

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н. КАРАЗІНА

(повне найменування вищого навчального закладу)

ІННІ «ФІЗИКО-ТЕХНІЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ»

(назва факультету)

КАФЕДРА ФІЗИКИ ЯДРА ТА ВИСОКИХ ЕНЕРГІЙ ІМЕНІ О.І.АХІСЗЕРА

(повна назва кафедри)

Пояснювальна записка

до дипломного проекту (роботи)

БАКАЛАВРА

(освітньо-кваліфікаційний рівень)

на тему

укр. «Збудження прискорюючих і фокусуючих полів та їх використання у
перспективних колайдерах та інжекторах рентгенівських мікроскопів»
англ. «Excitation of accelerating and focusing fields and their use in prospective
colliders and injectors of X-ray microscopes»

Виконав: студент 4 курсу навчання

за ОПП бакалавр

напрям підготовки 6.040204 «Прикладна фізика»

Демиденко І. В.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

Керівник: к.ф.-м.н., доц. Щусь О.П.

(прізвище та ініціали) (особистий підпис)

Консультант: д.ф.-м.н., проф. Маслов В.І.

(прізвище та ініціали) (особистий підпис)

Рецензент: к.ф.-м.н. Ковальчук І.К.

(прізвище та ініціали)

(особистий підпис)

АНОТАЦІЯ

Демиденко Ілья. – Збудження прискорюючих і фокусуючих полів та їх використання у перспективних колайдерах та інжекторах рентгенівських мікроскопів. – рукопис. Дипломна робота бакалавра з прикладної фізики (напрямок підготовки «Прикладна фізика») – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2024.

44 с., 19 рис., 0 табл., 19 джерел

Дипломна робота присвячена двом проблемам – подавленню поперечної нестійкості електронних згустків, прискорених кільватерними прискорювачами, та формування пасивної плазмової лінзи, яка фокусує згустки та зменшує енергетичний розкид. Перший розділ роботи присвячений опису нового механізму подавлення поперечної нестійкості згустків, який реалізується у слабо нелінійному режимі роботи прискорювача. Ефект передбачений теоретично, а його наявність продемонстрована числовим моделюванням. Другий розділ присвячений формуванню пасивної плазмової лінзи у лінійному режимі, яка фокусує електронні згустки та зменшує їх енергетичний розкид. Формування лінзи та еволюція розмірів згустків з часом продемонстровані на основі числового моделювання. Результати роботи можуть бути використані для подальшого дослідження режимів роботи кільватерних прискорювачів з метою підвищення їх ефективності.

ABSTRACT

Demydenko Ilia. – Excitation of accelerating and focusing fields and their use in prospective colliders and injectors of X-ray microscopes. Bachelor's thesis in applied physics (specialty – «Applied physics») – V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2024.

45 p., 19 fig., 0 tabl., 20 ref.

The thesis is devoted to two problems - suppressing the hose instability of electron bunches accelerated by wakefield accelerators, and forming a passive plasma lens that focuses the bunches and reduces the energy spread. The first section of the work is devoted to the description of a new mechanism for suppressing the hose instability of bunches, which is implemented in the weakly nonlinear regime of operation of the accelerator. The effect is predicted theoretically, and its presence is demonstrated by numerical simulation. The second section is devoted to the formation of a passive plasma lens in the linear regime, which focuses electron bunches and reduces their energy spread. The formation of the lens and the evolution of the size of the clumps with time are demonstrated based on numerical simulations. The results of the work can be used for further research into the modes of operation of wake accelerators in order to improve their efficiency.

ЗМІСТ

Вступ.....	5
Розділ 1. Подавлення поперечної нестійкості електронних згустків у слабо нелінійному режимі	6
1.1. Сучасний стан кільватерних прискорювачів	6
1.2. Рух ультрарелятивістських електронів у кільватерному полі.....	9
1.3. Оцінка періоду ангармонічних радіальних коливань	14
1.4. Порівняння з числовим моделюванням.....	22
Висновки до розділу 1	25
Розділ 2. Пасивна плазмова лінза, що зменшує енергетичний розкид гаусо-подібних електронних згустків.....	26
2.1. Необхідність фокусування електронних згустків	26
2.2. Формування пасивної плазмової лінзи	26
2.3. Еволюція електронних згустків з часом	32
Висновки до розділу 2	39
Висновки	40
Додаток А.....	41
Список використаних джерел	43

ВСТУП

У роботі досліджено два питання, які напряму впливають на енергетичний розкид та форму прискорених електронних згустків. По-перше, досліджено новий механізм подавлення поперечної нестійкості електронних згустків. Передбачено новий ефект подавлення нестійкості за рахунок ангармонічних радіальних коливань, та продемонстровано наявність цього ефекту на основі числового моделювання. По-друге, розглянуто питання формування пасивної плазмової лінзи для гаусо-подібних електронних згустків, яка фокусує їх та зменшує енергетичний розкид, а також числовим моделюванням досліджено еволюцію згустків з часом.

У роботі використовувалось числове моделювання з використанням РІС коду LCODE. У слабо нелінійному режимі електрони згустку розглядаються в якості ансамблю макрочастинок, а електрони плазми – мікрочастинок. У лінійному режимі плазма розглядається у гідродинамічному наближенні. Моделювання проводилося у слабо нелінійному та лінійному режимах. Розглядалися згустки, що мають розподіл за Гаусом у поперечному перерізі вздовж радіуса. Повздовжній розподіл та радіус вказаний для кожного конкретного випадку. Моделювання проводилось у плоскій (x, z) та циліндрично симетричній (r, z) геометріях. Усі величини є функціями безрозмірного часу $\tau = t\omega_p$ та координати $\xi = V_b t - z$, де V_b – швидкість згустку. Необхідність такого визначення ξ полягає в тому, що з плином часу вікно числового моделювання буде рухатися разом зі згустками. Це дозволяє значно скоротити час моделювання та потрібний комп'ютерний ресурс. Час нормований на ω_p^{-1} – плазмову частоту електронів, відстань – на $\frac{c}{\omega_p}$, струм згустків – на $I_{cr} = \frac{\pi m c^3}{4e}$, а поля на $\frac{m c \omega_p}{e}$, де m, e – маса та заряд електрона, а c – швидкість світла. Лоренц-фактор згустків дорівнює 1000. Початкова температура плазми близька до 0 еВ.

РОЗДІЛ 1. ПОДАВЛЕННЯ ПОПЕРЕЧНОЇ НЕСТІЙКОСТІ ЕЛЕКТРОННИХ ЗГУСТКІВ У СЛАБКО НЕЛІНІЙНОМУ РЕЖИМІ

1.1. Сучасний стан кільватерних прискорювачів

У сучасному світі прискорювачі заряджених частинок відіграють дуже велику роль як у практичних проблемах, так і у фундаментальних дослідженнях. Вони використовуються в медицині, техніці, науці [1-2]. На сьогодні існує велика кількість різних типів прискорювачів, серед яких можна виокремити так звані класичні прискорювачі, наприклад, лінійні прискорювачі та синхротрони, а також плазмові прискорювачі. На даний момент абсолютна більшість прискорювачів є класичними.

Проте класичні прискорювачі мають певні недоліки. Циклічні прискорювачі, такі як синхротрони, мають обмеження на максимальну енергію, оскільки радіаційні втрати зростають зі збільшенням енергії частинки, що призводить до того, що в певний момент радіаційні втрати зрівнюються з отриманою від прискорювача енергією і прискорення зупиняється. Цю проблему можна вирішити збільшенням радіуса траєкторії частинки, проте це вимагає побудови величезного прискорювача. Яскравим прикладом такого вирішення проблеми є великий адронний колайдер – протонний синхротрон, довжина великого кола якого дорівнює 27 км, що дозволяє отримати протони з енергіями 7 TeV. Лінійні прискорювачі позбавлені цієї проблеми, проте вони значно поступаються циклічним у можливостях прискорення.

Окрім цього, всі класичні прискорювачі мають обмеження на прискорюючі електричні поля – до 100 МВ/м [3], оскільки при більш потужних полях відбувається пробій вакууму поблизу металевих стінок через автоелектронну емісію. Саме тому, відносно нещодавно був створений інший тип прискорювачів – кільватерні прискорювачі. Принцип їх дії полягає в тому, що коли електронний згусток або лазерний імпульс входить у плазму, він створює так звану бульбашку, в якій майже відсутні електрони плазми, і де

з'являються дуже потужні прискорюючі поля [4]. За сучасними оцінками поле може досягати значень 100 ГВ/м [5-7].

