

Вісник Харківського університету

Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

УДК 517.956

№ 444, 1999, с.111-118

## О квазилинейном дифференциальном уравнении с сингулярностью типа Кронекера

П.С.Кабалянц, А.Г.Руткас

*Харьковский государственный автомобильный  
технический университет (ХАДИ)*

*Харьковский государственный университет*

В банаховом пространстве рассматривается квазилинейное дифференциально-алгебраическое уравнение с сингулярным операторным пучком, у которого сингулярную пару подпространств образуют аннулятор пучка и аннулятор сопряженного пучка. Получены достаточные условия существования а также условия существования и единственности решения задачи Коши для класса пучков операторов. Ограничения формулируются в терминах регулярной и сингулярной проекций нелинейной вектор-функции. Приводится пример сингулярной смешанной задачи для уравнения в частных производных.

Для неявного дифференциального уравнения с нелинейной правой частью.

$$\frac{d(Au(t))}{dt} + Bu(t) = f(t, u), 0 \leq t \leq \tau, \quad (1)$$

в банаховом пространстве рассматривается задача Коши с начальным условием

$$u(0) = u_0. \quad (2)$$

Здесь  $A, B$  - линейные замкнутые операторы, действующие из банахова пространства  $X$  в банахово пространство  $Y$ .

Непрерывная вектор-функция  $u(t) \in C([0, \tau_0], X)$  со значениями из  $D_A \cap D_B$  называется решением уравнения (1) на интервале  $0 \leq t \leq \tau_0$ , если  $Au(t) \in C^1([0, \tau_0], Y)$  и функция  $u(t)$  удовлетворяет уравнению (1) при всех  $t \in [0, \tau_0]$ .

Пучок  $\lambda A + B$  называется регулярным, если существует точка  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ , в которой  $(\lambda_0 A + B)^{-1} \in L(Y, X)$ . Если такой точки  $\lambda_0$  не существует, то пучок  $\lambda A + B$  называется сингулярным. Неявное квазилинейное уравнение с регулярным характеристическим пучком  $\lambda A + B$  изучалось в [2-5].

Мы будем рассматривать сингулярный пучок, для которого существуют разложения пространств

$$X = X_s \dot{+} X_r, \quad Y = Y_s \dot{+} Y_r, \quad (3)$$

такие, что: 1)  $X_s = \text{Ker} A \cap \text{Ker} B$ ;  
 2) пара замкнутых подпространств  $(X_r, Y_r)$  инвариантна относительно пучка  $\lambda A + B$ :  $A(D_A \cap X_r) \subset Y_r$ ,  $B(D_B \cap X_r) \subset Y_r$ ;  
 3) пучок  $\lambda A_r + B_r$ , индуцированный в подпространствах  $X_r, Y_r$ , является регулярным. Мы предполагаем, что  $D_A \subset D_B$  и регулярная компонента пучка  $\lambda A_r + B_r$  обладает ограниченным обратным оператором  $A_r^{-1} \in L(Y_r, X_r)$ . Отсюда следует, что  $B_r A_r^{-1} \in L(Y_r)$ . Пучок  $\lambda A_s + B_s = \lambda A + B|_{X_s}$ , индуцированный в подпространствах  $X_s, Y_s$ , является нулевым.

Введем две пары параллельных проекторов, отвечающих разложениям (3):

$$\begin{aligned} S : X &\longrightarrow X_s, P : X \longrightarrow X_r, P + S = I_X, P^2 = P; \\ \tilde{S} : Y &\longrightarrow Y_s, \tilde{P} : Y \longrightarrow Y_r, \tilde{P} + \tilde{S} = I_Y, \tilde{P}^2 = \tilde{P}. \end{aligned}$$

Заметим, что в случае гильбертовых пространств  $X, Y$  в качестве подпространства  $Y_s$  следует выбирать  $Y_s = \text{Ker} A^* \cap \text{Ker} B^*$  и в качестве  $S, P, \tilde{S}, \tilde{P}$  - ортогональные проекторы.

Обозначим через  $B(X, \xi, r) = \{x \in X : \|x - \xi\| \leq r\}$  замкнутый шар в банаховом пространстве  $X$  с центром в точке  $\xi \in X$ .

**Теорема 1.** *Предположим, что  $\dim Y_s \leq \dim X_s < \infty$  и вектор  $u_0 \in D_A \cap D_B$  удовлетворяет условию  $\tilde{S}f(0, u_0) = 0$ .*

*Пусть на множестве  $[0, \tau] \times B(X, u_0, r)$  функция  $f(t, u)$  непрерывна, компонента  $\tilde{P}f$  вектор-функции  $f(t, u)$  удовлетворяет условию Липшица*

$$\|\tilde{P}f(t, u^1) - \tilde{P}f(t, u^2)\| \leq a\|u^1 - u^2\| \quad (a = \text{const}), \quad (4)$$

*компонента  $\tilde{S}f$  имеет непрерывную производную Фреше  $\frac{\partial \tilde{S}f(t, u)}{\partial u}$ .*

*Если  $\text{rang} \frac{\partial \tilde{S}f}{\partial S u}(0, u_0) = \dim Y_s$ , то задача (1), (2) имеет решение  $u(t)$  на нетривиальном интервале  $[0, \tau_0]$ .*

*(Решение единственно, если  $\dim X_s = \dim Y_s$ .)*

**Доказательство.** Обозначим  $u_s = Su$ ,  $u_r = Pu$ . Уравнение (1) эквивалентно двум уравнениям:

$$\tilde{S}f(t, u_s + u_r) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d(A_r u_r(t))}{dt} + B_r u_r(t) = \tilde{P}f(t, u_s + u_r). \quad (6)$$

Из условий теоремы следует, что существует подпространство  $X_1 \subset X_s$  и проектор  $S_1 : X \longrightarrow X_1$  такие, что  $\dim X_1 = \dim Y_s$ ,  $S_1 S = S_1$  и линейный оператор  $\frac{\partial \tilde{S}f}{\partial S_1 u}(0, u_0) : X_1 \longrightarrow Y_s$  имеет обратный. Обозначим через  $S_2 = S - S_1$  проектор, через  $X_2 = S_2(X)$  соответствующее подпространство в  $X_s$ , через  $u_k = S_k u_s$  - проекции вектора  $u_s$ ,  $k = 1, 2$ .

(Подставив в уравнение (5)  $u_s = u_1 + u_2$  и применяя теорему о неявной

функции, находим функцию  $u_1 = \psi(t, u_2, u_r)$ . Она определена и имеет непрерывную производную Фреше  $\frac{\partial \psi}{\partial u_r}$  на множестве

$$\Omega_1 = \{(t, u_2 + u_r)\} = [0, \tau_1] \times B(X_2 + X_r, (S_2 + P)u_0, r_1), \quad r_1 \leq r, \quad \tau_1 \leq \tau.$$

Выполним замену  $u_r = A_r^{-1}v$  и подставим  $u_1 = \psi(t, u_2, u_r)$  в уравнение (6). Получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} + B_r A_r^{-1}v = \varphi(t, u_2, v), \quad (7)$$

где  $\varphi(t, u_2, v) = \tilde{P}f(t, u)$ ,  $u = \psi(t, u_2 + A_r^{-1}v) + u_2 + A_r^{-1}v$ .

Введем множество

$$G_1 = [0, \tau_1] \times \{u_2 \in X_2 : \|u_2 - S_2 u_0\| \leq \frac{1}{2} r_1\} \times \\ \times \{v \in Y_r : \|v - A_r P u_0\| \leq \frac{1}{2 \|A_r^{-1}\|} r_1\}.$$

Для любых  $(t, u_2, v^i) \in \Omega_1 (i = 1, 2)$  имеем с учетом (4):

$$\|\varphi(t, u_2, v^1) - \varphi(t, u_2, v^2)\| = \|\tilde{P}f(t, u^1) - \tilde{P}f(t, u^2)\| \leq a \|u^1 - u^2\| \leq \\ (8) \quad \leq a (\|\psi(t, u_2 + A_r^{-1}v^1) - \psi(t, u_2 + A_r^{-1}v^2)\| + \|A_r^{-1}(v^1 - v^2)\|).$$

Вследствие непрерывности производной  $\frac{\partial \psi}{\partial u_r}$  в  $\Omega_1$  существует подмножество

$$\Omega_2 = [0, \tau_2] \times B(X_2 + X_r, (S_2 + P)u_0, r_2), \quad r_2 \leq r_1, \quad \tau_2 \leq \tau_1,$$

на котором функция  $\psi(t, u_2, u_r)$  удовлетворяет условию Липшица по переменной  $u_r$ :

$$\|\psi(t, u_2 + u_r^1) - \psi(t, u_2 + u_r^2)\| \leq b \|u_r^1 - u_r^2\|, \quad \forall (t, u_2, u_r^i) \in \Omega_2.$$

Следовательно, функция  $\varphi(t, u_2, v)$  удовлетворяет условию Липшица по переменной  $v$  на множестве

$$G_2 = [0, \tau_2] \times \{u_2 \in X_2 : \|u_2 - S_2 u_0\| \leq \frac{1}{2} r_1\} \times \{v \in Y_r : \|v - A_r P u_0\| \leq \frac{r_2}{2 \|A_r^{-1}\|}\}.$$

Применяем теорему типа Пикара к уравнению (7) с начальным условием  $v(0) = A_r^{-1} P u_0$ . Получаем непрерывно дифференцируемое решение  $v(t, u_2)$  на некотором множестве

$$\Omega_3 = \{(t, u_2) : t \in [0, \tau_0], \|u_2 - S_2 u_0\| \leq r_3, u_2 \in X_2\}.$$

Оно определяет непрерывно дифференцируемую функцию

$$u_r(t) = A_r^{-1}v(t, u_2),$$

являющуюся компонентой искомого решения  $u$ . Компонента  $u_2$  выбирается произвольно из класса  $C([0, \tau_0]; X_2)$  с начальным условием  $u_2(0) = S_2 u_0$ . Окончательно получаем, что  $u = \psi(t, u_2 + u_r) + u_2 + u_r$  есть решение задачи (1), (2).

**Теорема 2** Предположим, что  $\dim X_s < \dim Y_s$ , вектор  $u_0 \in D_A \subset D_B$  удовлетворяет условию  $\tilde{S}f(0, u_0) = 0$  и существует подпространство  $Y_1 \subset Y_s$  с проектором  $\tilde{S}_1 : Y \rightarrow Y_1$  такое, что

$$\dim Y_1 = \dim X_s, \quad \tilde{S}_1 \tilde{S} = \tilde{S}_1, \quad (\tilde{S} - \tilde{S}_1)f(t, u) = 0 \quad \forall t \in [0, \tau], \quad \forall u \in X.$$

Пусть на множестве  $[0, \tau] \times B(X, u_0, r)$  вектор-функция  $f(t, u)$  непрерывна, компонента  $\tilde{P}f$  вектор-функции  $f(t, u)$  удовлетворяет условию Липшица

$$\|\tilde{P}f(t, u^1) - \tilde{P}f(t, u^2)\| \leq a \|u^1 - u^2\|, \quad a = \text{const},$$

и компонента  $\tilde{S}_1 f$  имеет непрерывную производную Фреше  $\frac{\partial \tilde{S}_1 f(t, u)}{\partial u}$ .

Если оператор  $\frac{\partial}{\partial S u} \tilde{S}_1 f(0, u_0)$  имеет ограниченный обратный, то для задачи (1)-(2) существует единственное решение  $u(t)$  на нетривиальном интервале  $[0, \tau_0] \subset [0, \tau]$ .

**Доказательство.** Уравнение (1) эквивалентно уравнениям:

$$\tilde{S}_1 f(t, u_s + u_r) = 0 \quad (8)$$

$$(\tilde{S} - \tilde{S}_1)f(t, u_s + u_r) = 0 \quad (9)$$

$$\frac{d(A_r u_r)}{dt} + B_r u_r = \tilde{P}f(t, u_s + u_r) \quad (10)$$

Из условий теоремы следует, что уравнению (9) удовлетворяет любая функция  $u \in C([0, \tau]; X)$ . Применяв к уравнению (8) теорему о неявной функции, находим функцию  $u_s = \psi(t, u_r)$ . Она определена и имеет непрерывную производную Фреше  $\frac{\partial \psi}{\partial u_r}$  на некотором множестве

$$\Omega = \{(t, u_r)\} = [0, \tau_1] \times \{u_r \in X_r : \|u_r - P u_0\| \leq r_1\}, \quad \tau_1 \leq \tau, \quad r_1 \leq r.$$

Заменяя  $u_r = A_r^{-1} v$  и подставляя  $u_s = \psi(t, u_r)$  в уравнение (10), получим

$$\frac{dv}{dt} + B_r A_r^{-1} v = \varphi(t, v), \quad \varphi \equiv \tilde{P}f(t, \psi(t, A_r^{-1} v) + A_r^{-1} v). \quad (11)$$

Как и в доказательстве предыдущей теоремы можно проверить, что функция  $\varphi(t, v)$  удовлетворяет условию Липшица по переменной  $v$  на множестве

$$G = [0, \tau_2] \times \{v \in Y_r : \|v - A_r^{-1} P u_0\| \leq r_2\}, \quad \tau_2 \leq \tau_1, \quad r_2 \leq r_1.$$

Применяем теорему типа Пикара к уравнению (11) с начальным условием  $v(0) = A_r^{-1} P u_0$ . Получаем решение  $v(t)$  на некотором интервале  $[0, \tau_0] \subset [0, \tau_2]$ . Следовательно, функция  $u(t) = \psi(t, A_r^{-1} v(t)) + A_r^{-1} v(t)$  есть единственное решение задачи (1),(2).

Заметим, что в задаче Коши для линейного сингулярного уравнения (1) может не иметь места единственность решения, а также существование. При

этом условия на обратимость производной Фреше в теоремах 1,2 заведомо не выполняются.

Рассмотрим приложения доказанных теорем.

Пример 1. В области  $t \geq 0, -\pi \leq x \leq \pi$  ставится смешанная задача

$$\frac{\partial^3 u(t, x)}{\partial t \partial x^2} - (x+i) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t \partial x} + ix \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + e^{\frac{x^2}{2} + ix} \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} - ie^{\frac{x^2}{2} + ix} u(t, x) = f(t, u), \quad (12)$$

$$u(t, -\pi) = u(t, \pi), \quad u'(t, -\pi) = u'(t, \pi), \quad u(0, x) = u_0(x). \quad (13)$$

Предполагается, что  $f(t, u) : [0, \tau] \times C \rightarrow C$  есть непрерывная комплексная функция.

В пространстве  $C_{[-\pi, \pi]} = X = Y$  введем операторы

$$A = \frac{d^2(\cdot)}{dx^2} - (x+i) \frac{d(\cdot)}{dx} + ix(\cdot),$$

$$D_A = \{y \in C_{[-\pi, \pi]}^2 : y(-\pi) = y(\pi), y'(-\pi) = y'(\pi)\},$$

$$B = e^{\frac{x^2}{2} + ix} \left( \frac{d(\cdot)}{dx} - i(\cdot) \right),$$

$$D_B = \{y \in C_{[-\pi, \pi]}^1 : y(-\pi) = y(\pi)\}.$$

Рассматривая функцию  $u(t, x)$  как отображение  $u(t) : [0, \tau] \rightarrow C_{[-\pi, \pi]}^2$ , перепишем смешанную задачу (12), (13) в виде абстрактной задачи Коши в пространствах  $X = Y = C_{[-\pi, \pi]}^2$ :

$$\frac{d}{dt}(Au(t)) + Bu(t) = f(t, u), \quad u(0) = u_0, \quad f(t, u) : [0, \tau] \times X \rightarrow Y.$$

Положим

$$X_s = \text{Ker} A \cap \text{Ker} B = \text{span}\{e^{ix}\}, \quad Y_s = \text{span}\{e^{-\frac{x^2}{2}}\}.$$

Введем проекторы  $S, P$  по правилу  $Sy = \frac{1}{2\pi} e^{ix} \int_{-\pi}^{\pi} ye^{-ix} dx$ ,  $P = I_X - S$  в пространстве  $X$  и проекторы в пространстве  $Y$ :  $\tilde{S}y = \beta e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} ye^{-\frac{x^2}{2}} dx$ ,

$\tilde{P} = I_Y - \tilde{S}$ , где  $\beta = \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-x^2} dx}$ . Пусть  $X_s = S(X)$ ,  $Y_s = \tilde{S}(Y)$ ,

$X_r = P(X)$ ,  $Y_r = \tilde{P}(Y)$ . Пары подпространств  $(X_s, Y_s), (X_r, Y_r)$  приводят пучок  $\lambda A + B$ . Ясно, что оператор  $A_r = A|_{X_r}$ , действующий из  $X_r$  в  $Y_r$ , имеет ограниченный обратный, пучок  $\lambda A_r + B_r = \lambda A + B|_{X_r}$  является регулярным. Поскольку  $D_A \subset D_B$ , то оператор  $B_r A_r^{-1}$  определен на всем пространстве  $Y_r$  и ограничен.

Для выполнения условий теоремы 1 достаточно, чтобы скалярная функция  $f(t, u)$  и начальная функция  $u_0(x)$  обладали следующими свойствами:

- 1) функция  $\frac{\partial f(t, u)}{\partial u}$  была непрерывна;
- 2)  $\bar{S}f(0, u_0) = 0$ , т.е.  $\int_{-\pi}^{\pi} f(0, u_0(x))e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$ ;
- 3)  $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial f(0, u_0(x))}{\partial u} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \neq 0$ ;
- 4)  $u_0 \in D_A$ .

Примером такой  $f(t, u)$  может служить функция  $f(t, u) = u^2 - e^t$ . Действительно:

- 1)  $f(t, u) = u^2 - e^t = u_s^2 + 2u_s u_r + u_r^2 - e^t$ , следовательно функция  $\frac{\partial \bar{S}f(t, u)}{\partial S u} = \beta e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} (2u_s + 2u_r) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2\beta e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} u e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  непрерывна;
- 2) функция  $\bar{P}f = u^2 - e^t - \beta e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} (u^2 - e^t) e^{-\frac{x^2}{2}} dx$  удовлетворяет условию Липшица по  $u$ .

По теореме 1 существует единственное решение задачи (1)-(2) для любого  $u_0$  удовлетворяющего следующим условиям:

- 1)  $u_0 \in D_A$ ; 2)  $\int_{-\pi}^{\pi} (u_0^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$ ; 3)  $\int_{-\pi}^{\pi} u_0(x) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \neq 0$ .

Примером такой  $u_0(x)$  может служить функция  $u_0(x) = 1$ .

Пример 2. Дана система дифференциально-алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} u_3^{\frac{1}{2}} + e^t u_1 u_5 - e^{\frac{5t}{2}} - e^{6t} &= 0 \\ u_2 u_4 - u_1 u_5 &= 0 \\ u_2 u_5 - e^t u_2 u_4 &= 0 \\ u_3^{\frac{1}{2}} + u_2 u_5 - e^{\frac{5t}{2}} - e^{6t} &= 0 \\ u_4' + u_4 &= u_2^{\frac{1}{2}} + u_1^{\frac{1}{6}} u_5^{\frac{1}{4}} \\ u_5' &= (u_1 u_4)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} u_4^2 + \frac{1}{2} u_3^{\frac{2}{3}}. \end{aligned}$$

с начальными условиями  $u_i(0) = u_i^0, i = 1, \dots, 5$ . Умножив второе уравнение на  $e^t$ , можно переписать всю систему в виде (1)-(2), положив  $X = C^5, Y = C^6$ ,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix},$$

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3^{\frac{1}{2}} + e^t u_1 u_5 - e^{\frac{5t}{2}} - e^{6t} \\ e^t (u_2 u_4 - u_1 u_5) \\ u_2 u_5 - e^t u_2 u_4 \\ u_3^{\frac{1}{2}} + u_2 u_5 - e^{\frac{5t}{2}} - e^{6t} \\ u_2^{\frac{1}{4}} + u_1^{\frac{1}{6}} u_5^{\frac{1}{4}} \\ (u_1 u_4)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} u_4^2 + \frac{1}{2} u_1^{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}.$$

Обозначим векторы координатных базисов  $e_1 = (10000)^{tr}, \dots, e_5 = (00001)^{tr}$  в  $X$  и  $\tilde{e}_1 = (100000)^{tr}, \dots, \tilde{e}_6 = (000001)^{tr}$  в  $Y$ . Очевидно,  $X_s = Ker A \cap Ker B = span\{e_1, e_2, e_3\}, Y_s = Ker A^* \cap Ker B^* = span\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3, \tilde{e}_4\}$ , так что  $dim X_s < dim Y_s$ . Ясно, что  $X_r = X_s^\perp = span\{e_4, e_5\}, Y_r = Y_s^\perp = span\{\tilde{e}_5, \tilde{e}_6\}$  и проекторы  $S, P, \tilde{S}, \tilde{P}$  действуют по правилу  $Su = (u_1 u_2 u_3 00)^{tr}, Pu = (000 u_4 u_5)^{tr}, \tilde{S}y = (y_1 y_2 y_3 y_4 00)^{tr}, \tilde{P}y = (0000 y_5 y_6)^{tr}$ .

Проверим условия теоремы 2 для данной функции  $f(t, u)$ .

- 1) Проекция  $\tilde{P}f(t, u) = (0000 f_5 f_6)^{tr}$  удовлетворяет локальному условию Липшица в окрестности любой точки  $u^0$  с положительными координатами  $u_i^0 > 0$ .
- 2) В качестве проектора  $\tilde{S}_1$  возьмем

$$\tilde{S}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и в качестве базиса  $\{g_k\}_{k=1}^3$  пространства  $Y_1 = \tilde{S}_1(Y)$  выберем векторы  $g_1 = (100100)^{tr}, g_2 = (-110000)^{tr}, g_3 = (-101000)^{tr}$ . Тогда  $(\tilde{S} - \tilde{S}_1)f(t, u) = 0$ .

- 3) Условие  $\tilde{S}_1 f(0, u_0) = 0$  означает, что начальные данные связаны соотношениями  $u_1^0 u_5^0 = u_2^0 u_4^0 = u_3^0 u_5^0, (u_3^0)^{\frac{1}{2}} + u_2^0 u_5^0 = 2$ .

- 4) Поскольку  $\tilde{S}_1 f(t, u) = f_4 g_1 + f_2 g_2 + f_3 g_3$ , то отображение  $\frac{\partial \tilde{S}_1 f}{\partial S u} : X_s \rightarrow Y_1$  в базисах  $\{e_k\}_{k=1}^3, \{g_k\}_{k=1}^3$  имеет матрицу

$$\frac{\partial \tilde{S}_1 f}{\partial S u} = \begin{bmatrix} 0 & u_5 & \frac{1}{2} u_3^{-\frac{1}{2}} \\ -e^t u_5 & e^t u_4 & 0 \\ 0 & u_5 - e^t u_4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Оно непрерывно в окрестности точки  $u^0 (u_i^0 > 0)$ .

- 5) Условие  $det \begin{bmatrix} 0 & u_5^0 & \frac{1}{2} (u_3^0)^{-\frac{1}{2}} \\ -u_5^0 & u_4^0 & 0 \\ 0 & u_5^0 - u_4^0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$ , эквивалентно  $u_4^0 \neq u_5^0$ .

Соотношения 3) и 5) являются условиями на выбор начального вектора  $u_0$ . Например, этим условиям удовлетворяет вектор  $u_0 = (00412)^{tr}$ , и тогда

решением системы будет функция  $u(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (e^{\frac{5t}{2}})^2 \\ e^{-t} \\ \frac{9-e^{-2t}}{4} \end{bmatrix}$ . При  $u_0 = (11111)^{tr}$

условие 5) не будет выполнено:  $\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$ . Однако решение и в

этом случае будет существовать:  $u(t) = (e^{3t}e^{4t}e^{5t}e^te^{2t})^{tr}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Dieudonne J. Foundations of Modern Analysis// Academic Press: New York-London, 1960.
2. Favini A., Plazzi P. Some results concerning the abstract nonlinear equation  $D_t M u(t) + Lu(t) = f(t, Ku(t))$ // Circuits, Systems, Signal Process. 5(1986).- P. 261 - 274.
3. Favini A., Plazzi P. On some abstract degenerate problems of parabolic type -2. The nonlinear case // Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications.- 13 (1989). - P. 23 - 31.
4. Руткас А.Г. Задача Коши для уравнения  $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$  // Дифференциальные уравнения. - 1975. - N11. - С. 1996 - 2010.
5. Rutkas A. The solvability of a nonlinear differential equation in a Banach space// Spectral and evolutional problems. Proceedings of Sixth Crimean Fall Mathematical School-Symposium (Simferopol). - 6 (1996).- P. 317 - 320.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.- М.: Наука, 1967. - 576 с.
7. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1970. - 536 с.

