi q}{\nu_l} + v\right)\right) \geqslant \left(\frac{\nu_p}{\nu_l}\right)^2, \; p < l,$$

$$\sin^2 \frac{\nu_p v}{2} \geqslant \frac{1}{\pi^2}\nu_p^2 v^2, \; p \geqslant l,$$

то на этих множествах имеем оценку

$$\begin{aligned} -\ln|R(v + 2\pi q/\nu_l, k, \sigma)| &\geqslant 2\nu_l^{-2} S(1, l-1, \sigma) + \\ + 2\sum_{p=l}^{n} e^{\sigma\nu_p} \sin^2 \frac{\nu_p v}{2} &\geqslant 2\nu_l^{-2} S(1, l-1, \sigma) + \frac{2v^2}{\pi^2} S(l, n, \sigma) \geqslant \\ &\geqslant \nu_l^{-2} S(1, l-1, \sigma) + \frac{v^2}{\pi^2} S(1, n, \sigma). \end{aligned} \tag{1.5}$$

С помощью этой оценки получаем неравенство

$$\begin{aligned} &\Big|\int_{\Gamma\setminus\Gamma_0} R(t, k, \sigma)\,dt\Big| \leqslant \\ &\leqslant \sum_{l=2}^{n} \sum_{q \in Q_l} \int_{\Gamma_{q\nu_n\nu_l^{-1}}} |R(t, k, \sigma)|\,dt \leqslant \\ &\leqslant \left(\sum_{l=2}^{n} \nu_l \exp\{-\nu_l^{-2} S(1, l-1, \sigma)\}\right) \times \\ &\times \int_{|v| \leqslant r(\sigma)} \exp\left\{-\frac{v^2}{\pi^2} \cdot S(1, n, \sigma)\right\} dv = M(n, \sigma) \cdot I(n, \sigma). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Для интеграла $I(n, \sigma)$ в правой части этого неравенства справедлива оценка $I(n, \sigma) \leqslant \pi^{3/2}(S(1, n, \sigma))^{-1/2}$. Множитель $M(n,$

σ) в (1.6) оценим, учитывая соотношение (1.1), а также факт, что для рассматриваемых k, $\sigma(k) \geqslant 3N + 30$:

$$M(n, \sigma) \leqslant \sum_{l=2}^{n} \nu_l \exp\left\{-\nu_l^{-2} e^{\sigma\nu_{l-1}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=2}^{n} \exp\left\{N\nu_{l-1} - e^{(N+3)\nu_{l-1}}\right\} \leqslant \frac{1}{16\pi^{3/2}}.$$

Последние два неравенства в применении к (1.6) дают оценку

$$\Big|\int\limits_{\Gamma\setminus\Gamma_0} R(t, k, \sigma)\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{16}(S(1, n, \sigma))^{-1/2}. \qquad (1.7)$$

На множествах $D_{q\nu_n\nu_l^{-1}}$, $q \in Q_l$, используя неравенство $\sin^2\theta \geqslant (2\theta/\pi)^2$, $|\theta| \leqslant \pi/2$, получаем соотношение

$$-\ln|R(v + 2\pi q/\nu_l, k, \sigma)| \geqslant$$

$$\geqslant 2\sum_{p=l}^{n} e^{\sigma\nu_p}\sin^2\frac{\nu_p v}{2} \geqslant \frac{2v^2}{\pi^2} S(l, n, \sigma).$$

Из него следует оценка

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{q\in Q_l} \int\limits_{D_{q\nu_n\nu_l^{-1}}} |R(t, k, \sigma)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{n} \nu_l \int\limits_{r(\sigma)\leqslant|v|\leqslant\pi/\nu_n} \exp\left\{-\frac{v^2}{\pi^2} S(1, n, \sigma)\right\} dv \leqslant$$

$$\leqslant \pi(S(1, n, \sigma))^{-\frac{1}{2}} \cdot \sum_{l=1}^{n} \nu_l \cdot \int\limits_{|v|\geqslant R(\sigma)} e^{-v^2/2}\,dv, \qquad (1.8)$$

где величина $R(\sigma)$ определяется равенством

$$R(\sigma) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}(S(1, n, \sigma))^{1/2} r(\sigma).$$

Для нее выполняется простая оценка $R(\sigma) \geqslant \sqrt{2}\sigma\nu_n/\pi$, позволяющая написать неравенство для $k \geqslant T_n$

$$\sum_{l=1}^{n} \nu_l \cdot \int\limits_{|v|\geqslant R(\sigma)} e^{-v^2/2}\,dv \leqslant 8\nu_n e^{-\frac{1}{2}R(\sigma)} \leqslant \frac{1}{32\pi}.$$

Обозначим через D объединение D_p, $p = 0, \pm 1, \ldots, \pm P_n$. Тогда из последнего неравенства и неравенства (1.8) получаем оценку

$$\Big|\int\limits_{D} R(t, k, \sigma)\,dt\Big| \leqslant \frac{1}{16}(S(1, n, \sigma))^{-1/2}. \qquad (1.9)$$

Теперь получим оценки интеграла I^0 функции $R(t, k, \sigma)$ по множеству Γ_0. Из (1.5) легко получаем оценку сверху

$$|I^0| \leqslant \pi^{3/2}(S(1, n, \sigma))^{-1/2}. \qquad (1.10)$$

На множестве Γ_0 имеем такую простую оценку

$$-\ln|R(v,\ k,\ \sigma)| \leqslant \frac{1}{2} S(1,\ n,\ \sigma) v^2. \tag{1.11}$$

На этом же множестве исследуем поведение $\operatorname{Im}\ln R(t,\ k,\ \sigma)$. Из формулы Тейлора с учетом выбора параметра $\sigma=\sigma(k)$ и нечетности функции $\operatorname{Im}\ln R(t,\ k,\ \sigma)$ следует

$$\operatorname{Im}\ln R(v,\ k,\ \sigma) = \\ = -\frac{v^3}{3!}\sum_{p=1}^{n} \nu_p^3 e^{\sigma\nu_p}\cos(\nu_p\cdot v^*),$$

v^* — точка из отрезка $[-r(\sigma),\ r(\sigma)]$. Из этой формулы, учитывая определение $r(\sigma)$, приходим к оценке для $v\in\Gamma_0$

$$|\operatorname{Im}\ln R(v,\ k,\ \sigma)| \leqslant \pi/12. \tag{1.12}$$

Из неравенств (1.11), (1.12) следует оценка снизу для интеграла I^0

$$I^0 = \int_{\Gamma_0} \exp\{\ln|R(v,\ k,\ \sigma)|\}\cos\{\operatorname{Im}\ln R(v,\ k,\ \sigma)\}\,dv \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\int_{|v|\leqslant r(\sigma)} \exp\left\{-\frac{v^2}{2}S(1,\ n,\ \sigma)\right\}dv \geqslant \frac{1}{4}(S(1,\ n,\ \sigma))^{-\frac{1}{2}}. \tag{1.13}$$

Применяя оценки (1.10), (1.13), (1.7), (1.9) к формуле (1.4), получаем для $k\geqslant T_n$ неравенства (1.2). Лемма доказана.