Незважаючи на такі потужні поля, кільватерні прискорювачі мають певні недоліки. Перший з них – створене первинним електронним згустком поле в кільватерних прискорювачах дуже швидко розпадається, через що енергію, яка при цьому виділяється, потрібно стрімко поглинати. Проблема вирішується додаванням заднього електронного згустку, який взаємодіє з кільватерним полем, яке створене першим згустком, забираючи енергію і прискорюючись.

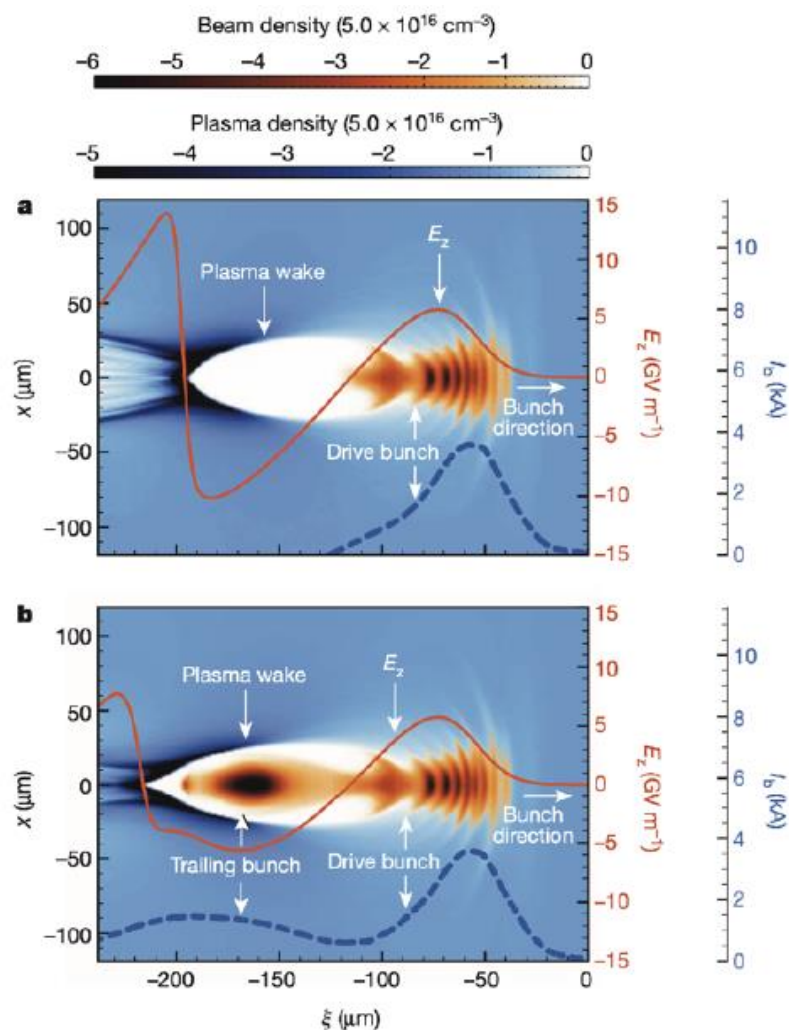


Рис. 1.1- Збудження кільватерного поля у випадку одиночного електронного згустку (а) та за наявності заднього згустку (б) [8].

Друга проблема полягає в тому, що для отримання максимальної ефективності прискорюваний електронний згусток повинен покривати

великий діапазон фаз, через що виникає великий розкид електронів за енергіями. Вирішення цієї проблеми полягає в підборі профілю згустку так, щоб збуджене поле мало плато.

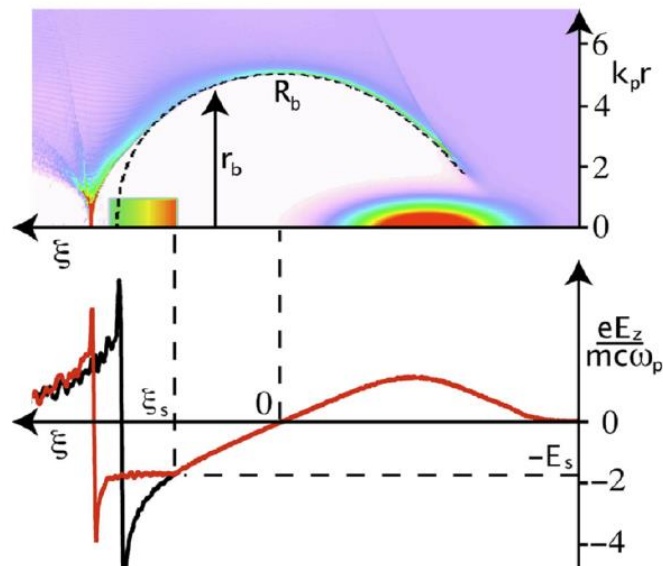


Рис. 1.2- Утворення плато на кільватерному полі шляхом підбору відповідного профілю згустку [9].

Сучасні дослідження показують, що пріоритетним режимом роботи є нелінійний режим. Це призводить до появи нової проблеми – виникнення поперечної нестабільності електронного згустку.

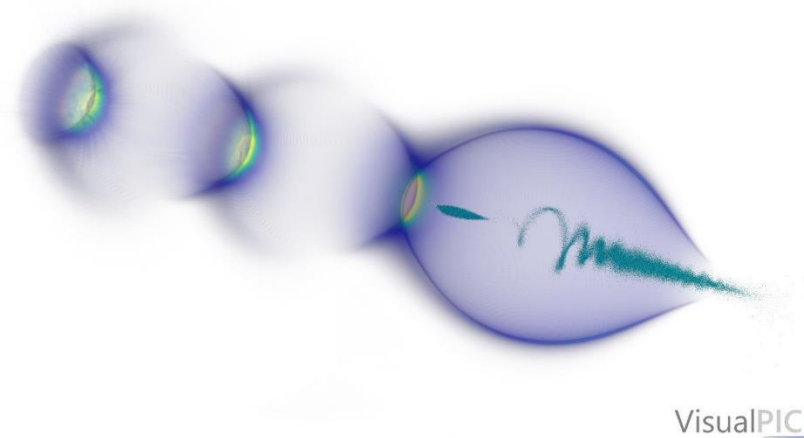


Рис. 1.3- Візуалізація поперечної нестійкості електронного згустку за допомогою PIC коду HIPACE++.

Її можна вирішити шляхом використання слабо нелінійного режиму для довгого первинного згустку, а у випадку сильно нелінійного режиму потрібно використовувати короткий згусток з певними властивостями.

1.2. Рух ультрарелятивістських електронів у кільватерному полі

Головною причиною появи нестійкості є встановлення синхронних коливань різних поперечних шарів [10]. Причиною встановлення такого режиму коливань є те, що всі електрони плазми залишають бульбашку. У минулих дослідженнях [11] було показано, що одним із способів подолання нестійкості є використання не моноенергетичних згустків, що призводить до того, що кожен поперечний переріз має свою частоту коливань [11]. В свою чергу можна висунути гіпотезу про те, що розсинхронізувати коливання можна й всередині одного шару, змусивши кожен електрон коливатися зі своєю частотою. Це, наприклад, можна реалізувати зробивши коливання електронів ангармонічними.

Для цього розглянемо аксіальне симетричний електронний згусток (оскільки саме такі здебільшого і використовуються в задачах прискорення) не надто великого радіуса, щоб можна було розкласти поля в ряд, у холодній плазмі, що рухається вздовж вісі OZ . Розглянемо рух ультрарелятивістських електронів у такій плазмі. Рівняння руху має наступний вигляд:

$$\dot{\vec{p}} = -e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (1.1)$$

де e – елементарний заряд, $\vec{p}$ – імпульс електрона, $\vec{v}$ – швидкість електрона, а крапкою позначена повна похідна за часом.

Проведемо розгляд у циліндричній системі координат. У першу чергу з міркувань симетрії, нехтуючи крайовими ефектами, можна сказати, що поля не залежать від полярного кута ϕ , а ненульовими компонентами полів є E_r , E_z та B_ϕ . Перепишемо рівняння для сили Лоренца у компонентах:

$$\begin{cases} \dot{p}_r - \dot{\phi} p_\phi = -e(E_r + v_\phi B_0 - c B_\phi), \\ \frac{1}{r}(\dot{p}_\phi r) = 0, \\ \dot{p}_z = -e(E_z + v_r B_\phi). \end{cases} \quad (1.2)$$

Тут ми знехтували зміною повздовжньої швидкості $v_z \approx c$, оскільки Лоренц-фактор частинки γ є значно більшим за одиницю. Тепер запишемо рівняння Максвелла:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0, \\ \nabla \times \vec{E} = -\partial_t \vec{B}, \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E} + e\mu_0 \vec{j}, \end{cases} \quad (1.3)$$

де ϵ_0 – електрична стала, μ_0 – магнітна стала, ρ – густина заряду, а $\vec{j}$ – густина струму.