Вісник Харківського університету

Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

УДК 517.437+517.983.53

№ 444, 1999, с.119-125

## Об абстрактной задаче Коши, связанной с одной задачей гидродинамики

Т.Ю.Яценко

Харьковский государственный университет

В гильбертовом пространстве рассматривается дифференциальное уравнение  $C\dot{x}(t) + Fx(t) = f(t)$ , где  $C$  — самосопряженный оператор,  $F$  — максимальный аккретивный оператор. Уравнение описывает малые колебания однородной вязкой несжимаемой жидкости в сосуде, ограниченное упругой мембраной. Построена шкала решений уравнения. Установлена равномерная корректность в энергетической норме задачи Коши для этого уравнения.

В статье рассматривается линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$C \frac{dx(t)}{dt} + Fx(t) = f(t) \quad (1)$$

в гильбертовом пространстве  $H$ . Операторы  $C$  и  $F$  обладают следующими свойствами:

1.  $C$  — самосопряженный положительно определенный оператор;
2.  $F$  — максимальный аккретивный оператор:  $\overline{D(F)} = H$ ,  $Re(Fx, x) \geq 0$   $\forall x \in D(F)$ ,  $Re(F^*x, x) \geq 0$   $\forall x \in D(F^*)$  [1];
3.  $D(C) \cap D(F)$  и  $D(C) \cap D(F^*)$  — плотные линейалы в  $H$ .

### 1. Гидродинамическая постановка задачи.

В качестве примера рассмотрим начально-краевую задачу, которая приводит к операторно-дифференциальному уравнению указанного типа [3]. Пусть однородная вязкая несжимаемая жидкость плотности  $\rho$  с коэффициентом динамической вязкости  $\mu$  расположена в неподвижном сосуде и занимает в состоянии покоя область  $\Omega$ , ограниченную твердой стенкой сосуда  $S$  и горизонтальной границей  $\Gamma$ , на которой находится упругая мембрана. На границе  $\partial\Gamma$  мембрана закреплена,  $\sigma$  — величина предварительного растяжения мембраны. Рассматриваются малые колебания системы "вязкая жидкость+мембрана" под действием гравитационного поля с ускорением  $\vec{g}$  и поля

внешних сил  $\vec{f} = \vec{f}(t, x)$ ,  $x \in \Omega$ , а также начального поля скоростей жидкости и отклонения мембраны от равновесного состояния. Обозначим  $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$  – поле скоростей жидкости,  $p = p(t, x)$  – динамическое давление,  $\zeta(t, \hat{x})$  – вертикальное отклонение мембраны, где  $\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$ .

Задача о малых движениях системы имеет вид:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= -\nabla p + \mu \Delta \vec{u} + \rho \vec{f}, \quad \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\ \vec{u} &= \vec{0} \quad (\text{на } S), \quad \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (i = 1, 2; \text{ на } \Gamma), \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \gamma_n \vec{u} := \vec{u} \cdot \vec{e}_3 = \vec{u} \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \zeta = 0 \quad (\text{на } \partial \Gamma), \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \sigma \Delta_2 \zeta - \rho g \zeta + p - 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0, \\ \vec{u}(0, x) &= \vec{u}^0(x) \quad (\text{в } \Omega), \quad \zeta(0, \hat{x}) = \zeta^0(\hat{x}), \quad (\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma) \end{aligned}$$

Для представления уравнений в операторном виде используются гильбертовы пространства:

$$\begin{aligned} \vec{J}_{0,S}(\Omega) &:= \left\{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), u_n = 0 \text{ (на } S) \right\}, \\ \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) &:= \left\{ \vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \vec{u} = \vec{0} \text{ (на } S) \right\}. \end{aligned}$$

*Первая вспомогательная задача:* по функции  $\vec{\varphi} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$  найти функцию  $\vec{u} \in \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$  из следующей системы уравнений и краевых условий:

$$\begin{aligned} A\vec{u} &:= -P_{0,S} \Delta \vec{u} + \nabla p_1 = \vec{\varphi} \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} = 0, \quad p_1 - 2\mu \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \end{aligned}$$

Оператор  $A : \vec{\varphi} \rightarrow \vec{u}$  является самосопряженным положительно определенным в  $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$  [1].

*Вторая вспомогательная задача:* по функции  $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  найти функцию  $p_2 \in H^1(\Omega)$  из следующей системы уравнений и граничных условий:

$$\Delta p_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad p_2 = \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \psi d\Gamma = 0.$$

Разрешающий оператор  $T : \psi \rightarrow p_2$  приведенной задачи ограничено действует из  $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$  в подпространство  $H_{h,S}^1(\Omega) = \left\{ p \in H^1(\Omega) : \Delta p = 0 \text{ (в } \Omega), \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ (на } S) \right\}$  пространства  $H^1(\Omega)$  [1]. Из свойств оператора  $T$  следует, что

$$\begin{aligned} G\psi &:= \nabla p_2, \quad G \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \vec{G}_{h,S}(\Omega)), \\ \vec{G}_{h,S}(\Omega) &:= \left\{ \nabla p \in \vec{L}_2(\Omega) : \Delta p = 0 \text{ (в } \Omega), \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ (на } S), \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0 \right\} \end{aligned}$$

Сопряженный оператор  $\gamma_n = G^* : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = (H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))^*$  является оператором взятия нормального следа на свободной поверхности  $\Gamma$  [1].

Обозначим  $H_1 = L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$ . Определим оператор  $B : D(B) \rightarrow H_1$

$$B\zeta := P_{H_1}(-\sigma\Delta_2\zeta + \rho g\zeta), \\ D(B) := \{\zeta \in H_1 : \Delta_2\zeta \in L_2(\Gamma), \zeta = 0 \text{ (на } \partial\Gamma)\}.$$

Оператор  $B$  является неограниченным положительно определенным и имеет дискретный спектр [1].

В прямой сумме пространств  $\vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus H_1 = H$  введем операторы

$$C = \text{diag}(\rho I + \rho_0 G \gamma_n; I), \quad F = F_0 + iF_1 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mu A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & -iGB^{\frac{1}{2}} \\ iB^{\frac{1}{2}}\gamma_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда рассматриваемая задача преобразуется в задачу Коши для абстрактного уравнения (1), где  $x = (\vec{u}; \eta)^t$ ,  $f(t) := (\rho P_{0,S}\vec{f}; 0)^t$ .

## 2. Семейство вспомогательных пространств.

Будем искать решения уравнения (1) в классе функций  $x(t)$  со значениями в пространстве  $H$ , непрерывных при  $t \geq 0$  и непрерывно дифференцируемых при  $t > 0$ , с начальными значениями из линейала  $D(C^{\frac{1}{2}})$ :

$$x(0) = x_0 \in D(C^{\frac{1}{2}}). \quad (2)$$

Произведем замену переменных  $y = C^\alpha x$  в уравнении (1) и умножим полученное уравнение слева на оператор  $C^{\alpha-1}$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Получим уравнение, разрешенное относительно производной:

$$\frac{dy(t)}{dt} = L_\alpha y(t) + C^{\alpha-1} f(t), \quad \text{где } L_\alpha = -C^{\alpha-1} F C^{-\alpha}. \quad (3)$$

Областью определения оператора  $L_\alpha$  в пространстве  $H$  является  $D(L_\alpha) = C^\alpha(D(F) \cap D(C^\alpha))$ . Линейал  $D(L_\alpha)$  плотен в  $H$ , так как невырожденный самосопряженный оператор  $C^\alpha$  отображает плотный линейал  $D(F) \cap D(C^\alpha)$  в плотный линейал.

Введем семейство гильбертовых пространств  $H_\alpha$  со скалярными произведениями

$$(x, h)_\alpha = (C^{\frac{1}{2}-\alpha} x, C^{\frac{1}{2}-\alpha} h), \quad \|x\|_\alpha = \|C^{\frac{1}{2}-\alpha} x\|. \quad (4)$$

Для  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$  пространство  $H_\alpha$  равно линейалу  $D(C^{\frac{1}{2}-\alpha})$  с нормой (4). Для  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$  пространство  $H_\alpha$  является замыканием пространства  $H$  по норме (4). Очевидно, для  $\alpha_1 < \alpha_2$  будет  $H_{\alpha_1} \subset H_{\alpha_2}$ . Семейство пространств  $\{H_\alpha\}$  совпадает с отрезком классической гильбертовой шкалы пространств  $H^\beta = H^{\frac{1}{2}-\alpha}$ ,  $-\frac{1}{2} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$  [1].

Пусть оператор  $W_{\frac{1}{2}-\alpha} : H_\alpha \rightarrow H$  равен оператору  $C^{\frac{1}{2}-\alpha}$ , если  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ , и замыканию оператора  $C^{\frac{1}{2}-\alpha}$  как оператора из  $H_\alpha$  в  $H$ , если  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ .

Обозначим действие оператора  $C^{\alpha-1}$  из  $H$  в  $H_\alpha$  как  $S_{\alpha-1}$ .

Пусть  $V_\alpha : H \rightarrow H_\alpha$  — сужение оператора  $C^\alpha$  на  $D(C^{\frac{1}{2}})$ , если  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ , и замыкание оператора  $C^\alpha$  как оператора из  $H$  в  $H_\alpha$ , если  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ .

Пусть оператор  $V_{-\alpha} : H_\alpha \rightarrow H$  равен сужению оператора  $C^{-\alpha}$  на  $D(C^{\frac{1}{2}-\alpha})$ , если  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ , и замыканию оператора  $C^{-\alpha}$  как оператора из  $H_\alpha$  в  $H$ , если  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ .

Оператор  $W_{\frac{1}{2}-\alpha}$  является ограниченным и ограничено обратимым оператором из  $H_\alpha$  в  $H$ , причем  $\|W_{\frac{1}{2}-\alpha}\| = 1$ .

**Утверждение 1.**  $V_\alpha$  — замкнутый ограничено обратимый оператор из  $H$  в  $H_\alpha$  и  $D(V_\alpha) = D(C^{\frac{1}{2}})$ . Обратный оператор к оператору  $V_\alpha$  равен  $V_{-\alpha}$ .

**Утверждение 2.**  $W_{\frac{1}{2}-\alpha}V_\alpha = V_\alpha W_{\frac{1}{2}-\alpha} = C^{\frac{1}{2}}$ ,  $W_{\frac{1}{2}-\alpha}S_{\alpha-1} = C^{-\frac{1}{2}}$ ,  $C^{\frac{1}{2}}V_{-\alpha} = W_{\frac{1}{2}-\alpha}$ .

Доказательство разбивается на два случая:  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$  и  $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ . В первом утверждении очевидно, так как  $W_{\frac{1}{2}-\alpha} = C^{\frac{1}{2}-\alpha}$  и  $V_\alpha = C^\alpha|_{D(C^{\frac{1}{2}})}$ .

Рассмотрим второй случай. Для всех  $x$  из  $D(C^\alpha)$  имеем  $W_{\frac{1}{2}-\alpha}V_\alpha x = C^{\frac{1}{2}-\alpha}C^\alpha x = C^{\frac{1}{2}}x$ . Для всякого  $x$  из  $D(C^{\frac{1}{2}})$  существует последовательность  $x_n \xrightarrow{H} x$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $x_n \in D(C^\alpha)$  и  $W_{\frac{1}{2}-\alpha}V_\alpha x = W_{\frac{1}{2}-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty}^{H_\alpha} C^\alpha x_n$ . Обозначим  $y = \lim_{n \rightarrow \infty}^{H_\alpha} C^\alpha x_n$ . Для всякого  $y$  из  $H_\alpha$  существует последовательность  $y_m \xrightarrow{H_\alpha} y$  при  $m \rightarrow \infty$ ,  $y_m \in H$  и каждый  $y_m$  можно единственным образом представить в виде  $y_m = C^\alpha x_m$ , где  $x_m \in D(C^\alpha)$ . Поэтому  $W_{\frac{1}{2}-\alpha}y = \lim_{m \rightarrow \infty} C^{\frac{1}{2}-\alpha}y_m = \lim_{m \rightarrow \infty} C^{\frac{1}{2}-\alpha}C^\alpha x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} C^{\frac{1}{2}}x_m$ .

Здесь  $\{x_m\}$  сходится, так как оператор  $C^{-\frac{1}{2}}$  ограниченный и последовательность  $\{C^{\frac{1}{2}}x_m\}$  сходится. Представим  $y_m = y + \epsilon_m$ , где  $\epsilon_m = y_m - y$ , ( $\lim_{m \rightarrow \infty}^{H_\alpha} \epsilon_m = 0$ ). Тогда  $\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} C^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}-\alpha}(y + \epsilon_m) = \lim_{m \rightarrow \infty} C^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}-\alpha}y = \lim_{m \rightarrow \infty} C^{-\frac{1}{2}}W_{\frac{1}{2}-\alpha} \lim_{n \rightarrow \infty}^{H_\alpha} C^\alpha x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} C^{-\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} W_{\frac{1}{2}-\alpha}C^\alpha x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} C^{-\frac{1}{2}} \lim_{n \rightarrow \infty} C^{\frac{1}{2}}x_n = x$ . В силу замкнутости оператора  $\lim_{m \rightarrow \infty} C^{\frac{1}{2}}x_m = C^{\frac{1}{2}}x$ .

Аналогично доказывается, что  $V_\alpha W_{\frac{1}{2}-\alpha} = C^{\frac{1}{2}}$ ,  $W_{\frac{1}{2}-\alpha}S_{\alpha-1} = C^{-\frac{1}{2}}$ ,  $C^{\frac{1}{2}}V_{-\alpha} = W_{\frac{1}{2}-\alpha}$ . Утверждение доказано.

### 3. Семейство уравнений с диссипативными операторами.

Пусть оператор  $Q_\alpha : H_\alpha \rightarrow H_\alpha$  равен ограничению оператора  $L_\alpha$  на линейал  $C^\alpha(D(F) \cap D(C^{\frac{1}{2}}))$ , если  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ , и равен оператору  $L_\alpha$ , если  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ .

Аналогично, пусть оператор  $P_\alpha : H_\alpha \rightarrow H_\alpha$  равен сужению оператора  $-C^{\alpha-1}F^*C^{-\alpha}$  на линейал  $C^\alpha(D(F^*) \cap D(C^{\frac{1}{2}}))$ , если  $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ , и равен оператору  $-C^{\alpha-1}F^*C^{-\alpha}$ , если  $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ .

Производную в пространстве  $H_\alpha$  обозначим  $\frac{d\alpha}{dt}$ .

При каждом  $\alpha$  уравнение (3) вкладываем в пространство  $H_\alpha$

$$\frac{d_\alpha y(t)}{dt} = Q_\alpha y(t) + S_{\alpha-1} f(t) \quad (5)$$

**Лемма 1.** Оператор  $Q_\alpha$  в  $H_\alpha$  является диссипативным оператором.

**Лемма 2.** Замыкание  $\overline{Q}_\alpha$  оператора  $Q_\alpha$  в  $H_\alpha$  является максимальным диссипативным оператором.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Через  $Q_\alpha^+$  обозначим оператор сопряженный к  $Q_\alpha$  в пространстве  $H_\alpha$ . Для любого  $y \in D(P_\alpha)$  можно записать

$$(Q_\alpha x, y)_\alpha = (-FC^{-\alpha}x, C^{-\alpha}y) = (C^{-\alpha}x, -F^*C^\alpha y) = (x, -C^{\alpha-1}F^*C^\alpha y)_\alpha$$

Значит сужение оператора  $Q_\alpha^+$  на линеал  $D(P_\alpha)$  равно оператору  $P_\alpha$ . Очевидно, что линеал  $D(P_\alpha)$  плотен в пространстве  $H_\alpha$ . Значит область определения  $D(Q_\alpha^+)$  оператора  $Q_\alpha^+$  плотна в пространстве  $H_\alpha$ . Легко видеть, что для всех  $y$  из  $D(P_\alpha)$  верно  $Re(Q_\alpha^+ y, y) \leq 0$ . Следовательно, для всех  $y$  из  $D(Q_\alpha^+)$  верно  $Re(Q_\alpha^+ y, y) \leq 0$ . Так как  $Q_\alpha \subset \overline{Q}_\alpha$ , то  $Q_\alpha^+ \supset \overline{Q}_\alpha^+$ , поэтому для всех  $y \in D(\overline{Q}_\alpha^+)$  верно  $Re(\overline{Q}_\alpha^+ y, y) \leq 0$ . Лемма доказана.

#### 4. Задача Коши в шкале пространств.

В пространстве  $H_\alpha$  рассмотрим расширение уравнения (5)

$$\frac{d_\alpha y(t)}{dt} = \overline{Q}_\alpha y(t) + S_{\alpha-1} f(t). \quad (6)$$

*Решением* уравнения (6) на отрезке  $[0, T]$  назовем функцию  $y(t)$  со значениями в  $H_\alpha$  непрерывную на  $[0, T]$  и сильно непрерывно дифференцируемую и удовлетворяющую уравнению (6) на  $(0, T]$ .

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (6) с начальным условием

$$y(0) = y_0 \quad (y_0 \in H_\alpha). \quad (7)$$

Задачу Коши (6),(7) назовем *равномерно корректной*, если при  $f(t) \equiv 0$  из стремления к нулю в норме  $H_\alpha$  начальных условий  $y_{0n} \in H_\alpha$  следует равномерное стремление к нулю в норме  $H_\alpha$  на  $[0, T]$  решений задачи Коши (6),(7).

Решение  $y(t)$  задачи Коши (6),(7) назовем  $\alpha$ -*решением* задачи Коши (1),(2).

Функцию  $x_\alpha(t) = V_{-\alpha} y(t)$  назовем *источником*  $\alpha$ -решения задачи Коши (1),(2).

При  $\alpha = 0$  пространство  $H_0$  является стандартным энергетическим пространством над  $H$ . Если операторы  $C$  и  $F$  являются коммутирующими, то оператор  $Q_\alpha = -C^{-1}F = -FC^{-1}$  является замкнутым, и 0-решения являются наиболее гладкими по сравнению с другими  $\alpha$ -решениями.

Задаче Коши (6),(7) отвечает сжимающая полугруппа  $U_{\bar{Q}_\alpha}(t) = e^{\bar{Q}_\alpha t}$  в силу максимальной диссипативности оператора  $\bar{Q}_\alpha$  [2]. Следовательно, задача Коши (6),(7) является равномерно корректной.

**Замечание.** Любое  $y_0 \in H_\alpha$  можно представить единственным образом в виде  $y_0 = V_\alpha x_{0\alpha}$ , где  $x_{0\alpha} \in D(C^{\frac{1}{2}})$ .

**Лемма 3.** Пусть  $C^{-\frac{1}{2}}f(t)$  есть непрерывно дифференцируемая на  $[0, T]$  функция и пусть  $x_0 \in D(C^{\frac{1}{2}})$ . Тогда существует единственный источник решения типа  $\alpha$

$$x_\alpha(t) = V_{-\alpha}y_\alpha(t) = V_{-\alpha}U_{\bar{Q}_\alpha}(t)V_\alpha x_{0\alpha} + V_{-\alpha} \int_0^t U_{\bar{Q}_\alpha}(t-s)S_{\alpha-1}f(s)ds \quad (8)$$

который обладает следующими свойствами:

1.  $x_\alpha(t) \in V_{-\alpha}(D(\bar{Q}_\alpha))$  для  $t \in (0, T]$ ,  $\dot{x}_\alpha(t) \in D(C^{\frac{1}{2}})$  для  $t \in [0, T]$ ;
2.  $C^{\frac{1}{2}}x_\alpha(t) \in C\{[0, T], H\}$ ,  $C^{\frac{1}{2}}x_\alpha(t) \in C^1\{(0, T], H\}$ ;
3.  $W_{\frac{1}{2}-\alpha}\bar{Q}_\alpha V_\alpha x_\alpha(t) \in C\{(0, T], H\}$ ;
4.  $x_\alpha(t)$  на интервале  $(0, T]$  удовлетворяет уравнению

$$C^{\frac{1}{2}} \frac{dx_\alpha(t)}{dt} = W_{\frac{1}{2}-\alpha}\bar{Q}_\alpha V_\alpha x_\alpha(t) + C^{-\frac{1}{2}}f(t). \quad (9)$$

**Доказательство.** Из условия  $C^{-\frac{1}{2}}f(t) \in C^1\{[0, T], H\}$  в силу утверждения 2 следует, что  $S_{\alpha-1}f(t) \in C^1\{[0, T], H_\alpha\}$ . Начальное условие  $x_0 \in D(C^{\frac{1}{2}})$  преобразуется в начальное условие  $y_0 = V_\alpha x_0$ . Задача Коши (6),(7) равномерно корректна, поэтому решение

$$y(t) = U_{\bar{Q}_\alpha}(t)y_0 + \int_0^t U_{\bar{Q}_\alpha}(t-s)S_{\alpha-1}f(s)ds$$

будет  $C^1\{(0, T], H_\alpha\} \cap C\{[0, T], H_\alpha\}$  и будет удовлетворять уравнению (6) на интервале  $(0, T]$ .  $x(t) = V_{-\alpha}y(t)$  источник  $\alpha$ -решения (8) будет принадлежать линейалу  $V_{-\alpha}(D(\bar{Q}_\alpha))$ .  $C^{\frac{1}{2}}x(t)$ ,  $x(t) \in C^1\{(0, T], H\} \cap C\{[0, T], H\}$ , так как  $V_{-\alpha}$  и  $C^{\frac{1}{2}}V_{-\alpha} = W_{\frac{1}{2}-\alpha}$  — ограниченные операторы из  $H_\alpha$  в  $H$ .  $x(t)$  удовлетворяет уравнению (9), так как

$$W_{\frac{1}{2}} \left( \frac{d_\alpha}{dt} V_\alpha x(t) \right) = \frac{d}{dt} (W_{\frac{1}{2}-\alpha} V_\alpha x(t)) = \frac{d}{dt} (C^{\frac{1}{2}} x(t)) = C^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dt} x(t).$$

Лемма доказана.

Обозначим через  $X_\alpha$  множество всех функций  $x_\alpha(t)$ , которые обладают свойствами 1-4 из предыдущей леммы.

**Теорема 1.** Множества  $X_\alpha$  не зависят от  $\alpha$ .

**Доказательство** теоремы основано на сравнении областей определения и значений операторов  $K_\alpha = W_{\frac{1}{2}-\alpha} \overline{Q}_\alpha V_\alpha$ , где  $\alpha \in [0, 1]$ . Теорема доказана.

Задачу Коши (1),(2) назовем *равномерно корректной в энергетической норме*, если при  $f(t) \equiv 0$  из стремления к нулю в энергетической норме начальных условий  $x_{0n} \in D(C^{\frac{1}{2}})$  следует равномерное стремление к нулю на  $[0, T]$  в энергетической норме источников  $x_{\alpha n}(t)$   $\alpha$ -решений задачи Коши (1),(2).

**Теорема 2.** Задача Коши (1),(2) равномерно корректна в энергетической норме.

**Доказательство.** Рассмотрим  $f(t) \equiv 0$ . Пусть последовательность  $\{x_{0n}\} \in D(C^{\frac{1}{2}})$  стремится к нулю в энергетической норме, тогда с учетом утверждения 2 получаем, что последовательность  $\{V_{-\alpha} x_{0n}\}$  стремится к нулю в пространстве  $H_\alpha$ . Поскольку задача Коши (6),(7) равномерно корректна, то последовательность  $\alpha$ -решений  $y_n(t) = U_{\overline{Q}_\alpha}(t) V_\alpha x_{0n}$  равномерно стремится к нулю на отрезке  $[0, T]$  в  $H_\alpha$ . Используя утверждение 2, получаем последовательность  $x_n(t) = V_{-\alpha} y_n(t)$  источников  $\alpha$ -решений, которая равномерно стремится к нулю на отрезке  $[0, T]$  в энергетической норме. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность проф. Копачевскому Н.Д. и Пашковой Ю.С. за постановку задачи и проф. Руткасу А.Г. за научное руководство и внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуи Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
2. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 464 с.
3. Пашкова Ю.С. Колебания жидкости в сосуде, закрытом упругой мембраной, и общие вопросы эволюции гидродинамических систем: Дис... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. – Симферополь, 1996. – 111 с.