Поскольку для k, $\nu_n\leqslant k\nu_1<\nu_{n+1}$, $A_k=a^{k\nu_1}A_n(k)$, то утверждение теоремы 4 в сторону достаточности будет доказано, если будет доказано неравенство для k, $\nu_n\leqslant k\nu_1\leqslant M_n=\nu_n\exp\{4N+ +28)\nu_n\}$,

$$A_n(k+1)A_n^{-1}(k)\geqslant c_\varphi=\exp\{-(5N+40)\nu_1\}. \tag{1.14}$$

Неравенство (1.14) докажем по индукции. При $n=1$ оно, как легко видеть, выполняется. Пусть оно выполнено для коэффициентов $A_p(k)$, $1\leqslant p\leqslant n$, докажем его для коэффициентов $A_{n+1}(k)$. Коэффициенты $A_{n+1}(k)$, $A_n(k)$ связаны между собой формулой

$$p\tilde{\nu}_{n+1}\leqslant k<(p+1)\tilde{\nu}_{n+1},\quad \tilde{\nu}_{n+1}=\nu_{n+1}/\nu_1,$$

$$A_{n+1}(k)=\sum_{l=0}^{p}\frac{1}{(p-l)!}A_n(k-(p-l)\tilde{\nu}_{n+1}). \tag{1.15}$$

Обозначим через

$$n_1=\nu_n[\exp\{(3N+32)\nu_n\}],\quad n_2=\nu_n[\exp\{(5N+30)\nu_n\}].$$

Предположим, что $k+1<(p+1)\tilde{\nu}_{n+1}$. Тогда для коэффициента $A_{n+1}(k+1)$ сохранится формула (1.15). Пусть $p\geqslant n_2$, тогда запишем

$$A_{n+1}(k+1)=\sum_{j=1}^{3}\sum_{l=l_j+1}^{l_{j+1}}\frac{1}{(p-l)!}A_n(k+1-(p-l)\tilde{\nu}_{n+1}) = \\ = S_{1,k+1}+S_{2,k+1}+S_{3,k+1},$$

где $l_1 = -1$, l_{j+1}, $j = 1, 2$ — наибольшие из целых чисел l, для которых выполняются соответственно неравенства

$$k - (p - l)\tilde{\nu}_{n+1} \leqslant (n_j - 1), \; j = 1, 2,$$

$l_4 = p$. Если $p \leqslant n_1$, то в последней формуле для $A_{n+1}(k+1)$ в правой части будет только слагаемое $S_{1,k+1}$, если $n_1 < p < n_2$, то $S_{1,k+1}$ и $S_{2,k+1}$. Эти два случая исследуются аналогично рассматриваемому.

Для первого слагаемого $S_{1,k+1}$ в силу предположения индукции имеем

$$S_{1,k+1} \geqslant c_\varphi \sum_{l=0}^{l_2} \frac{1}{(p-l)!} A_n (k - (p-l)\tilde{\nu}_{n+1}) = c_\varphi \hat{S}_{1k}. \qquad (1.16)$$

Для исследования поведения $S_{2,k+1}$ вернемся к формуле (1.2). Параметр $\sigma = \sigma(x)$, определяемый из уравнения (1.3), если в нем вместо k брать положительное $x \geqslant T_n$, является дифференцируемой функцией от x и для $\sigma'(x)$ следует соотношение

$$\sigma'(x) = \left\{ \sum_{l=1}^{n} \nu_l^2 e^{\sigma(x)\nu_l} \right\}^{-1} \nu_1. \qquad (1.17)$$

Из неравенств (1.2) получаем для $k \geqslant T_n$, $m \geqslant 0$:

$$\frac{1}{256} \leqslant \frac{A_n(k+m)}{A_n(k)} \exp\left\{ -\int_k^{k+m} \frac{d}{dx} (\ln \varphi_n(-i\sigma(x)) - \right.$$

$$\left. - \left(\nu_1 x + \frac{1}{2}\nu_n\right)\sigma(x)\right) dx \right\} \leqslant 256.$$

Поскольку в силу уравнения (1.3) имеем соотношение

$$\frac{d}{dx}\left\{ \ln \varphi_n(-i\sigma(x)) - \left(\nu_1 x + \frac{1}{2}\nu_n\right)\sigma(x)\right\} = -\nu_1\sigma(x) - \frac{1}{2}\sigma'(x)\nu_n,$$

то с помощью соотношения (1.17) для рассматриваемых k и m приходим к неравенству

$$\frac{1}{256} \leqslant \frac{A_n(k+m)}{A_n(k)} \exp\left\{ \int_k^{k+m} \nu_1 \sigma(x)\, dx \right\} \leqslant 512. \qquad (1.18)$$

Из уравнения (1.3) следует, что для x, $n_1 \leqslant x \leqslant n_2$, справедлива оценка $\sigma(x) \leqslant 5N + 32$, поэтому из левой части неравенства (1.18) получаем для k, $n_1 \leqslant k < n_2$,

$$A_n(k+1)(A_n(k))^{-1} \geqslant \frac{1}{256} \exp\{(-5N - 32)\nu_1\}.$$

Эти неравенства позволяют написать оценку снизу

$$S_{2,k+1} \geqslant \frac{1}{256} \exp\{(-5N-32)\nu_1\} \times$$

$$\times \sum_{l=l_2+1}^{l_3} \frac{1}{(p-l)!} A_n(k - (p-l)\tilde{\nu}_{n+1}). \qquad (1.19)$$

Через $\hat{S}_{2k}$, $\hat{S}_{3k}$ обозначим суммы, аналогичные суммам $S_{2,k+1}$, $S_{3,k+1}$, получаемые из последних заменой в коэффициентах $A_n(\cdot)$ параметра $k+1$ на k. Запишем формулу

$$\frac{(p-l_3)!}{A_n(k-(p-l_3)\tilde{\nu}_{n+1})}\hat{S}_{3k} = \sum_{l=1}^{p-l_3} A^l_{p-l_3} \prod_{q=1}^{l} \beta(k-(p-l_3-q)\tilde{\nu}_{n+1}) = S_{4k},$$

где $A^l_{p-l_3}$ — число размещений из $p-l_3$ по l, множители $\beta(k-$ $-(p-l_3-q)\tilde{\nu}_{n+1})$ определяются следующим образом:

$$\beta(k-(p-l_3-q)\tilde{\nu}_{n+1}) = \frac{A_n(k-(p-l_3-q)\tilde{\nu}_{n+1})}{A_n(k-(p-l_3-q+1)\tilde{\nu}_{n+1})}.$$

Поскольку $k-(p-l_3)\tilde{\nu}_{n+1} \geqslant n_2/2$, а для $x \geqslant n_2/2$ $\sigma(x) \geqslant 5N+28$, то из правой части неравенства (1.18) получаем оценку

$$\beta(k-(p-l_3-q)\tilde{\nu}_{n+1}) \leqslant 512 \exp\{-(5N+28)\nu_{n+1}\}.$$

Из этой оценки следует, что для $p \leqslant M_{n+1}$, M_{n+1} из (1.14)

$$S_{4k} \leqslant 512 \sum_{l=1}^{p-l_3} A^l_{p-l_3} \exp\{-(5N+28)l\nu_{n+1}\} \leqslant$$

$$\leqslant 512 \sum_{l=1}^{p-l_3} M^l_{n+1} \exp\{-(5N+28)l\nu_{n+1}\} \leqslant 1024 \exp(-N\nu_{n+1}).$$

Отсюда получаем следующее неравенство:

$$\hat{S}_{3k} \leqslant 1024 \cdot \hat{S}_{2k} \exp(-N\nu_{n+1}). \tag{1.20}$$

Из соотношений (1.16), (1.19), (1.20) получаем цепочку неравенств, доказывающих индуктивное предположение (1.14)

$$S_{1,k+1} + S_{2,k+1} + S_{3,k+1} \geqslant c_\varphi \hat{S}_{1k} +$$

$$+ \frac{1}{256}\exp\{-(5N+32)\nu_1\} \cdot \hat{S}_{2k} \geqslant c_\varphi \hat{S}_{1k} +$$

$$+ \left(\frac{1}{256}\exp\{-(5N+32)\nu_1\} - 1024\exp(-N\nu_{n+1})c_\varphi\right) \times$$

$$\times \hat{S}_{2k} + c_\varphi \hat{S}_{3k} \geqslant c_\varphi(\hat{S}_{1k} + \hat{S}_{2k} + \hat{S}_{3k}) = c_\varphi A_n(k).$$

Неравенство (1.14) доказано для случая $k+1 < (p+1)\tilde{\nu}_{n+1}$.