З урахуванням раніше зазначених припущень, отримуємо наступну систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \partial_r(r E_r) + \partial_z E_z = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e - n_b), \\ \partial_z E_r - \partial_r E_z = -\partial_t B_\phi, \\ -\partial_z B_\phi = \frac{1}{c^2} \partial_t E_r + \mu_0 e j_{r,p} - \mu_0 e j_{r,b}, \\ 0 = \mu_0 e j_{\phi,p} - \mu_0 e j_{\phi,b}, \\ \frac{1}{r} \partial_r(r B_\phi) = \frac{1}{c^2} \partial_t E_z + \mu_0 e j_{z,p} - \mu_0 e j_{z,b}, \end{cases} \quad (1.4)$$

де n_i – густина йонів плазми, а n_e – густина електронів, j_b – струм згустку, а j_z – струм у плазмі.

Одразу отримуємо, що струм має тільки повздовжню та радіальну компоненти. Отже, маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \partial_r (r E_r) + \partial_z E_z = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e - n_b), \\ \partial_z E_r - \partial_r E_z = -\partial_t B_\phi, \\ -\partial_z B_\phi = \frac{1}{c^2} \partial_t E_r + \mu_0 e j_r - \mu_0 e j_{r,b}, \\ \frac{1}{r} \partial_r (r B_\phi) = \frac{1}{c^2} \partial_t E_z + \mu_0 e j_z - \mu_0 e j_{z,b}. \end{cases} \quad (1.5)$$

Тепер використаємо наближення, що фазова швидкість полів дорівнює швидкості світла c , і що вони є хвилеподібними, тобто вони залежать не окремо від z та t , а залежать від $\xi = z - ct$ [12]. Тоді:

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \partial_r (r E_r) + \partial_\xi E_z = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e - n_b), \\ \partial_\xi E_r - \partial_r E_z = -\partial_t B_\phi, \\ -\partial_\xi B_\phi = -\frac{1}{c} \partial_\xi E_r + \mu_0 e j_r - \mu_0 e j_{r,b}, \\ \frac{1}{r} \partial_r (r B_\phi) = -\frac{1}{c} \partial_\xi E_z + \mu_0 e j_z - \mu_0 e j_{z,b}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Тепер повернемося до рівнянь руху електрона. Перш за все, знехтуємо впливом магнітного поля на повздовжній рух, вважаючи електричне поле значно сильнішим:

$$\begin{cases} \dot{p}_r - \phi p_\phi = -e(E_r - c B_\phi), \\ \frac{1}{r} (p_\phi \dot{r}) = 0, \\ \dot{p}_z = -e E_z. \end{cases} \quad (1.7)$$

З першого та четвертого рівняння системи (1.6) можна записати наступне:

$$\frac{1}{r} \partial_r [r (E_r - c B_\phi)] = \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) - \mu_0 e j_z + \frac{e}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{c} j_b - n_b \right). \quad (1.8)$$

Останній доданок у (1.8) можна вважати нульовим, оскільки $j_b \approx cn_b$. Це співвідношення ми використаємо пізніше. У системі (1.7) розпишемо імпульси:

$$\begin{cases} m\gamma\dot{v}_r + mv_r\dot{\gamma} - m\dot{\phi}\gamma v_\phi = -e(E_r - cB_\phi), \\ m\gamma v_\phi \frac{\dot{r}}{r} + m\gamma\dot{v}_\phi + mv_\phi\dot{\gamma} = 0, \\ m\gamma\dot{v}_z + mv_z\dot{\gamma} = -eE_z. \end{cases} \quad (1.9)$$

Розписавши швидкості, отримуємо:

$$\begin{cases} m\gamma\ddot{r} + m\dot{r}\dot{\gamma} - m\dot{\phi}^2\gamma r = -e(E_r - cB_\phi), \\ m\gamma r\ddot{\phi} + 2m\gamma\dot{r}\dot{\phi} + mr\dot{\phi}\dot{\gamma} = 0, \\ m\gamma\ddot{z} + m\dot{z}\dot{\gamma} = -eE_z. \end{cases} \quad (1.10)$$

З нульової компоненти 4-вимірною рівняння руху можна записати наступне:

$$\dot{\gamma} = -e \frac{\vec{E} \cdot \vec{v}}{mc^2} \approx -\frac{eE_z}{mc}. \quad (1.11)$$

Підставивши вираз (1.11) у систему (1.10), отримуємо:

$$\begin{cases} m\gamma\ddot{r} - m\dot{r}\frac{eE_z}{mc} - m\dot{\phi}^2\gamma r = -e(E_r - cB_\phi), \\ m\gamma r\ddot{\phi} + 2m\gamma\dot{r}\dot{\phi} - mr\dot{\phi}\frac{eE_z}{mc} = 0, \\ m\gamma\ddot{z} - m\dot{z}\frac{eE_z}{mc} + eE_z = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Третє рівняння системи (1.12) відповідає повздовжньому руху електрона, а перші два – поперечному. Повернемося до рівняння (1.8). Введемо позначення $W = E_r - cB_\phi$:

$$\frac{1}{r} \partial_r [rW] = \frac{1}{r} W + \partial_r W \approx \frac{1}{r} r \partial_r W + \partial_r W = 2 \partial_r W. \quad (1.13)$$

Тут ми використали те, що згусток є вузьким, а тому $W \approx r \partial_r W$. Отже, рівняння (1.8) має такий вигляд:

$$\partial_r W = \frac{1}{2} \left[\frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) - \mu_0 e j_{z,p} \right]. \quad (1.14)$$

З урахуванням рівняння (1.14) перше рівняння системи (1.12) значно спрощується:

$$\begin{cases} m\gamma\ddot{r} - m\dot{r} \frac{eE_z}{mc} - m\dot{\phi}^2 \gamma r + er \frac{1}{2} \left[\frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) - \mu_0 e j_{z,p} \right] = 0, \\ m\gamma r \ddot{\phi} + 2m\gamma \dot{r} \dot{\phi} - mr \dot{\phi} \frac{eE_z}{mc} = 0, \\ m\gamma \ddot{z} - m\dot{z} \frac{eE_z}{mc} + eE_z = 0. \end{cases} \quad (1.15)$$

Таким чином, єдиною невідомою компонентою поля є E_z , яку ми будемо розглядати як параметр, що залежить від часу. Тепер перейдемо до аналізу системи (1.15). Перш за все, спростимо вигляд системи, увівши плазмову частоту:

$$\omega_p^2 = \frac{n_0 e^2}{m \epsilon_0}, \quad (1.16)$$

де n_0 – незбурена густина плазми.

Окрім цього, введемо такий параметр:

$$A = -\frac{eE_z}{mc}. \quad (1.17)$$

Тоді отримуємо таку систему:

$$\begin{cases} \ddot{r} + \frac{A}{\gamma} \dot{r} - \dot{\phi}^2 r + r \frac{\omega_p^2}{2\gamma} \left[\eta_i - \eta_e - \frac{1}{c} \beta_z \right] = 0, \\ r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} + \frac{A}{\gamma} r\dot{\phi} = 0, \\ \ddot{z} + \frac{A}{\gamma} \dot{z} - \frac{eA}{\gamma} = 0, \end{cases} \quad (1.18)$$

де $\eta_{i,e}$ – нормовані на незбурену густину густини йонів та електронів, а β_z – нормований повздовжній струм у плазмі.

Перші два рівняння системи (1.18) – рівняння релятивістських ангармонічних коливань у поперечній площині. А тому тепер потрібно дослідити ці коливання.

1.3. Оцінка періоду ангармонічних радіальних коливань

Розглянемо як впливає ангармонізм осцилятора на його коливання та їх період. Друге рівняння можна згорнути у повну похідну, і поклавши початкову азимутальну швидкість нульовою, отримуємо рівняння одновимірних ангармонічних коливань:

$$\ddot{r} + \frac{A}{\gamma} \dot{r} + r \frac{\omega_p^2}{2\gamma} \left[\eta_i - \eta_e - \frac{1}{c} \beta_z \right] = 0. \quad (1.19)$$

Це рівняння описує ангармонічні бетатронні коливання. У нульовому наближені, нехтуючи ангармонізмом, тобто нехтуючи неоднорідністю

електронів та враховуючи, що для типових умов виконується умова $\frac{eE_z}{mc\omega_p\sqrt{\gamma(t)}} \ll 1$, частота цих коливань має наступний вираз:

$$\omega_\beta(t) = \frac{\omega_p}{\sqrt{2\gamma(t)}} \quad (1.20)$$

Цей випадок відповідає області біля вісі у слабо нелінійному режимі, та майже всьому об'єму бульбашки, окрім областей поблизу границі, у сильно нелінійному режимі.

