

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна**  
**Фізичний факультет**  
**Кафедра теоретичної фізики імені І.М.Ліфшиця**

**ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА**

До дипломної роботи магістра

на тему (укр. мова): Динаміка червоного-блакитного зміщення при вільному падінні під горизонтом Шварцшильда

на тему (англ. мова): Dynamics of redshift/blueshift during free fall under the Schwarzschild horizon

Виконав: студент 6 курсу, групи ФО-67

Напрямок підготовки: 104-Фізика та астрономія

Григорій Овчаренко

---

(підпис, прізвище та ініціали)

Науковий керівник: Олег Заславський

---

(підпис, прізвище та ініціали)

Рецензент: Олексій Нурмагамбетов

---

(підпис, прізвище та ініціали)

Харків – 2024 рік

## Анотація

Ми розглядаємо спостерігача, що вільно падає і перетинає горизонт подій у фоновому просторі Шварцшильда. Під час цього падіння він/вона може отримувати сигнали від об'єкта (наприклад, поверхні зірки), що випромінює радіацію. Ми вивчаємо, як частота, отримана спостерігачем, змінюється в залежності від власного часу на його/її траєкторії. Сценарії класифікуються залежно від того, чи є частота нескінченною, скінченною або нульовою біля сингулярності та горизонту. Ця поведінка залежить від кутових моментів спостерігача та фотона. У цій роботі ми також розглядаємо процес випромінювання, і, як показуємо, умови випромінювання сильно впливають на параметри фотона, а отже і на отриману частоту. Одним з наших основних результатів є числові обчислення, що показують еволюцію отриманої частоти під час процесу поглинання чорною дірою, залежно від параметрів спостерігача та випромінювача. Ми також аналізуємо, як падаючий спостерігач побачить нічне небо, коли він/вона наближається до сингулярності. Ми показуємо, що з'являються кілька сліпих зон, які раніше не аналізувалися

## **Зміст**

Анотація .....	Ошибка! Закладка не определена.
Зміст .....	Ошибка! Закладка не определена.
Вступ .....	3
1. Матеріали та методи досліджень .....	5
2. Результати досліджень, їх аналіз та узагальнення .....	6
2.1 Загальні формули, що будуть використані в роботі.....	6
2.2 Рівняння руху частинок.....	6
2.3 Випромінення фотону .....	8
2.4 Поведінка параметрів фотона .....	10
2.4.1 Окремі випадки .....	13
2.4.2 Горизонт.....	14
2.4.3 Сингулярність.....	15
2.5 Частота зареєстрованого фотона.....	16
2.6 Вигляд нічного неба.....	17
2.7 Опис випромінювання та емісії в координатах Крускала.....	27
2.8 Умови поглинання.....	29
2.8.1 Кутові координати .....	29
2.8.2 Координати Крускала .....	30
2.9 Результати для частоти та їх обговорення.....	30
Висновки.....	34
Додаток.....	35
Список літератури .....	37

## Вступ

Одним з найбільш цікавих та найінтригуючіших наслідків загальної теорії відносності є існування чорних дір. Вони також зустрічаються в багатьох інших теоріях гравітації. Як відомо, для чорних дір простір-час має нетривіальну причинно-наслідкову структуру, через що внутрішня частина недоступна для зовнішнього спостерігача (якщо не враховувати квантові ефекти). Однак, оскільки ця область існує і може бути, принаймні в принципі, вивчена локальними спостерігачами (якщо вони достатньо хоробрі, щоб зануритись у чорну діру), цікаво детально розглянути що може бути отримано такими спостерігачами. Це також допомогло б нам зрозуміти, що відбувається у реалістичних сценаріях гравітаційного колапсу, для яких картина вічної чорної діри може слугувати розумною ідеалізацією.

Існує чимало літератури про властивості простору-часу всередині чорної діри (див., наприклад, (Hamilton, 2019) та посилання в цій статті). В останнє десятиріччя у цій області досліджень з'явився ще один цікавий аспект. Він пов'язаний з високоенергетичними зіткненнями. Переважно такі зіткнення розглядали поблизу горизонту (M. Valdivia, 2009). Тим часом, особливий інтерес викликає те, що відбувається поблизу сингулярності і чи можуть такі зіткнення поблизу неї змінити долю чорної діри внаслідок зворотної реакції. У цьому контексті частота фотона вимірювана спостерігачем може бути розглянута як наслідок зіткнення між масивною частинкою (спостерігачем) і фотоном. Вивчення таких зіткнень лише для масивних частинок показало, що поведінка енергії в центрі має сильно залежати від співвідношення між динамічними характеристиками частинок (зокрема, їхніми кутовими моментами (Toporensky A. V., 2021), (A. Radosz, 2023)).

Якщо цікавитись лише процесом зіткнення масивних і безмасових частинок, то для них загальної картини зіткнення немає. У попередній роботі (Zaslavskii, 2020) було описано загальні риси процесу поглинання фотонів, і,

як в наслідок, червоного/синього зміщення, з акцентом на поведінці в околиці горизонту та сингулярності. У цій роботі ми робимо наступний крок і пов'язуємо такий зсув частоти зі сценарієм еволюції, в якому спостерігач рухається через частину простору-часу всередині чорної діри. Основною метою цього дослідження є вивчення того, як частота випромінювання, зареєстрованого спостерігачем, що вільно падає під горизонтом чорної діри Шварцшильда, змінюється з наближенням спостерігача до сингулярності. Крім того, ми обговорюємо вигляд нічного неба, який бачить спостерігач, що вільно падає, і як на це впливає його кутовий момент.

Робота організована наступним чином. У розділі 1 ми описуємо, загалом як ми обчислюємо частоту випромінювання, яке приймає спостерігач, якщо вона відома у точці випромінювання. У розділі 2.1 записано вигляд обговорюваної метрики поза і всередині горизонту. В останньому випадку випадку ми даємо явно тетраду, пов'язану зі стаціонарним спостерігачем. У розділі 2.2 записано рівняння руху масивних і безмасивних частинок під горизонтом. У розділі 2.3 ми пов'язуємо частоту фотона в різних системах відліку. У розділі 2.4 ми пов'язуємо частоту і кутовий момент фотона, що зберігається вздовж траєкторії фотона, з подібними локальними величинами у системі координат, що пов'язана з випромінювачем, які є визначальними для властивостей випромінювання поблизу сингулярності. У розділі 2.5 ми даємо загальний вираз для частоти фотона, який узагальнює (Zaslavskii, 2020) на випадок, коли приймач і фотон рухаються в різних площинах. У підрозділі 2.6 ми описуємо, як спостерігач під горизонтом бачить нічне небо. У розділі 2.7 ми обговорюємо траєкторію фотона в системі координат Новікова. У підрозділі 2.8.1 ми робимо те саме в координатах Крускала. У підрозділі 2.8.2 ми обговорюємо кінематичні умови, необхідні для поглинання фотона. У розділі 2.9 наведено результати чисельних розрахунків з їхнім подальшим обговоренням: як змінюється частота, виміряна вільно падаючим спостерігачем, уздовж його траєкторії. У Висновку наведено узагальнення результатів.

## 1. Матеріали та методи досліджень

У цьому дослідженні ми розглядаємо різні джерела випромінювання: воно може походити або від нерухомих спостерігачів поза горизонтом (із заданими параметрами фотонів), або випромінюватися падаючим об'єктом (наприклад, поверхнею колапсууючої зірки). Таким чином, у цьому процесі беруть участь три об'єкти: випромінювач, фотони, які він випромінює, і спостерігач. Щоб знайти частоту фотона, зареєстровану спостерігачем, нам потрібно вирішити кілька проміжних проблем.

- Розв'язати рівняння руху для випромінювача та спостерігача.
- Зв'язати частоту фотона, випроміненого в системі, що рухається разом із випромінювачем, з частотою в стаціонарній системі (або її еквівалентом під горизонтом).
- Дослідити еволюцію частоти відносно нерухомих спостерігачів вздовж траєкторії фотона під горизонтом.
- Знайти точку зіткнення між спостерігачем та фотоном.
- Визначити частоту, зареєстровану спостерігачем.

Ця схема дозволяє нам вирішити початкову проблему взаємозв'язку між частотою зареєстрованого фотона та властивостями випромінювача.

## 2. Результати досліджень, їх аналіз та узагальнення

### 2.1 Загальні формули, що будуть використані в роботі

В цій роботі ми будемо розглядати рух в просторо-часі Шварцшильда

$$ds^2 = -f dt^2 + \frac{dr^2}{f} + r^2 d\Omega^2, \quad (1)$$

де  $f = 1 - \frac{r_+}{r}$ ,  $r_+$ -радіус горизонту. Ми цікавимося областю під горизонтом, і для цього ми використовуватимемо наступні координати (див. (Novikov, 1961))  $t = y$ ,  $r = -T$ :

$$ds^2 = -\frac{dT^2}{g} + g dy^2 + T^2 d\Omega^2, \quad (2)$$

де  $g = -f \geq 0$ .

Надалі ми будемо використовувати систему фідуціарних спостерігачів (fiducial observers), які залишаються у стані спокою відносно метрики (2). Таким чином, для цих спостерігачів  $y = const$  та  $\phi = const$ . З цими спостерігачами ми також пов'язуємо тетраду:

$$e_{(0)\mu} = \left( -\frac{1}{\sqrt{g}}, 0, 0, 0 \right), \quad e_{(1)\mu} = (0, \sqrt{g}, 0, 0) \quad (3)$$

$$e_{(2)\mu} = (0, 0, |T|, 0), \quad e_{(3)\mu} = (0, 0, 0, |T| \sin \theta), \quad (4)$$

Варто зазначити, що такі спостерігачі є геодезичними і не мають аналогів в області за горизонтом (див. (R. Doran, 2008)).

### 2.2 Рівняння руху частинок

Насамперед розглянемо рух масивної частинки всередині чорної діри. Цей аналіз можна застосувати як до випромінювача, так і до спостерігача. Позначимо масу частинки через  $m$  та її 4-швидкість  $u^\mu$ . Оскільки чорна діра Шварцшильда сферично симетрична, ми завжди можемо вибрати площину, у якій відбувається рух. Як завжди, зручно вибрати її так, щоб  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , що дає

$u^\theta = 0$ . Так як метрика (2) інваріантна відносно трансляцій вздовж вісі  $y$  та поворотів в напрямку  $\phi$ , відповідні величини  $u_y = p$  та  $u_\phi = \mathcal{L}$  зберігаються в часі, де  $p$  та  $\mathcal{L}$  імпульс в напрямку  $y$  та кутовий момент на одиницю маси відповідно. Якщо частинка з заданою енергією  $\varepsilon$  входить у внутрішню область ззовні, значення енергії та імпульсу міняються місцями у відповідності зі зміною часових та просторових координат так, що  $\varepsilon = p$ .