Пусть теперь $k+1 = (p+1)\tilde{\nu}_{n+1}$. В этом случае формула (1.15) принимает вид

$$A_{n+1}(k+1) = \sum_{l=0}^{p} \frac{1}{(p-l)!} A_n((l+1)\tilde{\nu}_{n+1}) + \frac{A_n(0)}{(p+1)!}.$$

К суммам в правых частях этих формул применимы те же рассуждения, что и для случая $k+1<(p+1)\tilde{\nu}_{n+1}$. Из этих рассуждений следует справедливость неравенства (1.14) и в случае $k+1=(p+1)\tilde{\nu}_{n+1}$. Достаточность условий теоремы 4 доказана.

Докажем необходимость условий теоремы 4. Действительно, если для $\forall k \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$, $A_{k+1} \cdot A_k^{-1} \geqslant c_\varphi > 0$, то имеем оценку снизу для коэффициентов A_k

$$A_k \geqslant c_\varphi^k, \quad \forall k \in \boldsymbol{N}, \ 0 < c_\varphi < 1. \tag{1.21}$$

С другой стороны, если бы при этом $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (\ln \nu_{n+1}/\nu_n) = \infty$, то для $\forall N \geqslant 3 - 4\ln c_\varphi$ найдется такое $n = n(N)$, что на отрезке $[\nu_n, \exp(2N\nu_n)]$ $A_k = a^{k\nu_1} A_n(k)$. Для коэффициентов $A_n(k)$ функции $\varphi_n(t)$ справедлива оценка для $k \geqslant 0$

$$A_n(k) \leqslant \varphi(-iN) \exp(-Nk\nu_1). \tag{1.22}$$

Эта оценка, очевидно, следует из формулы (1.4) при $\sigma = N$, если учесть, что при $t \in \boldsymbol{R}^1$ $|R(t, k, \sigma)| \leqslant 1$. Из (1.22) имеем для k, $\exp(N\nu_n) \leqslant k \leqslant \exp(2N\nu_n)$,

$$A_n(k) \leqslant \exp\left(\sum_{q=1}^{n} e^{N\nu_q} - Nk\nu_1\right) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2} Nk\nu_1\right) \leqslant c_\varphi^{2k\nu_1},$$

что противоречит имеющейся оценке (1.21) для коэффициентов A_k. Теорема 4 доказана.

Замечание. Как видно из доказательства теоремы 4, в качестве постоянной c_φ можно взять $c_\varphi = a^{\nu_1} \exp\{-(5N+40)\nu_1\}$. ■

Знак ■ означает конец очередного параграфа.

В дальнейшем условимся обозначать положительные абсолютные постоянные независимо от их величины одной буквой c.

2. Доказательство теоремы 6. Зададимся точкой r, $a < r < R - 1$, в которой выполняется неравенство (10), и запишем формулу Шварца для функции $\varphi(z)$ в прямоугольнике

$$\Pi_{lr} = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < r, \ \ lh(r) < \operatorname{Re} z < (l+1)h(r)\}.$$

Конформное отображение прямоугольника Π_{lr} на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} z > 0$ осуществляется функцией эллиптический синус [5, с. 214]

$$f_l(z) = \operatorname{sn}\left(2K\left(z - l - \frac{1}{2}\right)/h(r);\ k\right), \tag{2.1}$$

где параметры K и k определяются соотношениями

$$K = \frac{\pi}{2}(1 + 2\alpha + 2\alpha^4 + \ldots)^2,$$

$$k^2 = \left(\frac{2\alpha^{1/4} + 2\alpha^{9/4} + \ldots}{1 + 2\alpha + 2\alpha^4 + \ldots}\right)^4, \ \alpha = e^{\pi i\tau}, \ \tau = \frac{2ir}{h(r)}. \tag{2.2}$$

Поэтому, как нетрудно доказать, формула Шварца в каждом прямоугольнике Π_{lr}, лежащем в квадрате K_r, имеет вид

$$\varphi(z) = \int_{\partial\Pi_{lr}} \operatorname{Re}\varphi(\zeta) K_l(\zeta, z)\, d\zeta + ic_\varphi(r). \tag{2.3}$$

В этой формуле ядро $K_l(\zeta, z)$ выписывается следующим образом:

$$K_l(\zeta, z) = \frac{1}{\pi i} \cdot \frac{(f_l(\zeta))^{(1)}}{f_l(\zeta) - f_l(z)},$$

$\partial\Pi_{lr}$ — граница прямоугольника Π_{lr}, $c_\varphi(r)$ — вещественная постоянная, интеграл понимается как особый с особой точкой $\zeta = \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r) + ir$. Граница прямоугольника Π_{lr} состоит из двух горизонтальных стенок $\Gamma_{\text{н}l}$ — нижней и $\Gamma_{\text{в}l}$ — верхней, и двух вертикальных — $\Gamma_{\text{вл}l}$ — левой и $\Gamma_{\text{вп}l}$ — правой. Интегралы вида (2.3) по этим стенкам будем обозначать соответственно через

$$I_{\text{гн}l}(z),\ I_{\text{гв}l}(z),\ I_{\text{вл}l}(z),\ I_{\text{вп}l}(z),\ \hat{I}_{\text{гв}l}(z) = I_{\text{гв}l}(z) + ic_\varphi(r).$$

Оценим в прямоугольнике Π_{lr} интегралы $I_{\text{вл}l}(z)$, $I_{\text{вп}l}(z)$. Функция $U_l(\zeta) = \operatorname{Re}\varphi(\zeta + lh(r))$, $0 < -i\zeta \leqslant r$, продолжается аналитически с помощью формулы

$$U_l(\zeta) = \frac{1}{2}\{\varphi(\zeta + lh(r)) + \overline{\varphi(-\bar{\zeta} + lh(r))}\},$$

в прямоугольники

$$\left\{\zeta : |\operatorname{Re}\zeta| \leqslant \frac{1}{2} r - |l| h(r),\ 0 < \operatorname{Im}\zeta \leqslant r\right\},$$

причем для таких ζ выполняется оценка

$$|U_l(\zeta)| \leqslant M(r, \varphi). \tag{2.4}$$

В силу аналитичности функции $U_l(\zeta)$ для указанных ζ выполняется соотношение, когда $z \in \Pi_{lr}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$, $\hat{\zeta} = \zeta - lh(r)$,

$$I_{\text{вл}l}(z) = \int_{\Omega} U_l(\hat{\zeta}) K_l(\zeta, z)\, d\zeta, \tag{2.5}$$

где контур Ω совпадает с $\Gamma_{\text{вл}l}$, если $\operatorname{Re} z > (l + (1-\delta)/20) h(r)$, и Ω совпадает с $\Gamma_{\text{вл}l}$, деформированным в $(1-\delta)h(r)/20$ — окрестности точки $z_0 = i\operatorname{Im} z + lh(r)$ в дугу $E_l = \{\zeta : \operatorname{Re}\zeta \leqslant lh(r),\ |\zeta - z_0| = (1-\delta)h(r)/20\}$, если $0 \leqslant \operatorname{Re} z - lh(r) \leqslant (1-\delta)h(r)/20$.

Нам понадобится оценка функции $U_l(\hat{\zeta})$ на полуокружности E_l. Будем рассматривать прямоугольники Π_{lr} с $|l| \leqslant -3 + \frac{1}{2} r/h(r)$. Для $z \in \Pi_{lr}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$, полуокружность E_l лежит в квадрате K_r, и потому на ней для $U_l(\hat{\zeta})$ выполняется неравенство (2.4). В дальнейшем будем пользоваться такой леммой.