При цьому тут вважається, що Лоренц-фактор, а відповідно й сама частота, повільно змінюються з часом [11]. Для оцінки якісної поведінки розглянемо випадок, коли Лоренц-фактор зовсім не змінюється з часом, тобто коли $A = 0$ (точніше в типовому наближенні, коли $\frac{eE_z}{mc\omega_p\sqrt{\gamma(t)}} \ll 1$), тоді:

$$\ddot{r} + r \frac{\omega_p^2}{2\gamma} \left[\eta_i - \eta_e - \frac{1}{c} \beta_z \right] = 0. \quad (1.21)$$

Перш ніж проводити подальший розгляд з рівнянням (1.21), спробуємо зрозуміти, чого варто очікувати. Як відомо, період гармонічних коливань не залежить від амплітуди. Це можна показати явно, інтегруючи рівняння руху, проте є більш елегантний спосіб це показати, використовуючи перетворення подібності. Запишемо функцію Лагранжа гармонічного осцилятора:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2. \quad (1.22)$$

Зробимо наступне перетворення координат та часу:

$$\begin{cases} x \rightarrow x' = \alpha x \\ t \rightarrow t' = \beta t \end{cases} \quad (1.23)$$

Тоді:

$$L \rightarrow L' = \frac{\alpha^2 m}{\beta^2} \frac{\dot{x}^2}{2} - \alpha^2 \frac{k}{2} x^2. \quad (1.24)$$

Якщо покласти $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^2$, тобто коли $\beta = 1$, ми отримаємо те, що $L' = \alpha^2 L$, тобто ми маємо еквівалентні лагранжіани. Це означає, що вони описують одну й ту ж саму траєкторію, для яких час руху є однаковим. Саме звідси й випливає висновок про те, що період гармонічних коливань не залежить від амплітуди. У випадку ангармонічних коливань, у загальному випадку лагранжіан має такий вигляд:

$$L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 + ax^3 + bx^4 + \dots \quad (1.25)$$

Режим ангармонічних коливань реалізується в майже всьому об'ємі бульбашки, окрім області біля вісі, для слабо нелінійного режиму та в приграничній області у сильно нелінійному режимі.

У цьому випадку зрозуміло, що не існує жодних нетривіальних перетворень координати та часу, для яких можна було б отримати еквівалентні функції Лагранжа. Таким чином, робимо висновок, що для ангармонічних коливань період, а відповідно й частота, залежать від амплітуди. При цьому залежність частоти коливань від амплітуди свідчить про те, що якщо електрони у початковий момент мали різні початкові радіуси (тобто по суті амплітуди коливань), то їх частоти коливань будуть різними. Тобто в одному шарі $d\xi$ електрони з різними відстанями від вісі згустка будуть мати різні

частоти коливань, а тому ці коливання не будуть синфазними, і у системі не є можливим встановлення синхронних коливань.

Таким чином, для забезпечення максимальної ефективності пригнічення поперечної нестабільності, внаслідок поперечних радіальних коливань, необхідно використовувати згусток, який збуджує кільватерне поле, у вигляді полого конусу, який займає майже всю першу частину бульбашки. При цьому у слабо нелінійному режимі достатньо, щоб порожнина конусу займала область лише поблизу вісі, а у сильно нелінійному режимі – майже всю область фронту бульбашки, окрім приграничної області.

Оцінимо період коливань. Для цього помножимо рівняння (1.21) на $\dot{r}$, тоді:

$$d\dot{r}^2 + r dr \frac{\omega_p^2}{\gamma} \left[\eta_i - \eta_e - \frac{1}{c} \beta_z \right] = 0. \quad (1.26)$$

Звідси отримуємо наступний інтеграл руху:

$$\mathcal{E} = \dot{r}^2 + \int dr r \frac{\omega_p^2}{\gamma} \left[\eta_i - \eta_e - \frac{1}{c} \beta_z \right]. \quad (1.27)$$

Отже, отримуємо наступний вираз для періоду коливань:

$$T = 4 \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{E} - \int dr r \frac{\omega_p^2}{\gamma} \left[\eta_i - \eta_e - \frac{1}{c} \beta_z \right]}}. \quad (1.28)$$

У першу чергу, моделювання показує, що майже всі електрони плазми зосереджені поблизу межі бульбашки (див. Додаток А), а тому можна знехтувати їх об'ємним струмом. Тобто можемо знехтувати впливом магнітного поля зворотного струму електронів плазми на динаміку згустку

всередині бульбашки в наближенні довгої вузької бульбашки. При цьому йони плазми вважаємо такими, що розподілені однорідно, а тому:

$$T = 4 \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\mathcal{E} - \int dr r \frac{\omega_p^2}{\gamma} [1 - \eta_e(r)]}}. \quad (1.29)$$

Тепер виникає питання про інтеграл руху. Для наших спрощень він має наступний вираз:

$$\mathcal{E} = \dot{r}^2 + \int dr r \frac{\omega_p^2}{\gamma} [1 - \eta_e(r)]. \quad (1.30)$$

Якщо $r = r_0$, то $\dot{r} = 0$, тому:

$$\mathcal{E} = \int_0^{r_0} dr r \frac{\omega_p^2}{\gamma} [1 - \eta_e(r)]. \quad (1.30)$$

Звідси, отримуємо наступний вираз для періоду:

$$T = 4 \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\int_0^{r_0} dr r \frac{\omega_p^2}{\gamma} [1 - \eta_e(r)] - \int dr r \frac{\omega_p^2}{\gamma} [1 - \eta_e(r)]}}. \quad (1.31)$$

Переходячи до безрозмірної змінної $x = \frac{r}{r_0}$ та інтегруючи відомі функції, отримуємо наступний вираз для періоду:

$$T = 4 \frac{\sqrt{2\gamma}}{\omega_p} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 + 2 \left[\int_0^x dt t \eta_e(t) - \int_0^1 dx x \eta_e(x) \right]}} \quad (1.32)$$

З результатів числового моделювання можемо запропонувати наступний модельний розподіл електронів плазми на деякому інтервалі вздовж бульбашки поблизу її початку:

$$\eta_e(x) = \sin^2 kr_0 x, \quad (1.33)$$

де k – радіальне хвильове число.

Проаналізуємо період коливань в двох асимптотичних випадках.

У випадку малих радіусів, можна записати таку асимптотику:

$$\eta_e(x) = \sin^2 kr_0 x \approx k^2 r_0^2 x^2 \equiv \alpha x^2. \quad (1.34)$$

Тоді:

$$T = 4 \frac{\sqrt{2\gamma}}{\omega_p} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 + \frac{1}{2} \alpha [x^4 - 1]}} \quad (1.35)$$

Підкореневий вираз у формулі (1.35) можна факторизувати, а тому:

$$T = 8 \frac{\sqrt{\gamma}}{\omega_p \sqrt{2 - \alpha}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2) \left(1 - \frac{\alpha}{2 - \alpha} x^2 \right)}} \quad (1.36)$$

Отримали вираз для повного еліптичного інтеграла першого роду [13], а тому:

$$T = 8 \frac{\sqrt{\gamma}}{\omega_p \sqrt{2 - \alpha}} F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{\alpha}{2 - \alpha}}\right). \quad (1.37)$$

Оскільки $r \rightarrow 0$, то відповідно ми розглядаємо коливання малих амплітуд, а тому $kr_0 \ll 1$, отже й $\alpha \ll 1$. У нульовому наближенні ми можемо покласти $\alpha = 0$ і тоді отримаємо наступне:

$$T = 4 \frac{\sqrt{2\gamma}}{\omega_p} F\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{2\pi\sqrt{2\gamma}}{\omega_p} \Rightarrow \omega = \frac{\omega_p}{\sqrt{2\gamma}}. \quad (1.38)$$

У наступному наближенні маємо такий вираз для періоду:

$$T = 8 \frac{\sqrt{\gamma}}{\omega_p \sqrt{2 - k^2 r_0^2}} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{k^2 r_0^2}{2 - k^2 r_0^2}\right) \approx 2\pi \frac{\sqrt{2\gamma}}{\omega_p} \left(1 + \frac{1}{8} k^2 r_0^2\right). \quad (1.39)$$

Отже, як ми бачимо, період зростає пропорційно квадрату амплітуди, чого й варто було очікувати.