Вісник Харківського університету  
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"  
УДК 538.4:621.313.333 № 444, 1999, с.126-136

## Применение метода парных интегральных уравнений к задачам магнитной гидродинамики

В.И.Легейда

Харьковский государственный университет

В данной работе метод парных интегральных уравнений применен к решению плоских краевых задач для уравнения  $\Delta u - k^2 u = 0$  со смешанными граничными условиями, возникающих в магнитной гидродинамике при расчете электромагнитных и температурных полей в каналах МГД-устройств с секционированными электродами. При этом получены новые парные интегральные уравнения и проведено сведение их к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

При решении ряда практически важных задач, связанных с теорией течений жидкости или газа в каналах МГД-устройств, возникает необходимость расчета электрических и магнитных полей в рабочей зоне канала [1, 2]. Большой интерес представляет рассмотрение электрических и магнитных полей в МГД-каналах, на стенках которых устанавливается не одна, а несколько пар конечных электродов, а индуцированное магнитное поле оказывает существенное влияние на характеристики канала (магнитное число Рейнольдса  $Rm \geq 1$ ). При этом проблема сводится к решению краевых задач со смешанными граничными условиями для двумерных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, получаемых осреднением соответствующих трехмерных уравнений по одной из пространственных координат. Для решения этих задач обычно используется метод последовательных приближений [3, 4, 5], метод Винера-Хопфа [6, 7, 9], численные методы [8], которые позволяют найти приближенное решение при некоторых предположениях относительно конфигурации внешнего магнитного поля, длины электродов и др.

В данной работе применен метод парных интегральных уравнений [10], с помощью которого найдено решение основной краевой задачи в случае произвольного внешнего магнитного поля и нескольких пар конечных электродов.

Рассмотрим канал прямоугольного поперечного сечения  $|x| < \infty$ ,  $0 \leq y \leq 2d$ ,  $|z| \leq l$  по которому течет стационарный поток несжимаемой проводящей жидкости с постоянной проводимостью  $\sigma$ . На стенках  $y = (0; 2d)$  расположены несколько пар конечных электродов. Предположим, что  $Rm \geq 1$  и

нужно учитывать влияние индуцированного магнитного поля на характеристики канала. Для нахождения индуцированного магнитного поля в общем случае нужно решать все три уравнения, получающиеся проектированием уравнения индукции на оси системы координат, и находить все три проекции вектора магнитной индукции  $\mathbf{B}$ . Однако, в большинстве практически важных случаев достаточно ограничиться рассмотрением только одной проекции уравнения индукции на ось  $z$ , лежащую в плоскости поперечного сечения канала и параллельную электродам [1]. Предположим, что стенки канала  $z = \pm l$  ферромагнитные, а внешнее магнитное поле параллельно оси ( $\mathbf{B}_0 = B_{0z} \mathbf{e}_z$ ). Если жидкость невязкая, то скорость течения предполагается постоянной и заданной. В случае вязкой жидкости предполагается, что скорость течения в канале описывается известной функцией  $v(x, y, z)$ , которую заменяем ее средним по сечению канала значением  $v_0$ . Тогда для определения осредненной по переменной  $z$  проекции вектора магнитной индукции  $B = \langle B_z \rangle$  получается краевая задача, не зависящая от двух других проекций вектора  $\mathbf{B}$ . В безразмерных переменных эта задача имеет вид [1]

$$\Delta b - R_m \frac{\partial b}{\partial x} = -f(x, y), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial b}{\partial y} = 0, \quad y = (0; 2d), \quad x \in \Gamma;$$

$$b = b_\alpha = \text{const}, \quad y = (0; 2d), \quad x \in \tilde{\Gamma};$$

$$b|_{x \rightarrow \pm \infty} = 0;$$

$$f(x, y) = -R_m \frac{\partial b_0}{\partial y}, \quad b_0 \equiv \langle b_{0z} \rangle = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l b_{0z} dz, \quad (1)$$

где  $b$  — безразмерная, осредненная по переменной  $z$  проекция на ось  $z$  вектора магнитной индукции,  $\Gamma$  — участки электродов,  $\tilde{\Gamma}$  — участки изоляторов.

Аналогичная краевая задача получается и для осредненного по переменной  $z$  электрического потенциала  $\varphi$  [1].

$$\Delta \varphi - R_m \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$\varphi = \varphi_\alpha = \text{const}, \quad y = (0; 2d), \quad x \in \Gamma;$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -(f + b_\alpha), \quad y = (0; 2d), \quad x \in \tilde{\Gamma};$$

$$\varphi|_{x \rightarrow \pm \infty} = 0.$$

(2)

Значения постоянных  $\varphi_\alpha$  и  $b_\alpha$  в (1) и (2) либо задаются, либо определяются через параметры внешних цепей и могут быть различными на различных электродах.

В дальнейшем будем рассматривать лишь задачу (1) (задача (2) решается аналогично), в предположении, что  $\Gamma$  представляет собой объединение  $2N$  пар отрезков  $[\alpha_m, \beta_m]$ ,  $m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ , а  $\tilde{\Gamma}$  — объединение отрезков  $[\beta_m, \alpha_{m+1}]$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N$ , причем  $\beta_0 = 0$ ,  $\alpha_{N+1} = \infty$ , расположенных на границах  $y = 0$ ,  $y = 2d$  полосы симметрично относительно оси  $x$  и относительно средней линии полосы. Следовательно  $\alpha_{-m} = -\alpha_m$ ,  $\beta_{-m} = -\beta_m$ .

Производя замену функции  $b(x, y) = g(x, y)e^{kx}$ , где  $k = Rm/2$ , получим из (1) следующую краевую задачу для функции  $g(x, y)$

$$\begin{aligned} \Delta g - k^2 g &= -f(x, y)e^{-kx}, \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 0, \quad y = (0; 2d), \quad x \in \Gamma; \\ g &= \beta_\alpha e^{-kx}, \quad y = (0; 2d), \quad x \in \tilde{\Gamma}; \\ g e^{kx} |_{x \rightarrow \pm\infty} &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Используя функцию Грина  $G^-(x, y; \xi, \eta)$  задачи Дирихле (или функцию Грина  $G^+(x, y; \xi, \eta)$  задачи Неймана) для уравнения Гельмгольца  $\Delta u - k^2 u = 0$  в полосе

$$\begin{aligned} G^\pm(x, y; \xi, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ K_0 \left( k \sqrt{(x - \xi)^2 + (4dj + y - \eta)^2} \right) \pm \right. \\ &\quad \left. \pm K_0 \left( k \sqrt{(x - \xi)^2 + (4dj - y - \eta)^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $K_0(x)$  — модифицированная функция Бесселя (или функция Макдональда), задачу (3) можно свести к краевой задаче для однородного уравнения Гельмгольца относительно новой неизвестной функции  $u(x, y)$

$$\begin{aligned} \Delta u - k^2 u &= 0, \\ u &= f_m(x), \quad y = (0; 2d), \quad x \in [\alpha_m, \beta_m], \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N; \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \varphi_m(x); \quad y = (0; 2d), \quad x \in [\beta_m, \alpha_{m+1}], \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N; \\ e^{kx} u |_{x \rightarrow \pm\infty} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом  $g(x, y) = I^+(x, y) + u(x, y)$ , если использовать функцию Грина задачи Неймана, или  $g(x, y) = I^-(x, y) + u(x, y)$ , если использовать функцию Грина задачи Дирихле.

$$\begin{aligned} I^\pm(x, y) &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(\xi, \eta) G^\pm(x, y; \xi, \eta) d\xi d\eta \\ f_m(x) &= b_m e^{-kx} - I^+ \text{ (или } f_m(x) = b_m e^{-kx}), \quad x \in [\alpha_m, \beta_m], \quad m = \pm 1, \dots, \pm N, \end{aligned}$$

$$\varphi_m(x) = 0 \text{ (или } \varphi_m(x) = \frac{\partial I^-}{\partial y}), x \in [\beta_m, \alpha_{m+1}], m = 0, \pm 1, \dots, \pm N.$$

Разлагая  $f_m(x)$  и  $\varphi_m$  на сумму четных и нечетных функций и представляя решение задачи (5) также в виде суммы четной  $u^+(x, y)$  и нечетной  $u^-(x, y)$  по переменной  $x$  функций, получим для определения  $u^\pm(x, y)$  две краевые задачи вида (5). Применяя принцип суперпозиции, можно каждую из полученных задач в свою очередь свести к двум задачам

$$\begin{aligned} \Delta u_1^\pm - k^2 u_1^\pm &= 0, \\ u_1^\pm &= f_m^\pm(x), y = (0; 2d), x \in [\alpha_m, \beta_m], m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N; \\ \frac{\partial u_1^\pm}{\partial y} &= 0, y = (0; 2d), x \in [\beta_m, \alpha_{m+1}], m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N; \\ e^{kx} u_1^\pm|_{x \rightarrow \pm\infty} &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta u_2^\pm - k^2 u_2^\pm &= 0, \\ u_2^\pm &= 0, y = (0; 2d), x \in [\alpha_m, \beta_m], m = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N; \\ \frac{\partial u_2^\pm}{\partial y} &= \varphi_m^\pm(x), y = (0; 2d), x \in [\beta_m, \alpha_{m+1}], m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N; \\ e^{kx} u_2^\pm|_{x \rightarrow \pm\infty} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

При этом  $u^+ = u_1^+ + u_2^+$  и  $u^- = u_1^- + u_2^-$ , а  $u = u^+ + u^- = u_1^+ + u_2^+ + u_1^- + u_2^-$ .

Для решения задач (6) и (7) применим метод парных интегральных уравнений [10, 11, 12, 13]. Будем искать решение этих задач в виде

$$u_1^\pm(x, y) = \int_0^\infty \frac{A_1^\pm(\tau) \operatorname{ch} [\sqrt{\tau^2 + k^2}(d - y)]}{\operatorname{ch} (d\sqrt{\tau^2 + k^2})} \chi^\pm(\tau x) d\tau, \quad (8)$$

$$u_2^\pm(x, y) = \int_0^\infty \frac{A_2^\pm(\tau) \operatorname{sh} [\sqrt{\tau^2 + k^2}(d - y)]}{\operatorname{sh} (d\sqrt{\tau^2 + k^2})} \chi^\pm(\tau x) d\tau, \quad (9)$$

$$\chi^+ \equiv \cos(\tau x), \quad \chi^- \equiv \sin(\tau x).$$

Подставляя (8) и (9) в граничные условия задач (6) и (7), получим для определения  $A_{1,2}^\pm$  парные интегральные уравнения

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A_1^\pm(\tau) \chi^\pm(\tau x) d\tau &= f^\pm(x), x \in \Sigma, \\ \int_0^\infty A_1^\pm(\tau) \sqrt{\tau^2 + k^2} \operatorname{th} (d\sqrt{\tau^2 + k^2}) \chi^\pm(\tau x) d\tau &= 0, x \in \tilde{\Sigma}, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\int_0^{\infty} A_2^{\pm}(\tau) \chi^{\pm}(\tau x) d\tau = 0, \quad x \in \Sigma,$$

$$\int_0^{\infty} A_2^{\pm}(\tau) \sqrt{\tau^2 + k^2} \operatorname{cth}(d\sqrt{\tau^2 + k^2}) \chi^{\pm}(\tau x) d\tau = -\varphi^{\pm}(x), \quad x \in \tilde{\Sigma}. \quad (11)$$

Здесь  $\Sigma$  — объединение отрезков  $[\alpha_m, \beta_m]$ ,  $m = \overline{1, N}$ , а  $\tilde{\Sigma}$  — объединение отрезков  $[\beta_m, \alpha_{m+1}]$ ,  $m = \overline{0, N}$ , причем  $\beta_0 = 0$ ,  $\alpha_{N+1} = \infty$ . Кроме того

$$f^{\pm}(x) = f_m^{\pm}(x), \quad \text{если } x \in [\alpha_m, \beta_m], \quad m = \overline{1, N},$$

$$\varphi^{\pm}(x) = \varphi_m^{\pm}, \quad \text{если } x \in [\beta_m, \alpha_{m+1}], \quad m = \overline{0, N}.$$

Продолжим правую часть первого уравнения (10) на всю полуось  $[0, \infty)$  т.е. на  $\tilde{\Sigma}$

$$\omega^{\pm}(x) = \begin{cases} f^{\pm}(x), & x \in \Sigma, \\ F^{\pm}(x), & x \in \tilde{\Sigma}. \end{cases} \quad (3)$$

При этом функции  $F^{\pm}(x)$  произвольные, но такие, что существует преобразование Фурье

$$R^{\pm}(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \omega^{\pm}(x) \chi^{\pm}(\tau x) dx. \quad (12)$$

Тогда уравнения (10) преобразуются к виду

$$\int_0^{\infty} B_1^{\pm}(\tau) \chi^{\pm}(\tau x) d\tau = 0, \quad x \in \Sigma$$

$$\int_0^{\infty} B_1^{\pm}(\tau) \sqrt{\tau^2 + k^2} \operatorname{th}(d\sqrt{\tau^2 + k^2}) \chi^{\pm}(\tau x) d\tau = -g^{\pm}(x), \quad x \in \tilde{\Sigma}, \quad (13)$$

где

$$A_1^{\pm}(\tau) = R^{\pm}(\tau) + B_1^{\pm}(\tau),$$

$$g^{\pm}(x) = \int_0^{\infty} R^{\pm}(\tau) \sqrt{\tau^2 + k^2} \operatorname{th}(d\sqrt{\tau^2 + k^2}) \chi^{\pm}(\tau x) d\tau.$$

Уравнения (13) практически не отличаются от уравнений (11). Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только уравнения (11), преобразовав их к виду

$$\int_0^{\infty} A^{\pm}(\tau) \chi^{\pm}(\tau x) d\tau = 0, \quad x \in \Sigma,$$

$$\int_0^{\infty} A^{\pm}(\tau) \sqrt{\tau^2 + k^2} (1 + \mu(\tau)) \chi^{\pm}(\tau x) d\tau = -\varphi^{\pm}(x), \quad x \in \tilde{\Sigma}, \quad (14)$$

где

$$\mu(\tau) = \frac{\exp(-d\sqrt{\tau^2 + k^2})}{\operatorname{sh}(d\sqrt{\tau^2 + k^2})}, \quad A_2^\pm(\tau) \equiv A^\pm(\tau). \quad (23)$$

Будем искать решение этих уравнений в виде [13]

$$A^\pm(\tau) = \frac{\sqrt{\pm 1}}{\sqrt{\pi k}} \sum_{n=1}^N \left[ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} W_n^\pm(t) p^\pm(\tau, t) dt + \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} V_n^\pm(t) p^\pm(\tau, t) dt \right], \quad (15)$$

где  $W_n^\pm(t) \in C^1(\alpha_n, \beta_n)$ ,  $V_n^\pm \in C^1(\beta_n, \alpha_{n+1})$  и  $V_n^\pm(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Интегрируя (15) по частям, представим  $A^\pm(\tau)$  еще в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{\tau^2 + k^2} A^\pm(\tau) = & \frac{\sqrt{\pm 1}}{\sqrt{\pi k}} \sum_{n=1}^N \left\{ W_n^\pm(\beta_n) q^\pm(\tau, \beta_n) - W_n^\pm(\alpha_n) q^\pm(\tau, \alpha_n) + \right. \\ & + V_n^\pm(\alpha_{n+1}) q^\pm(\tau, \alpha_{n+1}) - V_n^\pm(\beta_n) q^\pm(\tau, \beta_n) - \\ & \left. - \int_{\alpha_n}^{\beta_n} e^{kt} q^\pm(\tau, t) [e^{-kt} W_n^\pm(t)]' dt - \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} e^{kt} q^\pm(\tau, t) [e^{-kt} V_n^\pm(t)]' dt \right\}. \quad (16) \end{aligned}$$

В (15) и (16) функции  $p^\pm(\tau, t)$  и  $q^\pm(\tau, t)$  имеют следующий вид

$$p^\pm(\tau, t) = \frac{e^{irt}}{\sqrt{k - ir}} \pm \frac{e^{-irt}}{\sqrt{k + ir}}, \quad q^\pm(\tau, t) = \frac{e^{irt}}{\sqrt{k + ir}} \pm \frac{e^{-irt}}{\sqrt{k - ir}}.$$

Запишем второе уравнение (14) в виде

$$\begin{aligned} \int_0^\infty A^\pm(\tau) \sqrt{\tau^2 + k^2} \chi^\pm(\tau x) d\tau = -\varphi^\pm(x) - \\ - \int_0^\infty A^\pm(\tau) \mu(\tau) \sqrt{\tau^2 + k^2} \chi^\pm(\tau x) d\tau, \quad x \in \bar{\Sigma} \quad (17) \end{aligned}$$

и подставим в левую его часть выражение (16), а в правую — (15). Получим

$$\begin{aligned} \mp \int_x^{\beta_m} \frac{[e^{-kt} W_n^\pm]' dt}{\sqrt{t-x}} - \frac{e^{-2kx}}{2} \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{e^{-ks} W_n^\pm(s) ds}{\sqrt{x+s}(x+s)} + \right. \\ + \left. \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} \frac{e^{-ks} V_n^\pm(s) ds}{(x+s)^{3/2}} \right\} \mp \frac{1}{2} \sum_{n=m+1}^N \left\{ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{e^{-ks} W_n^\pm(s) ds}{(s-x)^{3/2}} + \right. \\ + \left. \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} \frac{e^{-ks} V_n^\pm(s) ds}{(s-x)^{3/2}} \right\} \mp \frac{1}{2} \int_{\beta_m}^{\alpha_{m+1}} \frac{e^{-ks} V_m^\pm(s) ds}{(s-x)^{3/2}} = \quad (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\sqrt{k}e^{-kx}\varphi^\pm(x) - \frac{e^{-kx}\sqrt{\pm 1}}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^N \left\{ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} W_n^\pm(s) \int_0^\infty \mu(\tau)\sqrt{\tau^2+k^2} \times \right. \\
 &\quad \times p^\pm(\tau s)\chi^\pm(\tau x) d\tau ds + \\
 &\quad \left. + \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} V_n^\pm \int_0^\infty \mu(\tau)\sqrt{\tau^2+k^2} p^\pm(\tau, s)\chi^\pm(\tau x) d\tau ds \right\}, \\
 &\quad m = \overline{1, N}, \quad x \in \tilde{\Sigma}. \tag{18}
 \end{aligned}$$

Подставляя (15) в первое уравнение (14), получим

$$\begin{aligned}
 &\int_{\beta_m}^x \frac{V_m^\pm(t)e^{kt} dt}{\sqrt{x-t}} + \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \frac{W_m^\pm(t)e^{kt} dt}{\sqrt{x-t}} + \\
 &\sum_{n=1}^{m-1} \left[ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{W_n^\pm(t)e^{kt} dt}{\sqrt{x-t}} + \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} \frac{V_n^\pm(t)e^{kt} dt}{\sqrt{x-t}} \right] = 0, \quad x \in \Sigma, \quad m = \overline{1, N}. \tag{19}
 \end{aligned}$$

При  $m = 1$  первое уравнение (14) удовлетворяется тождественно. Используя формулы обращения Абеля [13]

$$\int_x^d \frac{f(t) dt}{\sqrt{t-x}} = \varphi(x), \quad f(t) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^d \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{x-t}}, \tag{20}$$

$$c < x < d \qquad c < t < d$$

$$\int_c^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{x-t}} = \varphi(x), \quad f(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_c^t \frac{\varphi(x) dx}{\sqrt{t-x}}. \tag{21}$$

$$c < x < d \qquad c < t < d$$

Запишем уравнение (19) в виде

$$\int_{\beta_m}^x \frac{V_m^\pm(t)e^{kt} dt}{\sqrt{x-t}} = \Phi_m^\pm(x), \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi_m^\pm &= - \int_{\alpha_m}^{\beta_m} \frac{W_m^\pm(s)e^{ks} ds}{\sqrt{x-s}} - \\
 &- \sum_{n=1}^{m-1} \left[ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{W_n^\pm(s)e^{ks} ds}{\sqrt{x-s}} + \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} \frac{V_n^\pm(s)e^{ks} ds}{\sqrt{x-s}} \right]
 \end{aligned} \tag{23}$$

и используем (21). Получим

$$V_m^\pm(t) = \frac{e^{-kt}}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{\beta_m}^t \frac{\Phi_m^\pm(x) dx}{\sqrt{t-x}}. \quad (23)$$

Подставляя в (23)  $\Phi_m^\pm(x)$ , меняя порядок интегрирования и используя соотношение

$$\frac{d}{dt} \int_{\beta_m}^t \frac{dx}{\sqrt{t-s}\sqrt{x-s}} = \frac{\sqrt{\beta_m-s}}{(t-s)\sqrt{t-\beta_m}}, \quad (24)$$

получим

$$V_m^\pm(t) + \int_{\alpha_m}^{\beta_m} W_m^\pm(s) M_m(s, t) ds + \sum_{n=1}^{m-1} \left[ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} W_n^\pm M_n(s, t) ds + \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} V_n^\pm(s) M_n(s, t) ds \right] = 0, \quad t \in \tilde{\Sigma}, \quad m = \overline{1, N}, \quad (25)$$

где

$$M_n(s, t) = e^{k(s-t)} \frac{\sqrt{\beta_m-s}}{(t-s)\sqrt{t-\beta_m}}$$

Аналогично преобразуем и уравнение (18). Получим

$$\begin{aligned} & \mp W_m^\pm(t) + \sum_{n=1}^N \left[ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} W_n^\pm(s) R_n(s, t) ds + \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} V_n^\pm(s) R_n(s, t) ds \right] \pm \\ & \pm \sum_{n=m+1}^N \int_{\alpha_n}^{\beta_n} W_n^\pm(s) L_n(s, t) ds \pm \sum_{n=m}^N \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} V_n^\pm(s) L_n(s, t) ds - \\ & - \sum_{n=1}^N \left[ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} W_n^\pm N_n^\pm(s, t) ds + \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} V_n^\pm(s) N_n^\pm(s, t) ds \right] = \\ & = h_m^\pm(t) + C_m e^{kt}, \quad t \in \Sigma, \quad m = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$R_m(s, t) = \frac{e^{k(t-s)}}{2\pi} \int_t^{\beta_m} \frac{e^{-2kx} dx}{\sqrt{x-t}(s+x)^{3/2}}, \quad (27)$$

$$L_m(s, t) = \frac{e^{k(t-s)} \sqrt{\beta_m-t}}{\pi(t-s)\sqrt{s-\beta_m}} \quad (28)$$

$$N_m^\pm(s, t) = \frac{\sqrt{\pm 1}}{\pi^{3/2}} e^{kt} \int_0^\infty \mu(\tau) \sqrt{\tau^2 + k^2} p^\pm(\tau, s) \int_t^{\beta_m} \frac{e^{-kx} \chi^\pm(\tau x)}{\sqrt{x-t}} dx dt, \quad (29)$$

$$h_m^\pm(t) = \frac{\sqrt{k} e^{kt}}{\pi} \int_t^{\beta_m} \frac{e^{-kx} \varphi^\pm(x)}{\sqrt{x-t}} dx. \quad (30)$$

В правые части уравнений (26) входят  $N$  произвольных постоянных  $C_m$ , которые определяются следующим образом. Чтобы функции  $V_m^\pm(t)$  оставались конечными при  $t \rightarrow \infty$ , необходимо, в силу (25), потребовать существование конечного предела

$$\lim_{t \rightarrow \beta_m + 0} \left\{ \int_{\alpha_m}^{\beta_m} W_m^\pm(s) M_m(s, t) ds + \sum_{n=1}^{m-1} \left[ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} V_n^\pm(s) M_n(s, t) ds + \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} V_n^\pm(s) M_n(s, t) ds \right] \right\}. \quad (19)$$

Анализ поведения при  $t \rightarrow \beta_m + 0$  стоящих здесь интегралов показывает, что это требование эквивалентно следующему

$$\int_{\alpha_m}^{\beta_m} \frac{W_m^\pm(s) e^{ks} ds}{\sqrt{\beta_m - s}} + \sum_{n=1}^{m-1} \left[ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \frac{W_n^\pm(s) e^{ks} ds}{\sqrt{\beta_m - s}} + \int_{\beta_m}^{\alpha_{n+1}} \frac{V_n^\pm(s) e^{ks} ds}{\sqrt{\beta_m - s}} \right] = 0. \quad (20)$$

Это условие и служит для определения постоянных  $C_m$ .