Лемма 2. *Пусть* $\omega(\zeta)$ — *гармоническая мера дуги сектора* $S=\{\zeta:|\zeta|<\rho,\ 0\leqslant\beta_1<\arg\zeta<\beta_2\leqslant 2\pi\}$ *относительно этого сектора. Для* $\omega(\zeta)$ *выполняется оценка для* $\zeta\in S$

$$\omega(\zeta)\leqslant\frac{4}{\pi}\left|\frac{\zeta}{\rho}\right|^{\pi/(\beta_2-\beta_1)}\left(1-\left|\frac{\zeta}{\rho}\right|^{\pi/(\beta_2-\beta_1)}\right)^{-1}.$$

Доказательство леммы 2 легко следует из явного вида гармонической меры $\omega(\zeta)$ [6, с. 294] и потому приводить его не будем.

По теореме о двух константах [6, с. 296] получаем для $\zeta\in E_l$

$$\ln|U_l(\hat{\zeta})|\leqslant\omega_1(\zeta)\max_{\zeta\in E}\ln|U_l(\hat{\zeta})|+(1-\omega_1(\zeta))\max_{\zeta\in\partial D\searrow E}\ln|U_l(\hat{\zeta})|,$$

где $\omega_1(\zeta)$ — гармоническая мера полуокружности

$$E=\{\zeta:|\zeta-z_0|=h(r),\ \zeta\bar{\in}\Pi_{lr}\}$$

относительно полукруга

$$D=\{\zeta:|\zeta-z_0|<h(r),\ \zeta\bar{\in}\Pi_{lr}.$$

Применяя лемму 2 к функции

$$\omega_1(\zeta-z_0)\ (\rho=h(r),\ \beta_1=\pi/2,\ \beta_2=3\pi/2),$$

получаем для ζ $\zeta\in E_l$, оценку: $\omega_1(\zeta)\leqslant(1-\delta)/10$. Из этой оценки, оценки (2.4) и условия 3 теоремы получаем для $\zeta\in E_l$

$$\ln|U_l(\zeta)|\leqslant\left(\delta+\frac{1-\delta}{10}\right)\ln M(r,\varphi)+\ln B_1. \qquad (2.6)$$

Нам понадобятся следующие две леммы о поведении эллиптических функций Якоби: $\operatorname{sn} z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{dn} z$.

Лемма 3. *Для* z, $0\leqslant\operatorname{Im} z\leqslant r-bh(r)$, $b\geqslant 1$, *выполняются соотношения:*

$$\operatorname{sn}(2Kz/h(r);\ k)=B_1(z)\sin(\pi z/h(r)),$$
$$\operatorname{ch}(2Kz/h(r);\ k)=B_2(z)\cos(\pi z/h(r)),$$
$$\operatorname{dn}(2Kz/h(r);\ k)=B_3(z),$$

где параметры K, k определены в (2.2), функции $B_j(z)$, $j=1$, 2, 3, аналитичны в рассматриваемой полосе и допускают в ней оценки

$$|B_j(z)-1|\leqslant 4\exp(-\pi b). \qquad (2.7)$$

Доказательство леммы 3. Для эллиптического синуса $\operatorname{sn}(2Kz/h(r);\ k)$ справедлива формула [5, с. 205, 216];

$$\operatorname{sn}(2Kz/h(r);k)=\left(\frac{2}{\sqrt{k}}\alpha^{1/4}\prod_{n=1}^{\infty}(1-\alpha^{2n}w^2)\times\right.$$
$$\times(1-\alpha^{2n}w^{-2})\bigg/\prod_{n=1}^{\infty}(1-\alpha^{2n-1}w^2)\times$$
$$\left.\times(1-\alpha^{2n-1}w^{-2})\right)\frac{w-w^{-1}}{2i}=B_1(z)\frac{w-w^{-1}}{2i},$$

в которой $w^2 = e^{2\pi i l/h(r)}$. Из вида функции $B_1(z)$ легко усматриваем в полосе $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$ нужную для нее оценку (2.7). Для остальных функций Якоби утверждение леммы 2 доказывается аналогично.

Лемма 4. *Пусть* $\zeta,\ z \in \Pi_j = \{w : |\operatorname{Re} w - jh(r)| \leqslant h(r)/8,\ 0 \leqslant \operatorname{Im} w \leqslant r - h(r)\}$, $j = l,\ l+1$, *и пусть* $|\zeta - z| \leqslant h(r)/8$, *тогда*

$$c_1 \leqslant |(\zeta - z) K_l(\zeta, z)| \leqslant c_2,$$

$c_q > 0$, $q = 1, 2$ — *абсолютные постоянные.*

Доказательство леммы 4. Из хорошо известных формул [5, с. 220] для эллиптического синуса получаем

$$\operatorname{sn}(\zeta;\ k) - \operatorname{sn}(z;\ k) = 2\operatorname{sn}\left(\frac{\zeta - z}{2};\ k\right)\operatorname{ch}\left(\frac{\zeta + z}{2};\ k\right) \times$$
$$\times \operatorname{dn}\left(\frac{\zeta + z}{2};\ k\right)\Big/\left(1 - k^2 \operatorname{sn}^2\left(\frac{\zeta - z}{2};\ k\right)\operatorname{sn}^2\left(\frac{\zeta + z}{2};\ k\right)\right).$$

С помощью этого соотношения запишем

$$(\zeta - z) K_l(\zeta, z) = \frac{K \cdot (\zeta - z)}{h(r)\operatorname{sn}(K(\zeta - z)/h(r);\ k)} \times$$
$$\times \frac{\operatorname{ch}(K(2\zeta - 2l - 1)/h(r);\ k)}{\operatorname{ch}(K(\zeta + z - 2l - 1)/h(r);\ k)} \times \frac{\operatorname{dn}(K(2\zeta - 2l - 1)/h(r);\ k)}{\operatorname{dn}(K(\zeta + z - 2l - 1)/h(r);\ k)} \times$$
$$\times (1 - k^2 \operatorname{sn}^2(K(\zeta - z)/h(r);\ \ k)\operatorname{sn}^2(K(\zeta + z - 2l - 1)/h(r);\ k)).$$

С помощью леммы 3 нетрудно получить, что для ζ, z, удовлетворяющих условиям леммы 4, каждый множитель из правой части написанного равенства оценивается по модулю снизу и сверху абсолютными положительными постоянными, что и доказывает лемму 4.

Из леммы 4 и неравенства (2.6) для z, удовлетворяющих условию $0 \leqslant \operatorname{Re} z - lh(r) \leqslant (1 - \delta) h(r)/20$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$, получаем оценку

$$\left|\int_{E_l} U_l(\hat{\zeta}) K_l(\zeta, z)\, d\zeta\right| \leqslant \max_{\zeta \in E_l}\left|U_l(\hat{\zeta})\right| \times$$
$$\times \int_{E_l} |(\zeta - z) K_l(\zeta, z)| \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leqslant cB_1\{M(r, \varphi)\}^{\frac{1+9\delta}{10}}.$$

Учитывая эту оценку, условие 3 теоремы, тот факт, что функция $f_l(z)$ из (2.1) осуществляет конформное отображение прямоугольника Π_{lr} так, что левая вертикальная стенка $\Gamma_{\text{вл}l}$ переходит в отрезок $(-1/k, -1)$, а также лемму 3 о поведении эллиптического синуса, легко получаем для

$$z \in \Pi_{lr},\ a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - 8h(r)/(1 - \delta),$$

$$|I_{\text{вл}l}(z)| \leqslant \max_{\zeta \in \Gamma_{\text{вл}l}} |U_l(\hat{\zeta})| \cdot \int_{\Omega} |K_l(\zeta, z)|\,|d\zeta| +$$

$$+ cB_1 (M(r, \varphi))^{\frac{1+9\delta}{10}} \leqslant cB_1 (M(r, \varphi))^{\frac{1+9\delta}{10}} \times$$

$$\times \left\{1 + \int_{-1/k}^{-1} ((x - \operatorname{Re} f_l(z))^2 + (\operatorname{Im} f_l(z))^2 + 1)^{-1/2} dx \leqslant\right.$$

$$\leqslant cB_1 \ln \frac{1}{k} \cdot (M(r, \varphi))^{\frac{1+9\delta}{10}} = q(r). \tag{2.8}$$