У цьому наближенні, можна отримати умову, що якщо $kr_0 = 1$, то період стає нескінченим, проте це не коректний результат, оскільки для таких радіусів необхідно вже використовувати іншу асимптотику синуса. Проте можна точно сказати, що період стає нескінченим у випадку, коли електрон знаходиться на сепаратрисі, тобто коли амплітуда його коливань збігається з радіусом бульбашки.

Проте також можлива ситуація, коли не всі електрони плазми покинули вісь. Це означає, що ми маємо розглядати наступний розподіл електронів:

$$\eta_e(x) = a + b \sin^2 kr_0 x, \quad (1.40)$$

Підставивши цей вираз в інтеграл (1.32) за умови малих радіусів, отримуємо:

$$T = 4 \frac{\sqrt{2\gamma}}{\omega_p} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-a)(1-x^2) + \frac{1}{2}b\alpha[x^4 - 1]}}. \quad (1.42)$$

Аналогічно до попереднього випадку, ми можемо факторизувати вираз під інтегралом:

$$T = 8 \frac{\sqrt{\gamma}}{\omega_p \sqrt{2-a-b\alpha}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2) \left[1 - \frac{b\alpha}{2-a-b\alpha} x^2\right]}}. \quad (1.43)$$

Отримуємо наступний результат:

$$T = 8 \frac{\sqrt{\gamma}}{\omega_p \sqrt{2-a-b\alpha}} F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{b\alpha}{2-a-b\alpha}}\right). \quad (1.44)$$

Одразу бачимо, що поклавши $a = 0$ та $b = 1$ отримуємо раніше вказаний випадок. Поклавши $\alpha = 0$, отримуємо частоту відповідних гармонічних коливань:

$$T = 8 \frac{\sqrt{\gamma}}{\omega_p \sqrt{2-a}} F\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 4 \frac{\sqrt{\gamma}}{\omega_p \sqrt{2-a}} \pi. \quad (1.45)$$

Звідси ми бачимо, що якщо не всі електрони покинули вісь, то період коливань збільшується, а частота відповідних коливань – зменшується.

Отже, показано, що враховуючи неоднорідний за радіусом розподіл електронів плазми, які ще не залишили кільватерну бульбашку, електронні

коливання розсинхронізуються. А саме, на тій відстані від голови драйвера, де всі електрони плазми ще не пішли з вісі, згусток-драйвер може бути суцільним, залишаючись стаціонарним за рахунок перемішування за фазами при ангармонічних радіальних коливаннях. На тій відстані від голови драйвера, де всі електрони плазми вже пішли з вісі, але не всі електрони плазми залишили бульбашку, згусток-драйвер може бути стаціонарним за рахунок перемішування за фазами при ангармонічних радіальних коливаннях, якщо він є порожнистим. Таким чином, для того, щоб згусток був стаціонарним за рахунок перемішування за фазами при асинхронних радіальних коливаннях, він повинен бути у вигляді порожнистого конуса зі скінченою товщиною стінок. При цьому сторона конуса повинна приблизно прилягати до межі кільватерної бульбашки.

1.4. Порівняння з числовим моделюванням

Тепер необхідно перевірити наявність передбаченого ефекту за допомогою числового моделювання.

Кольорова карта показує відмінність концентрації електронів від концентрації електронів n_0 у незбуреній плазмі, в одиницях кольорового кроку, який для електронів згустку складає 0.5, а для електронів плазми 0.33, тобто значення кольору визначається як $C = \frac{n_e - n_0}{0.33}$, де густини вимірюються в одиницях n_0 .

Перш за все, розглянемо вузький згусток прямокутної форми. На рисунках нижче представлені форми електронних вузького та широкого згустків у моменти часу $\tau = 38$ та $\tau = 534$.

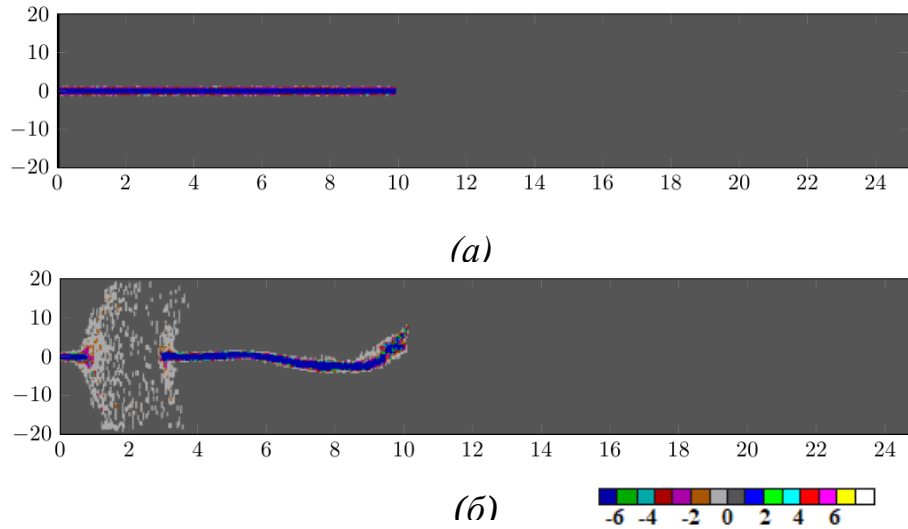


Рис. 1.4- Розподіл електронів вузького згустку з радіусом $r = 0.1$: (а)- розподіл електронів у момент часу $\tau = 38$, (б)- розподіл електронів у момент часу $\tau = 534$. Горизонтальна вісь – координата z , вертикальна – координата x . Усі величини безрозмірені. Струм згустку $I_b = 0.6$, довжина - $10/2\pi$.

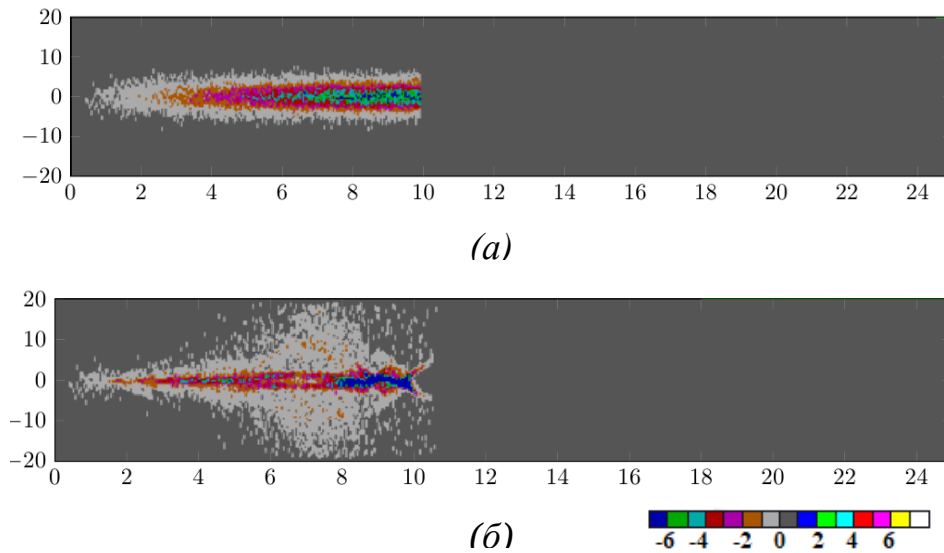


Рис. 1.5- Розподіл електронів широкого згустку з радіусом $r = 1$: (а)- розподіл електронів у момент часу $\tau = 38$, (б)- розподіл електронів у момент часу $\tau = 534$. Горизонтальна вісь – координата z , вертикальна – координата x . Струм згустку та довжина аналогічні до рис. 1.4.

Порівнюючи рисунки 1.4 та 1.5 доходимо висновок, що широкий згусток є більш стійким, у порівнянні з вузьким. Це підтверджує передбачений ефект – чим більшим є радіус згустку, тим сильнішим є ангармонізм радіальних коливань, і тим більш стійким є електронний згусток.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 1

У цьому розділі показано новий механізм придушення поперечної нестійкості електронних згустків, а саме за рахунок ангармонізму поперечних коливань електронів, спричиненого неоднорідним поперечним розподілом електронів плазми. Досліджено аналітично рух електронів згустку та описано залежність періоду коливань від амплітуди та місця розташування електронів згустку. На основі цього можна зробити висновок, що збільшення радіуса електронного згустка призводить до розсинхронізації радіальних коливань, що в свою чергу призводить до подавлення поперечної нестійкості електронного згустку. Окрім цього, продемонстровано числовим моделюванням, що дійсно, при збільшенні радіуса згустку він стає більш стійким, що значно покращує якість прискорення.