Умова нормалізації дає нам

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1 = \frac{p^2}{g} - \frac{(u^T)^2}{g} + \frac{\mathcal{L}^2}{T^2}, \quad (5)$$

Звідки

$$u^T = Z, \quad \text{де } Z = \sqrt{p^2 + g \left(1 + \frac{\mathcal{L}^2}{T^2}\right)}, \quad (6)$$

Таким чином, в координатах  $(T, y, \phi, \theta)$  маємо:

$$u^\mu = \left( Z, \frac{p}{g}, \frac{\mathcal{L}}{T^2}, 0 \right), \quad (7)$$

Тетрадні компоненти ( $a = 0, 1, 2, 3$ )

$$u^{(a)} = u^\mu e_\mu^{(a)} = \left( \frac{Z}{\sqrt{g}}, \frac{p}{\sqrt{g}}, \frac{\mathcal{L}}{|T|}, 0 \right), \quad (8)$$

Аналогічно можна розглянути рух безмасової частинки (фотону).

Нехай він має 4-вектор  $k^\mu$ . Оскільки вектор  $k^\mu$  є нульовим,  $g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = 0$ , звідки маємо:

$$k^\mu = \left( z, \frac{q}{g}, \frac{l}{T^2}, 0 \right), \quad (9)$$

де

$$z = \sqrt{q^2 + g \frac{l^2}{T^2}}, \quad (10)$$

де  $q$  та  $l$  величини, що зберігаються.

### 2.3 Випромінення фотону

Тепер пов'яжемо частоту випромінюваного фотона відносно стаціонарного спостерігача та випромінювача. Для цього зв'яжемо характеристики руху випромінювача у початковій системі координат (2) і в системі, що рухається разом з випромінювачем. У системі, що рухається з випромінювачем, відповідні компоненти 4-швидкості випромінювача мають бути  $u^{(a)''} = (1,0,0,0)$ . Перехід до цієї системи від стаціонарної можна здійснити у декілька кроків.

- Візьмемо компоненти швидкості в тетрадній системі координат (8)
- Проведемо поворот:

$$u^{(y)'} = u^{(y)} \cos \phi + u^{(\varphi)} \sin \phi, \quad (11)$$

$$u^{(\varphi)'} = u^{(\varphi)} \cos \phi - u^{(y)} \sin \phi, \quad (12)$$

$$u^{(T)'} = u^{(T)}, \quad (13)$$

Підберемо кут повороту таким чином, щоб  $u^{(\varphi)'} = 0$ . Це можливо якщо обрати

$$\tan \phi = \frac{u^{(\varphi)}}{u^{(y)}} = \frac{\mathcal{L}\sqrt{g}}{p|T|}, \quad (14)$$

$$u^{(y)'} = \sqrt{(u^{(y)})^2 + (u^{(\varphi)})^2} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sqrt{Z^2 - g}, \quad (15)$$

- Проведемо буст

$$u^{(T)''} = \cosh \eta u^{(T)'} - \sinh \eta u^{(y)'}, \quad (16)$$

$$u^{(y)''} = \cosh \eta u^{(y)'} - \sinh \eta u^{(T)'} = 0, \quad (17)$$

$$u^{(\varphi)''} = u^{(\varphi)'} = 0, \quad (18)$$

Це можливо лише якщо обрати

$$\tanh \eta = \frac{u^{(y)'}}{u^{(T)'}} = \frac{\sqrt{(u^{(y)})^2 + (u^{(\phi)})^2}}{u^{(T)}}, \quad (19)$$

Умова нормалізації 4-швидкості дає  $u^{(T)2} - (u^{(y)'})^2 = 1$ , що дає  $\cosh \eta = u^{(T)'}$ ,  $\sinh \eta = u^{(y)'} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sqrt{Z^2 - g}$ .

Тепер ми можемо знайти аналогічні перетворення для фотона. По-перше, припустимо, що фотон поширюється у тій самій площині, що й випромінювач. Припустимо, що системі відліку, що співпадає з випромінювачем, фотон має хвильовий вектор  $k^{(a)''} = k(1, \cos \psi, \sin \psi, 0)$  де  $k > 0$ -частота фотона, яку випромінює випромінювач у власній системі,  $\psi$ -кут, під яким випромінення відбулось. Повертаючись до стаціонарної системи відліку, в якій метрика має вигляд (2), отримуємо такі вирази для тетрадних компонент:

$$k^{(T)} = k(\cosh \eta + \sinh \eta \cos \psi), \quad (20)$$

$$k^{(y)} = k[(\sinh \eta + \cosh \eta \cos \psi) \cos \phi - \sin \psi \sin \phi], \quad (21)$$

$$k^{(\phi)} = k[\sin \psi \cos \phi + (\sinh \eta + \cosh \eta \cos \psi) \sin \phi], \quad (22)$$

Використовуючи (14) та (19), отримуємо:

$$k^{(T)} = k \frac{Z}{\sqrt{g}} + k \sqrt{\frac{Z^2 - g}{g}} \cos \psi, \quad (23)$$

$$k^{(y)} = \frac{p}{\sqrt{g}} k + \frac{k}{\sqrt{Z^2 - g}} \left( p \frac{Z}{\sqrt{g}} \cos \psi - \frac{\mathcal{L} \sqrt{g}}{|T|} \sin \psi \right), \quad (24)$$

$$k^{(\phi)} = \mathcal{L} \frac{k}{|T|} + \frac{k}{\sqrt{Z^2 - g}} \left( p \sin \psi + \mathcal{L} \frac{Z}{|T|} \cos \psi \right), \quad (25)$$

Ці співвідношення дозволяють знайти компоненти 4-хвильового вектору у тетрадній системі відліку (3), знаючи компоненти у системі відліку, пов'язаній з випромінювачем.

Вводячи величини в системі відліку випромінювача  $q_e \equiv k_y'' = k \cos \psi$  та  $l_e \equiv k_\phi'' = k \sin \psi$ , ми можемо записати наведені вище перетворення у вигляді

$$k^T = \sqrt{q_e^2 + l_e^2} Z + q_e \sqrt{Z^2 - g}, \quad (26)$$

$$q = p \sqrt{q_e^2 + l_e^2} + \frac{1}{\sqrt{Z^2 - g}} \left( p Z q_e - g \frac{\mathcal{L}}{|T|} l_e \right), \quad (27)$$

$$l = \mathcal{L} \sqrt{q_e^2 + l_e^2} + \frac{1}{\sqrt{Z^2 - g}} (p |T| l_e + \mathcal{L} Z q_e), \quad (28)$$

У часткових випадках  $p = 0$  або  $\mathcal{L} = 0$  ці вирази спрощуються.

- Якщо  $\mathcal{L} = 0$

$$q = p \sqrt{q_e^2 + l_e^2} + \sigma(p) q_e \sqrt{p^2 + g}, \quad (29)$$

$$l = \sigma(p) |T| l_e, \quad (30)$$

- Якщо  $p = 0$

$$q = -\sqrt{g} \sigma(\mathcal{L}) l_e, \quad (31)$$

$$l = \mathcal{L} \sqrt{q_e^2 + l_e^2} + |T| \sigma(\mathcal{L}) q_e \sqrt{\frac{\mathcal{L}^2}{T^2} + 1}, \quad (32)$$

Тут і далі  $\sigma(f)$  означає знак величини  $f$

## 2.4 Поведінка параметрів фотона

У попередньому розділі ми описали, як величини  $q$  та  $l$  пов'язані з компонентами 4-хвильового вектора у системі координат, яка рухається з випромінювачем. Ці параметри представляють енергію та кутовий момент фотона і зберігаються вздовж його траєкторії. У цьому розділі ми проаналізуємо зв'язок між цими величинами та параметрами випромінювача. Ми почнемо з аналізу параметрів  $q$  і  $l$ , якщо вони випромінюються поблизу горизонту.

Для цього з точних виразів (27)-(28) отримаємо поведінку  $q$  і  $l$  поблизу горизонту та сингулярності. Відповідні вирази представлені в таблиці 1.

Умова		$q$		$l$	
$p \neq 0, \mathcal{L} \neq 0$	Горизонт	$pk(1 + \cos \psi)$	F	$\mathcal{L}k(1 + \cos \psi) + \sigma(p)kr_+ \sin \psi$	F
	Сингулярність	$\psi \neq 0, \pi: -\sigma(\mathcal{L})k\sqrt{g} \sin \psi$	D	$\mathcal{L}k(1 + \cos \psi)$	F
		$\psi = 0, \pi: pk(1 + \cos \psi)$	F	$\mathcal{L}k(1 + \cos \psi)$	F
$p = 0, \mathcal{L} \neq 0$	Горизонт	$-\sigma(\mathcal{L})k\sqrt{g} \sin \psi$	0	$\mathcal{L}k \left( 1 + \sqrt{\frac{\mathcal{J}^2}{\mathcal{L}^2} + 1} \cos \psi \right)$	F
	Сингулярність	$\psi \neq 0, \pi: -\sigma(\mathcal{L})k\sqrt{g} \sin \psi$	D	$\mathcal{L}k(1 + \cos \psi)$	F
		$\psi = 0, \pi: 0$	0	$\mathcal{L}k(1 + \cos \psi)$	F
$p \neq 0, \mathcal{L} = 0$	Горизонт	$pk(1 + \cos \psi)$	F	$\sigma(p)kr_+ \sin \psi$	F
	Сингулярність	$\psi \neq \pm \frac{\pi}{2}: k\sigma(p)\sqrt{g} \cos \psi$	D	$\sigma(p)kr_+ \sin \psi$	0
		$\psi = \pm \frac{\pi}{2}: kp$	F	$\sigma(p)kr_+ \sin \psi$	0
$p = 0, \mathcal{L} = 0$	Горизонт	0	0	$\lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \lim_{p \rightarrow 0} l: kr_+ \cos \psi$	0
		0	0	$\lim_{p \rightarrow 0} \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} l: 0$	0
	Сингулярність	0	0	0	0

Таб. 1. Таблиця, що показує асимптотичну поведінку  $q$  і  $l$  залежно від параметрів випромінювача поблизу горизонту та сингулярності. Тут F означає "скінченний", D - "розходиться", 0 - "прямує до нуля". Ця таблиця дозволяє проаналізувати поведінку  $q$  та  $l$  лише у двох граничних випадках поблизу горизонту та сингулярності.

Як було показано в (Zaslavskii, 2020) знак  $q$  суттєво впливає на поведінку частоти випромінювання, що поглинається біля горизонту, а знак  $l$  впливає на поведінку частоти фотона, прийнятого поблизу сингулярності. Підкреслимо, що, хоча фотон, випромінений поблизу сингулярності, буде

незабаром поглинутий, він може суттєво вплинути на метрику, якщо відповідна частота, виміряна приймачем, розходиться. Такий випадок можливий (Zaslavskii, 2020). Однак важливе питання про зворотну реакцію на метрику вакууму виходить за межі нашої роботи і потребує окремого розгляду.