Такую же оценку получаем аналогично для интеграла $I_{\text{вп}l}(z)$ Для оценки интеграла $I_{\text{гн}l}(z)$ воспользуемся неравенством для $z \in \Pi_{lr}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$, вытекающим из леммы 3

$$|f_l(z)| \geqslant 1/4 \exp(\pi a / h(r)).$$

Используя это неравенство, условие 2 теоремы и замечая, что функция $f_l(z)$ переводит $\Gamma_{\text{гн}l}$ в отрезок $(-1, 1)$, приходим для $z \in \Pi_{lr}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$, к следующей оценке

$$|I_{\text{гн}l}(z)| \leqslant \max_{\zeta \in \Gamma_{\text{гн}l}} |\operatorname{Re} \varphi(\zeta)| \left|\int_{-1}^{1} ((x - \operatorname{Re} f_l(z))^2 +\right.$$

$$+ (\operatorname{Im} f_l(z))^2)^{-1/2} dx \leqslant cB_1 (|l| + 1)^d. \tag{2.9}$$

Перейдем к исследованию интеграла $I_{\text{гв}l}(z)$. Рассмотрим функцию $\hat{I}_{\text{гв}l}(z)$. Эта функция аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im} z < r$ и для нее выполняется в этой полуплоскости соотношение

$$\hat{I}_{\text{гв}l}(z) = \hat{I}_{\text{гв}l}(z + 2h(r)). \tag{2.10}$$

Запишем формулу Шварца для функции $\varphi(z)$ в соседних прямоугольниках $\Pi_{l-1, r}$, Π_{lr} и сравним значения функций $\hat{I}_{\text{гв}, l-1}(z)$, $\hat{I}_{\text{гв}l}(z)$ на общей части границы этих прямоугольников. В силу оценок (2.8), (2.9) для $z \in \Gamma_{\text{вл}l}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - 8h(r)/(1-\delta)$, имеем

$$|\hat{I}_{\text{гв}l}(z) - \hat{I}_{\text{гв}, l-1}(z)| \leqslant c(|l| + 1)^d q(r). \tag{2.11}$$

Такая же оценка в силу соотношения (2.10) справедлива и для $z \in \Gamma_{\text{вл}, l-2}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - 8h(r)/(1-\delta)$. Проведем оценку функций $\hat{I}_{\text{гв}l}(z)$ на прямых $\operatorname{Im} z = a$, $\operatorname{Im} z = r - 8h(r)/(1-\delta)$. Поскольку на отрезках $\Gamma_{\text{вл}l}$ $\operatorname{Re} \hat{I}_{\text{гв}l}(z) = 0$, то в силу принципа симметрии

$$\hat{I}_{\text{гв}l}(z) = -\overline{\hat{I}_{\text{гв}l}(-\bar{z} + 2lh(r))}, \ z \in \Pi_{lr}. \tag{2.12}$$

Из формулы Шварца для функции $\varphi(z)$ в прямоугольнике Π_{lr} с помощью оценок (2.8), (2.9) получаем для $z \in \Pi_{lr}$, $\operatorname{Im} z = a$,

$$|\hat{I}_{\text{гв}l}(z)| \leqslant |I_{\text{вл}l}(z)| + |I_{\text{вп}l}(z)| +$$

$$+ |I_{\text{гн}l}(z)| + |\varphi(z)| \leqslant c(|l| + 1)^d q(r). \tag{2.13}$$

Учитывая соотношения (2.10), (2.12), видим, что это неравенство сохраняется для всех z прямой $\operatorname{Im} z = a$. Оценим интеграл $I_{\text{гв}l}(z)$ в полуплоскости $\operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$. Вспомним, что $I_{\text{гв}l}(z)$ — особый интеграл с особой точкой $ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)$. Перепишем его в виде

$$I_{\text{гв}l}(z) = \int_{\Gamma_{\text{гв}l}} \left\{\operatorname{Re}\varphi(\zeta) - \operatorname{Re}\varphi\left(ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)\right)\right\} \times$$

$$\times K_l(\zeta, z)\, d\zeta + \operatorname{Re}\varphi\left(ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)\right) \int_{\Gamma_{\text{гв}l}} K_l(\zeta, z)\, d\zeta =$$

$$= I_{1l}(z) + \operatorname{Re}\varphi\left(ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)\right) I_{2l}(z). \tag{2.14}$$

Интеграл $I_{1l}(z)$ не является особым и его оценим следующим образом:

$$|I_{1l}(z)| \leqslant \max_{\zeta \in \Gamma_{\text{гв}l}} \left| \frac{\operatorname{Re}\varphi(\zeta) - \operatorname{Re}\varphi\left(ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)\right)}{\zeta - ir - \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)} \right| \times$$

$$\times \left\{ \int_{\Gamma_{\text{гв}l}} \left| \left| \zeta - ir - \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r) \right| \cdot K_l(\zeta, z) \right| |d\zeta| \right\}. \tag{2.15}$$

Обозначим интеграл в фигурных скобках через $I_{3l}(z)$. Сделаем в нем замену $x = f_l(\zeta)$. Эта замена, если вспомнить, что отрезок $\left(ir + lh(r),\ ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r)\right)$ при отображении (2.1) переходит в полупрямую $\left(-\infty, -\frac{1}{k}\right)$, а отрезок $(ir + (l+1) h(r),\ ir + \left(l + \frac{1}{2}\right) h(r))$ — в полупрямую $\left(\frac{1}{k}, \infty\right)$, позволяет переписать интеграл $I_{3l}(z)$ в виде

$$I_{3l}(z) = \frac{1}{\pi} \int_{1/k}^{\infty} \frac{h(r)}{2K} \left(\int_x^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2 - 1)(k^2 u^2 - 1)}} \right) \times$$

$$\times (|x - f_l(z)|^{-1} + |x + f_l(z)|^{-1})\, dx.$$

Из леммы 3 на прямой $\operatorname{Im} z = r - h(r)$ следует оценка

$$|\operatorname{sn}(2Kz/h(r);\ k)| \leqslant (k(1 + c))^{-1}. \tag{2.16}$$

Применим ее для оценивания интеграла $I_{3l}(z)$. На прямой $\operatorname{Im} z = r - h(r)$ легко получаем

$$I_{3l}(z) \leqslant \frac{ch(r)}{k} \int_{1/k}^{\infty} \frac{dx}{x(x - 1/(k(1 + c)))} \leqslant ch(r).$$

Используя это неравенство, из соотношения (2.15) нетрудно вывести оценку

$$|I_{1l}(z)| \leqslant cM(r+2h(r),\ \varphi),\ \operatorname{Im} z = r - h(r). \tag{2.17}$$

Аналогично подсчету интеграла $I_{3l}(z)$ особый интеграл $I_{2l}(z)$ запишем в виде

$$I_{2l}(z) = \frac{2}{\pi i}\int\limits_{1/k}^{\infty} \frac{f_l(z)}{x^2 - f_l^2(z)}\,dx.$$