РОЗДІЛ 2. ПАСИВНА ПЛАЗМОВА ЛІНЗА, ЩО ЗМЕНШУЄ ЕНЕРГЕТИЧНИЙ РОЗКИД ГАУСО-ПОДІБНИХ ЕЛЕКТРОННИХ ЗГУСТКІВ

2.1. Необхідність фокусування електронних згустків

Фокусування електронних згустків є дуже важливим у багатосекційних кільватерних прискорювачах та після прискорювача перед транспортним каналом [14-19]. Дослідження цього процесу є важливим для згустків скінченої довжини з неоднорідним поперечним розподілом заряду, а також для ланцюжка згустків з довільною відстанню між ними.

У цьому розділі продемонстровано числовим моделюванням формування пасивної плазмової лінзи для згустків з гаусівським поперечним та гаусо-подібним повздовжнім розподілами заряду. Окрім цього, продемонстровано необхідність наявності згустка-передвісника для більш однорідного фокусування, а також для того, щоб згусток-вітнес не втрачав енергію на формування лінзи.

2.2. Формування пасивної плазмової лінзи

У цьому розділі розглянуто лінійний випадок, а також випадок, коли частота інжекції електронних згустків значно менша за плазмову частоту. У цьому випадку, як один з варіантів, розглядається ситуація, коли плазма не встигає регенеруватися між двома згустками.

Необхідно відзначити, що згусток-передвісник фокусується неоднорідно та втрачає енергію. Відповідно без відновлення плазми основні згустки будуть фокусувати неоднорідно та без втрат енергій. Окрім цього, варто відзначити, що згусток-передвісник можна замінити також, як і використаний драйвер. Це є перевагою у порівнянні з сильно нелінійним режимом без передвісника, оскільки коли згусток формує плазмову лінзу у сильно нелінійному режимі без згустка-передвісника, головний згусток неоднорідно фокусується і втрачає енергію. У цьому випадку передня частина згустку фокусується неоднорідно. Звідси впливає те, що енергетичний розкид згустку зростає. Відповідно,

використовуючи передвісник, можемо витратити його енергію на формування плазмової лінзи, потім відвести його з каналу прискорювача. Це подібно до того, як згусток-драйвер використовує свою енергію для прискорення та фокусування вітнеса, після чого його також можна відвести. Більше цього, після основного згустку можна поставити ще один, який також буде фокусуватися.

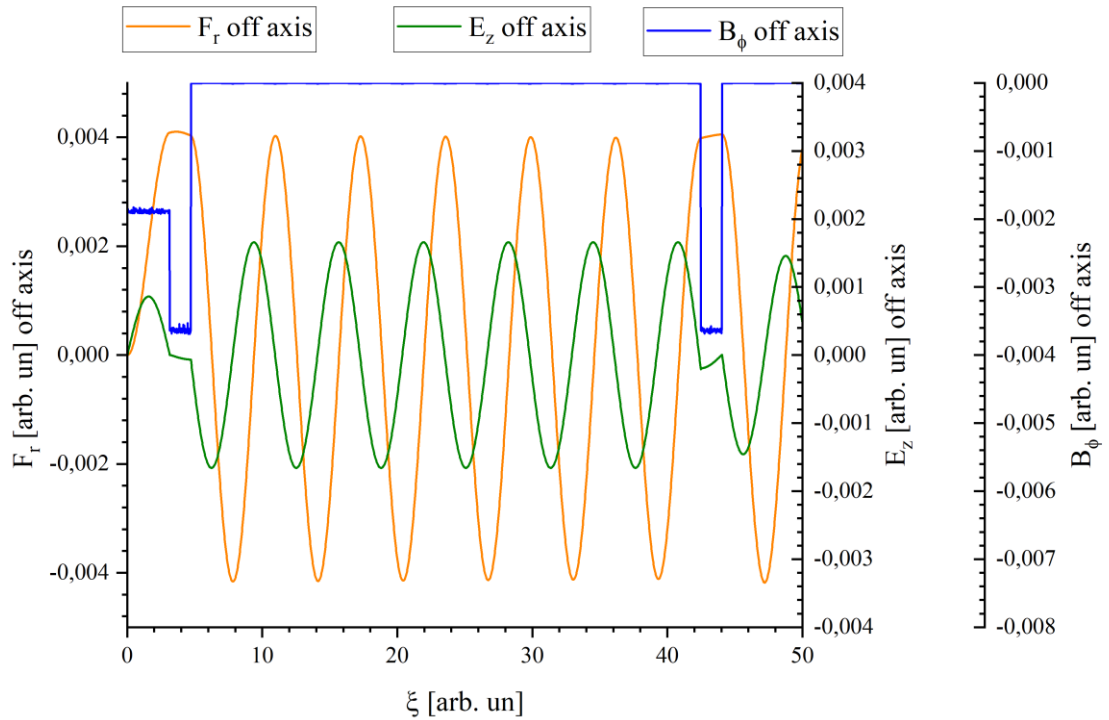


Рис. 2.1- $E_z(\xi)$, $F_r(\xi)$, $B_\phi(\xi)$, $\xi = ct - z$ для однорідного згустку-передвісника (довжиною $l_{pr} = \lambda/2$ та густиною $n_{pr} = n_b/2$, n_b – густина основних згустків) та двох головних віддалених однорідних згустків, довжина яких $l_b = \lambda/4$, що рухаються ліворуч. Густина згустків у поперечному напрямку має гаусів розподіл. Радіус згустків 0.1, струм $I_b = 0.3 \cdot 10^{-3}$. Лоренц-фактор – 1000.

Як можна побачити з рисунку 2.1, обидва головні згустки знаходяться у однорідному фокусуєчому полі. Проте варто відзначити, що для однорідного фокусування другого згустку необхідно, щоб він знаходився у прискорюєчому полі.

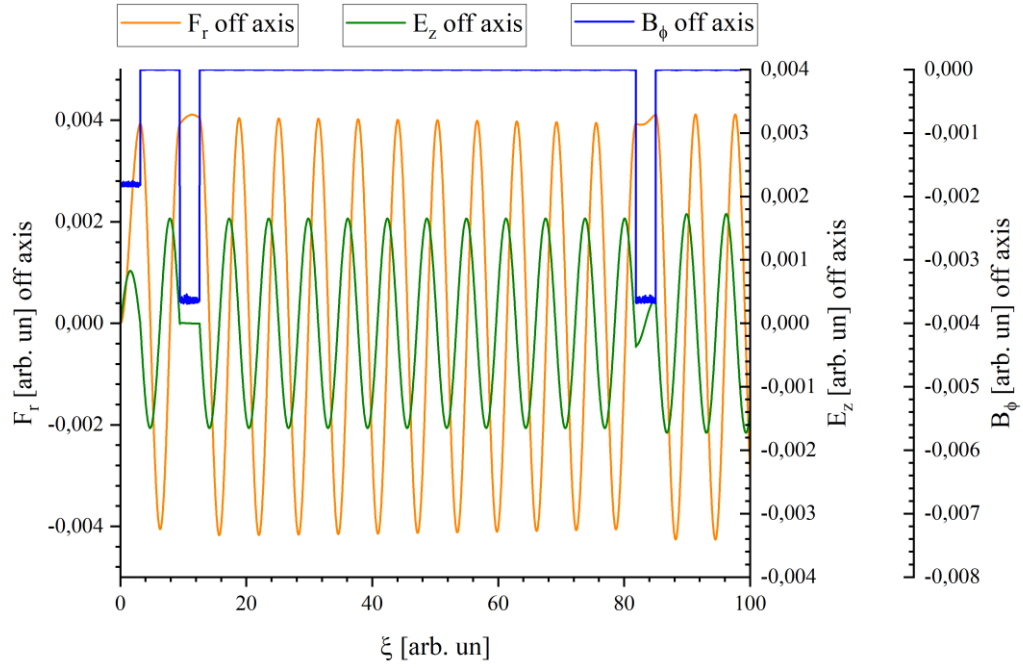


Рис. 2.2- $E_z(\xi)$, $F_r(\xi)$, $B_\phi(\xi)$ для однорідного згустку-передвісника (довжиною $l_{pr} = \lambda/2$ та густиною $n_{pr} = n_b/2$, n_b – густина основних згустків) та двох головних віддалених однорідних згустків, довжина яких $l_b = \lambda/2$, що рухаються ліворуч. Густина згустків у поперечному напрямку має гаусів розподіл. Радіус, струм та енергія згустків – ідентичні до рис. 2.1.

З рисунку 2.2 бачимо, що перший згусток знаходиться у фокусуєчому полі, проте в нульовому прискорювальному. Це означає, що він не обмінюється енергією з плазмою, а тільки фокусується. Проте він впливає на однорідне фокусування другого згустку. При цьому другий згусток має бути розташований у такій фазі, щоб його передній край був у слабкому прискорюєчому полі, а його кінець – у малому гальмівному полі.