Ядро  $R_m(s, t)$  можно выразить через неполные функции Макдональда

$$R_m(s, t) = \frac{2k}{\pi \delta_m} e^{-zch(\delta_m)} \operatorname{th} \frac{\delta_m}{2} + \frac{2k}{\pi} [K_1(\delta_m, z) - K_0(\delta_m, z)], \quad (21)$$

где  $z = k(s+t)$ ,  $\delta_m = \operatorname{ar} \operatorname{ch} [1 + 2(\beta_m - t)/(s+t)]$ ,  $K_0(\delta_m, z)$  и  $K_1(\delta_m, z)$  — неполные функции Макдональда

$$K_0(\delta_m, z) = \int_0^{\delta_m} e^{-zch(t)} dt, \quad K_1(\delta_m, z) = \int_0^{\delta_m} e^{-zch(t)} ch(t) dt. \quad (22)$$

Таким образом, краевая задача (5), в конечном итоге, свелась к решению системы  $2N$  интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода относительно  $2N$  вспомогательных функций  $W_m(t)$ ,  $V_m(t)$ . При этом искомые функции  $u_2^\pm$  выражаются через  $W_m(t)$ ,  $V_m(t)$  следующим образом

$$u_2^\pm(x, y) = \sum_{n=1}^N \left[ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} W_n^\pm(t) z^\pm(x, y; t) dt + \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} V_n^\pm(t) Z^\pm(x, y; t) dt \right], \quad (23)$$

где

$$Z^{\pm}(x, y; t) = \frac{\sqrt{\pm 1}}{\sqrt{\pi k}} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} [\sqrt{\tau^2 + k^2}(d - y)]}{\operatorname{sh}(d\sqrt{\tau^2 + k^2})} p^{\pm}(\tau, t) \chi^{\pm}(\tau x) d\tau.$$

Точно также находятся и функции  $u_1^{\pm}$ , которые имеют вид

$$u_1^{\pm}(x, y) = \int_0^{\infty} \frac{R^{\pm}(\tau) \operatorname{ch} [\sqrt{\tau^2 + k^2}(d - y)]}{\operatorname{ch}(d\sqrt{\tau^2 + k^2})} \chi^{\pm}(\tau x) d\tau +$$

$$+ \sum_{n=1}^N \left[ \int_{\alpha_n}^{\beta_n} \tilde{W}_n^{\pm}(t) \tilde{Z}^{\pm}(x, y; t) dt + \int_{\beta_n}^{\alpha_{n+1}} \tilde{V}_n^{\pm}(t) \tilde{Z}^{\pm}(x, y; t) dt \right],$$

где  $R^{\pm}(\tau)$  определяются равенствами (12), а

$$\tilde{Z}^{\pm}(x, y; t) = \frac{\sqrt{\pm 1}}{\sqrt{\pi k}} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch} [\sqrt{\tau^2 + k^2}(d - y)]}{\operatorname{ch}(d\sqrt{\tau^2 + k^2})} p^{\pm}(\tau, t) \chi^{\pm}(\tau x) d\tau.$$

Вспомогательные функции  $\tilde{W}_n^{\pm}$ ,  $\tilde{V}_n^{\pm}(t)$  являются решениями системы интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода (25), (26) в которых нужно лишь заменить  $\varphi^{\pm}(x)$  на  $g^{\pm}(x)$  (в выражении (30)) и в формуле (29) взять  $\mu(\tau)$  в виде

$$\mu(\tau) = -\frac{\exp(-d\sqrt{\tau^2 + k^2})}{\operatorname{ch}(d\sqrt{\tau^2 + k^2})}.$$

При  $m = 1$  полученные формулы и уравнения сильно упрощаются (в частности, вместо системы интегральных уравнений получается одно уравнение Фредгольма 2-го рода) и дают решение задачи о нахождении индуцированного магнитного поля (или электрического потенциала) в МГД-канале с одной парой симметрично расположенных электродов [10].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ватажин А.Б., Любимов Г.А., Регирер С.А. Магнитогидродинамические течения в каналах. - М.: Наука, 1970. - 672 с.
2. Вулис Л.А., Генкин А.Л., Фоменко Б.А. Теория и расчет магнитогазодинамических течений. - М.: Атомиздат, 1971. - 383 с.
3. Козыренко В.Е. Некоторые вопросы движения плазмы в плоских МГД-каналах. // Современные вопросы гидродинамики. - К.: Наукова Думка, 1967. - С. 107 - 114.
4. Козыренко В.Е. Исследование некоторых краевых задач, описывающих движение проводящей жидкости в продольном магнитном поле. // Магнитная гидродинамика. - 1967. - №2. - С. 50 - 60.

5. Игнатенко М.М., Кириллов В.Х., Козыренко В.Е., Копейкин Э.К. К исследованию продольного концевоего эффекта в МГД-каналах при произвольных числах  $R_m$ .— Сб. материалов к V Таллинскому совещанию по электротехнике жидких проводников.— Таллин, 1975.— вып.1.— С. 127 – 137.
6. Лаврентьев И.В. К постановке и решению задач о распределении электрических и магнитных полей в МГД-каналах при конечных  $R_m$ . // Восьмое Рижское совещание по магнитной гидродинамике.— Рига: Зинатне, 1975.— Т. 2.— С. 86 – 88.
7. Лаврентьев И.В. Интегральные характеристики МГД-канала при произвольных значениях  $R_m$ . // Седьмое Рижское совещание по магнитной гидродинамике.— Рига: Зинатне, 1972.— Т. 2.— С. 165.
8. Дегтярев Л.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Расчет магнитных полей в движущейся проводящей среде. // Третий Всесоюзный съезд по прикладной и теоретической механике.— Москва: АН СССР.— 1968.— С. 113.
9. Кириллов В.Х. Электрическое поле в магнитогидродинамическом канале прямоугольного сечения с конечными электродами. // Материалы VI Рижского совещания по магнитной гидродинамике.— Рига: Зинатне.— 1968.— С. 113 – 115.
10. Легейда В.И. Расчет электрических, магнитных и температурных полей в каналах МГД-устройств при  $R_m \geq 1$ . // Восьмая международная конференция по МГД-преобразованию энергии.— Москва, 1983.— Т. 4.— С. 102 – 104.
11. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Применение парных интегральных уравнений к задаче дифракции электромагнитных волн на плоском проводящем экране со щелью. // Журн. тех. физ.— 1971.— Т. 41.— №7.— С. 1329 – 1339.
12. Лебедев Н.Н., Скальская И.П. Применение парных интегральных уравнений к задаче дифракции электромагнитных волн на тонкой проводящей ленте. // Журн. тех. физ.— 1972.— Т. 42.— №4.— С. 681 – 690.
13. Зильберглейт А.С. Применение метода парных интегральных уравнений к задаче дифракции электромагнитных волн на идеальном плоском экране с четным числом симметрично расположенных щелей. // Журн. тех. физ.— 1975.— Т. 45.— №3.— С. 463 – 470.

## Устойчивость равномерных вращений системы шарнирно связанных твердых тел

Губарева В. Ф.

Донецкий государственный университет

Исследуется устойчивость вращений системы двух связанных твердых тел, одно из которых имеет неподвижную точку. После специальной замены переменных система уравнений движения становится автономной. Ее характеристическое уравнение дает возможность получить необходимые условия устойчивости и сравнить их с достаточными условиями.

Устойчивые равномерные вращения как твердых тел, так и систем шарнирно связанных твердых тел, моделируют основные режимы работы многих устройств современной техники. Этим и объясняется многочисленное количество публикаций по данной проблеме.

В статье получены необходимые условия устойчивости равномерных вращений системы двух связанных сферическими шарнирами твердых тел вокруг главных осей, несущих центры масс, в предположении, что тела динамически несимметричны. Тела имеют общую точку  $O_2$ . Точка  $O_1$  главной оси первого тела неподвижна. Положение каждого тела характеризует набор углов Крылова [1, 5]  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ , где  $i = 1, 2$ . Лагранжиан для рассматриваемой системы тел имеет вид

$$\begin{aligned}
 L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 [ & A_i (\dot{\alpha}_i \cos \beta_i \sin \gamma_i + \dot{\beta}_i \cos \gamma_i)^2 + B_i (\dot{\alpha}_i \cos \beta_i \cos \gamma_i - \dot{\beta}_i \sin \gamma_i)^2 + \\
 & + C_i (\dot{\alpha}_i \sin \beta_i)^2 - \dot{\gamma}_i^2 ] + \\
 & + \mu [\dot{\alpha}_1 \dot{\alpha}_2 \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \dot{\alpha}_1 \dot{\beta}_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cos \beta_1 \sin \beta_2 - \\
 & - \dot{\alpha}_2 \dot{\beta}_1 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cos \beta_1 \sin \beta_2 + \dot{\beta}_1 \dot{\beta}_2 (\cos(\alpha_1 - \alpha_2) \sin \beta_1 \sin \beta_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2)] - \\
 & - (\mu_1 \cos \alpha_1 \cos \beta_1 + \mu_2 \cos \alpha_2 \cos \beta_2).
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь  $C_i, B_i, A_i$  — главные моменты инерции,  $c_i$  — координата центра масс,  $m_i$  — масса первого ( $i=1$ ) и второго ( $i=2$ ) тел,  $S$  — длина вектора  $O_1O_2$ ,  $\mu = m_2 c_2 S$ ,  $\mu_1 = (m_1 c_1 + m_2 S)g$ ,  $\mu_2 = m_2 c_2 g S$ .

5. Получим систему уравнений движения в виде уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}_i} - \frac{\partial L}{\partial \alpha_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}_i} - \frac{\partial L}{\partial \beta_i} = 0, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}_i} - \frac{\partial L}{\partial \gamma_i} = 0, \quad (i = 1, 2) \quad (2)$$

которой отвечает частное решение

$$\alpha_i = \beta_i = 0, \quad \gamma_i = \omega t, \quad (i = 1, 2). \quad (3)$$

Этому решению соответствуют равномерные вращения системы твердых тел со скоростью  $\omega$  вокруг главной оси, коллинеарной вектору силы тяжести.

Запишем систему (2) как систему уравнений первого приближения в окрестности решения (3). Ее коэффициенты будут периодическими функциями времени. Воздействуя на полученную систему невырожденным линейным преобразованием основных переменных, получим автономную систему дифференциальных уравнений [2, 5, 6]:

$$B_1 \ddot{u}_1 + \mu \ddot{u}_2 + (A_1 + B_1 - C_1) \omega \dot{v}_2 + (\omega(C_1 - A_1) - \mu_1) u_1 - \mu \omega^2 u_2 = 0,$$

$$A_1 \ddot{v}_1 + \mu \ddot{v}_2 + (A_1 + B_1 - C_1) \omega \dot{u}_2 + (\omega(C_1 - B_1) - \mu_1) v_1 - \mu \omega^2 v_2 = 0,$$

$$B_2 \ddot{u}_2 + \mu \ddot{u}_1 + (A_2 + B_2 - C_2) \omega \dot{v}_1 + (\omega(C_2 - A_2) - \mu_2) u_2 - \mu \omega^2 u_1 = 0,$$

$$A_2 \ddot{v}_2 + \mu \ddot{v}_1 + (A_2 + B_2 - C_2) \omega \dot{u}_1 + (\omega(C_2 - B_2) - \mu_2) v_2 - \mu \omega^2 v_1 = 0.$$

Разыскивая решение этой автономной системы дифференциальных уравнений в виде  $X_j \exp(i\lambda_k t)$ , найдем ее характеристическое уравнение, полагая, что для  $i = 1, 2$  имеет место  $B_i = A_i + \epsilon_i \epsilon$ , где  $\epsilon_i$  — постоянные величины, а  $\epsilon > 0$  — параметр, характеризующий динамическую несимметрию,

$$f_4(\epsilon) \lambda^8 + f_3(\epsilon) \lambda^6 + f_2(\epsilon) \lambda^4 + f_1(\epsilon) \lambda^2 + f_0 = 0, \quad (4)$$

где

$$f_4(\epsilon) = (A_1 A_2 - \mu^2)(B_1 B_2 - \mu^2),$$

$$f_m(\epsilon) = a_m(\omega^2) \epsilon_1 \epsilon_2 \epsilon^2 + (\epsilon_1 b_{m1}(\omega^2) + \epsilon_2 b_{m2}(\omega^2)) \epsilon + c_m^2(\omega^2), \quad m = 0, \dots, 3.$$

Если оба рассматриваемых тела динамически симметричны, то уравнение (4) соответствует исследованному в [5, 6]. Так как моменты инерции  $A_i$  и  $B_i$  входят в  $f_m(\epsilon)$  симметрично, то если  $A_i > B_i$  просто переобозначаем их. Будем полагать, что  $B_i \geq A_i$ , откуда  $\epsilon_i \epsilon \geq 0$ , а значит,  $\epsilon_i \geq 0$ .

Необходимыми условиями устойчивости исследуемых вращений будут ограничения на параметры, при которых все корни характеристического уравнения (4) будут действительными. Это возможно, если все  $\lambda^2$  будут неотрицательными и действительными.

Согласно теореме Виета, необходимые условия неотрицательности  $\lambda^2$  обеспечиваются одновременным выполнением неравенств

$$f_3/f_4 < 0, \quad f_2/f_4 < 0, \quad f_1/f_4 < 0, \quad f_0/f_4 < 0. \quad (5)$$

В [6] показано, что  $A_1 A_2 - \mu^2 > 0$ . Выше было отмечено, что  $B_i \geq A_i$ . Отсюда получим:  $f_4 > 0$ . Тогда неравенства (5) переходят в

$$f_3 < 0, \quad f_2 < 0, \quad f_1 < 0, \quad f_0 < 0. \quad (6)$$

Для того чтобы все корни  $\lambda^2$  уравнения (4) были действительными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия Покровского [4]:

$$\begin{aligned} DD &= f_3^2/16 - f_4 f_2/6 > 0, \\ FF &= 12(f_3^2/16 - f_4 f_2/6)^2 - f_4^2(f_0 f_4 - f_1 f_3/4 + f_2^2/12) > 0, \\ GG &= (f_0 f_4 - f_1 f_3/4 + f_2^2/12)^3 - \\ &\quad - 27(f_0 f_2 f_4/6 + f_1 f_2 f_3/48 - f_1^2 f_4 - f_0 f_3^2/16 - f_2^3/216)^2 > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Из неравенств треугольника [3] имеем ограничения на  $\epsilon$ , учитывая  $\epsilon > 0$ :

$$p_1 < \epsilon < p_2, \quad (8)$$

где  $p_1 = \max(C_i - 2A_i)/\epsilon_i; 0$ ,  $p_2 = \min C_i/\epsilon_i$ ,  $i = 1, 2$ .

Полученные в [1] достаточные условия устойчивости исследуемых равномерных вращений представляют собой систему неравенств

$$(C_1 - D_1)\omega^2 - \mu_1 > 0, \quad [(C_1 - D_1)\omega^2 - \mu_1][(C_2 - D_2)\omega^2 - \mu_2] - \mu^2 \omega^4 > 0, \quad (9)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  равны соответственно  $A_1$  и  $A_2$ , либо  $B_1$  и  $B_2$ .

Согласно [1], при

$$(C_1 - A_1)(C_2 - A_2) - \mu^2 > 0 \quad (10)$$

неравенства (9) несовместны. Но можно привести численные примеры тел с распределением масс, удовлетворяющим условиям (10), то есть достаточные условия устойчивости не выполняются, для которых необходимые условия устойчивости (6)–(7) выполнены.

1-й случай — спущутые тела ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1$ ,  $\mu = 1$ ,  $\mu_1 = 4$ ,  $\mu_2 = 0.25$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 2$ ,  $C_1 = 2$ ,  $C_2 = 4$ ):

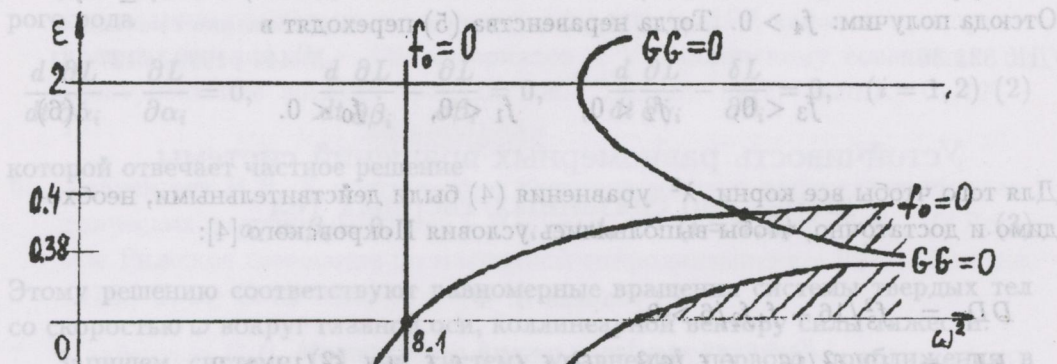


Рис.1

2-й случай — вытянутые тела ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1, \mu = 0.05, \mu_1 = 0.01, \mu_2 = 0.05, A_1 = A_2 = 1, C_1 = C_2 = 0.09$ ):

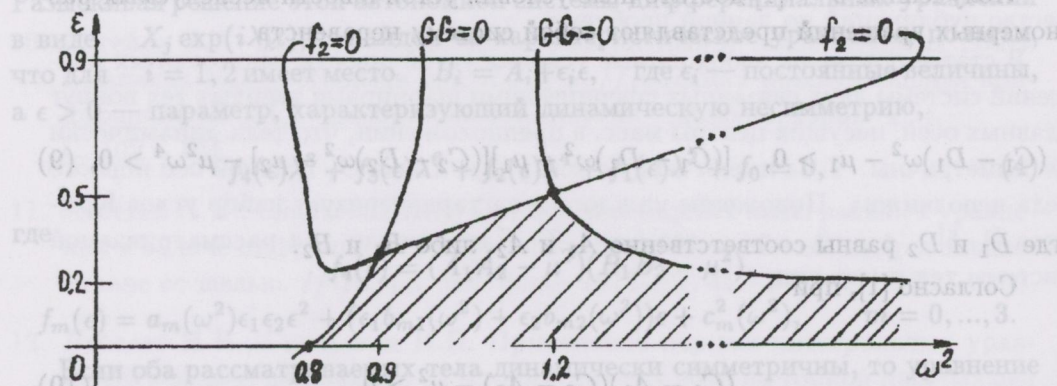


Рис.2

3-й случай — сильно вытянутые тела ( $\epsilon_1 = \epsilon_2 = 1, \mu = 1, \mu_1 = 4, \mu_2 = 0.25, A_1 = 1, A_2 = 2, C_1 = C_2 = 0.001$ ):

$$f_1/f_2 < 0, f_2/f_3 < 0, \dots, f_{n-1}/f_n < 0, f_n/f_1 < 0. \quad (5)$$

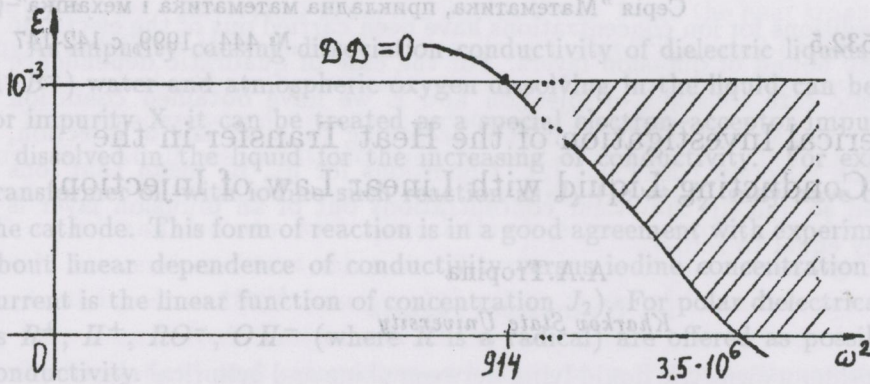


Рис.3

На рисунках области устойчивости построены с учетом ограничения (8).

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болграбская И. А. Об устойчивости равномерных вращений связки двух тел вокруг главных осей, несущих центр масс. // Механика твердого тела. - 1981, вып. 13. - С. 84-89.
2. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. - М.: Наука, 1966. - 530 с.
3. Маркеев А. П. Теоретическая механика. - М.: Наука, 1990. - 416 с.
4. Покровский П. М. Об алгебраических уравнениях в связи с алгебраическими функциями Вейерштрасса // Тр. отд-ния физ. наук. об-ва любителей естествознания. - 6, вып.1. - С.26-42. - К.: Наук. думка, 1977. - 160 с.
5. Савченко А. Я. Устойчивость стационарных движений механических систем. - К.: Наук. думка, 1977. - 160 с.
6. Савченко А. Я., Болграбская И. А., Кононыхин Г., А. Устойчивость движения систем связанных твердых тел. - К.: Наук. думка, 1991. - 160 с.

## Numerical Investigation of the Heat Transfer in the Poorly Conducting Liquid with Linear Law of Injection

A.A. Tropina

Kharkov State University

Electroconvection heat transfer in liquid dielectrics placed between plane and cylindrical electrodes has been investigated. It has been assumed that ions are generated due to dissociation of an impurity and an injection of charge carriers from metal electrodes. The temperature boundary layer is computed and a heat flux as a function of applied voltage and electrode diameter is determined. It has been shown that the suppression of heat transfer in the small DC voltages is caused by the formation of heteroions in the non-equilibrium layers near electrodes. For liquid with dissociation-injection conductivity variation of velocity with electrode diameter (which is experimentally observed) is described from the position of non-autonomous level of injection, when the charge density on the electrode is the linear function of an electric field.

### I. Formulation of the problem

It is known that the application of a DC electric field may induce the motion of dielectric liquid so called the electrohydrodynamic (EHD) convection, when the liquid starts from the electrodes and generates flow front, which moves to the counter electrodes. The appearance of volume charge and accordingly, Coulomb forces in such liquids is connected with two different ionization mechanisms [1]. Firstly, in liquid volume two impurity ions can be formed due to dissociation of ion pairs  $A^+B^- \rightleftharpoons A^+ + B^- (k_d, \alpha_p)$ : where  $k_d$  is the kinetic rate constant of dissociation,  $\alpha_p$  is the kinetic rate constant of recombination. Secondly, negative ions  $X^-$  can be formed on the cathode due to reaction of electrochemical injection such as  $X + e^- \rightleftharpoons X^-$ . It has been assumed moreover, that the interaction of injection and impurity ions may have occurred due to reaction  $A^+ + X^- \rightleftharpoons A + X(\alpha_1)$ , where  $\alpha_1$  is the kinetic rate constant of recombination of ions  $A^+$ ,  $X^-$ . Generation of ion pairs  $A^+X^-$ , injection of impurity ions  $A^+$ ,  $B^-$  and anode injection of positive ions are neglected here.

For weak electrolytes  $k_d$  is modified by the electric field according to a relation proposed by Onzager. As for  $\alpha_p$ ,  $\alpha_1$  these coefficients are given by Langevin relation:  $\alpha_p = 4\pi e(b_1 + b_2)/\epsilon$ ,  $\alpha_1 = 4\pi e(b_1 + b_3)/\epsilon$ , where  $e$  is the charge of an

electron,  $\varepsilon$  is the dielectric constant,  $b_i (i = 1, 3)$  are the mobilities of ions  $A^+$ ,  $B^-$ ,  $X^-$ .

As impurity causing dissociation conductivity of dielectric liquids (impurity  $A^+B^-$ ) water and atmospheric oxygen dissolving in the liquid can be used. As for impurity X, it can be treated as a special electron-acceptor impurity which is dissolved in the liquid for the increasing of conductivity. For example, for transformer oil with iodine such reaction as  $J_2 + e \rightleftharpoons J_2^-$  may have occurred on the cathode. This form of reaction is in a good agreement with experimental data about linear dependence of conductivity versus iodine concentration (injection current is the linear function of concentration  $J_2$ ). For polar dielectrics such ions as  $R^+$ ,  $H^+$ ,  $RO^-$ ,  $OH^-$  (where  $R$  is a radical) are offered as possible ions of conductivity.