Используя неравенство (2.16), выводим отсюда

$$|I_{2l}(z)| \leqslant c,\ \operatorname{Im} z = r - h(r). \tag{2.18}$$

Из соотношения (2.14) с помощью неравенств (2.17), (2.18) приходим к оценке на прямой $\operatorname{Im} z = r - h(r)$

$$|I_{\text{гв}l}(z)| \leqslant cM(r+2h(r),\ \varphi). \tag{2.19}$$

Вернемся к формуле Шварца для $\varphi(z)$ в прямоугольнике Π_{lr}. Положим в ней $z = ia + \left(l + \frac{1}{2}\right)h(r)$ и воспользуемся неравенствами (2.8), (2.9), (2.19). Из них следует, что $|c_\varphi(r)| \leqslant c(|l| + 1)^d q(r) + cM(r+2h(r),\ \varphi)$. Таким образом, в полосе $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$ имеем оценку

$$|\hat{I}_{\text{гв}l}(z)| \leqslant c(|l|+1)^d q(r) + cM(r+2h(r),\ \varphi). \tag{2.20}$$

Из нее для z, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - h(r)$, следует неравенство

$$|\hat{I}_{\text{гв},l-1}(z) - \hat{I}_{\text{гв}l}(z)| \leqslant |\hat{I}_{\text{гв},l-1}(z)| + |\hat{I}_{\text{гв}l}(z)| \leqslant \\ \leqslant c(|l|+1)^d q(r) + cM(r+2h(r),\ \varphi). \tag{2.21}$$

Из оценки (2.13) на всей прямой $\operatorname{Im} z = a$ получаем аналогично

$$|\hat{I}_{\text{гв},l-1}(z) - \hat{I}_{\text{гв}l}(z)| \leqslant c(|l|+1)^d q(r). \tag{2.22}$$

К функции $g_l(z) = \hat{I}_{\text{гв},l-1}(z) - \hat{I}_{\text{гв}l}(z)$ применим в прямоугольнике $\Pi_{lr}(a,\delta) = \{z : (l-2)h(r) < \operatorname{Re} z < lh(r),\ a < \operatorname{Im} z < r - 8h(r)/(1-\delta)\}$ теорему о двух константах. Из нее следует неравенство для $z \in \Pi_{lr}(a,\ \delta)$

$$\ln|g_l(z)| \leqslant \omega_2(z)\max_{z_1\in H_1}\ln|g_l(z_1)| + \\ + (1-\omega_2(z))\max_{z_1\in H_2}\ln|g_l(z_1)|, \tag{2.23}$$

где H_1 — верхняя горизонтальная стенка прямоугольника $\Pi_{lr}(a,\ \delta)$, H_2 — остальная часть границы, $\omega_2(z)$ — гармоническая мера H_1 относительно всей области $\Pi_{lr}(a,\ \delta)$. Для оценки гармонической меры $\omega_2(z)$ применим следующую лемму.

Лемма 5. *Пусть* $\omega(z)$ — *гармоническая мера верхней стенки полуполосы* $\Pi(\beta,\ b) = \{z : |\operatorname{Re} z| < \beta,\ \ \operatorname{Im} z < b\}$, $\beta > 0$, $b > 0$, *относительно всей полуполосы* $\Pi(\beta, b)$. *Для* $\omega(z)$ *выполняется оценка:* $z \in \Pi(\beta, b)$, $\omega(z) \leqslant \frac{4}{\pi} e^{\pi(\operatorname{Im} z - b)/(2\beta)}(1 - e^{\pi(\operatorname{Im} z - b)/(2\beta)})^{-1}$.

Доказательство леммы 5 легко следует из явного вида гармонической меры $\omega(z)$ [6, с. 294] и потому приводить его не будем.

Применим лемму 5 для оценки гармонической меры $\omega_3(z)$ верхней стенки полуполосы $\{z : |\operatorname{Re} z - (l-1)h(r)| < h(r), \operatorname{Im} z < r - 8h(r)/(1-\delta)\}$ относительно всей этой полуполосы. Получаем оценку для z из этой полуполосы, $\operatorname{Im} z \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$, $\omega_3(z) \leqslant 4\exp\{\pi(\operatorname{Im} z - r)/(2h(r)) + 4\pi/(1-\delta)\} = \hat{\omega}_3(z)$. Поскольку имеет место простое неравенство $\omega_2(z) \leqslant \omega_3(z) \leqslant \hat{\omega}_3(z)$ для $z \in \Pi_{lr}(a, \delta)$, $\operatorname{Im} z \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$, то применим его и неравенства (2.21), (2.22), (2.11) к соотношению (2.23). Приходим к выводу, что для $z \in \Pi_{lr}(a, \delta)$, $\operatorname{Im} z \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$

$$\ln|g_l(z)| \leqslant c + \ln\{(|l|+1)^d q(r)\} + \hat{\omega}_3(z) \times$$
$$\times \ln M(r + 2h(r), \varphi) = c + \ln\{(|l|+1)^d q(r)\} + Q(r, z). \quad (2.24)$$

Вспомним, что для функции $\hat{I}_{\text{гв}l}(z)$ выполняется соотношение (2.12). Из него и из оценки (2.24) следует для $z \in \Pi_{l-1,r}$, $a \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$, $|\hat{I}_{\text{гв},l-1}(z) + \hat{I}_{\text{гв}l}(-\bar{z} + 2lh(r))| \leqslant c \times (|l|+1)^d q(r) \exp\{Q(r, z)\}$, что с учетом неравенств (2.8), (2.9) дает для тех же z $|\varphi(z) + \varphi(-\bar{z} + 2lh(r))| \leqslant c(|l|+1)^d q(r) \exp \times \{Q(r, z)\}$. Отсюда следует нужное неравенство для r_1, $a \leqslant r_1 \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$,

$$\left| \max_{z \in \Pi_{0r_1}} |\varphi(z)| - M(r_1, \varphi) \right| \leqslant$$
$$\leqslant c(r+1)^{d+1}(h(r))^{-1} q(r) \exp\{Q(r, ir_1)\}. \quad (2.25)$$

Рассмотрим функцию $\varphi(z)$ в прямоугольнике Π_{0r}. Для функции $\varphi(z)$ выполняется условие 1 теоремы 6. Учитывая неравенства (2.8), (2.9), получаем для $z \in \partial\Pi_{2r}(a, \delta)$, $\operatorname{Re} z = 0$, $|\hat{I}_{\text{гв}0}(z)| \leqslant B_1(r+1)^d + cq(r)$. В силу (2.10) такая же оценка имеет место для $z \in \partial\Pi_{2r}(a, \delta)$, $\operatorname{Re} z = 2h(r)$. На отрезках $z \in \partial\Pi_{2r}(a, \delta)$, $\operatorname{Im} z = a$, $\operatorname{Im} z = r - 8h(r)/(1-\delta)$, справедливы оценки (2.13), (2.20) с $l = 0$. В прямоугольнике $\Pi_{2r}(a, \delta)$ применим к функции $\hat{I}_{\text{гв}0}(z)$ теорему о двух константах точно так же, как это делалось для функции $g_l(z)$ в области $\Pi_{lr}(a, \delta)$. Дословно повторяя рассуждения, приведенные для получения неравенства (2.24), приходим к следующей оценке при $z \in \Pi_{2r}(a, \delta)$, $\operatorname{Im} z \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$, $|\hat{I}_{\text{гв}0}(z)| \leqslant c(r+1)^d q(r) \exp\{Q(r, z)\}$. Вспоминая оценки (2.8), (2.9) для $I_{\text{вл}0}(z)$, $I_{\text{вп}0}(z)$, $I_{\text{гн}0}(z)$ получаем из формулы Шварца

$\max\limits_{z\in\Pi_{0r_1}} |\varphi(z)| \leqslant c(r+1)^d q(r)\exp\{Q(r, ir_1)\}$, $a \leqslant r_1 \leqslant r - 9h(r)/(1 - \delta)$. Тогда из соотношения (2.25) приходим к выводу, что для r_1, $a \leqslant r_1 \leqslant r - 9h(r)/(1-\delta)$,

$$M(r_1, \varphi) \leqslant c(r+1)^{d+1}(h(r))^{-1} q(r)\exp\{Q(r, ir_1)\}. \qquad (2.26)$$