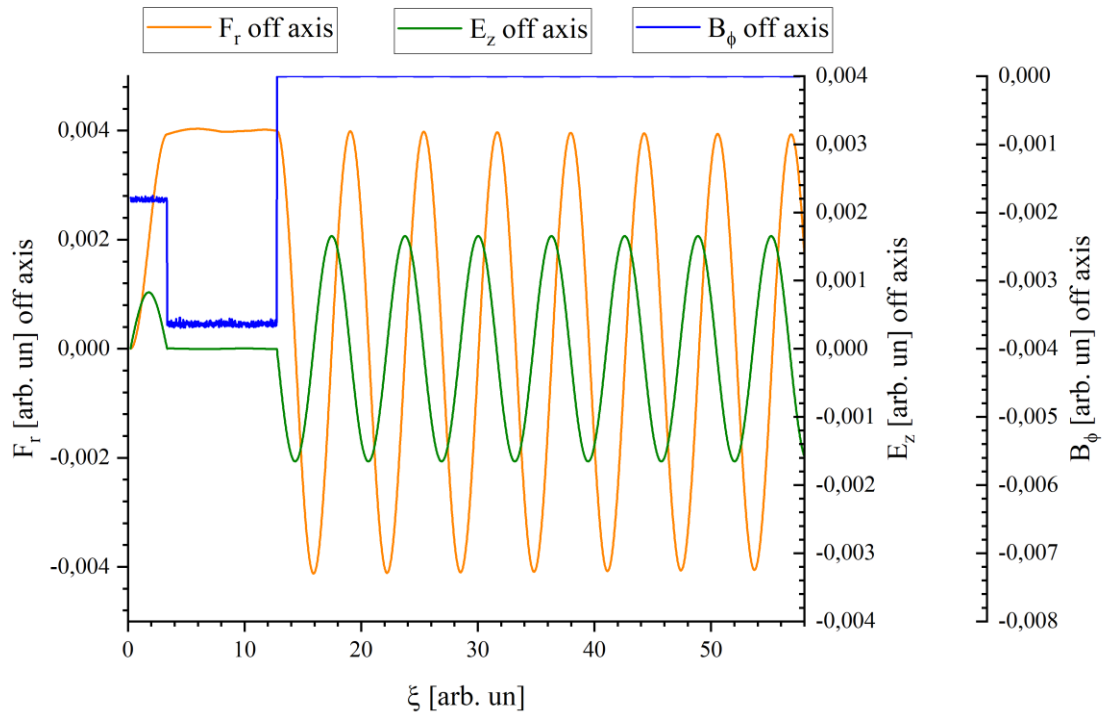


Рис. 2.3- $E_z(\xi)$, $F_r(\xi)$, $B_\phi(\xi)$ для однорідного згустку-передвісника (довжиною $l_{pr} = \lambda/2$ та густиною $n_{pr} = n_b/2$, n_b – густина основних згустків) та одного головного однорідного згустку, довжина якого $l_b = 2\lambda$, що рухається ліворуч. Густина згустків у поперечному напрямку має гаусів розподіл. Радіус, струм та енергія згустків – ідентичні до рис. 2.1.

З рисунку 2.3 бачимо, що згусток-передвісник створює однорідне фокусує поле, проте при цьому головний згусток знаходиться у нульовому прискорюючому полі. Тобто знову ж таки він тільки фокусується, але при цьому він не прискорюється.

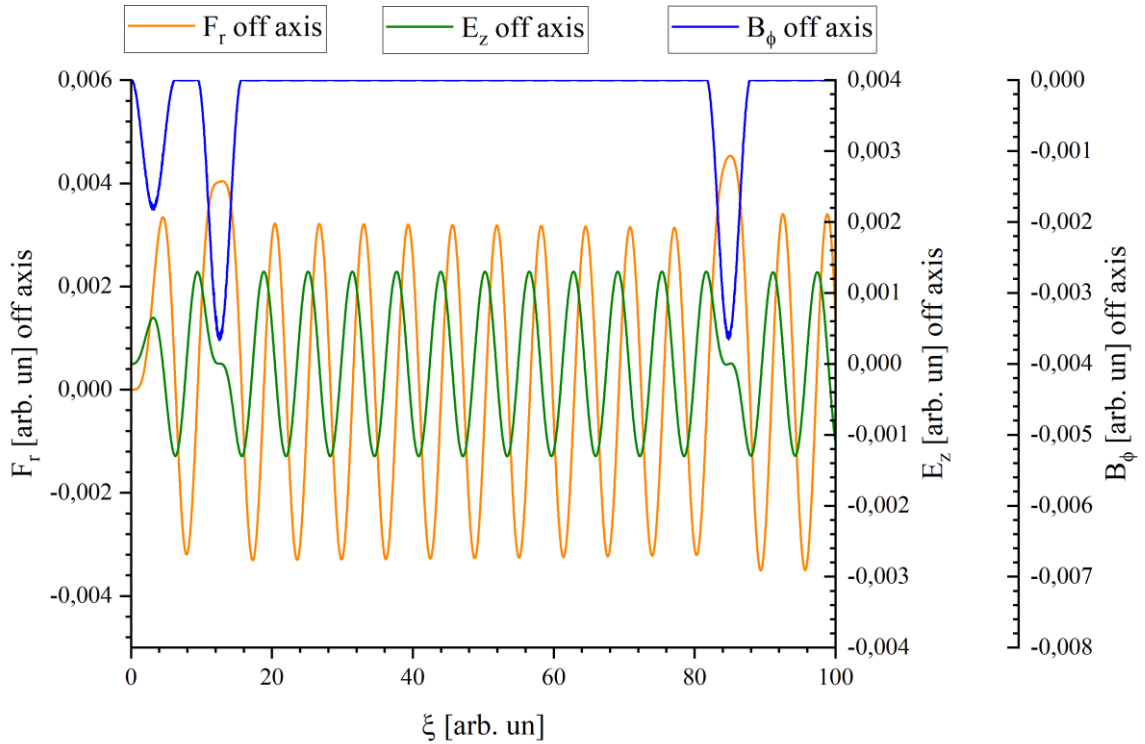


Рис. 2.4- $E_z(\xi)$, $F_r(\xi)$, $B_\phi(\xi)$ для гаусо-подібного згустку-передвісника (довжиною $l_{pr} = \lambda$ (на підставі) та густиною $n_{pr} = n_b/2$, n_b – густина основних згустків) та двох головних гаусо-подібних віддалених згустків, довжина яких $l_b = \lambda$ (на підставі), що рухаються ліворуч. Радіус, струм та енергія згустків – ідентичні до рис. 2.1.

З рисунку 2.4 бачимо, що у випадку гаусо-подібних згустків їх передня частина гальмується та фокусується, задня – прискорюється та фокусується, а центральна тільки фокусується. З відповідним підбором параметрів це призведе до зменшення енергетичного розкиду згустків. Тобто у цьому випадку не потрібно використовувати інші методи зменшення енергетичного розкиду.

На рисунках 2.5-2.6 також представлені випадки, коли передня частина згустку гальмується, задня – прискорюється, а центральна – тільки фокусується. Відповідно використовуючи такі згустки можна досягти зменшення енергетичного розкиду та фокусування, що відіграє ключову роль в отриманні якісних електронних згустків.