Виникає питання, чи можна випромінювати фотони із заданими знаками вищезгаданих параметрів. Знак цих величин можна змінювати, випромінюючи фотон під різними кутами  $\psi$ . Проаналізуємо потенційні діапазони кутів  $\psi$ , в яких величини  $q$  і  $l$  можуть мати заданий знак. Для цього спочатку треба розв'язати рівняння  $q = 0$  і  $l = 0$  для кута  $\psi$ .

Розв'язки цих рівнянь виглядають наступним чином

$$q = 0: \tan \psi = \frac{p\sqrt{g}}{|T|} \frac{Z\mathcal{L}\sqrt{g} \pm |T|(Z^2 - g)}{(Z^2 - g)(g - p^2) - gp^2}, \quad (33)$$

$$l = 0: \tan \psi = -\mathcal{L}|T| \frac{Zp \pm (Z^2 - g)}{(Z^2 - g)(T^2 - \mathcal{L}^2) - g\mathcal{L}^2}, \quad (34)$$

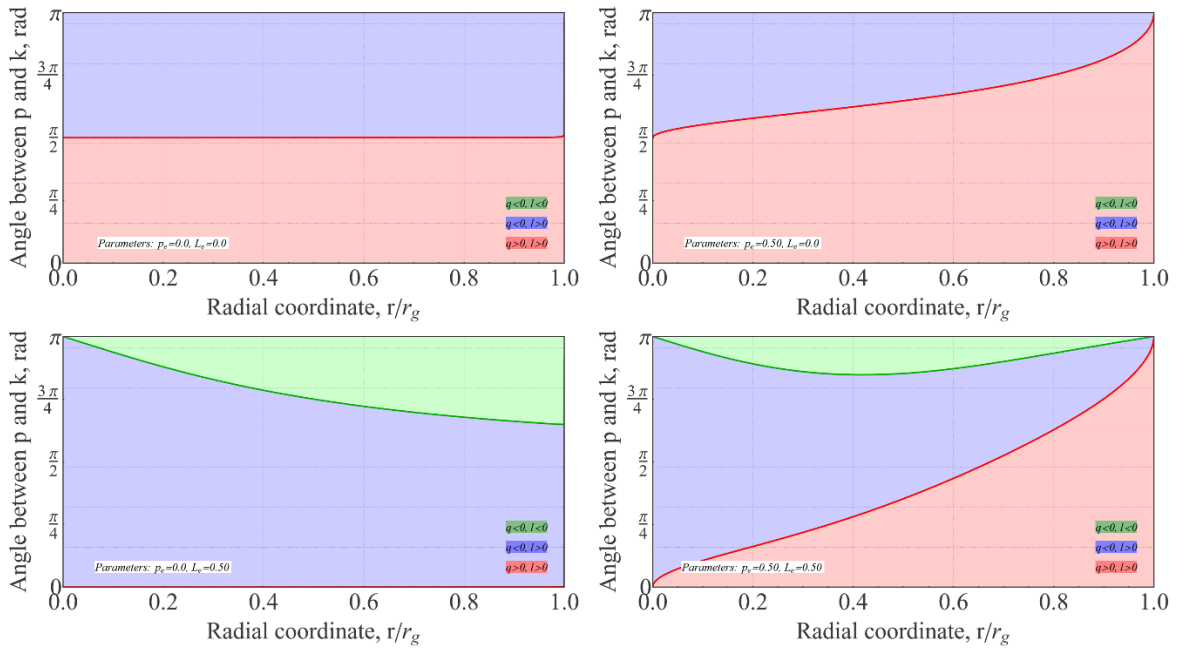


Рис. 1. Діаграми, що показують, в якому діапазоні кута випромінювання та точки випромінювання ми можемо отримати додатні або від'ємні значення  $q$  або  $l$ . Зауважимо, що для першої діаграми ми спочатку взяли ліміт  $\mathcal{L} \rightarrow 0$ , а вже потім  $p \rightarrow 0$  (це зауваження важливе, оскільки в залежності від порядку взяття ми отримуємо різні результати, див. Розділ 2.4.1 Окремі випадки

#### Випадок

$$q=0: \tan \psi = \pm g p$$

$$l=0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$\text{Випадок } \mathcal{L} \neq 0, p = 0$$

$$q = 0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$l = 0: \tan \psi = \pm \frac{|T|}{\mathcal{L}}$$

$$\text{Випадок } \mathcal{L} = 0, p = 0$$

$$q = 0: \lim_{p \rightarrow 0} \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \psi = \frac{\pi}{2} \text{ або } -\frac{\pi}{2}$$

$$q = 0: \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \lim_{p \rightarrow 0} \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$l = 0: \lim_{p \rightarrow 0} \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$l = 0: \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \lim_{p \rightarrow 0} \psi = \frac{\pi}{2} \text{ або } -\frac{\pi}{2}$$

На Рис. 1 ми показуємо, як знаки  $q$  та  $l$  залежать від напрямку випромінювання та точки випромінювання для різних параметрів випромінювача. Цей аналіз дає нам змогу вибрати напрямок випромінювання (у системі відліку, що співпадає з випромінювачем), виходячи з положення і параметрів випромінювача, так, щоб  $q$  і  $l$  мали задані знаки. Тепер ми зосередимося на найбільш цікавих областях, а саме поблизу горизонту та сингулярності.

#### 2.4.1 Окремі випадки

Випадок  $\mathcal{L} = 0, p \neq 0$ .

$$q = 0: \tan \psi = \pm \frac{\sqrt{g}}{p}$$

$$l = 0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

Випадок  $\mathcal{L} \neq 0, p = 0$

$$q = 0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$l = 0: \tan \psi = \pm \frac{|T|}{\mathcal{L}}$$

Випадок  $\mathcal{L} = 0, p = 0$

$$q = 0: \lim_{p \rightarrow 0} \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \psi = \frac{\pi}{2} \text{ або } -\frac{\pi}{2}$$

$$q = 0: \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \lim_{p \rightarrow 0} \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$l = 0: \lim_{p \rightarrow 0} \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$l = 0: \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \lim_{p \rightarrow 0} \psi = \frac{\pi}{2} \text{ або } -\frac{\pi}{2}$$

#### 2.4.2 Горизонт

Випадок  $\mathcal{L} \neq 0, p \neq 0$

$$q = 0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$l = 0: \tan \psi = -\frac{\mathcal{L}|T|}{|T|^2 - \mathcal{L}^2} (\sigma(p) \pm 1)$$

Випадок  $\mathcal{L} \neq 0, p = 0$

$$q = 0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$l = 0: \lim_{p \rightarrow 0} \lim_{g \rightarrow 0} \tan \psi = \pm \frac{2\mathcal{L}|T|}{|T|^2 - \mathcal{L}^2} \text{ або } \psi = 0, \pi$$

$$l = 0: \lim_{g \rightarrow 0} \lim_{p \rightarrow 0} \tan \psi = \pm \frac{|T|}{\mathcal{L}}$$

Випадок  $\mathcal{L} = 0, p \neq 0$

$$q = 0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$l = 0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

Випадок  $p = 0, \mathcal{L} = 0$

$q = 0$ : якщо взяти ліміти в такому порядку, отримаємо:

$$\lim_{g \rightarrow 0} \lim_{p \rightarrow 0} \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \psi = \pm \frac{\pi}{2}$$

В усіх інших випадках  $\psi = 0$  або  $\pi$

$l = 0$ : якщо спочатку взяти ліміт за  $p$ , отримаємо  $\lim_{p \rightarrow 0} \psi = \pm \frac{\pi}{2}$

Для усіх інших порядків взяття лімітів маємо  $\psi = 0$  або  $\pi$

### 2.4.3 Сингулярність

Випадок  $\mathcal{L} \neq 0, p \neq 0$

$$q = 0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$l = 0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

Випадок  $\mathcal{L} \neq 0, p = 0$

$$q = 0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$l = 0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

Випадок  $\mathcal{L} = 0, p \neq 0$

$$q = 0: \lim_{g \rightarrow \infty} \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \psi = \frac{\pi}{2} \text{ або } -\frac{\pi}{2}$$

$$q = 0: \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \lim_{g \rightarrow \infty} \psi = 0 \text{ або } \pi$$

$$l = 0: \psi = 0 \text{ або } \pi$$

Випадок  $\mathcal{L} = 0, p = 0$

$$q = 0: \text{якщо спочатку взяти ліміт за } \mathcal{L}, \text{ отримаємо } \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \psi = \pm \frac{\pi}{2}$$

Для усіх інших порядків взяття лімітів маємо  $\psi = 0$  або  $\pi$

$$l = 0: \text{якщо взяти ліміти в такому порядку } \lim_{g \rightarrow \infty} \lim_{\mathcal{L} \rightarrow 0} \lim_{p \rightarrow 0} \psi = \pm \frac{\pi}{2}$$

Для усіх інших порядків взяття лімітів маємо  $\psi = 0$  або  $\pi$

## 2.5 Частота зареєстрованого фотона

Частота, виміряна спостерігачем з 4-швидкістю  $u^\mu$  задається формулою  $\omega = -u_\mu k^\mu$ . Якщо і фотон, і спостерігач рухаються в одній площині,

$$\omega = \frac{zZ - pq}{g} - \frac{l\mathcal{L}}{T^2}, \quad (35)$$

Цей вираз можна отримати з рівнянь (7) та (9), і він узгоджується з рівнянням (26) з (Zaslavskii, 2020).

Розглянемо випадок, коли фотон поширюється під кутом  $\alpha$  відносно площини  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , у якій рухається спостерігач. У цьому випадку

$$k^\mu = \left( z, \frac{q}{g}, \frac{l}{T^2} \cos \alpha, \frac{l}{T^2} \sin \alpha \right), \quad (36)$$

і формула для частоти набуває вигляду:

$$\omega = \frac{zZ - pq}{g} - \frac{l\mathcal{L}}{T^2} \cos \alpha, \quad (37)$$

Для руху фотона і спостерігача в одній площині аналітичні результати на основі рівняння (35) було обговорено в (Zaslavskii, 2020). Якщо рух відбувається в різних площинах, ми зосередимося на нових особливостях, які виникають через ненульову  $\alpha$  у (35). Поведінка частоти поблизу горизонту для  $\alpha = 0$  (Zaslavskii, 2020) та  $\alpha \neq 0$  подібна. Що ж до поведінки поблизу сингулярності, то тут спостерігається якісно новий випадок відсутній у (Zaslavskii, 2020). А саме, якщо  $l\mathcal{L} > 0$ , то для  $\alpha = 0$  частота залишається скінченною (Zaslavskii, 2020). Однак, це не так для  $\alpha \neq 0$ .