Taking into account non-equilibrium of dissociation-recombination processes in the bulk of electrolyte the system of equations describing the stationary EHD-flow of poorly conducting liquid are [1]:

$$\rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = -\nabla p + \eta \Delta \vec{V} + q \vec{E} \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = 4\pi q \quad (2)$$

$$\vec{E} = -\nabla \Phi \quad (3)$$

$$q = e(n_1 - n_2 - n_3)$$

$$\operatorname{div}(b_1 n_1 \vec{E} + n_1 \vec{V}) = k_d N - \alpha_p n_1 n_2 - \alpha_1 n_1 n_3 \quad (4)$$

$$\operatorname{div}(-b_2 n_2 \vec{E} + n_2 \vec{V}) = k_d N - \alpha_p n_1 n_2 \quad (5)$$

$$\operatorname{div}(-b_3 n_3 \vec{E} + n_3 \vec{V}) = -\alpha_1 n_1 n_3 \quad (6)$$

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (7)$$

Here  $E = U/d$  is the field strength,  $d$  is the electrode spacing,  $U$  is the applied voltage,  $n_i (i = 1, 3)$  are the volume concentrations of ions  $A^+ (i = 1)$ ,  $B^- (i = 2)$ ,  $X^- (i = 3)$ ,  $\eta$  is the dynamic viscosity,  $\rho$  is the mass density,  $\Phi$  is the electric potential.

The diffusion term in equations (4)-(6) is neglected. The validity of such approximation is so long as  $U \gg k_b T/e \sim 0.03V$ . It has been also assumed that the effects of thermal convection are negligible as compared with electroconvection. Such approximation takes place for  $E \gg \alpha \Delta T g \rho / (e \eta_c) \sim 1$  kV (cm<sup>-1</sup>). Here  $\alpha$  is the coefficient in the linear dependence of density on temperature. In that case temperature is determined by the following equation:

$$\vec{V} \nabla T = \chi \Delta T \quad (8)$$

Boundary conditions are:

$$\text{anode} : \Phi = 1, T = T_a, V = 0, n_2 = 0 \quad (9)$$

$$\text{cathode : } \Phi = 0, T = T_c, V = 0, n_1 = 0, n_3 = \eta_c E. \quad (10)$$

Boundary conditions for ion concentrations have been carried out of the electrode surfaces to the bound of diffusion layers. For the case of quadratic dependence between kinetic rate constant of injection and  $E$  we have obtained condition (10) for  $n_3$ . It means that ions are emitted according to linear law of injection, where  $\eta_c$  is the injection coefficient [2]. Conditions for  $n_1, n_2$  mean that ions are discharged so quickly that their concentrations out of an diffusion layer is approximately equal to zero.

## II. Numerical results

Let us consider a dielectric liquid lying between plane and cylindrical electrodes. We were interested in the variation of the heat flux and velocity with applied voltage and cathode diameter. Mathematical treatment has been performed with dimensionless variables defined as  $V' = V/V_0, p' = p/p_0, T' = T/T_0, E' = E/E_0, n'_1 = n_1/n_0, n'_2 = n_2/n_0, n'_3 = n_3/n_{30}, V_0 = b_2 E_0, E_0 = U/d, p_0 = \rho(b_2 E_0)^2, T = (T - T_c)/(T_a - T_c), n_{30} = \eta_c E_0$ .

All the equations have been written in dimensionless units and the following set of parameters has been obtained:  $Re = b_2 U/\nu, \xi = 4\pi e\eta_c d/\varepsilon, \beta_1 = b_1/b_2, \beta_3 = b_3/b_2, S = \eta_c \nu/(n_0 b_2 d), Pr = \nu/\chi$ . Parameters  $Re, S, \xi$  determine, respectively, the level of an applied voltage, the relation between injection and dissociation conductivity, the level of an injection.

(Solutions of the system (1)-(8) have been determined by the numerical integration. All physical and chemical constants such as  $\nu, \rho, b$  have been taken corresponding to ones for mixture of transformer oil with iodine. The analysis of current density  $j$ -voltage characteristic for such liquid has been performed and the value of  $e\eta_c \sim 0.5 \text{ cm}^{-1}$  has been obtained for  $E \sim 20 \text{ kV (cm}^{-1})$  (for small DC voltage  $\eta_c \sim 0.05 \text{ cm}^{-1}$ ). As for temperature of electrodes it has been supposed that  $T_a, T_c$  are constants.

Successive over-relaxation method has been used for solving stream function, temperature and electrical potential equations. The vorticity and concentrations equations have been solved by fractional step method. Polar coordinates for the region around cylindrical cathode have been used, in the rest of the region we have used Cartesian coordinates. The step of Cartesian grid had been chosen so that the cell centers of polar grid coincided with ones of Cartesian grid in the bound of these grids.

The numerical accuracy has been tested on the grids ( $I \times J$ )  $51 \times 33, 61 \times 37, 71 \times 41, 81 \times 45$  with the step  $\Delta x$  on symmetry axis accordingly  $\Delta x = 0.06, 0.04, 0.03, 0.02$ . Furthermore, the grid  $87 \times 33$  with irregular point distribution (points are concentrated near electrodes with step  $\Delta x(\Delta r) = 0.01 = d/100$ ) has been used. The computations have shown that the distributions of velocity, ion concentrations and electric potential practically aren't changed with grid size reduction from  $\Delta x = 0.06$  till  $\Delta x = 0.01$ . But for numerical calculations of temperature only grid with  $\Delta x = 0.01$  has given good results. It is connected

with the accurate computation of the temperature boundary layers forming on the electrodes. For typical dielectric liquids  $Pr \gg 1$  and the heat transfer in such liquids is fulfilled through the boundary layers. Implicit second-order scheme and marching method have been used for temperature boundary layer equation.

Since temperature distribution is determined by the intensity of forming EHD-flows, first of all, we investigated regularities of these flows. Investigations have been carried out for two cases, i.e. for liquid with unipolar injection conductivity ( $S = \infty$ ) and for one with dissociation-injection conductivity ( $S \leq 2$ ). It should be mentioned that value  $S = 2$  corresponds to the insulating liquid with conductivity  $\sigma = 10^{-14} \text{ (ohm cm)}^{-1}$ . Two types of boundary conditions for  $n_3$  have been tested: first one, when  $n_3 = \text{const}$  on the cathode (autonomous level of injection) and second one, when  $n_3 = \eta_c E$  (non-autonomous level of injection). Numerical results were compared with experimental data concerning EHD-convection of transformer oil with iodine concentration  $10^{-4} \text{ g cm}^{-3}$  in the plane-cylinder electrode system with electrode spacing  $d=1.5\text{cm}$  and cathode diameter ranging from 0.05 cm till 0.5 cm. The calculations have shown that the flow pattern and velocity distributions for liquid with dissociation-injection conductivity (at  $Re = 5$ ,  $\beta_1 = \beta_3 = 1$ ,  $\xi = 4.5$ ,  $S = 0.5$ ) are in a good agreement with experimental data [3]. It has been found that the shape of velocity profiles along the symmetry axis (which is perpendicular to electrodes) doesn't depend on cathode diameter but velocity values decrease with diameter. It should be noted that for non-autonomous level of injection the deviations from experimental data for different electrode diameters don't exceed 5-7 per cent, at the same time similar deviations for  $n_3 = \text{const}$  are 20-30 per cent (Fig.1).

Figure 2 represents a plot of  $Q' = Q/Q_0$  versus number  $Re$  for unipolar conductivity at  $\xi = 4.5$ . Here  $Q$  is a heat flux from anode at arbitrary values of electric field,  $Q_0$  is a heat flux at  $E = 0$ . The curves 1,2,3 correspond to  $Pr = 10, 100, 1000$ . It is seen, that the dimensionless heat flux for low voltage is the linear function of applied electric field, but for  $Re \geq 4$  it relatively slowly varies and for  $Re > 7$  it becomes constant. It should be noted that such form of dependence  $Q'$  versus voltage is often observed in experiments [4]. It is also experimentally observed that for some dielectric liquids (silicone oil and kerosene) in the small DC voltages heat flux is decreased with electric field. Such suppression of the heat transfer can be connected with the interaction between thermal and electric convection but numerical computations have shown that it can be treated from the position of dissociation-injection conductivity model of dielectric liquids.

For example, for the case of high impurity conductivity and  $Re < 0.2$ ,  $\xi = 0.15$   $b_3 < b_1, b_2$  we have found that non-equilibrium bipolar layer is formed near cathode (out of diffusion layer). In this layer liquid practically doesn't move (for  $b_1 = b_2 = b_3$ ) or moves towards the electrode (for  $b_3 \ll b_1, b_2$ ). For both cases heat flux is decreased with voltage. The reduction of injection ion mobility (parameter  $b_3$ ) as compared with impurity ion mobility causes the decrease of the region with negative charge within bipolar layer. It is connected with the

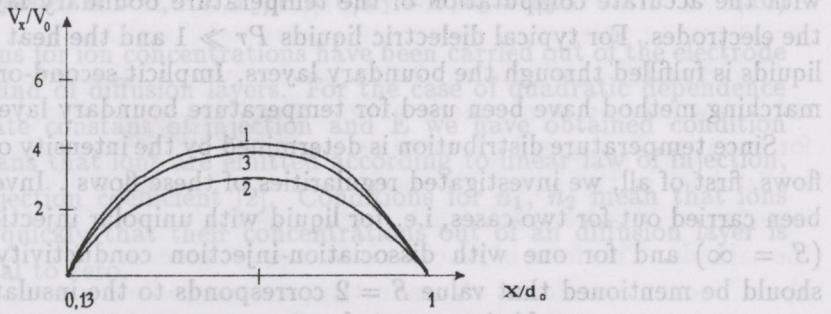


Fig. 1. Variation with distance of dimensionless axial velocity ( $Re=5$ ,  $\xi=4.5$ ,  $b_3=b_1=1$ ,  $S=0.5$ ,  $d_0=0.27$ ): 1 - experimentally observed, 2 -  $n_3=\text{const}$ , 3 -  $n_3=E \eta_0$ .

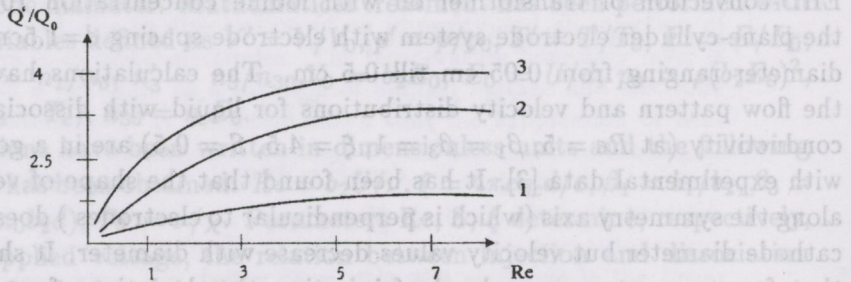


Fig. 2. Variation of heat flux with applied voltage.

recombination of injection ions, when the number of ions recombined is more than for case of equal mobilities. As a result Coulomb forces change their direction and the heat flux is decreased. When  $Re$  reaches some critical points ( $Re \sim 0.1$ ) generation of injection ions becomes prevalent, intensity of EHD flow and heat flux are increased with voltage. It should be noted that early such suppression of heat flux in the small DC voltages was described by the interaction between EHD and thermal convection. Our investigations carried out for the case of negligible thermal convection have shown that this phenomenon also takes place.

### III. Conclusions

1. The variation of cathode diameter doesn't influence on the kinematics of EHD-flow (the shape of velocity profiles isn't changed).
2. Good quantitative agreement with experimental data concerning EHD-convection of transformer oil with iodine is reached for the case of non-autonomous level of injection.

3. The suppression of the heat transfer in the small DC voltages can be connected with the interaction between ions in the non-equilibrium layer near the injection electrode.
4. The dissociation-injection conductivity model of dielectric liquids has shown a good agreement with experimental data for different liquids.

## REFERENCES

1. Zhakin A.I. Electrohydrodynamics of liquid dielectrics on the basis of a dissociation-injection conductivity model// *Izvestija Akademii Nauk SSSR.- Mekhanika Zhidkosti i Gasa*(1986), N.4. - P.3-13.
2. Zhakin A.I., Tropina A.A. Electroconvection and heat transfer in liquid dielectrics // *Proceedings of Fifth International Conference of Fluid Mechanics.* - Cairo, Egypt. - 1995. - P.857-861.
3. Stishkov Yu.A., Ostapenko A.A. *Electrohidrodinamicheskie techeniya v zhidkih dielektrichah.*-L,1989.- 173 p.
4. Haque M.F., Mshelia E.D. Arajis Sigurds. Effect of electrical field on heat transfer in liquid dielectrics// *J.Physics.- Ser.D*(1992).- V.25, N.5.- P.740-744.

Вісник Харківського університету

Серія "Математика, прикладна математика і механіка"

УДК 519.812.3:581.454

№ 444, 1999, с.148-156

## Критерии оптимального функционирования ветвящихся транспортных систем живой природы

Н.Н.Кизилова, Н.А.Попова

*Харьковский государственный университет**Харьковский аэрокосмический университет им. Н.Е.Жуковского (ХАИ)*

В работе проведен анализ критериев оптимальности, которые могут лежать в основе строения ветвящихся транспортных систем тканей растений и животных. Для разных пар критериев проведено решение соответствующих экстремальных задач и получены соотношения для площадей поперечного сечения участков оптимального в смысле выбранных критериев ветвящегося трубопровода. Проведено сравнение теоретических соотношений с аналогичными, полученными путем измерений на сосудисто-волокнистых пучках листьев разных типов.

Транспорт воды, кислорода, углекислого газа, питательных веществ и продуктов обмена в тканях животных осуществляется по ветвящимся системам артерий и вен. В тканях растений ветвящиеся транспортные русла представлены сосудисто-волокнистыми пучками листьев. Часть поперечного сечения каждой жилки листа занята сосудами ксилемы - проводящей тканью, обеспечивающей движение воды и растворенных в ней питательных веществ из почвы от корней растения к его верхушке, и сосудами флоэмы, обеспечивающей обратное движение растительного сока с продуктами фотосинтеза от листьев вниз, к другим органам растения. Характер ветвления сосудисто-волокнистых пучков разных видов растений специфичен и генетически детерминирован. Строение сети артерий разных органов имеет свои особенности. Для количественного исследования геометрических параметров транспортных систем используют препараты из фиксированных формалином артериальных и венозных сосудов [1] или ангиограммы - рентгеновские снимки сосудов, заполненных рентгеноконтрастным веществом. Из листьев приготавливают специальные просветленные препараты с окрашенной сетью жилок [2,3].

При исследовании биологических объектов весьма полезными оказались модельные представления об их оптимальном устройстве и критериях функционирования. За время эволюции сердечно-сосудистая, дыхательная, опорно-двигательная и другие системы животных, а также соответствующие системы растений приспособились к выполнению своих функций, так что параметры

строения и работы этих систем хорошо согласуются с расчетами по соответствующим оптимальным моделям [4]. Для артериальных систем легких, мозга проведены довольно подробные измерения и расчеты, выявившие целый ряд оптимальных свойств, обеспечивающих минимальные затраты энергии при транспорте в каждую точку органа. При исследовании транспортных систем листьев ограничиваются как правило измерениями числа жилок на единицу поверхности (плотность жилкования), общей длины жилок, числом порядков ветвления [5]. В предыдущей работе [6] авторами проведено более детальное исследование геометрических параметров ветвящихся сосудисто-волокнистых пучков разных типов и проверено выполнение одного из возможных критериев оптимальности функционирования транспортной системы листьев. Обнаружено соответствие теоретических расчетов с результатами измерений на отсканированных препаратах листьев, а также подобие оптимальных критериев устройства транспортных систем растений и животных. В данной работе приведены результаты исследования других возможных критериев оптимальной работы транспортных систем, а результаты теоретических расчетов сравниваются с данными измерений, в том числе и собственных.

Для описания порядков ветвления нами использовалась методика, применяемая в медицине для анализа ангиограмм и препаратов сосудов. При этом самым мелким, визуально различимым жилкам приписывался первый порядок ветвления, а далее прослеживалась вся система жилок и при слиянии двух жилок одного ( $n$ -го) порядка образовавшаяся жилка получала номер  $n + 1$ , а при слиянии жилок  $n$ -го и  $n + 1$ -го порядка получался порядок  $n + 1$ . Затем нумерация обращалась, так что самые крупные жилки получали 1-й порядок ветвления. При таком подходе один порядок ветвления получают сосуды с близкими по величине диаметрами.

Среди оптимальных моделей артериального русла известна модель С.Мюррея [7], предполагающая, что геометрические параметры транспортной системы обеспечивают минимум суммарной энергии, рассеиваемой при движении крови, и энергии на поддержание системы сосудов, пропорциональной объему стенок сосудов или полному объему системы. При этом радиусы сосудов  $r_i$  до каждого ветвления ( $i = 0$ ) и после ветвления ( $i = 1, \dots, n$ ) связаны соотношением:

$$r_0^3 = \sum_{i=1}^n r_i^3 \quad (1)$$

Для пуазейлевского течения жидкости по системе сосудов, рассматриваемой как совокупность жестких трубок кругового сечения критерий оптимальности Мюррея выполняется при постоянном напряжении вязкого трения  $\tau$  на стенках труб разных радиусов. Поддержание движения с постоянным  $\tau$  в артериальных сосудах возможно, например, за счет активного изменения радиуса сосуда при сокращении гладких мышц в стенках и благодаря наличию механорецепторов, отслеживающих величину  $\tau$  на стенке сосуда. Для транспортных систем растений выполнение этого принципа оптимальности

не проверялось.

Еще одна модель оптимальной ветвящейся транспортной системы предложена в [8]. Рассматривается правильный трубопровод, в котором каждая труба  $n$ -го порядка разветвляется на  $m$  труб  $(n + 1)$ -го порядка, имеющих одинаковые длины  $l_n$  и площади поперечного сечения  $s_n$ . При этом область  $\Sigma_n$ , питаемая любой трубой  $n$ -го порядка вместе со всеми ее ответвлениями, делится на  $m$  равных и подобных исходной областей, питаемых каждой своей трубой  $(n + 1)$ -го порядка. Из геометрических свойств такого трубопровода для плоской задачи можно получить [8] для длин  $l_n$  труб  $n$ -го порядка:

$$l_n = m^{-n/2} \varphi_n L_0, \quad n = 0, \dots, N \quad (2)$$

где  $L_0$  — характерный линейный размер всей области, обеспечиваемой трубопроводом,  $\varphi_n$  — безразмерный параметр, отражающий соотношение между длиной трубы и размером питаемой ею области:

$$\varphi_n = l_n / \sqrt{\Sigma_n}.$$

В работе [8] исследована такая оптимальная модель ветвящегося трубопровода, для которой при фиксированном суммарном объеме  $V$  труб гидравлическое сопротивление  $R$  Пуазейлевскому течению вязкой жидкости минимально. Решение соответствующей экстремальной задачи позволяет получить зависимость между площадями труб соседних порядков ветвления. Полученные соотношения согласуются с результатами измерений длин и радиусов ветвящихся артериальных систем легких и мозга [1]. В работе [6] проверялось соответствие этой модели геометрическим характеристикам трех типов сосудисто-волокнистых пучков листьев растений. Поскольку представления о механике движения растительного сока по сосудам значительно более скудные, чем данные о механике кровотока, имеет смысл получить решения экстремальных задач и для других критериев оптимальности, представляющихся разумными для функционирования транспортных систем. Эти критерии — общая площадь поверхности  $S$  сосудов, поскольку движение компонентов жидкости между проводящими сосудами и клетками тканей происходит через поверхность трубопровода, а также мощность  $W$ , затрачиваемая на продвижение жидкости, полная сила вязкого трения  $F_{tr}$  на стенках труб и время движения  $T$  жидкости по ветвящейся системе труб до самых мелких сосудов и клеток питаемого органа или ткани. Течение крови по сосудам определяется разницей давлений на артериальном и венозном концах каждого участка трубопровода, а движение растительного сока по проводящим тканям — также разностью давлений, обеспечиваемой работой корневой системы и испарением воды с поверхности листьев (транспирацией). Будем использовать выражения для скорости течения, объемного расхода, трения на стенках для задачи Пуазейля о течении однородной несжимаемой вязкой жидкости по жесткой трубе кругового сечения под действием перепада давления  $\delta P_n = P_n - P_{n-1}$  и для одномерной задачи фильтрации жидкости в пористой среде по закону Дарси. Тогда для выбранных критериев с учетом (2) получим:

$$\begin{aligned}
 V &= \sum_{n=0}^N \pi r_n^2 l_n m^n = L_0 \sum_{n=0}^N m^{n/2} \varphi_n s_n \\
 S &= \sum_{n=0}^N 2\pi r_n l_n m^n = 2L_0 \sqrt{\pi} \sum_{n=0}^N m^{n/2} \varphi_n s_n^{1/2} \\
 R &= \frac{P_0 - P_{n+1}}{Q_0} = 8\pi\eta \sum_{n=0}^N r_n^\chi l_n m^{-n} = \xi L_0 \sum_{n=1}^N m^{-3n/2} \varphi_n s_n^{-\chi} \quad (3) \\
 W &= (P_0 - P_{n+1}) Q_0 = Q_0^2 \xi L_0 \sum_{n=1}^N m^{-3n/2} \varphi_n s_n^{-\chi} = Q_0^2 R \\
 F_{tr} &= \sum_{n=0}^N 2\pi r_n l_n m^n = Q_0 \xi \eta L_0 \sum_{n=0}^N m^{-n/2} \varphi_n s_n^{1-\chi} \\
 T &= \sum_{n=0}^N \frac{l_n}{v_n} = \sum_{n=0}^N \frac{l_n s_n}{Q_n} = \frac{L_0}{Q_0} \sum_{n=0}^N m^{n/2} \varphi_n s_n = \frac{V}{Q_0},
 \end{aligned}$$

где  $Q_0$  — полный объемный ток жидкости через трубопровод,  $\xi = 8/\pi$ ,  $\chi = 2$  для течения Пуазейля и  $\chi = 1$  для фильтрации,  $\eta$  и  $v$  — вязкость и скорость движения жидкости. Среди критериев в (3) независимыми оказываются только четыре, например,  $V$ ,  $S$ ,  $R$ ,  $F_{tr}$ . Исследуем выражения этих параметров в (3). Необходимым условием сходимости рядов в правых частях (3) является стремление к нулю их  $n$ -ых членов:

$$\begin{aligned}
 V_n &= m^{n/2} \varphi_n s_n \rightarrow 0 \\
 S_n &= m^{n/2} \varphi_n s_n^{1/2} \rightarrow 0 \\
 R_n &= m^{-3n/2} \varphi_n s_n^{-\chi} \rightarrow 0 \\
 F_n &= m^{-n/2} \varphi_n s_n^{1-\chi} \rightarrow 0
 \end{aligned} \quad (4)$$

Для разных пар  $(\Omega_1, \Omega_2)$  критериев из (3) найдем  $s_n$  из решения соответствующей экстремальной задачи с ограничением в виде равенства:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1(\bar{s}) &\rightarrow \min \\
 \Omega_2(\bar{s}) &= \Omega = \text{const} \\
 \bar{s} &= (s_0, \dots, s_N)
 \end{aligned} \quad (5)$$

Предположим для простоты, что длина  $l_n$  трубок одного порядка меняется пропорционально линейному размеру  $L_n$  питаемой ею области, так что  $\varphi_n = \varphi = \text{const}$ ,  $n = 0, \dots, N$ . Функция Лагранжа для (5) имеет вид:

$$\Lambda(\bar{s}, \bar{\lambda}) = \lambda_1 \Omega_1(\bar{s}) + \lambda_2 \Omega_2(\bar{s}),$$

а условия  $\Lambda(\bar{s}, \bar{\lambda})'_{s_n} = 0$ ,  $n = 0, \dots, N$  дают следующие выражения для  $s_n$ :

$$\begin{aligned}
 \text{I. } s_n &= s_0 m^{-2n/(x+1)} \Rightarrow \frac{s_n}{s_{n+1}} = m^{2/(x+1)} \text{ для } (\Omega_1, \Omega_2) = \{(R, V), (W, V), (R, T), (W, T)\} \\
 \text{II. } s_n &= s_0 m^{(-4n)/(2x+1)} \Rightarrow \frac{s_n}{s_{n+1}} = m^{4/(2x+1)} \text{ для } (\Omega_1, \Omega_2) = \{(R, S), (W, S)\} \\
 \text{III. } s_n &= s_0 m^{-n/x} \Rightarrow \frac{s_n}{s_{n+1}} = m^{1/x} \text{ для } (\Omega_1, \Omega_2) = \{(F_{tr}, V), (F_{tr}, T)\} \quad (6) \\
 \text{IV. } s_n &= s_0 m^{-2(n+1)/(2x-1)} \Rightarrow \frac{s_n}{s_{n+1}} = m^{2/(2x-1)} \text{ для } (\Omega_1, \Omega_2) = \{(F_{tr}, S)\}
 \end{aligned}$$

$$V. s_n = s_0 m^{-n} \Rightarrow \frac{s_n}{s_{n+1}} = m \text{ для } (\Omega_1, \Omega_2) = \{(F_{tr}, R), (F_{tr}, W)\}$$

При  $\chi = 2$  соотношения (6) вместе с (2) определяют геометрию оптимального в смысле тех или иных критериев (3) трубопровода.