Положим в этом неравенстве $r_1 = r - 20h(r)/(1-\delta)$. Поскольку для величины $\hat{\omega}_3(z)$ выполняется неравенство $\hat{\omega}_3(r - 20\,h(r)/(1 - \delta)) \leqslant (1-\delta)/10$, то для $Q(r, r - 20h(r)/(1-\delta))$ имеем оценку $Q(r, r-20h(r)/(1-\delta)) \leqslant \frac{1-\delta}{10}\ln M(r+2h(r), \varphi)$. Применим эту оценку к неравенству (2.26). Вспоминая также определение $q(r)$ (2.8) и учитывая соотношение (10), получаем

$$\ln M(r - 20h(r)/(1-\delta), \varphi) \leqslant c + \ln B_1 + 2\ln\frac{1}{\delta} +$$
$$+ (d+4)\ln(r+1) + 2\ln\ln M(r, \varphi) + \left(\delta + \frac{1-\delta}{5}\right)\ln M(r +$$
$$+ 2h(r), \varphi) \leqslant c + \ln B_1 + 2\ln\frac{1}{\delta} + (d+4)\ln(r+1) +$$
$$+ \left(\delta + \frac{1-\delta}{4}\right)\ln M(r + 2h(r), \varphi). \qquad (2.27)$$

Сейчас понадобится такой вариант леммы Неванлинны — Бореля [7, с. 17].

Лемма 6. *Пусть $f(x) \geqslant 1$ — неубывающая, непрерывная на полуоси $x \geqslant x_0 > 0$ функция с $f(+\infty) = +\infty$. Вне некоторого множества интервалов полуоси $x \geqslant x_0$ конечной логарифмической меры имеет место неравенство*

$$|f(xe^\tau) - f(x)| < 1, \qquad (2.28)$$

если только $|\tau| \leqslant (f(x))^{-2}$. Логарифмическая мера исключительного множества E удовлетворяет неравенству

$$\int\limits_E \frac{dx}{x} \leqslant 3(f(x_0))^{-2} + 2\int\limits_{f(x_0)}^{\infty}\frac{dt}{t^2}. \qquad (2.29)$$

Применим эту лемму к функции $f(x) = \{\ln M(x, \varphi)\}^{1/3}$, продолженной для $x \geqslant R$ непрерывно с сохранением свойства неубывания так, что $f(x) \to +\infty$, $x \to +\infty$. Сделаем, не нарушающие общности, предположения. В качестве $r \geqslant 1$ возьмем точку отрезка $[r_0, R/e]$, $f(r_0) = 4$, в которой имеет место неравенство (2.28). Такая точка найдется в каждом отрезке $[T, Te]$, $r_0 < T < R/e$, ибо в противном случае в силу соотношения (2.29), $x_0 = T$, приходим к противоречию $1 = \int\limits_T^{Te}\frac{dx}{x} \leqslant 3\cdot 4^{-2} + 2\int\limits_4^\infty \frac{dt}{t^2} < 1$. Считаем также, что в этой точке справедлива оценка (10). В качестве параметра τ возьмем величину $\pm\ln(1 - 20h(r)/((1-\delta)r)$, для которой в силу

(10) выполняется оценка $|\tau| \leqslant 40h(r)/((1-\delta)r) \leqslant \{\ln M(r, \varphi)\}^{-2/3} = (f(r))^{-2}$. В силу леммы 6 с учетом неравенства (10) имеем оценки

$$\ln M(r - 20h(r)/(1-\delta), \varphi) \geqslant \{(\ln M(r, \varphi))^{1/3} - 1\}^3 \geqslant \frac{9+\delta}{10} \ln M(r, \varphi),$$

и аналогично

$$\ln M(r + 2h(r), \varphi) \leqslant \frac{11-\delta}{10} \ln M(r, \varphi).$$

Применяя эти оценки в указанной выше точке z к неравенству (2.27), приходим в этой точке с учетом неравенства (10) к соотношению

$$\frac{1-\delta}{2} \ln M(r, \varphi) \leqslant c + \ln B_1 + 2 \ln \frac{1}{\delta} + (d+4) \ln (r+1),$$

откуда легко вытекает утверждение теоремы 6. ■

§ 3. Вывод достаточности условий теоремы 1 из теоремы 5. Нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 7. *Пусть $\sigma(x)$ — неубывающая функция о. в. на оси $(-\infty, \infty)$. Обозначим через $I(a, b, t)$, $-\infty \leqslant a < b < \infty$, интеграл*

$$I(a, b, t) = \int_a^b \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \frac{1+x^2}{x^2} d\sigma(x).$$

Интеграл $I(0, b, t)$ сходится абсолютно и равномерно на любом компакте t-плоскости и, следовательно, является целой функцией. Справедлива оценка для $t \in \boldsymbol{C}^1$

$$|I(0, b, t)| \leqslant 8\sigma(b)(b+1)(1+|t|^2)(1+e^{-b\operatorname{Im} t}). \qquad (3.1)$$

Аналогичная оценка верна для интеграла $I(-b, 0, t)$.

Интеграл $I(-\infty, b, t)$, $b > 0$, сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, лежащем в полуплоскости $\operatorname{Im} t \leqslant 0$, следовательно, является аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Im} t < 0$, непрерывной вплоть до границы. При этом для него при $\operatorname{Im} t \leqslant 0$ выполняется оценка (3.1).

Оценка (3.1) близка к оценкам в [1, с. 187—188] и получается аналогично. Поэтому доказательство леммы 7 не приводим.

Лемма 8. *Пусть $F(x)$ — б. д. ф. р., для которой в представлении (1) $\beta = 0$, со спектральной функцией Леви — Хинчина $\sigma(x)$ спектр которой $S(\sigma) \subseteq (-\infty, b]$, $1 \leqslant b < \infty$. Тогда для $x \geqslant L = 16\sigma(+\infty)(b+1)(T_1+2)\exp(bT_1)$, $T_1 \geqslant 1$, выполняется неравенство*

$$1 - F(x) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2} T_1 x\right). \qquad (3.2)$$

Доказательство леммы 8. Х. ф. $\varphi(t; F)$ ф. р. $F(x)$ в силу леммы 7 является аналитической в полуплоскости $\operatorname{Im} t < 0$ и непрерывной вплоть до границы. Аналитическое продолжение х. ф. $\varphi(t; F)$ в нижнюю полуплоскость осуществляется, как это следует из теоремы 2.2.3 [1, с. 38—39], с помощью интеграла которым эта функция задается на вещественной оси. Поэтому, для $y>0$ имеем

$$\varphi(-iy;\ F)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{yu}dF(u). \tag{3.3}$$

Поскольку для $y>0$ получаем неравенство

$$\int\limits_{0}^{\infty} e^{yu}dF(u)\geqslant\int\limits_{x}^{\infty} e^{yu}dF(u)\geqslant e^{yx}(1-F(x)),\ \forall x>0,$$

то из (3.3) легко следует оценка

$$1-F(x)\leqslant e^{-yx}\varphi(-iy;\ F),\ \forall x>0. \tag{3.4}$$

Выбирая в (3.4) $y=T_1$ с помощью леммы 7 имеем для $x\geqslant L$

$$e^{-T_1x}\varphi(-iT_1;\ F)\leqslant\exp\{8\sigma(+\infty)(b+1)\times$$
$$\times(T_1^2+1)(e^{bT_1}+1)-T_1x\}\exp\left(-\frac{1}{2}T_1x\right). \tag{3.5}$$

Неравенство (3.5) приводит к заключению леммы 8.