Для масивних частинок вплив ненульової  $\alpha$  на зіткнення частинок поблизу сингулярності було розглянуто в розд. 7 роботи (A. Radosz, 2023).

## 2.6 Вигляд нічного неба

Тепер, коли ми встановили основні співвідношення між параметрами спостерігача, випромінювача і фотона, застосуємо їх до цікавого питання - вигляду нічного неба, яке бачить спостерігач. Для цього припустимо, що небо заповнене зірками, які знаходяться на нескінченно великій відстані від чорної діри. Кожна зірка випромінює фотони у різних напрямках. Фотони, які пройшли крізь горизонт і були захоплені чорною дірою, спостерігач може спостерігати під час його падіння до сингулярності.

Щоб проаналізувати, як рухаються ці фотони, знайдемо кут між кутовою та радіальною складовими 4-імпульсу фотона:

$$\tan \beta = \frac{k^\varphi}{k^y} = \frac{l\sqrt{g}}{q|T|}, \quad (39)$$

Як бачимо, поблизу сингулярності ( $T \rightarrow 0$ ,  $g \rightarrow \infty$ ) маємо  $\tan \beta \rightarrow \infty$ . Це означає, що поблизу сингулярності кутова компонента хвильового вектора фотона набагато більша за  $y$ -компоненту, і трихвильові вектори всіх фотонів практично перпендикулярні до осі  $y$ . Таким чином, будь-який

необертаючийся спостерігач побачить все нічне небо "стиснутим" у кільце, перпендикулярне до напрямку його руху.

Однак, якщо спостерігач має кутовий момент, то поблизу сингулярності його 3-швидкість також буде перпендикулярна до осі  $u$ . Як наслідок, його/її тришвидкість буде лежати в площині руху фотонів, і таким чином "стиснуте" кільце буде повернуте вздовж напрямку руху.

Наведені вище міркування дозволяють передбачити вигляд нічного неба лише поблизу сингулярності. Щоб отримати його скрізь під горизонтом, ми повинні використовувати точну формулу для аберації світла. Випадок неорбітального спостерігача вже проаналізовано у (E. Taylor, 2000) (див. сторінку B-22). Ми хотіли б отримати те саме рівняння для спостерігача, що обертається. Ми зробимо це у два кроки. Насамперед знайдемо кути між напрямком руху заданого фотона і спостерігачем у тетрадній системі координат (3). Після цього ми проведемо буст у напрямку руху. Для цього введемо 2 кути  $\gamma$  і  $\delta$ , що описують напрямок руху фотона. Перша величина описує кут між просторовою частиною хвильового вектора і координатою  $u$ , тоді як  $\delta$  описує кут між екваторіальною площиною (у якій рухається спостерігач) і площиною руху фотона. Кут  $\gamma$  вже було знайдено в (E. Taylor, 2000) і задано рівнянням (38) на стор. B-23, де його позначено  $\psi_{shell}$ .

Таким чином, відповідний просторовий одиничний вектор, що описує напрям поширення фотона в тетрадній системі відліку (3) задається виразом.

$$h^{(i)} = \frac{k^{(i)}}{|k|} = (\cos \gamma, \sin \gamma \cos \delta, \sin \gamma \sin \delta), \quad (40)$$

Кут між напрямком поширення фотона та спостерігачем можна можна знайти за допомогою стандартного означення (зверніть увагу, що тільки у цьому розділі ми будемо позначатимемо цей кут як  $\psi$ , який не співпадає з кутом  $\psi$  введеним у (20))

$$\cos \psi = \frac{v_{(i)} h^{(i)}}{|v| |h|}, \quad (41)$$

де  $v_i$  – 3-швидкість спостерігача у тетрадній системі відліку (3).

$$v_{(i)} = -\frac{e_{(i)\mu} u^\mu}{e_{(0)\mu} u^\mu}, \quad (42)$$

Беручи до уваги (3) та (7), маємо

$$v_{(i)} = \left( \frac{p}{Z}, \sqrt{g} \frac{\mathcal{L}}{TZ}, 0 \right), |v| = \frac{\sqrt{p^2 + g\mathcal{L}^2/T^2}}{\sqrt{p^2 + g(1 + \mathcal{L}^2/T^2)}}, \quad (43)$$

Зрештою, маємо:

$$\cos \psi = \left( p \cos \gamma + \sqrt{g} \frac{\mathcal{L}}{T} \sin \gamma \cos \delta \right) \frac{1}{\sqrt{p^2 + g\mathcal{L}^2/T^2}}, \quad (44)$$

Зауважимо, що якщо обертання немає ( $\mathcal{L} = 0$ ), то маємо  $\cos \psi = \cos \gamma$  (як було зазначено при аналізі рівняння [38] на сторінці В-23 у (E. Taylor, 2000)).

Однак, у випадку ненульового кутового моменту, кут  $\psi$  не є достатнім для опису положення зорі на небесній сфері спостерігача. З цією метою ми вводимо також азимутальний кут на небесній сфері. Щоб його знайти, розкладемо вектор  $h^{(i)}$  на дві складові: паралельну  $v_{(i)}$  і  $\widetilde{h}^{(i)}$ , яка перпендикулярна до неї,

$$\widetilde{h}^{(i)} = h^{(i)} - \frac{v^{(i)}}{|v|^2} (h^{(k)} v_{(k)}), \quad (45)$$

Тоді азимутальний кут визначається як кут між  $\widetilde{h}^{(i)}$  і вектором  $n^{(i)} = (0,0,1)$  (де  $n^{(i)}$  - нормальний вектор, перпендикулярний до площини руху спостерігача).

Це дозволяє нам отримати азимутальний кут

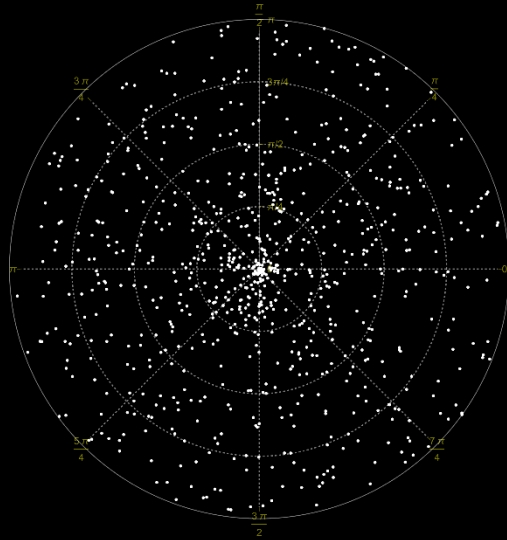
$$\cos \varphi = \frac{\widetilde{h}_{(i)} n^{(i)}}{|\widetilde{h}| |n|}, \quad (46)$$

Зауважимо, що вирази для  $\psi$  і  $\varphi$  описують кути у тетрадній системі координат (3). Щоб отримати зображення, яке бачить спостерігач, ми повинні виконати буст у напрямку його руху. Зауважте, що кут  $\varphi$  не зміниться під час прискорення, оскільки він визначається через скалярний добуток двох векторів, перпендикулярних до напрямку бусту. Оскільки ми виконуємо буст вздовж швидкості спостерігача, він не змінює вектори перпендикулярні до швидкості. Оскільки кут  $\psi$  визначено як кут між швидкістю і напрямком на зорю (у тетрадній системі відліку (3)), ми можемо використати формулу зі спеціальної теорії відносності для зміни кутів (яка збігається з рівнянням [34] на сторінці B-22 у (E. Taylor, 2000)):

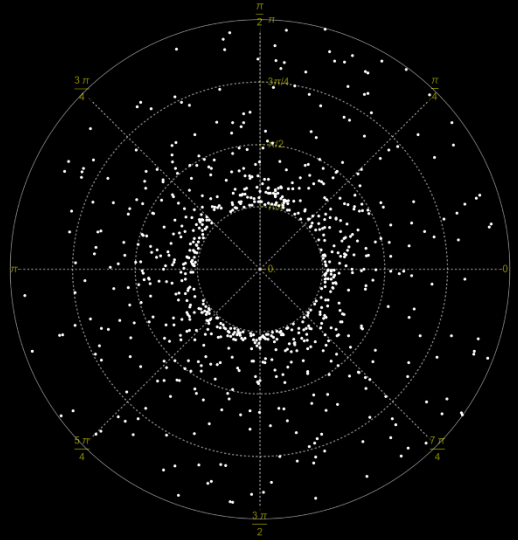
$$\cos \psi' = \frac{\cos \psi + |v|}{1 + |v| \cos \psi}, \quad (47)$$

(де  $|v|$  задано через (43)). Альтернативне виведення рівняння (47) наведено у Додатку. Використовуючи рівняння (44), отримуємо фінальні вирази для кутів  $\psi'$  та  $\varphi$ , під якими спостерігач бачить задану зорю. Через складність відповідних виразів, ми наведемо лише результати чисельних обчислень.

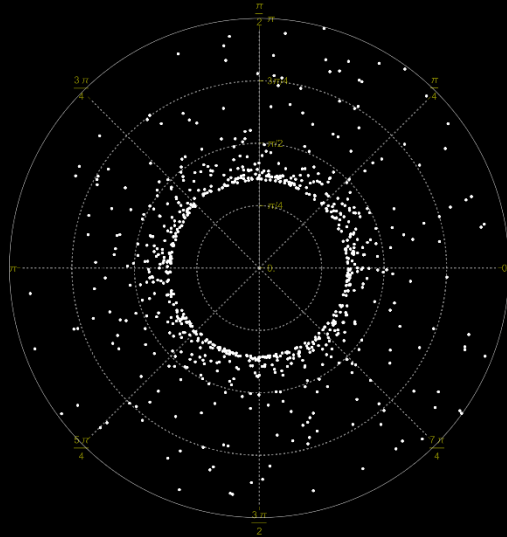
$$\frac{r}{r_g} \rightarrow \infty$$



$$\frac{r}{r_g} = 0.999$$



$$\frac{r}{r_g} = 0.25$$



$$\frac{r}{r_g} = 0.001$$

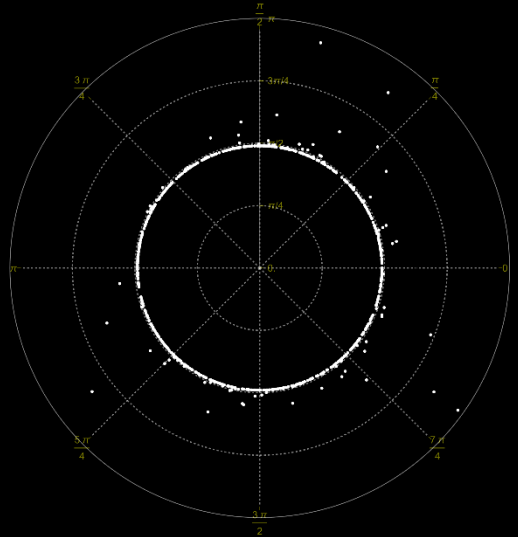


Рис. 2. Рисунок, що показує, як спостерігач бачитиме нічне небо під час того, як він/вона наближається до сингулярності. На кожній схемі радіальна координата відповідає зенітному куту на небесній сфері (кут  $\psi'$ ), кутова-азимутальному куту (кут  $\varphi$ ). Параметри спостерігача:  $p = -1.05, \mathcal{L} = 0$ .