Предположение о пуазейлевском течении жидкости по природным трубопроводам может быть оправданным для кровеносных сосудов, однако проводящие ткани растений существенно отличаются от прямых полых трубок кругового сечения. Ксилема и флоэма включают сосуды, трахеиды - элементы, утратившие свое клеточное содержимое и представляющие совокупность клеточных стенок, пронизанных многочисленными порами, с нерегулярными поперечными сечениями. Поэтому более обоснованным представляется рассмотрение движения растительного сока как фильтрации в пористой среде. В общем же для трубопроводов живой природы имеет смысл исследовать соотношения (6) для произвольных значений  $\chi$ . Этот произвол ограничен теоретическими соотношениями (4) и условием  $\chi > 0$ , поскольку сопротивление движению жидкости должно уменьшаться с увеличением площади сечения трубки. Проверим, при каких значениях  $\chi$  условия сходимости (4) непротиворечивы для соответствующих пар критериев. Получим следующие диапазоны:

- ряды для  $R$  и  $V$  сходятся при  $\chi \in ]0; 3[$
- ряды для  $R$  и  $S$  сходятся при  $\chi \in ]0; 1.5[$
- ряды для  $F_{tr}$  и  $V$  сходятся при  $\chi \in ]1; 2[$
- ряды для  $F_{tr}$  и  $S$  сходятся при  $\chi \in ]1; 1.5[$
- ряды для  $F_{tr}$  и  $R$  сходятся при  $\chi \in ]0; 1[ \cup ]1; 1.5[ \cup ]1.5; \infty[$

Выражения (6) с учетом (7) определяют решения соответствующих экстремальных задач. Чтобы проверить, что решения (6)-(7) определяют действительно минимум  $\Omega_1$  в задаче (5), найдем вторые производные функций Лагранжа для всех пар критериев и проверим условие  $\partial^2 \Lambda(\bar{s}, \bar{\lambda}) \partial s_n^2 > 0$  с учетом (6). В результате получим условия:

I. Для  $(\Omega_1, \Omega_2) = \{(R, V), (W, V), (R, T), (W, T)\} - \Lambda' > 0$  всегда

II. Для  $(\Omega_1, \Omega_2) = \{(R, S), (W, S)\} - \Lambda' > 0$

$$\text{при } s_0 < f_1(\chi) = (4\chi(\chi + 1))^{2/(2\chi+1)}$$

III. Для  $(\Omega_1, \Omega_2) = \{(F_{tr}, V), (F_{tr}, T)\} - \Lambda' > 0$  при  $\chi > 0$

IV. Для  $(\Omega_1, \Omega_2) = \{(F_{tr}, S)\} - \Lambda' > 0$  при  $s_0 < f_2(\chi) = (4\chi(\chi - 1))^{2/(2\chi-1)}$

V. Для  $(\Omega_1, \Omega_2) = \{(F_{tr}, R), (F_{tr}, W)\} - \Lambda' > 0$  при  $\chi > 1$  если  $s_n > f_3(\chi)$

$$\text{при } \chi < 1 \text{ если } s_n < f_3(\chi) = \frac{1+\chi}{1-\chi} m^{-n}$$

Условия (7) и (8) непротиворечивы для случаев I, II и III. Графики функций  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ , приведены на рис.1а-б. Видно, что при малых значениях  $\chi$  условия II и IV в (8) задают жесткие ограничения для площади первого сосуда ветвящейся системы. Функция  $f_3(x)$  при  $x > 1$  принимает отрицательные значения, поэтому условие V из (8) имеет смысл лишь при  $\chi \in ]0; 1[$ . При этом также имеем ограничение  $s_0 < (1 + \chi)/(1 - \chi)$  на площадь начального участка трубопровода.

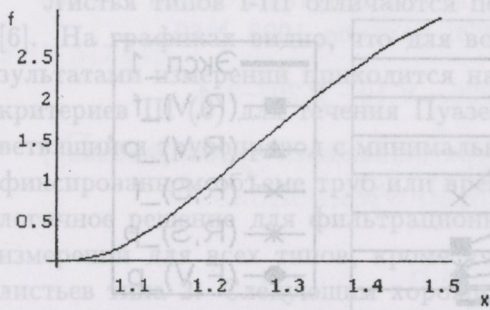


Рис. 1а

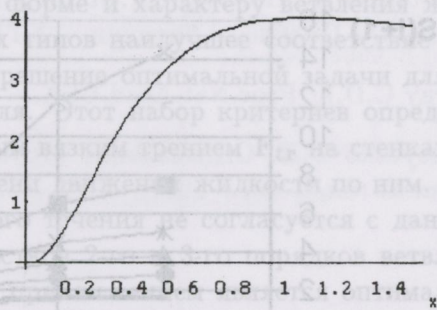


Рис. 1б

На рис.2 представлены диапазоны значений  $\chi$ , для которых имеется решение экстремальной задачи для выделенных критериев.

Таким образом, в диапазоне  $\chi \in ]0; 3[$  имеется сходимость следующих рядов из (3):

при  $\chi \in ]0; 1.5[$  — для  $V, S, R, F$

при  $\chi \in ]1.5; 2[$  — для  $V, R, F$

при  $\chi \in ]2; 3[$  — для  $V, R$

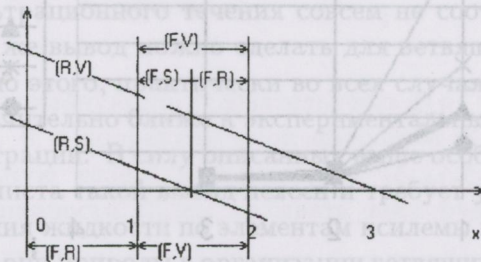


Рис. 2

Итак, решение экстремальной задачи (5) определяет соотношения между площадями сечений сосудов смежных порядков ветвления (6) с возможностью определения допустимых диапазонов значений величины  $\chi$ , которая задает характер течения жидкости. Проверим, каким из критериев оптимальности оказываются наиболее близки соотношения  $s_n/s_{n+1}$ , полученные для ветвящихся артериальных систем [1,8] и сосудисто-волокнистых пучков листьев [6]. Результаты расчетов в сравнении с данными измерений для транспортных систем листьев с тремя типами сосудисто-волокнистых пучков для случаев течения Пуазейля ( $\chi = 2$ ) и задачи фильтрации ( $\chi = 1$ ) приведены на рис.3-5 соответственно.

3. Исаков В.П., Дыкова Л.И., Лейбовник Я.Я., Исследования морфологии листа древесных. — Знание: Гита, 1984. — 196 с.

4. Образцов И.Ф. Оптимальные биомеханические системы. — Наука: Москва, 1989. — 234 с.

5. Гамалей Ю.В. Флоэма листа. — Наука: Ленинград, 1990. — 144 с.

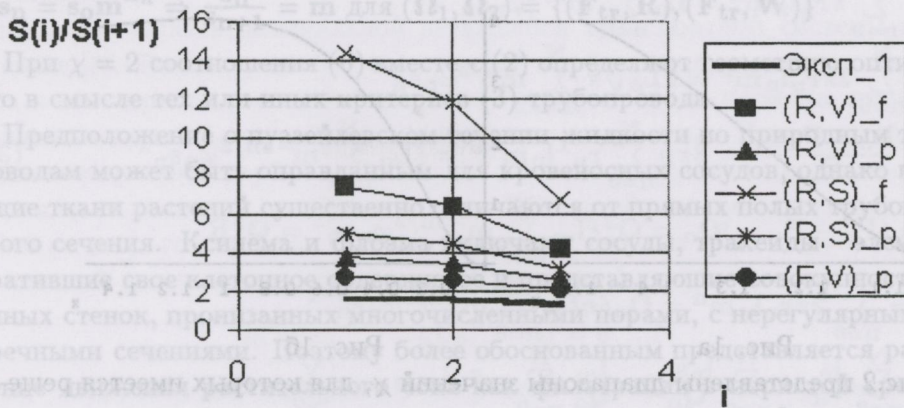


Рис.3

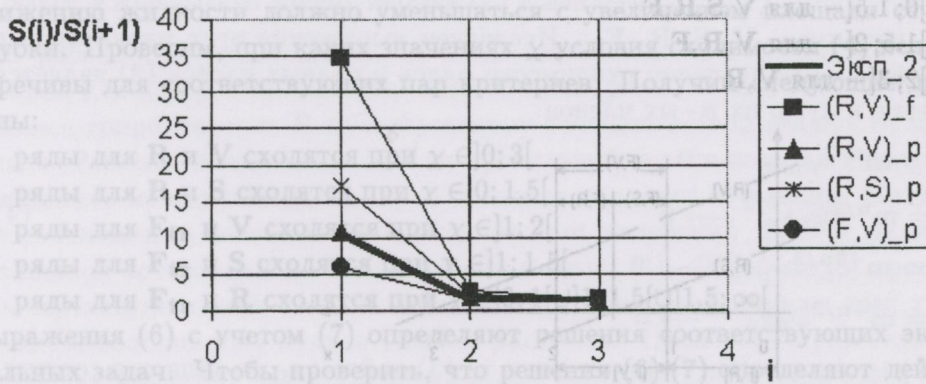


Рис.4

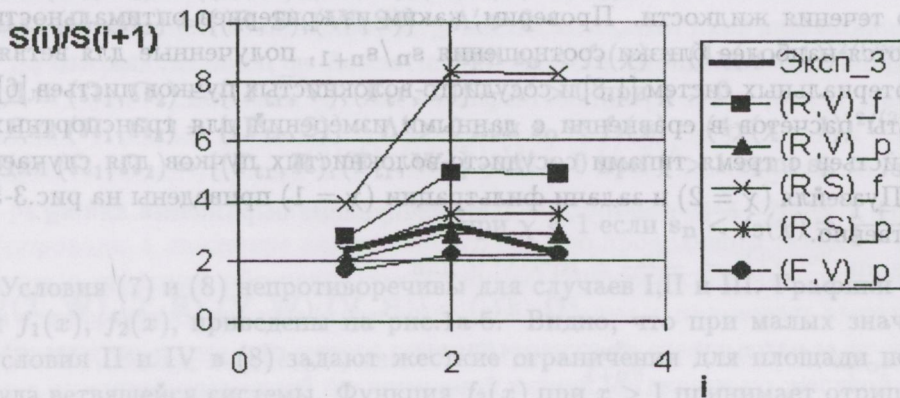


Рис.5

Листья типов I-III отличаются по форме и характеру ветвления жилок [6]. На графиках видно, что для всех типов наилучшее соответствие с результатами измерений приходится на решение оптимальной задачи для пар критериев III (6) для течения Пуазейля. Этот набор критериев определяет ветвящийся трубопровод с минимальным вязким трением  $F_{tr}$  на стенках при фиксированном объеме труб или времени движения жидкости по ним. Аналогичное решение для фильтрационного течения не согласуется с данными измерений для всех типов, кроме участков 2-го и 3-го порядков ветвления листьев типа 2. Следующим хорошим приближением является оптимальная модель, соответствующая минимальному гидравлическому сопротивлению  $R$  (или затраченной мощности  $W$ ) при заданном объеме (времени) для течения Пуазейля (I (6)). Математически такой же вид зависимости площадей сечений труб соседних порядков ветвления получается и для оптимальной модели с минимальной силой трения при фиксированной площади поверхности труб (IV (6)) для течения Пуазейля. Соответствующее решение для случая фильтрационного течения сильно не согласуется с результатами измерений. Зависимости для оставшихся пар критериев приведены на рис.3-5. Таким образом, из решений (6) случаи I и III для течения Пуазейля вполне соответствуют, а случаи II и IV для фильтрационного течения совсем не соответствуют результатам измерений. Этот же вывод можно сделать для ветвящихся артериальных систем [1,8]. Помимо этого, практически во всех случаях (6) расчеты для течения Пуазейля значительно ближе к экспериментальным данным, чем расчеты для задачи фильтрации. В силу описанных выше особенностей строения проводящих тканей листа такой вывод неясен и требует уточнений относительно механики движения жидкости по элементам ксилемы и флоэмы. Несомненно, однако, что сценарии природы в организации ветвящихся транспортных русел тканей животных и растений сходны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Мамисашвили В.А., Бабунашвили М.К. Критерий оптимального функционирования подсистем крупных и мелких пиальных артерий // Физиологич. журн. СССР.- 1975.- Т.61, N10. - С.1501-1506.
2. Гендельс Т.В. Приготовление препаратов просветленных листьев для изучения их жилкования// Ботанич.журн.-1987. - Т.72, N3.- С.397-396.
3. Исаков В.Н., Висковатова Л.И., Лейшовник Я.Я., Исследование морфологии листа древесных. - Зинатне: Рига, 1984.- 196 с.
4. Образцов И.Ф. Оптимальные биомеханические системы. - Наука: Москва, 1989.- 234 с.
5. Гамалей Ю.В. Флоэма листа. - Наука: Ленинград, 1990.- 144 с.

- 6. Кизилова Н.Н., Попова Н.А. Исследование транспортных систем листьев растений// Проблемы бионики. – ХТУРЭ: Харьков, 1998, №50.
- 7. Murray C.D.// Proc.Nat.Acad.USA. – 1926.– V.12.– P.207–214.
- 8. Черноусько Ф.Л. Оптимальная структура ветвящихся трубопроводов// Прикл.матем. и мех.– 1977.– Т.41, N2.– С.376-383.

Рис.4

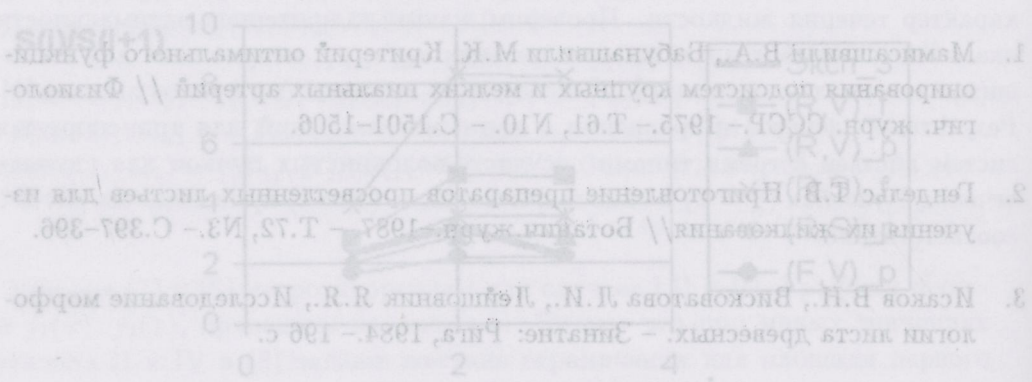


Рис.5

Тамбиев Ю.В. // Проблемы бионики // Физико-математические науки. – Тбилиси: Тбилисский университет, 1980-1981.

Вісник Харківського університету  
 Серія "Математика, прикладна математика і механіка"  
 УДК 517.948 № 444, 1999, с.157-161

## Последовательности в гильбертовых пространствах бесконечного ранга нестационарности

Н.В.Черемская

*Харьковский государственный университет*

В статье изучаются нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве  $H$  бесконечного ранга нестационарности, для описания которых вводится специальная характеристика, называемая корреляционной разностью. Для последовательностей вида  $\xi(n) = A^n \xi_0$ ,  $A \in [H, H]$ ,  $\xi_0 \in H$  получены необходимые и достаточные условия (в терминах корреляционной разности) для того, чтобы оператор  $A$  был диссипативным оператором с чисто дискретным спектром или со спектром в нуле бесконечной кратности.

Рассмотрим случайную последовательность  $\xi(n)$  с математическим ожиданием  $M\xi(n) = 0$  и корреляционной функцией  $K(n, m) = \langle \xi_n, \xi_m \rangle$ . Введем корреляционную разность  $W(n, m) = \langle \xi_{n+1}, \xi_m \rangle - \langle \xi_n, \xi_{m+1} \rangle$ . Квазирангом нестационарности будем называть тах ранг квадратичных форм  $i \sum_{n, m+1}^N W(n, m) a_n \bar{a}_m$ . Последовательность  $\xi_n$  в гильбертовом пространстве называется эволюционно представимой, если  $\xi_n$  является решением задачи Коши для линейного разностного уравнения в гильбертовом пространстве с операторным коэффициентом:

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = A\xi_n \\ \xi_n|_{n=0} = \xi_0 \end{cases}, \tag{1}$$

$A \in [H_\xi, H_\xi]$ ,  $\dim 2JmAH = r < \infty$ .

**Лемма 1.** *Если  $\xi_n$  эволюционно представима, то  $W(n, m)$  имеет вид:*

$$W(n, m) = i \langle 2Jm A \xi_n, \xi_m \rangle. \tag{2}$$

**Доказательство.** Так как решение (1) имеет вид  $\xi_n = A^n \xi_0$ , то

$$\begin{aligned} W(n, m) &= \langle A^{n+1} \xi_0, A^m \xi_0 \rangle - \langle A^n \xi_0, A^{m+1} \xi_0 \rangle = \\ &= \langle A \xi_n, \xi_m \rangle - \langle \xi_n, A \xi_m \rangle = \langle A \xi_n, \xi_m \rangle - \langle A^* \xi_n, \xi_m \rangle = \\ &= \langle (A - A^*) \xi_n, \xi_m \rangle = i \langle 2Jm A \xi_n, \xi_n \rangle. \end{aligned}$$

Замечание. Если  $A = A^*$ , то  $W(n, m) = 0$ , а  $K(n, m) = K(n + m)$ . Таким образом,  $W(n, m)$  характеризует отклонение случайной последовательности от случайной последовательности с корреляционной функцией, зависящей от суммы.

**Лемма 2.** Если  $\dim \overline{2JmAH} = r < \infty$ , то

$$W(n, m) = i \sum_{\alpha, \beta=1}^r \varphi_\alpha(n) J_{\alpha\beta} \overline{\varphi_\beta(m)}, \quad (3)$$

где  $\varphi_\alpha(n) = \langle A^n \xi_0, g_\alpha \rangle$ ,  $g_\alpha$  - каналовые элементы оператора  $A$ , а  $J = (J_{\alpha\beta})$  инволютивная матрица ( $J_{\alpha\beta} = \overline{J_{\beta\alpha}}$ ,  $\sum_{\gamma=1}^r J_{\alpha\gamma} J_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha\beta}$ ).

**Доказательство.** Включим оператор  $A$  в операторный комплекс [1]:  $K = (A, H, g_1, \dots, g_{r1}, (J_{\alpha\beta}))$ ,

$$\frac{A - A^*}{i} = \sum_{\alpha, \beta=1}^r \langle \cdot, g_\alpha \rangle J_{\alpha\beta} g_\beta.$$

Тогда из (2) имеем:

$$W(n, m) = i \langle 2Jm A \xi_n, \xi_m \rangle = i \sum_{\alpha, \beta=1}^r \langle \xi_n, g_\alpha \rangle J_{\alpha\beta} \langle g_\beta, \xi_m \rangle = i \sum_{\alpha, \beta=1}^r \varphi_\alpha(n) J_{\alpha\beta} \overline{\varphi_\beta(m)},$$

где  $\varphi_\alpha(n) = \langle \xi_n, g_\alpha \rangle = \langle A^n \xi_0, g_\alpha \rangle$ .

**О п р е д е л е н и е.** Случайная последовательность называется аккретивной, если неположительны все квадратичные формы  $i \sum_{n, m=1}^r W(n, m) a_n \overline{a_m}$ .

Очевидно, что условие аккретивности для эволюционно представимых последовательностей эквивалентно тому, что  $2Jm A \geq 0$ .

Рассмотрим эволюционно представимую случайную последовательность  $\xi_n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{n+1} = A \xi_n \\ \xi_n|_{n=0} = \xi_0 \end{array} \right\},$$

$$A \in [H_\xi, H_\xi], \quad \dim \overline{2JmAH} = r < \infty.$$

Рассмотрим случай, когда  $\dim \overline{2JmAH} = 1$  и найдем соответствующее выражение  $W(n, m)$ .

Рассмотрим два случая.

1. Пусть  $A$  - ограниченный диссипативный оператор с дискретным спектром. Его треугольная модель в  $l_2$  имеет вид [1]:

$$\left( \hat{A} f \right)_k = \lambda_k f_k + i \sum_{j=k+1}^N f_j \beta_j \beta_k, \quad (4)$$

где

$$\lambda_k = \alpha_k + i \frac{\beta_k^2}{2}, \sum_{k=1}^N \beta_k^2 < \infty.$$

Тогда

$$\varphi(n) = \langle A^n \xi_0, g \rangle_{H_\xi} = \langle \hat{A}^n \hat{\xi}_0, \hat{g} \rangle_{l_2} = \langle \hat{\xi}_0, \hat{A}^{*n} g \rangle_{l_2} = \sum_{l=1}^r \xi_{0l} \Lambda_l,$$

где

$$\Lambda_l(n) = (\hat{A}^{*n} \hat{g})_l.$$

$\Lambda_l(n)$  будем называть как в [1] специальными  $\Lambda$ - функциями. Воспользовавшись представлением функции от оператора через его резольвенту  $(\hat{A}^{*n} g)_l = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n ((\hat{A}^* - \lambda I)^{-1} \hat{g})_l d\lambda$ , после преобразований получаем

$$\Lambda_l(n) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n ((\hat{A}^* - \lambda I)^{-1} \hat{g})_l d\lambda, \quad (5)$$

Тогда для  $\varphi(n)$  получаем окончательно

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_{0k} \Lambda_k(n), \quad (6)$$

где  $\Lambda_k(n)$  имеют вид (5), а  $\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{0k}|^2 < \infty$ .

Обратно, если имеем корреляционную разность вида  $W(n, m) = \varphi(n) \overline{\varphi(m)}$ , где  $\varphi(n)$  строятся при помощи (6), то конструируя треугольную модель (4) (она определяется только по  $\lambda_k$ , т.е. по спектру оператора  $\hat{A}$ ), имеем для эволюционно представимой последовательности  $\hat{\xi}_n = \hat{A}^n \xi_0$  корреляционную разность, совпадающую с заданной. Суммируя вышесказанное, получаем теорему.

**Теорема 1.** Для того, чтобы функция  $W(n, m)$  была корреляционной разностью эволюционно представимой последовательности квазиранга один с чисто дискретным спектром, необходимо и достаточно, чтобы  $W(n, m)$  имела вид  $W(n, m) = \varphi(n) \overline{\varphi(m)}$ , где  $\varphi(n)$  определяется выражениями (5)-(6).

Рассмотрим случай, когда  $A$  - вольтерров оператор, имеющий единственную точку спектра в нуле. Его треугольная модель в  $L^2_{[0,1]}$  имеет вид [1]:

$$(\hat{A}f)(x) = i \int_0^x f(y) dy. \quad (7)$$

Используя представление операторной функции через резольвенту и учитывая, что  $g \equiv 1$ , после преобразования получаем:

$$\Lambda_k(x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (-\lambda^{n-1}) e^{\frac{i}{\lambda}(x-1)} d\lambda,$$

следовательно,

$$\varphi(n, x) = \frac{-i^n}{n!} \int_0^1 (x-1)^n f_0(x) dx.$$

Для корреляционной разности получаем выражение:

$$W(n, m) = \frac{(-1)^{m+n}}{n!m!} \int_0^1 \int_0^1 (x-1)^n (y-1)^m f_0(x) \overline{f_0(y)} dx dy. \quad (8)$$

Обратно, если дана корреляционная разность вида (8), то рассматривая треугольную модель (5) и эволюционно представимую последовательность  $\hat{\xi}_n = \hat{A}^n \xi_0$ , получаем для нее корреляционную разность вида (8).