В этом параграфе положительные постоянные, зависящие только от ф. р. $\Lambda(x)$, $F_j(x)$, $j=1,\ 2$, из (6), от параметра r из (2), независимо от их величины будем обозначать одной буквой B. Зададимся числом $R\geqslant 10$ и разобьем спектр $S(G)$ функции Леви — Хинчина $G(x)$ на три непересекающихся множества $S_j(G)$, $j=1,\ 2,\ 3$. В $S_2(G)$ входят точки $\mu_{n1}\geqslant 1$, в которых выполняется неравенство

$$G(\mu_{n1}+0)-G(\mu_{n1})\leqslant\exp(-R\mu_{n1}). \tag{3.6}$$

Чтобы определить $S_1(G)$, $S_3(G)$ заметим следующее. Множество

$$(S(G)\cap[1,\ \infty))\diagdown S_2(G)=\{\nu_n\}_{n=1}^{N},$$

$\nu_n\uparrow\infty$, $N\leqslant\infty$, в силу условий теоремы 1 или конечно, или содержит бесконечное множество точек ν_q таких, что $\nu_{q+1}>\exp\times\times(4R\nu_q)$. В первом случае полагаем $S_1(G)=S(G)\diagdown S_2(G)$, $S_3(G)==\varnothing$. Во втором случае выберем одну из указанных точек ν_q и положим $S_3(G)=\{\nu_n\}_{n=q+1}^{\infty}$, $S_1(G)=S(G)\diagdown(S_2(G)\cup S_3(G))$. Поскольку проверка условия a) теоремы 5 проводится в обоих случаях аналогично, то остановимся на втором, несколько более сложном. Обозначим через $\Lambda_j(x)$, $j=1,\ 2,\ 3$ — б. д. ф. р. со спектральными функциями Леви — Хинчина $G_j(x)$, $j=1,\ 2,\ 3$, такими, что $S(G_j)=S_j(G)$, величины скачков функций $G_j(x)$ совпадают с величинами скачков функции $G(x)$.

Легко видеть, что х. ф. $\varphi(t;\ \Lambda_2)$ аналитически продолжается в полосу $|\operatorname{Im} t|<R$ и выполняется оценка $\varphi\left(-\frac{1}{2}iR;\ \Lambda_2\right)\leqslant 10$. Поскольку для $\forall x>0$ имеет место неравенство [1, с. 38]

$$e^{Rx/2}(1-\Lambda_2(x))\leqslant\varphi\left(-\frac{1}{2}iR;\ \Lambda_2\right)\leqslant 10,$$

то отсюда для $x \geqslant 12/R$ получаем нужную оценку

$$1 - \Lambda_2(x) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{4} Rx\right). \tag{3.7}$$

Эта оценка, как легко видеть, сохраняется и для $0 < x \leqslant 12/R$. В силу леммы 8 $(F(x) = \Lambda_1(x),\ b = \nu_q)$ для $x \geqslant 64G(+\infty)\nu_q R \times \exp(R\nu_q)$ имеем неравенство

$$1 - \Lambda_1(x) \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2} Rx\right). \tag{3.8}$$

Кроме того, поскольку для функции $G(x)$ выполняется условие (2) для ф. р. $\Lambda_3(x)$, нетрудно получить оценку

$$\mathrm{Var}(E - \Lambda_3) \leqslant B \exp(-r\nu_{q+1}). \tag{3.9}$$

Для $x > 0$ имеет место простое неравенство

$$1 - \Lambda(x) \leqslant \sum_{j=1}^{3}\left(1 - \Lambda_j\left(\frac{1}{4} x\right)\right),$$

из которого с помощью (3.7)—(3.9) получаем нужную оценку

$$1 - \Lambda(x) \leqslant 2\exp\left(-\frac{1}{16} Rx\right) + B\exp(-r\nu_{q+1}), \tag{3.10}$$

$x \geqslant B\exp(2R\nu_q)$. Для компонент $F_j(x)$, $j = 1, 2$, ф. р. $\Lambda(x)$ справедливы оценки [1, с. 120]: $x > 0$,

$$1 - F_j(x) \leqslant 2(1 - \Lambda(x - m_k)), \tag{3.11}$$

$$F_j(-x) \leqslant 2\Lambda(-x - m_k), \tag{3.12}$$

$k = 1, 2$, $k \neq j$, m_j — медианы ф. р. $F_j(x)$. Из (3.11) и неравенства (3.10) получаем для x, $B\exp(2R\nu_q) \leqslant x \leqslant \nu_{q+1}/(Rr)$,

$$1 - F_j(x) \leqslant B\exp(-1/16Rx). \tag{3.13}$$

Оценка (2) для функции $G(x)$ с учетом теоремы 2.2.4 [1, с. 41] позволяет утверждать, что оценка (5) имеет место с $r_1 = \frac{1}{2} r$ для ф. р. $\Lambda(x)$. Тогда из этой оценки и оценок (3.11), (3.12) следуют соотношения

$$1 - F_j(x) \leqslant B\exp\left(-\frac{1}{2} rx\right),\ x > \nu_{q+1}/(Rr), \tag{3.14}$$

$$F_j(-x) \leqslant B\exp\left(-\frac{1}{2} rx\right),\ x > 0. \tag{3.15}$$

Возьмем в качестве $T = R$, $N_T = \nu_q$, $M_T = \exp(2R\nu_q + B)$ и положим

$$F_{jT}(x) = \begin{cases} F_j(x), & x \leqslant M_T, \\ 1, & x > M_T, \end{cases}$$

$$\Lambda_T(x) = \Lambda_1(x),\ Q_T(x) = \Lambda_2(x).$$

Б. д. ф. р. $\Lambda_T(x)$, очевидно, удовлетворяют условиям а) теоремы 5, функции $Q_T(x)$ удовлетворяют неравенству (7) в силу оценок (3.7) и для них, очевидно, выполняется соотношение (8). Из оценок (3.13), (3.14) следует, что ф. р. $F_{jT}(x)$ удовлетворяют соотношению (8). Из тех же оценок и оценки (3.9) следует для построенных функций $\Lambda_T(x)$, $F_{jT}(x)$, $j=1,2$, $Q_T(x)$ соотношение (9). Из построения функций $\Lambda_T(x)$, $F_{jT}(x)$, $j=1, 2$, $Q_T(x)$ видим, что для них выполняется оценка (5) с постоянной $r_1 = \frac{1}{2} r$ и одной постоянной B. Таким образом, из условий теоремы 1 следует выполнение условия а) теоремы 5.

Аналогично показывается, что условия теоремы 1 влекут выполнение условия б) теоремы 5. ■

На этом заканчивается изложение первой части работы. Вторая ее часть будет посвящена доказательству теоремы 5.

Список литературы: 1. *Линник Ю. В., Островский И. В.* Разложения случайных величин и векторов. — М.: Наука, 1972.—480 с. 2. *Линник Ю. В.* Некоторые вопросы теории целых функций, возникающие из теории вероятностей. — В кн.: Исследования по совр. пробл. теории функций комплексного переменного.— М.: Физматгиз, 1961, с. 49—57. 3. *Фрынтов А. Е., Чистяков Г. П.* О безгранично делимых распределениях класса I_0. — Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1979, вып. 32, с. 91—97. 4. *Чистяков Г. П.* О факторизации распределений класса **L**. — В кн.: III Междунар. Вильнюс. конф. по теории вороятности и мат. статистике: Тез. докл., Вильнюс, 1981, **2**, с. 244—245. 5. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. — М.: Наука, 1968.—648 с. 6. *Евграфов М. А.* Аналитические функции. — М.: Наука, 1965.—424 с. 7. *Стрелиц Ш. И.* Асимптотические свойства аналитических решений дифференциальных уравнений. — Вильнюс: Минтис, 1972.—468 с.

Поступила в редколлегию 18.02.85.