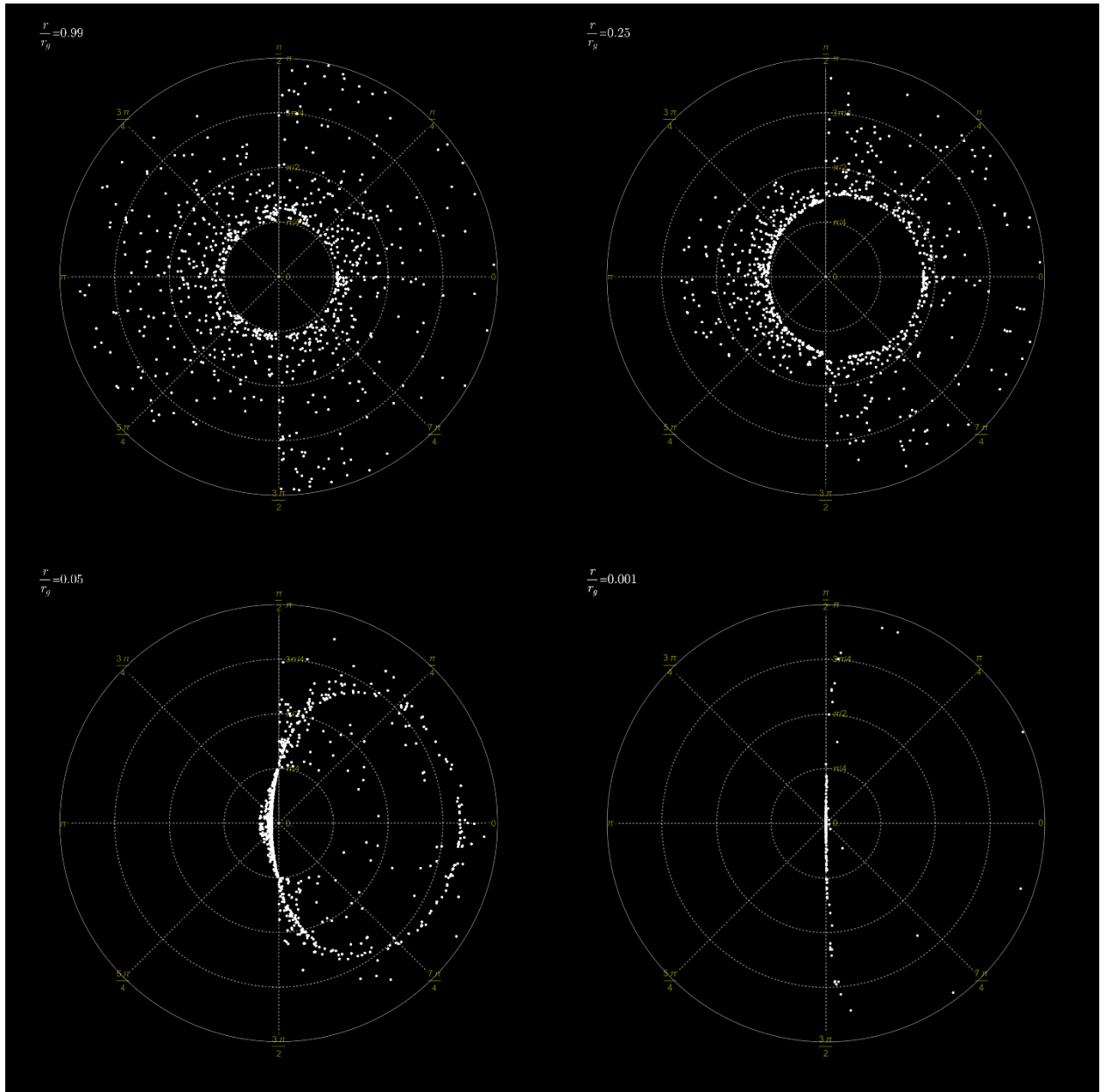


Рис. 3. Рисунок, що показує, як спостерігач бачитиме нічне небо під час того, як він/вона наближається до сингулярності. На кожній схемі радіальна координата відповідає зенітному куту на небесній сфері (кут  $\psi'$ ), кутова-азимутальному куту (кут  $\varphi$ ). Параметри спостерігача:  $p = -1.05$ ,  $\mathcal{L} = 0.05$ .

Для чисельних розрахунків ми генеруємо випадково розподілені точки на небі і аналізуємо, як ця картина змінюється під час наближення спостерігача до сингулярності. Для цього для кожної зорі і для заданого положення спостерігача, ми знаходимо чисельно прицільний параметр  $b = l/q$ , який повинен мати фотон, випромінений цією зіркою, щоб він міг досягти спостерігача в даній точці (фотони з різними прицільними параметрами можна розглядати як фотони, що випромінюються зіркою у різних напрямках). Це було зроблено шляхом розв'язання рівнянь руху для фотона і спостерігача та шляхом знаходження такого прицільного параметру, що для заданої координати у позиції фотона і спостерігача збігаються. Тоді ми використовуємо рівняння (46) і (47), щоб отримати кути, під якими спостерігач бачитиме задану зорю на своїй небесній сфері.

Відповідні результати представлено на рис. 2 та рис. 3. На рис. 2 зображено вигляд нічного неба, який бачить неорбітальний спостерігач при наближенні до сингулярності. Тут на кожному графіку "радіальна" координата відповідає зенітному куту на небесній сфері, а "кутова" - азимутальному. Як бачимо, поблизу сингулярності все нічне небо справді "стискається" до кільця, перпендикулярного до напрямку руху, що узгоджується з тим, що ми обговорювали раніше. Зробимо одне застереження. Якщо спостерігач рухається строго радіально, він бачить радіальні промені без аберації, тому в центрі рис. 2 присутня точка, що світиться (не показана).

Якщо спостерігач має ненульовий кутовий момент, то отримаємо результати, зображені на рис. 3. Ми бачимо, що дійсно поблизу

сингулярності все нічне небо "стискається" до кільця, яке лежить у площині, утвореній напрямком руху і вертикальною віссю (перпендикулярній до площини руху). У цьому випадку також можна зробити кілька цікавих спостережень. Перш за все, ми бачимо, що як для неорбітального спостерігача, так і для орбітального існує внутрішня "сліпа зона" навколо сингулярності, яка у випадку неорбітального спостерігача має форму диска ("сліпі зони" - це області, в яких спостерігач не бачить ніякого випромінювання). Крім того, у випадку орбітального спостерігача існує ще одна "сліпа зона", додаткова до тієї, що навколо сингулярності, розміщена з лівого боку від спостерігача. Причиною такого ефекту є обертання спостерігача, що призводить до зміни сторони, з якої спостерігач бачить дану зорю (пояснення див. на рис. 4. Зауважте також, що відповідні траєкторії було побудовано як полярні графіки у параметричному просторі з параметрами  $r$  та  $\varphi$ . Це застереження необхідне, оскільки під горизонтом  $r$  координати перестають бути просторовими). Зауважимо, що це явище не було проаналізовано у попередніх роботах (див. (Polhemus, 2010), (Riazuelo, 2019)) і становить особливий інтерес. Зауважимо також, що якщо спостерігач матиме інший знак кутового моменту, то згадана вище "сліпа зона" з'явиться праворуч від нього/неї.

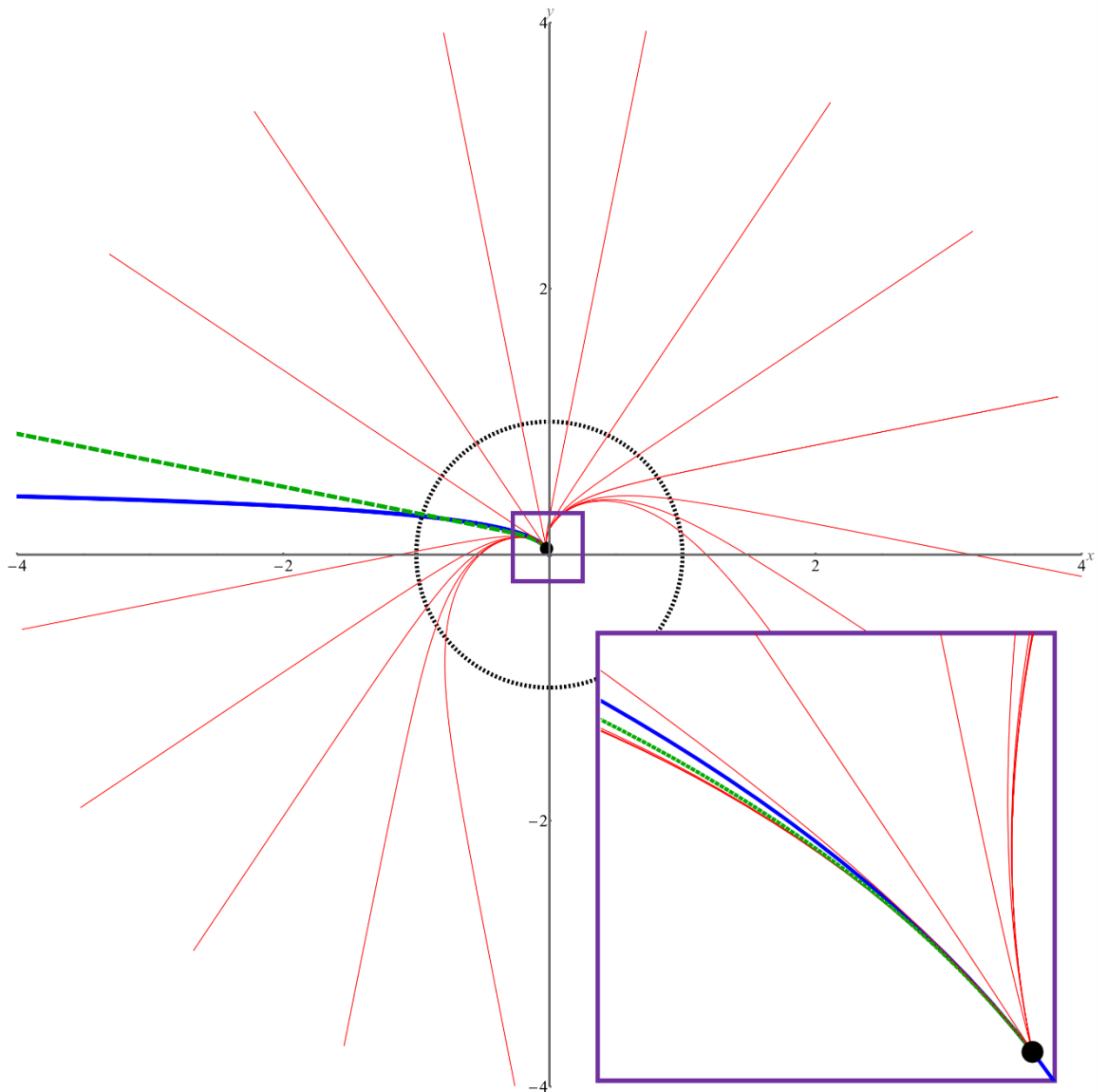


Рис. 4. На рисунку показано траєкторію (синя крива) спостерігача, що обертається, поточне положення якого показано чорною крапкою, і траєкторії фотонів (червона і зелена штрихові криві). Зелена штрихова траєкторія - це траєкторія фотона від зорі, яку спостерігач бачив на нескінченності зліва, але з наближенням до сингулярності ця зоря стає видимою справа (лівий і правий боки визначені відносно прямої, дотичної до траєкторії спостерігача). Пунктирна лінія позначає горизонт. Параметри спостерігача:  $p = 1.05, \mathcal{L} = 0.05$