Следовательно, имеет место теорема:

**Теорема 2.** Для того, чтобы  $W(n, m)$  была корреляционной разностью эволюционно представимой последовательности квазиранга один с вольтерровым оператором, задающим эволюционную представимость, необходимо и достаточно, чтобы  $W(n, m)$  имела вид  $W(n, m) = \varphi(n) \overline{\varphi(m)}$ , где  $\varphi(n) = \frac{-i^n}{n!} \int_0^1 \hat{f}_0(x) (x-1)^n dx$ , а  $\int_0^1 |\hat{f}_0(x)|^2 dx < \infty$ .

Замечание. Рассматривая сцепление треугольных моделей (4) и (7), можно получить представление для  $W(n, m)$  в общем случае, когда у оператора  $A$  имеется дискретный спектр и бесконечнократный спектр в нуле.

Рассмотрим теперь случай, когда  $\dim \overline{2JmAH} = r$  ( $2 \leq r < \infty$ ). Для нахождения общего вида корреляционной разности можно воспользоваться универсальными моделями диссипативных операторов с чисто дискретным спектром или со спектром в нуле [1]. Справедливы следующие две теоремы.

**Теорема 3.** Если  $\xi(n)$  полная эволюционно представимая диссипативная последовательность  $r$ -го квазиранга ( $r < \infty$ ) с чисто дискретным спектром, то ее корреляционная разность имеет вид:

$$W(n, m) = \sum_{\alpha=1}^r \varphi_{\alpha}(n) \overline{\varphi_{\alpha}(m)}, \quad (9)$$

где

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k^{(\alpha)} \Lambda_k(n), \quad (10)$$

$$\Lambda_k(n) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n ((A^* - \lambda I)^{-1} g)_k d\lambda, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |C_k^{(\alpha)}|^2 < \infty \quad (\alpha = \overline{1, 2}).$$

**Теорема 4.** Если  $\xi(n)$  полная эволюционно представимая диссипативная последовательность  $r$ -го квазиранга ( $r < \infty$ ) со спектром в нуле, то

ее корреляционная разность имеет вид (9), где

$$\varphi_\alpha(n) = \frac{-i^n}{n!} \int_0^1 f_\alpha(x) x^n dx. \quad (11)$$

Доказательства теорем 3, 4 проводятся по той же схеме, что и доказательства теорем 1, 2, с той лишь разницей, что вместо соответствующих треугольных моделей с одномерной мнимой компонентой используются универсальные модели.

Отметим, что функции  $\Lambda_k(n)$  строятся только по спектру оператора  $A$ , так как в выражении для  $\varphi_\alpha(n)$  можно перейти к унитарно эквивалентным элементам и  $\Lambda_k(n)$  имеет вид:

$$\Lambda_k(n) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \lambda^n \frac{\beta_k}{\lambda_k - \lambda} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\lambda_j - \lambda}{\lambda_k - \lambda} d\lambda \quad (12)$$

в случае чисто дискретного спектра.

В заключение отметим, что по  $W(n, m)$  легко восстановить  $K(n, m)$ .

Действительно, рассмотрим задачу Коши

$$K(n+1, m) - K(n, m+1) = W(n, m),$$

$$K|_{n=0} = f(m), \quad K|_{m=0} = g(n), \quad m, n \geq 0.$$

Используя двумерное дискретное преобразование Лапласа, получаем, что

$$K(n, m) = f(n+m) + \sum_{l=0}^n W(n-l, m+l-1). \quad (13)$$

При выводе (13) попутно получается условие совместимости начальных условий  $f(m)$  и  $g(n)$ :

$$f(n) - g(n) + \sum_{l=0}^{n-1} W(n-1-l, l) = 0. \quad (14)$$

Случай смешанного спектра можно исследовать, используя операцию сщепления соответствующих универсальных операторных комплексов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. — Харьков: Изд-во Харьк.ун-та, 1971. — 160 с.

## Линейные преобразования последовательностей в гильбертовых пространствах

Э.Ю. Железнякова

Харьковский государственный университет

Рассматриваются линейные преобразования последовательностей (как стационарных, так и нестационарных) в гильбертовых пространствах. Получены необходимые и достаточные условия на корреляционную функцию для того, чтобы она являлась корреляционной функцией линейного преобразования соответствующей последовательности.

Рассмотрим эволюционно представимую последовательность в гильбертовом пространстве:  $x(n) = T^n x_0$ , где  $T \in [H, H]$ ,  $x_0 \in H$ ,  $n$  – целое,  $n \geq 0$ . В статье изучаются линейные преобразования вида  $y(n) = Bx(n)$ , где  $B \in [H, H]$  и  $\dim(I - B^*B)H = q$ , ( $1 \leq q < \infty$ ).

В дальнейшем  $y(n)$  будем называть **дилатацией  $q$ -го порядка последовательности  $x(n)$** . Дилатации кривых в гильбертовом пространстве были введены в работах [1], [2]. Дилатации первого порядка стационарных кривых в гильбертовом пространстве изучались в работе [4].

Рассмотрим прежде всего дилатации первого порядка стационарной последовательности. В этом случае корреляционная функция (КФ) последовательности  $x(n)$  зависит только от разности целочисленных аргументов ( $n, m \in Z$ )  $K_{xx}(n, m) = \langle x(n), x(m) \rangle_H = K_{xx}(n - m)$ . Тогда для КФ  $y(n)$  получаем представление

$$K_{yy}(n, m) = K_{xx}(n - m) - \Theta(n)\overline{\Theta(m)}, \quad (1)$$

где  $\Theta(n) = \langle T^n x_0, h_0 \rangle$ ,  $h_0 \in H : I - B^*B = \langle \cdot, h_0 \rangle h_0$ . Учитывая спектральное разложение унитарного оператора  $T$  для  $K_{yy}(n, m)$  окончательно имеем:

$$K_{yy}(n, m) = \int_0^{2\pi} e^{i\tau\lambda} dF(\lambda) - \Theta(n)\overline{\Theta(m)}, \quad \tau = n - m; \quad (2)$$

$F(\lambda)$  – неубывающая функция ограниченной вариации, а  $\Theta(n)$  имеет вид:

$$\Theta(n) = \langle T^n x_0, h_0 \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n} dG(\lambda), \quad \Delta G(\lambda) = (\Delta E_\lambda x_0, h_0). \quad (3)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** Для того, чтобы последовательность  $y(n)$  была дилатацией первого порядка стационарной последовательности  $x(n)$ , необходимо и достаточно, чтобы КФ  $y(n)$  имела вид (2), где  $\Theta(n)$  имеют представление (3).

**Доказательство.** Необходимость была получена, а для доказательства достаточности по  $F(\lambda)$  восстанавливаем разложение единицы унитарного оператора  $U$ , а в качестве оператора  $B$  достаточно взять любое сжатие с одномерным подпространством неунитарности [3].

Для восстановления элемента  $h_0$  по  $\Theta(n)$  заметим, что  $h_0$  имеет вид  $h_0 = \int_0^{2\pi} \chi(\lambda) z(d\lambda)$ , так как  $H = \overline{V_n x(n)}$ .

Тогда, предполагая, для простоты, дифференцируемость  $F(\lambda) : F'(\lambda) = f(\lambda) \neq 0$ , имеем:

$$\Theta(n) = \left\langle \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n} dz(\lambda), h_0 \right\rangle = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n} dG(\lambda),$$

где

$$\Delta G(\lambda) = \langle \Delta E_{\lambda} z_0, h_0 \rangle = \left\langle \Delta E_{\lambda} z_0, \int_0^{2\pi} \chi(\lambda) dE_{\lambda} z_0 \right\rangle.$$

Тогда

$$\Theta(n) = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n} \overline{\chi(\lambda)} f(\lambda) d\lambda, \tag{4}$$

где  $f(\lambda) = F'(\lambda)$ . Корреляционная функция стационарной последовательности  $\tau(n)$  имеет вид

$$B(n) = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n} dF(\lambda) = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda n} f(\lambda) d\lambda.$$

Отсюда

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda n} B(n). \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что

$$\chi(\lambda) = \frac{1}{2\pi f(\lambda)} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda n} \overline{\Theta(n)}.$$

Таким образом, по  $\Theta(n)$  восстанавливаем элемент  $h_0$  (с точностью до унитарной эквивалентности).

Рассмотрим теперь тот случай, когда последовательность  $x(n)$  является асимптотически затухающей нестационарной последовательностью 1-го ранга

[5]. В этом случае КФ дилатации первого ранга последовательности  $x(n)$  имеет вид:

$$K_{yy}(n, m) = \sum_{k=0}^{\infty} W(n+k, m+k) - \Theta(n)\overline{\Theta(m)}, \quad n, m - \text{целые, } n, m \geq 0, \quad (6)$$

где  $W(n, m) = \varphi(n)\overline{\varphi(m)}$ ,  $\varphi(n) = \langle T^n x_0, g \rangle$ ,  $I - T^*T = \langle \cdot, g \rangle g$ , а  $\Theta(n) = \langle T^n x_0, h_0 \rangle$ .

Пусть сжатие оператора  $T$  имеет чисто дискретный спектр, следовательно,

$$\varphi(n) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{0k} \Lambda_k(n), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |x_{0k}|^2 < \infty, \quad (7)$$

$$\Lambda_k(n) = -\frac{1}{2\pi i} \sqrt{I - |\mu_k|^2} \oint_{\gamma} \lambda^k \frac{1}{\lambda - \mu_k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{1 - \lambda \mu_j |\mu_j|}{\lambda - \mu_j \overline{\mu_j}} d\lambda,$$

где  $\{\mu_k\}$  - дискретный спектр оператора  $T$ , и  $|\mu_k| < 1$ ;

$$\Theta(n) = \langle T^n x_0, h_0 \rangle_H = \langle x_0, T^{*n} h_0 \rangle_H = \langle \hat{x}_0, \hat{T}^{*n} \hat{h}_0 \rangle_{l_2} = \sum_{k=1}^{\infty} \langle \hat{x}_{0k}, \psi_k(n, h_0) \rangle, \quad (8)$$

$$\hat{h}_0 = U h_0, \quad U \in [H, l_2],$$

$$\psi_k(n, h_0) = (\hat{T}^{*n} \hat{h}_0)_k = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n \left( (T^* - \lambda I)^{-1} \hat{h}_0 \right)_k d\lambda.$$

В случае, когда  $h_0 = g$ ,  $\Theta(n) \equiv \varphi(n)$ .

Если  $h_0 \neq g$ , то используя треугольную модель для  $T^*$  в случае дискретного спектра, имеем:

$$\psi_k(n, h_0) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n \left[ \left\{ \sum_{p=0}^{k-1} \frac{(h_0)_p}{\prod_{q=0}^{p-1} \left[ 1 - \frac{\nu(q)V(q)}{\mu_k - \lambda} \right]} + C \right\}^* \prod_{q=0}^{k-1} \left[ 1 - \frac{\nu(q)V(q)}{\mu_q - \lambda} \right] \frac{\nu(k)}{\mu_k - \lambda} d\lambda, \right.$$

где

$$\nu(k) = \sqrt{1 - |\mu_k|^2} |\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1}|, \quad V(k) = \frac{\sqrt{1 - |\mu_k|^2}}{\mu_k |\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{k-1}|}.$$

Рассмотрим случай, когда спектр оператора  $T$  лежит на единичной окружности:

$$K_{xx}(n, m) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(n+k)\overline{\varphi(m+k)} + K_{\infty}(n-m),$$

$$\Theta(n) = \langle T^n x_0, h_0 \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n \langle (T - \lambda I)^{-1} x_0, h_0 \rangle d\lambda =$$

$$= \int_0^l f_0(x) \left[ -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n (T^* - \lambda I)^{-1} h_0 d\lambda \right] dx = \int_0^l f_0(x) S_n(x) dx, \quad (9)$$

$\gamma$  – произвольный контур, охватывающий весь спектр оператора  $T$ ,  $f_0 = U x_0$ , где  $U$  – унитарный оператор из  $H$  в  $L^2[0, l]$ .

Если  $h_0$  совпадает с одним из канальных элементов оператора  $T$ , то  $\Theta(n) \equiv \varphi(n)$  и

$$S_n(x) = (T^* - \lambda I)^{-1} h_0 = \frac{\sqrt{2}}{e^{-i\alpha(x)} - \lambda} e^{-\int_0^x q(t) dt} + \frac{e^{-\int_0^x q(t) dt}}{e^{-i\alpha(x)} - \lambda} \int_0^x r(t) e^{\int_0^t q(\xi) d\xi} dt,$$

где

$$q(t) = 1 - \frac{e^{-i\alpha(t)}}{e^{i\alpha(t)} - \bar{\lambda}}, \quad r(t) = (i\sqrt{2}\alpha(t) + 2\sqrt{2})e^{i\alpha(t)+t}.$$

Таким образом,

$$S_n(x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n \left[ \frac{\sqrt{2}}{e^{i\alpha(x)} - \lambda} e^{-\int_0^x \bar{q}(t) dt} + \frac{e^{-\int_0^x \bar{q}(t) dt}}{e^{i\alpha(x)} - \lambda} \int_0^x \bar{r}(t) e^{\int_0^t \bar{q}(\xi) d\xi} dt \right] d\lambda.$$

В случае, когда  $h_0$  не является канальвым элементом оператора  $T$ , имеем:

$$\Theta(n) = \langle T^n x_0, h_0 \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n (f_0, (T^* - \lambda I)^{-1} h_0) d\lambda =$$

$$= \int_0^l f_0 \left[ -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (T^* - \lambda I)^{-1} h_0 \lambda^n d\lambda \right] dx, \quad (10)$$

$$(T^* - \lambda I) h_0 = \frac{1}{e^{-i\alpha(x)} - \lambda} e^{-\int_0^x q(\xi) d\xi} \left( h_0(0) + \int_0^x r_1(t) e^{\int_0^t q(s) ds} dt \right),$$

$$\Theta(n) = \int_0^l f_0 S_n(x) dx,$$

где

$$S_n(x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n \left[ \frac{1}{e^{i\alpha(x)} - \lambda} e^{-\int_0^x \bar{q}_1(\xi) d\xi} \left( q_1(0) + \int_0^x \bar{r}_1(t) e^{\int_0^t \bar{q}(\tau) d\tau} dt \right) \right] d\lambda,$$

$$\Theta(n) = \langle T^n x_0, h_0 \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n \langle (T - \lambda I)^{-1} x_0, h_0 \rangle d\lambda =$$

$$= \int_0^l f_0(x) \left[ -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n (T^* - \lambda I)^{-1} h_0 d\lambda \right] dx = \int_0^l f_0(x) S_n(x) dx, \quad (9)$$

$\gamma$  – произвольный контур, охватывающий весь спектр оператора  $T$ ,  $f_0 = U x_0$ , где  $U$  – унитарный оператор из  $H$  в  $L^2[0, l]$ .

Если  $h_0$  совпадает с одним из каналовых элементов оператора  $T$ , то  $\Theta(n) \equiv \varphi(n)$  и

$$S_n(x) = (T^* - \lambda I)^{-1} h_0 = \frac{\sqrt{2}}{e^{-i\alpha(x)} - \lambda} e^{-\int_0^x q(t) dt} + \frac{e^{-\int_0^x q(t) dt}}{e^{-i\alpha(x)} - \lambda} \int_0^x r(t) e^{\int_0^t q(\xi) d\xi} dt,$$

где

$$q(t) = 1 - \frac{e^{-i\alpha(t)}}{e^{i\alpha(t)} - \lambda}, \quad r(t) = (i\sqrt{2}\alpha(t) + 2\sqrt{2})e^{i\alpha(t)+t}.$$

Таким образом,

$$S_n(x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n \left[ \frac{\sqrt{2}}{e^{i\alpha(x)} - \lambda} e^{-\int_0^x \bar{q}(t) dt} + \frac{e^{-\int_0^x \bar{q}(t) dt}}{e^{i\alpha(x)} - \lambda} \int_0^x \bar{r}(t) e^{\int_0^t \bar{q}(\xi) d\xi} dt \right] d\lambda.$$

В случае, когда  $h_0$  не является каналовым элементом оператора  $T$ , имеем:

$$\Theta(n) = \langle T^n x_0, h_0 \rangle = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n (f_0, (T^* - \lambda I)^{-1} h_0) d\lambda =$$

$$= \int_0^l f_0 \left[ -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (T^* - \lambda I)^{-1} h_0 \lambda^n d\lambda \right] dx, \quad (10)$$

$$(T^* - \lambda I) h_0 = \frac{1}{e^{-i\alpha(x)} - \lambda} e^{-\int_0^x q(\xi) d\xi} \left( h_0(0) + \int_0^x r_1(t) e^{\int_0^t q(s) ds} dt \right),$$

$$\Theta(n) = \int_0^l f_0 S_n(x) dx,$$

где

$$S_n(x) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \lambda^n \left[ \frac{1}{e^{i\alpha(x)} - \lambda} e^{-\int_0^x \bar{q}_1(\xi) d\xi} \left( q_1(0) + \int_0^x \bar{r}_1(t) e^{\int_0^t \bar{q}(\tau) d\tau} dt \right) \right] d\lambda,$$

$$q_1(x) = 1 - 2 \frac{e^{i\alpha(x)}}{e^{-i\alpha(x)} - \lambda}, \quad r_1(x) = h_0(x), \quad f_0 = Vx_0,$$

где  $V$  – унитарный оператор из  $H$  в  $L^2[0, l]$ .

Отсюда имеем

**Теорема 2.** Для того чтобы  $y(n)$  была дилатацией первого порядка нестационарной асимптотически затухающей последовательности 1-го ранга нестационарности, необходимо и достаточно, чтобы  $K\Phi y(n)$  имела вид (6), причем  $\varphi(n)$  и  $\Theta(n)$  определяются выражениями (7) и (8) в случае дискретного спектра и соответственно выражениями (9) и (10) в случае спектра, лежащего на единичной окружности.

Аналогично могут быть рассмотрены и дилатации порядка выше первого, при этом, например, формула (1) принимает вид

$$K_{yy}(n, m) = K_{xx}(n, m) - \sum_{\gamma=1}^q \Theta_\gamma(n) \overline{\Theta_\gamma(m)},$$

где  $\Theta_\gamma(n) = \langle T^n x_0, h_\gamma \rangle$ , а  $I - B^*B = \sum_{\gamma=1}^q \langle \cdot, h_\gamma \rangle h_\gamma$ , а теоремы 1 и 2 переформулируются соответствующим образом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Niemi N. On the linear prediction problem of certain non-stationary stochastic processes // Math.Scand. – 1976. – V.39. – P.146-160.
2. Niemi N. On stationary dilatations and stochastic processes. – Commen:P.-M. – 1975. – V.45. – P.111-130.
3. Лившиц М.С., Янцевич А.А. Теория операторных узлов в гильбертовом пространстве. – Изд.ХГУ. – 1971. – С.160.
4. Пишель Р., Янцевич А.А. Дилатация случайных процессов. // Сб. Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1986. – Вып. 46. – С.82-90.
5. Янцевич А.А. Нестационарные последовательности в гильбертовом пространстве. 1. Корреляционная теория // Сб.Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1986. – Вып. 45. – С.139-141.

Данный алгоритм представляет модифицированный метод наименьших квадратов для решения задачи канонической регрессии. Висник Харківського університету Серія "Математика, прикладна математика і механіка" № 444, 1999, с.167-170

УДК 519.233.5

## Алгоритм решения канонической задачи метода наименьших модулей в регрессионном анализе

А.А.Босов, Н.А.Мухина

Днепропетровский государственный технический университет  
железнодорожного транспорта (ДИИТ)

В статье предложен алгоритм метода наименьших модулей для решения задачи параметрической идентификации, когда априорная информация об объекте представлена результатами пассивного эксперимента.

В настоящее время достаточно часто возникает необходимость математического моделирования сложных систем (процессов) в условиях структурной и параметрической неопределенности, когда априорная информация задается в виде таблицы наблюдений значений переменных, описывающих изучаемый объект. Традиционными методами моделирования в подобных задачах служат методы регрессионного анализа, в основе которых по-прежнему остается метод наименьших квадратов [1]. Однако, если обратиться к элементарному примеру Ф. Кларка [2], может оказаться, что выбор параметров модели из условия минимума суммы модулей отклонений расчетных данных от опытных, может быть предпочтительней, поскольку такие модели обладают свойствами робастности.

В данной статье предлагается алгоритм решения задачи параметрической идентификации с использованием метода наименьших модулей (МНМ). Априорную информацию об объекте будем рассматривать в следующей форме:

$i$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_p$	$y$
1	$x_{11}$	$x_{12}$	$\dots$	$x_{1p}$	$y_1$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$m$	$x_{m1}$	$x_{m2}$	$\dots$	$x_{mp}$	$y_m$

где  $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  – набор предикторных переменных,  $y$  – отклик,  $x_{ij}$  – значение  $x_j$  в  $i$ -м наблюдении,  $i = \overline{1, m}$ , причем предполагается, что  $m > p$ .

Зависимость между откликом и предикторными переменными  $y = f(x)$  будем искать в виде

$$y = u_1\varphi_1(x) + u_2\varphi_2(x) + \dots + u_n\varphi_n(x),$$

где  $\{\varphi_i(x)\}$  – заданное множество непрерывных линейно-независимых функций;  $u_1, u_2, \dots, u_n$  – параметры модели, которые необходимо подобрать так,

чтобы

$$I(u) = \sum_{i=1}^m \left| y_i - \sum_{k=1}^n u_k \varphi_k(A_i) \right| \rightarrow \min,$$

где  $A_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ip})$ .

Если ввести следующие обозначения:  $b_i = y_i$ ,  $c_i = (\varphi_1(A_i), \varphi_2(A_i), \dots, \varphi_n(A_i))$ , то приходим к задаче определения такого  $u_* \in E_n$ , что

$$I(u_*) = \min_u \sum_{i=1}^m |\langle c_i, u \rangle - b_i|.$$

Эту задачу будем называть канонической задачей МНМ.

Так как для функции  $I(u)$  определено понятие субдифференциала, то условие  $0 \in \partial I(u_*)$  является необходимым и достаточным условием минимума  $I(u)$  в точке  $u_*$  [3].

Положив  $z_i(u) = \langle c_i, u \rangle - b_i$ , получим:

$$\partial I(u) = \sum_{i=1}^m \alpha_i c_i,$$

где

$$\alpha_i = \begin{cases} -1, & z_i(u) < 0, \\ [-1, 1], & z_i(u) = 0, \\ 1, & z_i(u) > 0, \end{cases}$$

или

$$\partial I(u) = \sum_{z_i(u) \neq 0} c_i \operatorname{sign} z_i(u) + \sum_{z_i(u) = 0} c_i \alpha_i.$$

Пусть  $c_1, c_2, \dots, c_n$  — линейно-независимые вектора и пусть  $u_*$  — решение системы  $\langle c_i, u \rangle - b_i = 0$ ,  $i = 1, n$ . Тогда, если система  $\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i = \sum_{i=n+1}^m c_i \operatorname{sign} z_i(u_*)$  имеет решение  $|\alpha_i| \leq 1$ , то  $0 \in \partial I(u_*)$ , и, следовательно,  $u_*$  — решение канонической задачи МНМ.

Алгоритм решения канонической задачи МНМ содержит следующие основные моменты:

п1. Выбор начального приближения  $u(0) \in E_n$ .

п2. Проверка условия  $0 \in \partial I(u(0))$ . Если оно выполнено, то решение найдено, в противном случае переход к п3.

п3. Выбор вектора  $a \in -\partial I(u(0))$ , имеющего максимальную длину.

п4. Определение  $u = at + u(0)$ ,

$$a_i := \langle c_i, a \rangle,$$

$$b_i^* := \langle c_i, u(0) \rangle - b_i$$

решение одномерной задачи МНМ.

п5. Построение нового приближения  $u(0) := at_* + u(0)$  и переход к п2.

Данный алгоритм представляет модификацию метода обобщенного наискорейшего спуска для выпуклых функций [4]. Модификация учитывает конкретный вид функции (2).

Реализация данного алгоритма сводится к решению следующих задач.

• **Выбор начального приближения  $u(0)$ .**

Основан на использовании известного метода Нелдера и Мида для поиска экстремума недифференцируемых функций [4].