### Поверхня колапсуючої зорі, яку бачить спостерігач

Попередній аналіз був підготовкою до дослідження більш

цікавого фізичного випадку - колапсу зорі та випромінювання від неї. Розглянемо поверхню зорі, що колапсує (яку позначимо числом 1 або з індексом  $e$ ) і спостерігача (2 або індекс  $o$ ). Після перетину горизонту зоря випромінює фотони у двох протилежних напрямках у просторово-часовій діаграмі, які неминуче падатимуть у напрямку до сингулярності (рис. 5). Спостерігач (2) може перетнути горизонт до або після зорі. Припустимо, що випромінювач випромінює фотони у всіх можливих просторових напрямках під час свого падіння. Спостерігач у даній позиції може спостерігати лише один з випромінених фотонів, зображених на рисунку 5. Наша мета полягає у тому, щоб пов'язати положення спостерігача з положенням випромінювача та напрямком випромінювання. Це дозволить нам проаналізувати частоту випромінювання, коли спостерігач падає в бік сингулярності. Розуміючи якісні особливості, сформулюємо визначальні рівняння, які дозволять нам відновити повну картину поведінки частоти.

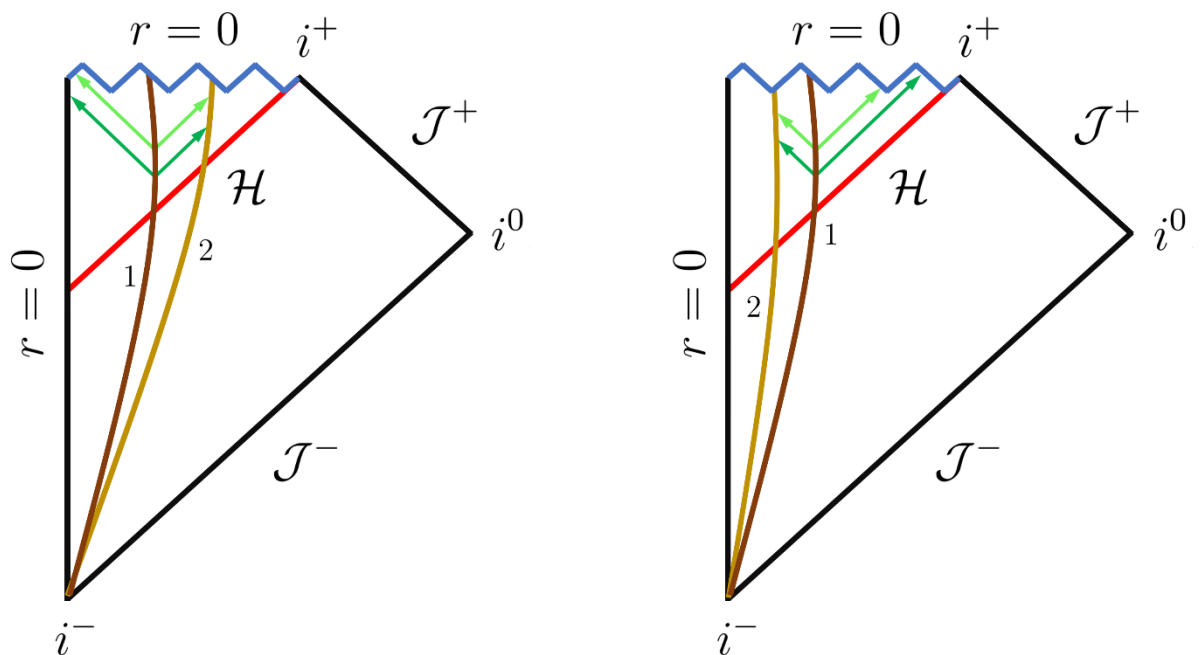


Рис. 5. Діаграма Пенроуза для зорі, що колапсує. 1 позначає зірку, 2-зовнішній спостерігач. Стрілками показано два фотони, які зоря випромінює в протилежних напрямки

Перш за все, дослідимо траєкторію колапсууючої зорі. Оскільки 4-швидкість зорі задано формулою (7), то  $\frac{dT_e}{dy_e} = \frac{u^T}{u^y} = g \frac{Z_e}{p_e}$ , звідки плинне

$$y_e = \int_{T_H}^{T_e} \frac{p_e}{g} \frac{dT}{Z_e}, \quad (48)$$

де  $T_H = -r_+$  і інтегрування здійснюється від горизонту до поточного положення випромінювача. Це ж рівняння справедливе і для спостерігача:

$$y_o = \int_{T_H}^{T_o} \frac{p_o}{g} \frac{dT}{Z_o}, \quad (49)$$

Власний час  $\tau_e$  спостерігача між моментами  $T_H$  і  $T_o$  дорівнює

$$\tau_e = \int_{T_H}^{T_o} \frac{dT}{\sqrt{p_e^2 + g(T) \left(1 + \frac{\mathcal{L}_e}{T^2}\right)}}, \quad (50)$$

Для випромінювача аналогічна формула має місце з індексом  $o$ , заміненним на  $e$ .

Для фотона, який випромінюється при  $T_e$  і приймається при  $T_{ph}$ , маємо

$$y_{ph} = \int_{T_e}^{T_{ph}} \frac{q}{g} \frac{dT}{z}, \quad (51)$$

Аналогічно, для кутових координат за допомогою (7) можна записати  $\frac{d\varphi}{dT} = \frac{u^\varphi}{u^T}$ . Припустимо, для визначеності, що спостерігач перетинає горизонт з  $\varphi_o = 0$ , а випромінювач з  $(\varphi_e)_H$ . Звідси випливає, що:

$$\varphi_o = \int_{T_H}^{T_o} \frac{\mathcal{L}_\sigma}{T^2 Z_o} dT, \quad (52)$$

$$\varphi_e = (\varphi_e)_H + \int_{T_H}^{T_e} \frac{L_e dT}{T^2 Z_e}, \quad (53)$$

$$\varphi_{ph} = (\varphi_{ph})_H + \int_{T_H}^{T_{ph}} \frac{l}{T^2 Z} dT, \quad (54)$$

Кутові координати залишаються регулярними на горизонті, відповідні інтеграли (52) - (54) збігаються. Однак координати  $(T, y)$  стають сингулярними поблизу горизонту подій, інтеграли (48), (49) та (51) розходяться. Щоб уникнути цих розбіжностей, ми вдаємося до використання координат Крускала.

## 2.7 Опис випромінювання та емісії в координатах Крускала

Для області під горизонтом  $r < r_+$  метрика має вигляд

$$ds^2 = -\frac{dT^2}{g} + g dy^2 + T^2 d\Omega^2, \quad (55)$$

Ми можемо розглянути перетворення координат:

$$U = \exp(-\kappa u), \quad (56)$$

$$V = \exp(\kappa v), \quad (57)$$

де

$$u = y - T^*, v = y + T^*, \quad (58)$$

$\kappa = (2r_+)^{-1}$  - поверхнева гравітація, а  $T^*$  задається формулою

$$T^* = \int^T \frac{dT}{g}, \quad (59)$$

Тепер отримаємо рівняння руху в координатах Крускала. Для цього скористаємося співвідношеннями  $\frac{dU}{d\tau} = \frac{dU}{du} \frac{du}{d\tau} = \frac{dU}{du} \left( \frac{dy}{d\tau} - \frac{dT^*}{d\tau} \right)$

Використовуючи вирази для  $y$  (48),  $\tau$  (50) та  $T^*$  (59), отримаємо:

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{p - Z}{g} \frac{dU}{du}, \quad (60)$$

Таким же чином можна отримати

$$\frac{dV}{d\tau} = \frac{p + Z}{g} \frac{dV}{dv}, \quad (61)$$

де  $Z$  задано формулою (6).

Їх також можна переписати як

$$\dot{U} = \frac{(p - Z)}{FV\kappa}, \quad (62)$$

$$\dot{V} = -\frac{(p + Z)}{UF\kappa}, \quad (63)$$

де

$$F = -\frac{g}{UV\kappa^2}, \quad (64)$$

Метрика в цих координатах приймає вигляд

$$ds^2 = -FdUdV + r^2 d\omega^2, \quad (65)$$

де  $\kappa$  - поверхнева гравітація,  $F \neq 0$  - скінченна на горизонті

Аналогічні рівняння справедливі і для фотонів:

$$\dot{U} = \frac{(q - z)}{FV\kappa}, \quad (66)$$

$$\dot{V} = -\frac{(q + z)}{UF\kappa}, \quad (67)$$

Тут крапка означає похідну за афінним параметром вздовж світлоподібної геодезичної.

Хвильовий вектор фотона в координатах Крускала має вигляд

$$k^U = k^\mu \frac{dU}{dx^\mu} = \frac{\kappa U}{g} (z - q) = \frac{q - z}{F\kappa V}, \quad (68)$$

$$k^V = k^\mu \frac{dV}{dx^\mu} = \frac{\kappa V}{g} (z + q) = -\frac{z + q}{F\kappa U}, \quad (69)$$

$$k_U = g_{UV}k^V = \frac{z+q}{2\kappa U}, \quad (70)$$

$$k_V = g_{UV}k^U = \frac{z-q}{2\kappa V}, \quad (71)$$

Пам'ятаючи, що  $k_\phi = l$  і використовуючи (7), для частоти  $\omega = -k_\mu u^\mu$  отримаємо:

$$\omega = \frac{zZ - pq}{\kappa^2 FUV} - \frac{l\mathcal{L}}{T^2}, \quad (72)$$

З (64) випливає, що вона збігається з рівнянням (35) і може бути отримана безпосередньо з нього за допомогою (56)-(59).

## 2.8 Умови поглинання

Нехай фотон випромінюється в точці E і поглинається спостерігачем у точці A. Для того, щоб ця подія відбулась, відповідні координати повинні співпадати.

### 2.8.1 Кутові координати

Умова

$$\varphi_{ph}(A) = \varphi_o(A), \quad (73)$$

має виконуватись. Тут, згідно з (54):

$$\varphi_{ph} = \varphi_e(E) + \int_{T_e}^{T_{ph}} \frac{ldT}{T^2 Z}, \quad (74)$$

Використовуючи (73), маємо:

$$\varphi_e(E) + \int_{T_e}^{T_A} \frac{ldT}{T^2 Z} = \varphi_o(T_A), \quad (75)$$

Це еквівалентно

$$(\varphi_e)_H + \int_{T_H}^{T_e} \frac{L_e dT}{T^2 Z_e} + \int_{T_e}^{T_A} \frac{ldT}{T^2 Z} = \int_{T_H}^{T_A} \frac{L_o dT}{T^2 Z_o}, \quad (76)$$

## 2.8.2 Координати Крускала

Уздовж траєкторії масивної частинки

$$U = U(V, L, \varepsilon, m; U_0, V_0), \quad (77)$$

де

$$U_0 = U(V = V_0), \quad (78)$$

Тоді, якщо фотон випромінюється в точці  $(U_e, V_e)$ , аналогічно

$$U_{ph} = U(V, l, \omega_0, 0, U_e, V_e), \quad (79)$$

де

$$U_e = U(V_e, L_e, \varepsilon_e, m_e; U_{eH}, V_{eH}), \quad (80)$$

Тут припускається, що вона перетнула горизонт у точці  $(U_H, V_H)$ . Для майбутнього горизонту  $U_H = 0$ , тому траєкторії 1 і 2 відрізняються на  $V_1 \equiv V_{1H}$ ,  $V_2 \equiv V_{2H}$ . Якщо  $V_1 < V_2$ , то частинка 1 перетне горизонт першою.

Також ми маємо

$$U_o = U_o(V, L_o, \varepsilon_o, m_o; U_{oH}, V_{oH}), \quad (81)$$

У точці  $(U_A, V_A)$ , де фотон поглинається,

$$U_{ph}(A) = U(V_A, l, \omega_0, 0, U_e, V_e), \quad (82)$$

$$U_o(A) = U_o(V_A, L_o, \varepsilon_o, m_o; U_{oH}, V_{oH}), \quad (83)$$

та

$$U_{ph}(A) = U_o(A), \quad (84)$$

## 2.9 Результати для частоти та їх обговорення

Через складність загальних інтегралів ми виконали відповідні обчислення чисельно. Через складність задачі та велику кількість різних параметрів, не очевидно, як кожен параметр впливає на поведінку частоти. Чисельний аналіз показує, що якісно всі фізично різні випадки можна

класифікувати за поведінкою частоти поблизу горизонту і сингулярності. На основі теоретичного аналізу, проведеного в (Zaslavskii, 2020), можна визначити що частота поблизу горизонту може бути або скінченною, або розбіжною, тоді як поблизу сингулярності вона може бути скінченною, розбіжною або прямувати до нуля. Отже, маємо шість принципово різних випадків. Для їх позначення використаємо такі позначення: якщо частота біля горизонту скінченна, то це будемо позначати як випадок I, якщо вона розходиться, то будемо позначати як випадок II. Поведінку поблизу сингулярності будемо позначати як окремі випадки: якщо частота скінченна, то позначатимемо 1, якщо вона розходиться, позначимо як 2, і якщо вона прямує до нуля, позначимо як 3. Наприклад, випадок, коли частота біля горизонту скінченна, але розходиться біля сингулярності, буде позначимо як I.2 і т.д. У (Zaslavskii, 2020) показано, що ці різні сценарії критично залежать від взаємних знаків імпульсу та кутового моменту фотона (ми підсумували ці умови в таблиці 2).

	$\omega$ біля горизонту	Умови	$\omega$ біля сингулярності	Умови
I.1	Скінченна	$pq > 0$ або $p = q = 0$	Скінченна	$Ll > 0$
I.2	Скінченна	$pq > 0$ або $p = q = 0$	Розходиться	$Ll < 0$ або $L = 0$ або $l = 0$
I.3	Скінченна	$pq > 0$ або $p = q = 0$	Прямує до нуля	$L = l = 0$
II.1	Розходиться	$pq < 0$ або $p = 0$ або $q = 0$	Скінченна	$Ll > 0$
II.2	Розходиться	$pq < 0$ або $p = 0$ або $q = 0$	Розходиться	$Ll < 0$ або $L = 0$ або $l = 0$
II.3	Розходиться	$pq < 0$ або $p = 0$ або $q = 0$	Прямує до нуля	$L = l = 0$

Таб. 2. Таблиця, що показує умови, які повинні бути виконані для кожного випадку різної поведінки частоти.

Згідно з отриманими результатами, ми повинні вибрати параметри випромінювача і спостерігача, які задовольняють умовам, наведеним у цій таблиці. Питання про зв'язок між параметрами випромінювача та фотона вже розглянуто в розділі **2.4 Поведінка параметрів фотона**. Знаючи ці співвідношення, ми можемо підібрати параметри як для випромінювача, так і для спостерігача, які дозволять нам отримати всі сценарії всіх типів, наведені в таблиці 2. Типові графіки, що охоплюють усі випадки з таблиці 2, показано на Рис. 7 та Рис. 6. Зауважте, що, як ми і казали раніше, поведінка частоти поблизу горизонту визначається знаками імпульсу випромінювача  $p_e$  та спостерігача  $p_o$ . Порядок, у якому спостерігач і випромінювач перетинають горизонт, а також вимога зустрічі а фотона і спостерігача накладає певні обмеження. Якщо спостерігач перетнув поверхню зорі раніше за випромінювач, то фотон має бути випромінений у напрямку руху випромінювача, що дає той самий знак імпульсу фотона, що й імпульсу випромінювача (див. рис. Рис. 1). Оскільки в цьому випадку знак імпульсу спостерігача збігається зі знаком імпульсу фотона, частота є скінченною. Однак, якщо спостерігач перетнув поверхню зорі слідом за випромінювачем, то ситуація змінюється на протилежну: фотон повинен випромінюватися в напрямку, протилежному до руху випромінювача (див. рис. 5), що дає різні знаки імпульсу. Роль інших параметрів (таких як кутовий момент) більш очевидна, і її можна визначити з Таб. 2.

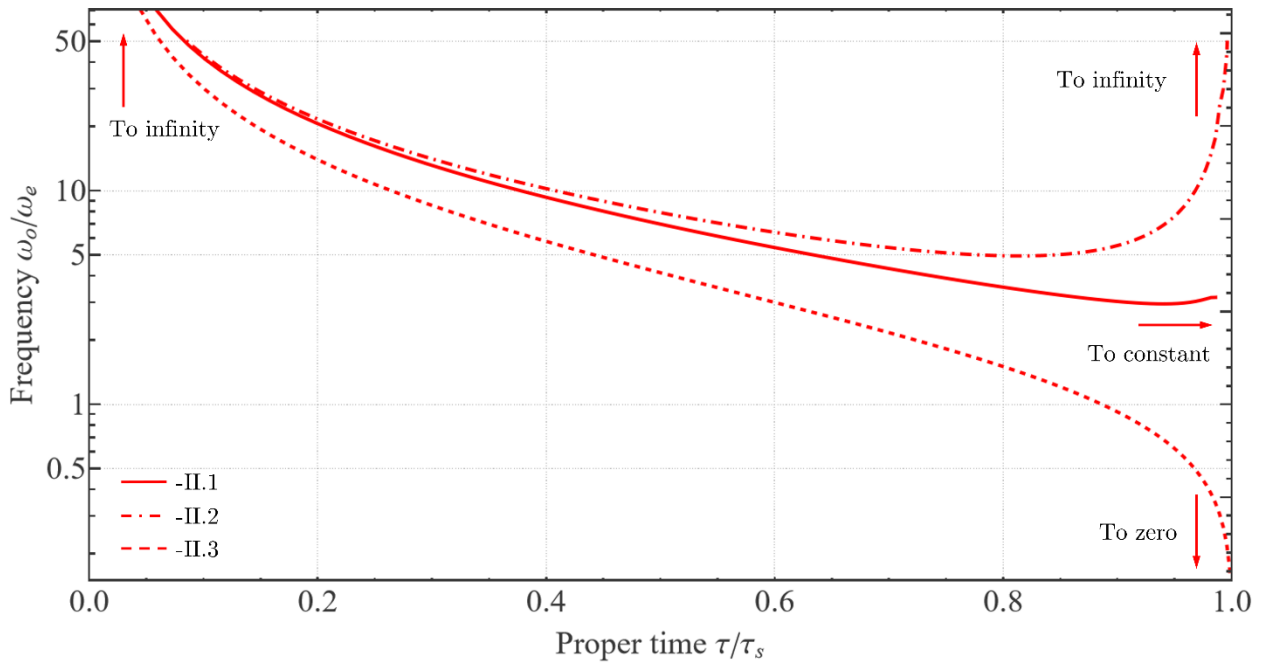


Рис. 6. Графік, що показує залежність частоти, отриманої спостерігачем (нормалізованої до початкової частоти, випромінюваної випромінювачем) від власного часу спостерігача, коли він наближається до сингулярності. На графіку представлено три різні сценарії. Параметри для кожного сценарію такі: I.1- $p_o = -p_e = -1.05, \mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L}_e = 0, \Delta\varphi = 0, \Delta y = -0.1$ . I.2- $p_o = -p_e = -1.05, \mathcal{L}_\sigma = \mathcal{L}_e = 0.1, \Delta\varphi = 0, \Delta y = -0.1$ . I.3- $p_o = -p_e = -1.05, \mathcal{L}_\sigma = -\mathcal{L}_e = 0.1, \Delta\varphi = 0, \Delta y = -0.1$ .