• **Алгоритм проверки условия  $0 \in \partial I(u(0))$ .**

ш1. Построение  $z_i(u) = \langle c_i, u \rangle - b_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

ш2. Упорядочение  $z_i(u)$  так, что  $|z_i(u)| \leq |z_{i+1}(u)|$ ,  $i = \overline{1, m-1}$ .

ш3. Выбор  $n$  линейно-независимых векторов  $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_n}$  таких, что  $|c_{i_1}| > |c_{i_2}| > \dots > |c_{i_n}|$ .

ш4. Решение системы  $\langle c_{i_k}, \tilde{u} \rangle - b_{i_k} = 0$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

ш5. Вычисление  $\alpha_{i_k} = \begin{cases} -1, & \text{если } z_{i_k}(\tilde{u}) < 0, \\ 1, & \text{если } z_{i_k}(\tilde{u}) > 0. \end{cases}$

ш6. Определение  $\alpha_{i_k}$ , как решение системы  $\sum_{k=1}^n c_{i_k} \alpha_{i_k} = - \sum_{j \notin \{i_1, \dots, i_n\}} c_j \alpha_j$ .

ш7. Проверка условия: если  $|\alpha_{i_k}| \leq 1$ ,  $k = \overline{1, n}$ , то  $0 \in \partial I(\tilde{u})$ ;  $\tilde{u} = \arg \min_u I(u)$ , в противном случае переход к п3 основного алгоритма канонической задачи МНМ.

• **Определение вектора  $a$ .**

Пусть для некоторой точки  $\tilde{u}$  выполняется условие  $z_{i_k}(\tilde{u}) = 0$ ,  $k = \overline{1, \nu}$ ,  $\nu < n$ . Тогда

$$C = \sum_{\nu=1}^k c_{i_\nu} \alpha_{i_\nu} + \sum_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} c_i \alpha_i \partial I(\tilde{u}),$$

где  $a_i = \text{sign } z_i(\tilde{u})$ ,  $i \notin \{i_1, \dots, i_k\}$ ;  $a_{i_\nu} \in [-1, 1]$ ;  $i_\nu \in \{i_1, \dots, i_k\}$ .

Положим  $\tilde{C} = \sum_{i \notin \{i_1, \dots, i_k\}} c_i \alpha_i$ , тогда  $\alpha_{i_\nu}$  определим по формуле

$$\alpha_{i_\nu} = \begin{cases} 1, & \langle c_{i_\nu}, \tilde{C} \rangle > 0, \\ -1, & \langle c_{i_\nu}, \tilde{C} \rangle < 0. \end{cases}$$

Вектор  $a$  определится в виде:

$$a = -C.$$

• **Алгоритм решения одномерной задачи МНМ.**

$$I(t) = \sum_{i=1}^m |a_i t + b_i| \rightarrow \min,$$

$$t \in [\underline{t}, \bar{t}], \quad a_i > 0, \quad i = \overline{1, m}.$$

п1. Определение  $t_i = \frac{b_i}{a_i}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

п2. Упорядочение  $t_i$  так, что  $t_i \leq t_{i+1}$ ,  $i = \overline{1, m-1}$ .

п3. Вычисление

$$l_k = \sum_{i=1}^k a_i - \sum_{i=k+1}^m a_i, \quad k = \overline{0, m}.$$

Критерий оптимальности:

Если  $a_i > 0 \exists \nu \in [1, m]$  такой, что  $l_{\nu-1} < 0$ ,  $l_\nu \geq 0$ , тогда

1. Если  $l_\nu > 0$ , то  $t_* = t_\nu$ .
2. Если  $l_\nu = 0$ , тогда  $\forall t_* \in [t_\nu, t_{\nu+1}]$  реализует минимум  $I(t)$ .

ЛИТЕРАТУРА

1. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. Кн.2. – М.: Финансы и статистика, 1987. – 352 с.
2. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – М.: Наука, 1988. – 280 с.
3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.
4. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.

Пусть  $c_1, c_2, \dots, c_n$  – линейно-независимые вектора и пусть  $u_0$  – решение системы  $(c_i, u) = 0, i = \overline{1, k}, u \in [-1, 1]^n$ . Если система  $(c_i, u) = 0, i = \overline{1, k}, u \in [-1, 1]^n$  имеет решение  $\{u_i\}, |u_i| \leq 1$ , то  $0 \in \partial I(u_0)$ , и, следовательно,  $u_0$  – решение канонической задачи НММ.

Алгоритм решения канонической задачи НММ включает следующие основные моменты:

- п1. Выбор начального приближения  $u(0) \in E_n$ .
- п2. Проверка условия  $0 \in \partial I(u(0))$ . Если оно выполняется, решение найдено, в противном случае переход к п3.
- п3. Выбор вектора  $\bar{u}$  из множества  $\bar{u} \in \partial I(u(0))$ .
- п4. Определение  $u = \alpha \bar{u} + u(0)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \sum_{i=1}^m |x_i(t)| = 0$$

решение одномерной задачи НММ:

- п5. Построение нового приближения  $u(1) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m u_i$  и переход к п2.

## ЗМІСТ

- Skylyar G.M., Velkovsky I.L.** A Method of Solution of the Trigonometric Min-Moment Problem with Periodic Gaps 3
- Коробов В.И., Павличков С.С.** Управляемость треугольных систем с равномерно ограниченными возмущениями 10
- Скорик В.А.** Аналитическое обращение одного семейства плохо обусловленных матриц, возникающих в методе функции управляемости 15
- Коробов В.И., Флоринский В.В.** О нахождении оптимального времени и моментов переключения в задаче быстрогодействия 24
- Бессонов Г.А., Луценко А.В.** Об условиях неустойчивости для дискретных систем 44
- Сохин А.С.** Идентификация системы с распределенными параметрами, описываемой нестационарным уравнением переноса нейтронов с изотропным потенциалом 50
- Сузигов Г.В., Воробьев И.В., Розуменко О.В.** Об одном методе решения краевой задачи 2-го порядка 61
- Марченко И.И., Николенко И.Г.** О величинах отклонений мероморфных минимальных поверхностей 71
- Марченко И.И.** О дефектах плюрисубгармонических функций 89
- Власенко Л.А., Пивень А.Л.** О базисности элементарных решений вырожденных линейных дифференциальных уравнений 94
- Дюкарев Ю.М.** Пространства де Бранжа и интерполяционные задачи в классе Стильтеса 101
- Кабалянц П.С., Руткас А.Г.** О квазилинейном дифференциальном уравнении с сингулярностью типа Кронекера 111
- Яценко Т.Ю.** Об абстрактной задаче Коши, связанной с одной задачей гидродинамики 119
- Легейда В.И.** Применение метода парных интегральных уравнений к задачам магнитной гидродинамики 126

Губарева В.Ф. Устойчивость равномерных вращений системы шарнирно связанных твердых тел	137
Тропина А.А. Numerical Investigation of the Heat Transfer in the Poorly Conducting Liquid with Linear Law of Injection	142
Кизилова Н.Н., Попова Н.А. Критерии оптимального функционирования ветвящихся транспортных систем живой природы	148
Черемская Н.В. Последовательности в гильбертовых пространствах бесконечного ранга нестационарности	157
Железнякова Э.Ю. Линейные преобразования последовательностей в гильбертовых пространствах	162
Босов А.А., Мухина Н.А. Алгоритм решения канонической задачи метода наименьших модулей в регрессионном анализе	167
2. Кларк Ф. Об условиях устойчивости дискретных систем	174
3. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач	175
4. Прикладная математика	175
Узунков Г.В., Воробьев Н.В., Розуменко О.В. Об одном методе решения краевой задачи 2-го порядка	181
Марченко Н.Н., Николенко Н.Т. О величинах отклонений ромбоидальных поверхностей	171
Марченко Н.Н. О дефектах приоритетных систем	189
Власенко Л.А., Пивень А.Л. О близости элементов в ряде	194
Дюкарев Ю.М. Построения де Брэнжа и нитерлоционные задачи в классе Стилтьеса	101
Кадышев П.С., Руккас А.Т. О взаимосвязи дифференциальных уравнений с сингулярными типами Кронекера	111
Руккас Т.Ю. Об асимптотической задаче Коши, связанной с одной задачей гидродинамики	119
Летейда В.Н. Применение метода пьезометрических уравнений к задаче малой деформации	121

## АНОТАЦІЇ

УДК 517.5

**Метод розв'язання тригонометричної  $\min$ -проблеми моментів з періодичними пропусками.** С к л я р Г. М., В е л ь к о в с ь к и й І. Л. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444 . Математика, прикладна математика і механіка, с. 3 – 9.

Розглядається тригонометрична проблема моментів Маркова на мінімально можливому відрізку ( $\min$ -проблема моментів) у випадку, коли моментна послідовність має пропуски, що періодично повторюються. Наведений повний опис множини розв'язності  $\min$ -проблеми моментів Маркова, а також метод пошуку її канонічного розв'язку.

Бібліогр.: 4 найм.

УДК 517.977.1+517.935.4

**Керованість трикутних систем з рівномірно обмеженими збуреннями.** К о р о б о в В. І., П а в л и ч к о в С. С. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444 . Математика, прикладна математика і механіка, с. 10 – 14.

За допомогою теореми Брауера про нерухому точку доведено повну керованість трикутної нестационарної системи звичайних диференціальних рівнянь з рівномірно обмеженими збуреннями в класі неперервних керувань. При цьому припускається, що збурюючі члени задовольняють локальну умову Ліпшиця за  $x$  та  $u$ , а головна (трикутна) частина - глобальну умову Ліпшиця. Розглядається один приклад.

Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517.977+512.64.643.8

**Аналітичне обернення однієї сім'ї погано зумовлених матриць, виникаючих у методі функції керованості.** С к о р и к В. О. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444 . Математика, прикладна математика і механіка, с. 15 – 23.

У методі функції керованості побудова цієї функції та синтезуючого керування для лінійних систем тісно пов'язана з деякими матрицями довільного порядку, для одержання яких необхідно обертати визначену сім'ю спеціальних матриць. Ця сім'я є сім'єю погано зумовлених матриць. В зв'язку з цим у роботі запропоновано аналітичне зображення обернених до них матриць.

Бібліогр.: 6 найм.

УДК 517.977:517.934:517.966

**Про знаходження оптимального часу та моментів переключення у задачі швидкодії.** К о р о б о в В. І., Ф л о р и н с ь к и й В. В. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444 . Математика, прикладна математика і

механіка, с. 24 – 43.

Для лінійної автономної задачі швидкодії досліджується питання про гладку залежність часу швидкодії і моментів переключення від спектру матриці, а також доводиться неперервна залежність розв'язку нелінійної задачі оптимального керування від початкових даних і  $n$ -вимірною параметра, яким у даному випадку може бути спектр матриці.

Для лінійної задачі швидкодії запропонований чисельний метод, що дозволяє за відомим розв'язком задачі швидкодії з даним спектром матриці знаходити розв'язок задачі швидкодії з іншим спектром шляхом варіації спектра матриці.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 517.929

**Про умови нестійкості для дискретних систем.** Бессонов Г. О., Луценко А. В. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 44 – 49.

Досліджується питання про нестійкість нульового розв'язку нелінійної дискретної системи  $x_{m+1} = f(m, x_m)$ . Доведено, що окрім класичних четаєвських умов для неперервних систем, які виконуються в певній однозв'язній області, яка належить околу нуля, та на її межі, для нестійкості нульового розв'язку дискретної системи достатньо ще вимагати наявності хоча б однієї точки на межі області, образ якої при відображенні  $f$  належав би внутрішності цієї області. Бібліогр.: 3 найм.

УДК 517.958.536.71

**Ідентифікація системи з розподіленими параметрами, описуваної нестационарним рівнянням переносу нейтронів з ізотропним потенціалом.** Сохин А. С. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 50 – 60.

Для лінійного рівняння Больцмана з нестационарним ізотропним інтегралом зіткнень вперше дається нова постановка зворотньої задачі, яка дозволяє знайти густину розсіювача в просторі шляхом розв'язку інтегрального рівняння Фредгольма другого роду з ядром, яке визначається співставленням початкових та кінцевих потоків нейтронів.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 517.912

**Про один метод розв'язання крайової задачі 2-го порядку.** Сузіков Г. В., Воробйов І. В., Розуменко О. В. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 61 – 70.

У роботі вивчається один новий метод розв'язання крайових задач для

звичайних диференціальних рівнянь другого ступеня, який полягає у тому, що розв'язок "складної" крайової задачі може бути представлений у вигляді межі розв'язків "простих" задач – задач Коші для того же рівняння. Суттєвим є те, що додання усього одного циклу до програми розв'язання задачі Коші для диференціального рівняння з простим переліком після кожного проходження, перетворює її у програму розв'язання крайової задачі. Метод надзвичайно простий та ефективний, має широку область застосування.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 517.977+512.64.643.8

**Про величини відхилень мероморфних мінімальних поверхонь.** Марченко І. І., Ніколенко І. Г. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 71 – 88.

Знадені оцінки суми величин відхилень для мероморфних та цілих мінімальних поверхонь скінченного нижнього порядку. Побудовані відповідні мінімальні поверхні, які показують точність одержаних оцінок.

Бібліогр.: 18 найм.

УДК 517.977+512.64.643.8

**О дефектах плюрисубгармонічних функцій.** Марченко І. І. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 89 – 93.

В класі плюрисубгармонічних функцій, які логарифмічно зростають за однією із змінних, показано, що множина валеронівських дефектних значень має нульову логарифмічну ємність. Також будується приклад плюрисубгармонічної функції, яка повільно зростає за однією із змінних нескінченного нижнього порядку, для якої множина дефектних значень співпадає зі всією комплексною площиною.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 517.9

**Про базисність елементарних розв'язків вироджених лінійних диференціальних рівнянь.** Власенко Л. А., Півень О. Л. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 94 – 100.

У гільбертовому просторі розглядається диференціальне рівняння  $\sum_{j=0}^n A_j u^{(j)}(t) = 0$  з лінійними замкненими операторами. Оператор  $A_n$  при старшій похідній може мати нетривіальне ядро. Встановлюються умови, при яких розв'язки розвиваються в ряд за елементарними розв'язками. Результати застосовуються до диференціальних рівнянь з частинними похідними.

Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.5

**Простори де Бранжа та інтерполяційні задачі у класі Стілт'єса.** Д ю к а р е в Ю. М. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 101 – 110.

У статті досліджене питання про де Бранжеві простори, які пов'язані з інтерполяційними задачами у класі Стільтьєса. Показано, що таким задачам належить ставити в співвідношення два простори де Бранжа. При цьому сама інтерполяційна задача буде еквівалентна задачі про погоджені інтегральні зображення скалярних добутків у відповідних просторах де Бранжа.

Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517.9

**Про квазілінійне диференційне рівняння з сингулярністю типу Кронекера** К а б а л я н ц П. С., Р у т к а с А. Г. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 111 – 118.

У банаховому просторі розглядається квазілінійне диференціальне рівняння з сингулярним операторним жмутком у якого сингулярну пару підпросторів утворюють анулятор жмутка та анулятор спряженого жмутка. Одержано достатні умови існування, а також умови існування та єдиності розв'язку задачі Коші. Обмеження формулюються у термінах регулярної та сингулярної проекцій нелінійної вектор-функції. Результати застосовуються до сингулярної мішаної задачі для рівняння у частинних похідних.

Бібліогр.: 7 найм.

УДК 517.437+517.983.53

**Про абстрактну задачу Коші, яка зв'язана з однією задачею гідродинаміки.** Я ц е н к о Т. Ю. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 119 – 125.

У гільбертовому просторі розглядається диференціальне рівняння  $C\dot{x}(t) + Fx(t) = f(t)$ , де  $C$  — самоспряжений оператор,  $F$  — максимальний акретивний оператор. Це рівняння описує малі коливання в'язкої однорідної рідини у сосуді, обмежені пружною мембраною. Побудовано шкалу рішень рівняння. Встановлено рівномірну коректність в енергетичній нормі задачі Коші для цього рівняння.

Бібліогр.: 3 найм.

УДК 538.4:621.313.333

**Застосування метода парних інтегральних рівнянь до задач магнітної гідродинаміки.** Л е г е й д а В. І. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 126 – 136.

даній роботі метод парних інтегральних рівнянь застосований до розв'язання плоских крайових задач для рівняння  $\Delta u - k^2 u = 0$  із змішаними граничними умовами, що виникають в магнітній гідродинаміці при обчисленні електромагнітних і температурних полів в каналах МГД-приладів з секціонірованими електродами. Крім того, отримані нові парні інтегральні рівняння і проведено зведення їх до системи інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду.

Бібліогр.: 13 найм.

УДК 531.36

**Стійкість рівномірних обертань системи шарнірно зв'язаних твердих тіл.** Г у б а р е в а В. Ф. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 137 – 141.

Досліджується стійкість обертань системи двох зв'язаних твердих тіл, одне з яких має нерухому точку. Після спеціальної заміни змінних система рівнянь руху стає автономною. Її характеристичне рівняння дає можливість отримати необхідні умови стійкості та порівняти їх з достатніми умовами.

Лл. 3. Бібліогр.: 6 найм.

УДК 532:5.013, 537.3

**Чисельне дослідження теплопереносу у слабопровідних рідинах з лінійним законом інжекції.** Т р о п і н а А. А. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 142 – 147.

Наведено результати чисельного дослідження ЕГД-конвекції і теплопереносу в системі електродів: циліндр над пластиною. Дослідження здійснювано на основі дисоційно-інжекційної моделі провідності рідких діелектриків. Обговорюються різні типи граничних умов для концентрації іонів на катоді-інжекторі. Для лінійного закону інжекції одержано задовільний збіг з експериментальними даними. Показано, що зниження теплообміну у слабких полях може бути зумовлено взаємодією іонів у нерівноважних приелектродних шарах.

Лл. 2. Бібліогр.: 4 найм.

УДК 519.812.3:581.454

**Критерії оптимального функціонування транспортних систем живої природи, що розгалужуються.** К і з і л о в а Н. М., П о п о в а Н. А. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 148 – 156.

У роботі проведений аналіз критеріїв оптимальності, які можуть лежати в основі будови транспортних систем, що розгалужуються, у тканинах рослин і тварин. Для різних пар критеріїв проведено рішення відповідних екстремальних задач і одержані співвідношення для площ поперечного перерізу діль-

ниць оптимального в розумінні вибраних критеріїв трубопроводу. Проведено порівняння теоретичних співвідношень з аналогічними, отриманими шляхом вимірів на судинно-волокнистих жмутках листків різних типів.

Лл. 5. Бібліогр.: 8 найм.

УДК 517.948

**Послідовності у гільбертових просторах нескінченного рангу нестационарності.** Черемська Н. В. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 157 – 161.

В статті вивчаються нестационарні послідовності у гільбертовому просторі  $H$  нескінченного рангу нестационарності, для опису яких введено спеціальну характеристику, названу кореляційною різницею. Для послідовностей вигляду  $\xi(n) = A^n \xi_0$ ,  $A \in [H, H]$ ,  $\xi_0 \in H$  отримано необхідні та достатні умови (в термінах кореляційної різниці), для того щоб оператор  $A$  був дисипативним оператором з виключно дискретним спектром або зі спектром у нулі нескінченної кратності.

Бібліогр.: 1 найм.

УДК 517.948

**Лінійні перетворення послідовностей у гільбертових просторах.** Железнякова Э. Ю. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 162 – 166.

Розглядаються лінійні перетворення послідовностей (як стационарних, та і нестационарних) у гільбертових просторах. Одержано необхідні та достатні умови на кореляційну функцію для того, щоб вона була кореляційною функцією лінійного перетворення відповідної послідовності.

Бібліогр.: 5 найм.

УДК 519.233.5

**Алгоритм розв'язування канонічної задачі методу найменших модулів в регресійному аналізі.** Босов А. А., Мухіна Н. А. – Вісн. Харк. ун-ту., 1999, № 444. Математика, прикладна математика і механіка, с. 167 – 170.

В статті запропонований алгоритм методу найменших модулів для розв'язку задачі параметричної ідентифікації, коли апріорна інформація про об'єкт подана результатами пасивного експерименту.

Бібліогр.: 4 найм.

*Збірник наукових праць*

Вісник Харківського державного університету

№ 444

Серія “Математика, прикладна математика і механіка”

Сдано у виробництво 2.06.99. Підписано до друку 1.06.99. Формат 70×108/16.  
офсетний. 8.13 умовн.-друк. арк. 8.75 обл.-вид. арк. Наклад 400 прим.

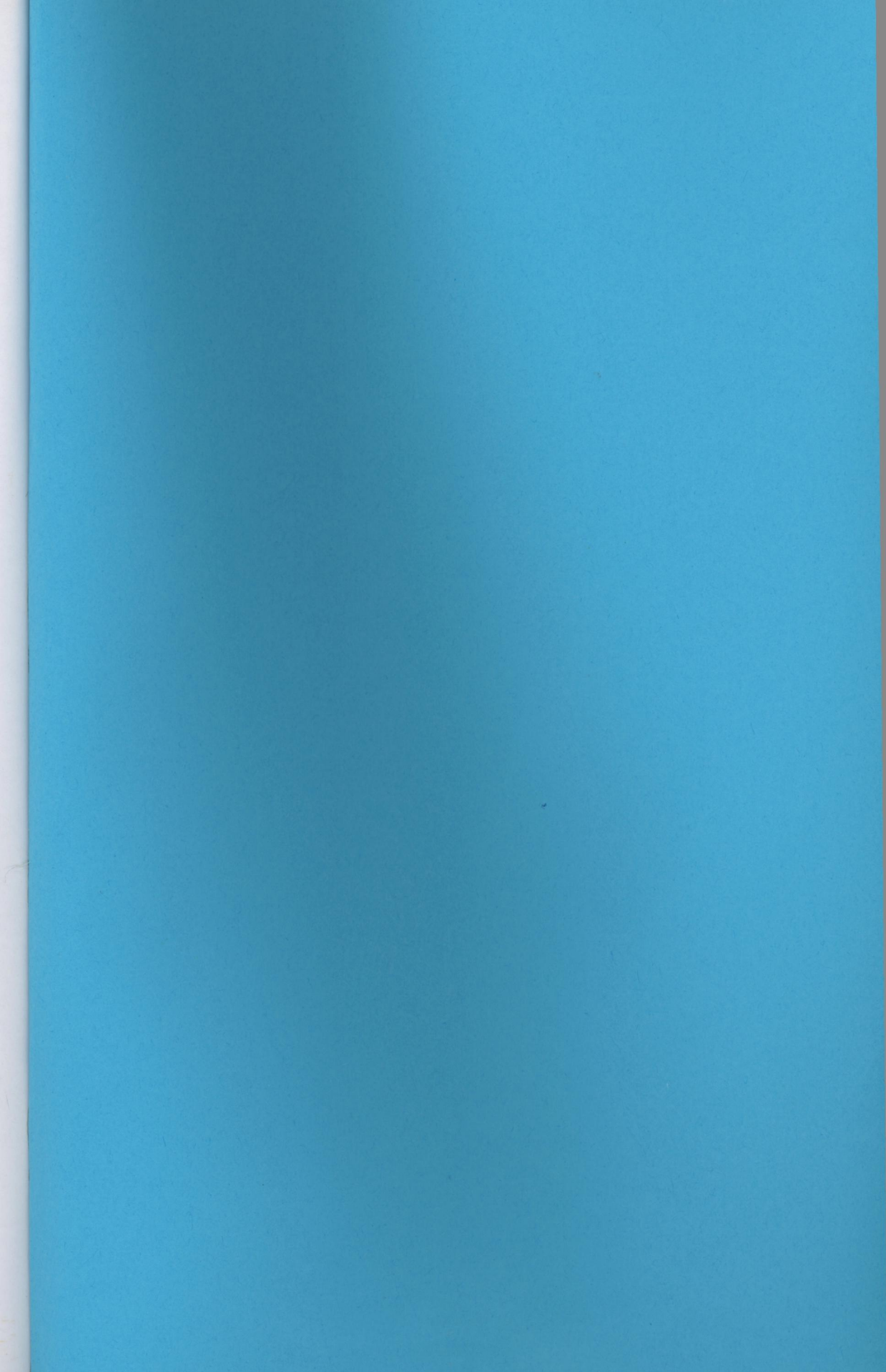
3-50

310077, Харків, пл. Свободи, 4, ХДУ

Видавничий центр ХДУ

Ризо ХДУ





3-50

V.N. Karazin Kharkiv National University



00289635

5