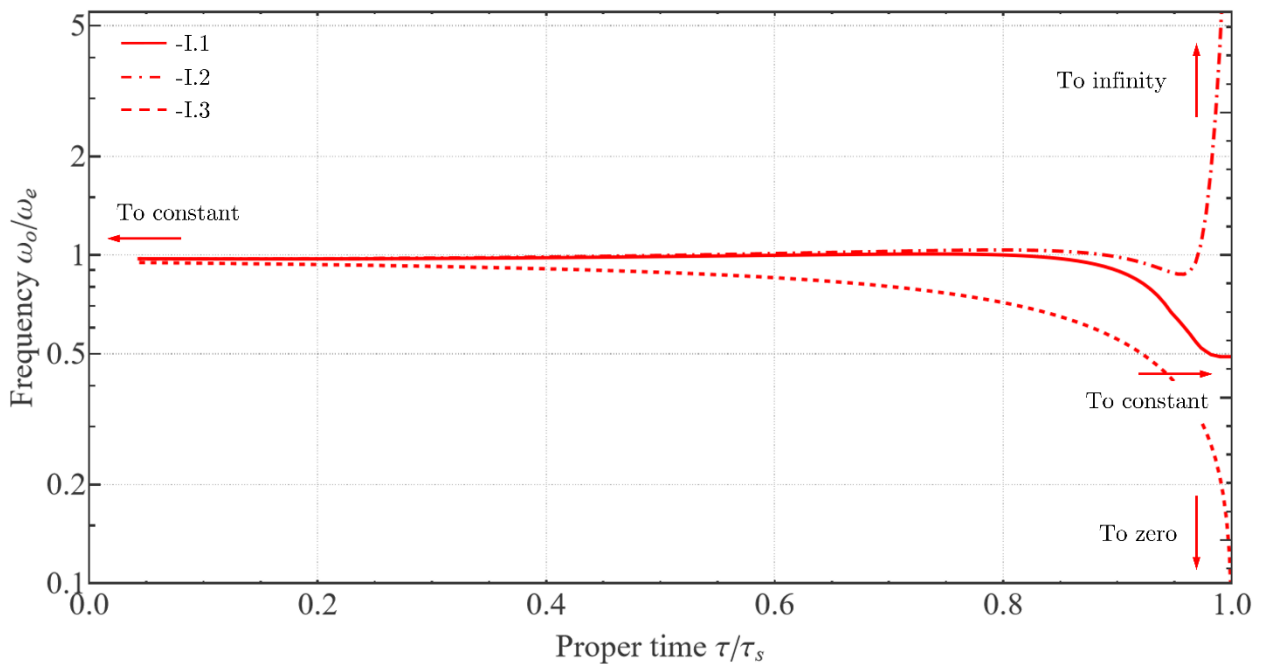


Рис. 7. Графік, що показує залежність частоти, отриманої спостерігачем (нормалізованої до початкової частоти, випромінюваної випромінювачем) від власного часу спостерігача, коли він наближається до сингулярності. На графіку представлено три різні сценарії. Параметри для кожного сценарію такі: I.1- $p_o = p_e = -1.05, \mathcal{L}_o = \mathcal{L}_e = 0, \Delta\varphi = 0, \Delta y = -0.1$ . I.2- $p_o = p_e = -1.05, \mathcal{L}_o = \mathcal{L}_e = 0.1, \Delta\varphi = 0, \Delta y = -0.1$ . I.3- $p_o = p_e = -1.05, \mathcal{L}_o = -\mathcal{L}_e = 0.1, \Delta\varphi = 0, \Delta y = -0.1$ .

Тут слід зробити деякі застереження. Формально, випадок  $p > 0$  і  $q < 0$ , який призводить до нескінченної частоти на горизонті, реалізується, коли фотон приходить з "дзеркальної" сторони метрики Шварцшильда. Однак, у реалістичному колапсі типу, зображеного на рис. 6 та рис. 7, така область не виникає взагалі. Якщо ми вимагаємо, щоб частота була скінченною на горизонті, то це означає, що величина  $q$  має бути малою. Докладно див. розд. 8.1 у (Zaslavskii, 2020).

Існують також випадки, коли  $q = 0$  або  $p = 0$ . Перший випадок можна отримати, якщо виконати рівняння (33). Другий випадок у принципі можливий, але він не відповідає падінню спостерігача з нескінченності (див. (О. В. Zaslavskii, Zero-momentum trajectories inside a black hole and high energy particle collisions, 2019) для деталей).

## **Висновки**

Таким чином, ми проаналізували поведінку частоти та напрямку, під яким світло спостерігається під час вільного падіння масивного спостерігача. Ми проаналізували як випадки отримання фотона з деякими заданими параметрами, так і випромінювання його іншим об'єктом (наприклад, поверхнею зорі, що колапсує). Незважаючи на складність відповідних рівнянь, усі випадки поведінки частоти можна класифікувати відповідно до її поведінки біля горизонту та біля сингулярності. Різні випадки можна

отримати, маніпулюючи параметрами випромінюваного фотона. Як ми показали, цю проблему можна розв'язати аналітично, що спрощує загальний аналіз. Також ми проаналізували динаміку вигляду нічного неба і, поряд з уже відомими результатами, виявили існування додаткових сліпих зон у випадку спостерігача, що обертається.

### Додаток

У цьому розділі ми даємо прямий вивід формули аберації (47) під горизонтом. Для цього ми вводимо множину тетрад, прикріплених до спостерігача. Ми можемо переписати вираз для 3-швидкості (43) у вигляді:

$$v^{(i)} = |v|(\cos \alpha, \sin \alpha, 0), \quad (85)$$

де

$$|v| = \sqrt{\frac{p^2 + g\mathcal{L}^2/T^2}{p^2 + g(1 + \mathcal{L}^2/T^2)}}, \tan \alpha = \sqrt{g} \frac{\mathcal{L}}{|T|p}, \quad (86)$$

Для кожної точки на траєкторії ми перетворюємо тетраду, прикріплену до спостерігача, таким чином:

- Повертаємо тетраду у площині уф:

$$\begin{aligned} \widetilde{e}_{(0)} &= e_{(0)}, \widetilde{e}_{(3)} = e_{(3)} \\ \widetilde{e}_{(1)} &= e_{(1)} \cos \alpha + e_{(2)} \sin \alpha, \widetilde{e}_{(2)} = e_{(2)} \cos \alpha - e_{(1)} \sin \alpha \end{aligned}$$

- Виконуємо буст вздовж  $\widetilde{e}_{(1)}$ :

$$\begin{aligned} \widehat{e}_{(2)} &= \widetilde{e}_{(2)}, \widehat{e}_{(3)} = \widetilde{e}_{(3)}, \\ \widehat{e}_{(0)} &= \gamma(\widetilde{e}_{(0)} + |v|\widetilde{e}_{(1)}), \widehat{e}_{(1)} = \gamma(\widetilde{e}_{(1)} + |v|\widetilde{e}_{(2)}) \end{aligned}$$

Після цих перетворень отримуємо:

$$\widehat{e}_{(0)} = \left( -\frac{Z}{g}, p, \mathcal{L}, 0 \right), \quad (87)$$

$$\widehat{e}_{(1)} = \left( -\frac{\sqrt{p^2 + g\mathcal{L}^2/T^2}}{g}, \frac{pZ}{\sqrt{p^2 + g\mathcal{L}^2/T^2}}, \frac{\mathcal{L}Z}{\sqrt{p^2 + g\mathcal{L}^2/T^2}}, 0 \right), \quad (88)$$

$$\widehat{e}_{(2)} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + g\mathcal{L}^2/T^2}} \left( 0, -g \frac{\mathcal{L}}{|T|}, |T|p, 0 \right), \quad (89)$$

$$\widehat{e}_{(3)} = (0, 0, 0, |T| \sin \theta), \quad (90)$$

Ми використовуємо позначення  $\widehat{e}_{(i)}$  для позначення тетради, прикріпленої до спостерігача. Відповідна швидкість відносно неї дорівнює нулю:

$$V^{(i)} = -\frac{\widehat{e}_{(i)\mu} u^\mu}{\widehat{e}_{(0)\mu} u^\mu} = 0, \quad (91)$$

Тепер наше завдання - знайти кут між просторовою частиною хвильового вектора та вектором  $\widehat{e}_{(1)}$  (який співнаправлений зі швидкістю спостерігача). Хвильовий вектор можна записати у вигляді:

$$k^\mu = |k| \left( -\sqrt{g}, \frac{\cos \gamma}{\sqrt{g}}, \frac{\sin \gamma \cos \delta}{|T|}, \frac{\sin \gamma \sin \delta}{|T| \sin \theta} \right), \quad (92)$$

Компоненти хвильового вектора, визначеного в тетрадній системі координат, задано за допомогою :

$$\widehat{k}^{(i)} = -\frac{\widehat{e}_{(i)\mu} k^\mu}{\widehat{e}_{(0)\mu} k^\mu}, \quad (93)$$

Як ми вже згадували, нас цікавить кут між хвильовим вектором і напрямком руху спостерігача, який задається формулою:

$$\widehat{k}^{(1)} = \cos \psi' = \frac{\frac{\sqrt{p^2 + g\mathcal{L}^2/T^2}}{Z} + \frac{1}{\sqrt{p^2 + g\mathcal{L}^2/T^2}} \left( p \cos \gamma + \sqrt{g} \frac{\mathcal{L}}{|T|} \sin \gamma \cos \delta \right)}{1 + \frac{1}{Z} \left( p \cos \gamma + \sqrt{g} \frac{\mathcal{L}}{|T|} \sin \gamma \cos \delta \right)}$$

Можна бачити, що це саме (47) з  $\psi$ , заданим за допомогою (44) і  $|v|$  заданим за допомогою (43).

## Список літератури

- A. Radosz, A. V. (2023). On particle dynamics near the singularity inside the Schwarzschild black hole and T-spheres. *European Journal of Physics C* 83, 650.
- E. Taylor, J. (2000). *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*. Addison Wesley Longman.
- Hamilton, A. J. (2019). *Inside astronomically realistic black holes*.
- M. Banados, J. S. (2009). *Kerr Black Holes as Particle Accelerators to Arbitrarily High Energy*. *Phys. Rev. Lett.* 103, 111102.
- Novikov, I. D. (1961). Note on the space-time metric inside the Schwarzschild singular sphere. *Sov.Astron.- AJ* 5, 423 .
- O. B. Zaslavskii, A. V. (2019). *Zero-momentum trajectories inside a black hole and high energy particle collisions*. *Journal Cosmol. Astropart.* 063.
- Polhemus, A. J. (2010). *Stereoscopic visualization in curved spacetime: seeing deep inside a black hole*. *New J. Phys.* 12 123027.
- R. Doran, F. L. (2008). Interior of a Schwarzschild black hole revisited. *Found. Phys.* 38, 160.
- Riazuelo, A. (2019). *Seeing relativity-I: Ray tracing in a Schwarzschild metric to explore the maximal analytic extension of the metric and making a proper rendering of the stars*. *International Journal of Modern Physics D*, Vol. 28, No. 02, 1950042.
- Toporensky A. V., Z. O. (2021). *Flow and peculiar velocities for generic motion in spherically symmetric black holes*. *Grav. and Cosm.* 27, 126.
- Zaslavskii, O. B. (2020). Redshift/blueshift inside the Schwarzschild black hole. *Gen. Relat. Grav.* 52, 37.