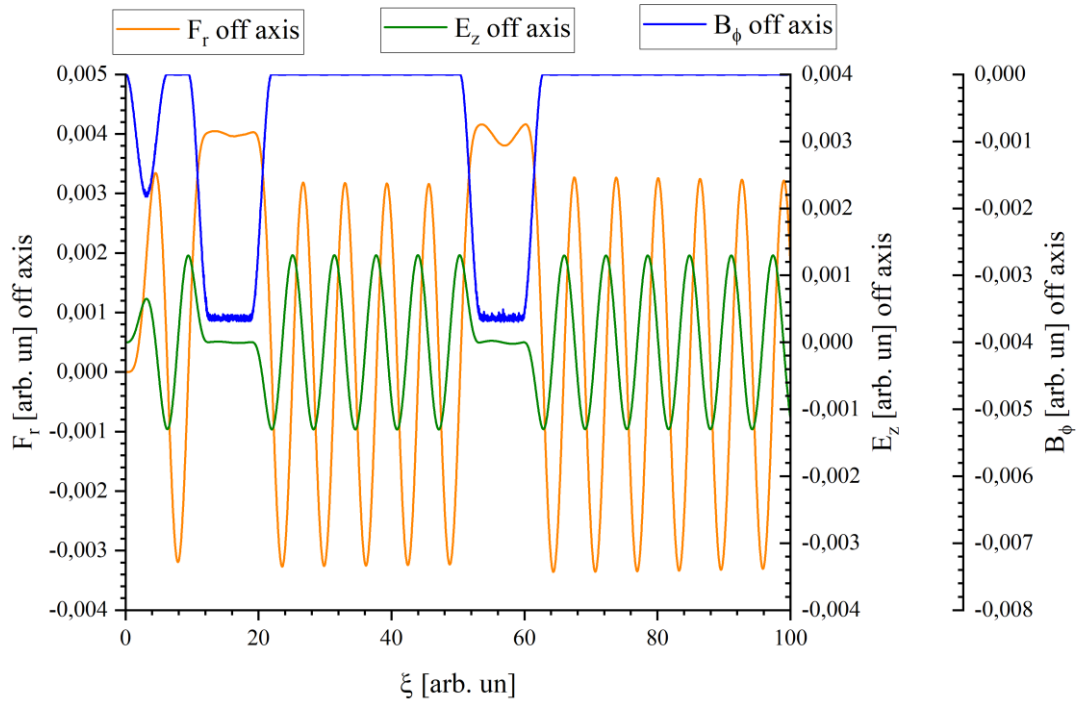


Рис. 2.5- $E_z(\xi)$, $F_r(\xi)$, $B_\phi(\xi)$ для гаусо-подібного згустку-передвісника (довжиною $l_{pr} = \lambda$ та густиною $n_{pr} = n_b/2$, n_b – густина основних згустків) та двох головних напів гаусо-подібних віддалених згустків, довжина яких $l_b = 2\lambda$, що рухаються ліворуч. Кожен фронт головних згустків має довжину $\lambda/2$. Головна частина є однорідною та має довжину λ . Радіус, струм та енергія згустків – ідентичні до рис. 2.1.

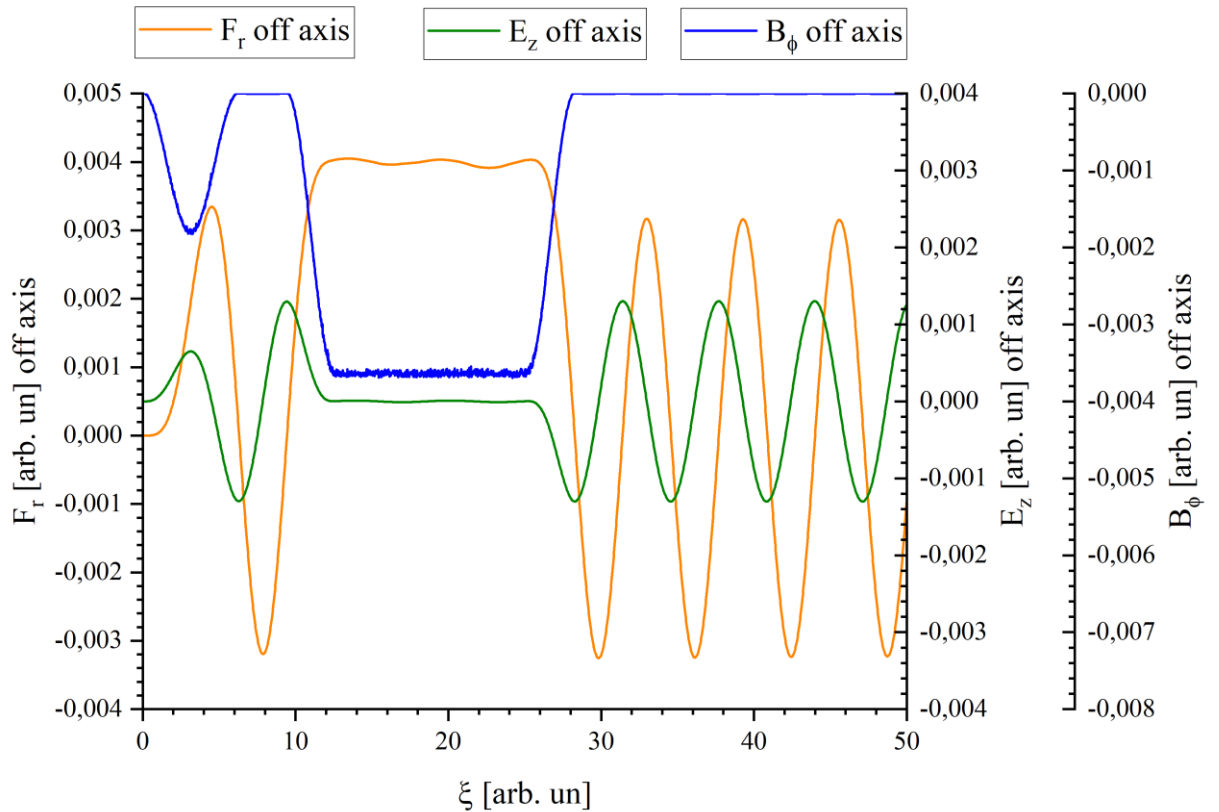


Рис. 2.6- $E_z(\xi)$, $F_r(\xi)$, $B_\phi(\xi)$ для гаусо-подібного згустку-передвісника (довжиною $l_{pr} = \lambda$ та густиною $n_{pr} = n_b/2$, n_b – густина основного згустку) та головного напів гаусо-подібного згустку, довжина якого $l_b = 3\lambda$, що рухається ліворуч. Кожен фронт головного згустку має довжину $\lambda/2$. Головна частина є однорідною та має довжину 2λ . Радіус, струм та енергія згустків – як і на рис. 2.1.

2.3. Еволюція електронних згустків з часом

Наостанок розглянемо еволюцію електронних згустків з часом під впливом пасивної плазмової лінзи. У цьому розділі показано, що вона дійсно фокусує електронні згустки, а також обговорено деякі особливості цього фокусування.

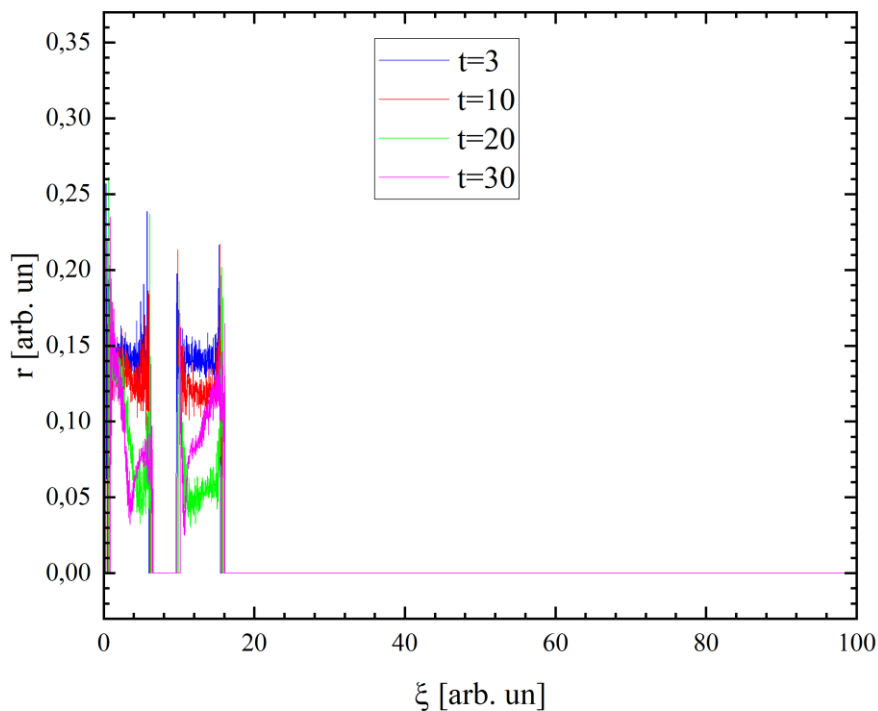


Рис. 2.7- Еволюція радіусу косинусо-подібних згустків з часом. Довжина згустків – одна довжини хвилі. Густина другого згустку вдвічі більша за густину першого. Радіус згустків 0.1, струм $I_b = 0.3 \cdot 10^{-3}$. Лоренц-фактор – 5.

З рисунку 2.7 ми бачимо, що між моментами часу $\tau = 20$ та $\tau = 30$ згусток починає дефокусуватися. Аналогічний ефект отримаємо і далі (див. рис. 2.8-2.12) Це означає, що для максимально ефективного фокусування згустку необхідно використовувати оптимальну довжину фокусування. Також варто відзначити, що малий Лоренц-фактор обрали для того, щоб чітко побачити фокусування згустків. У випадку високих енергій згустків потрібні більші відстані для фокусування.

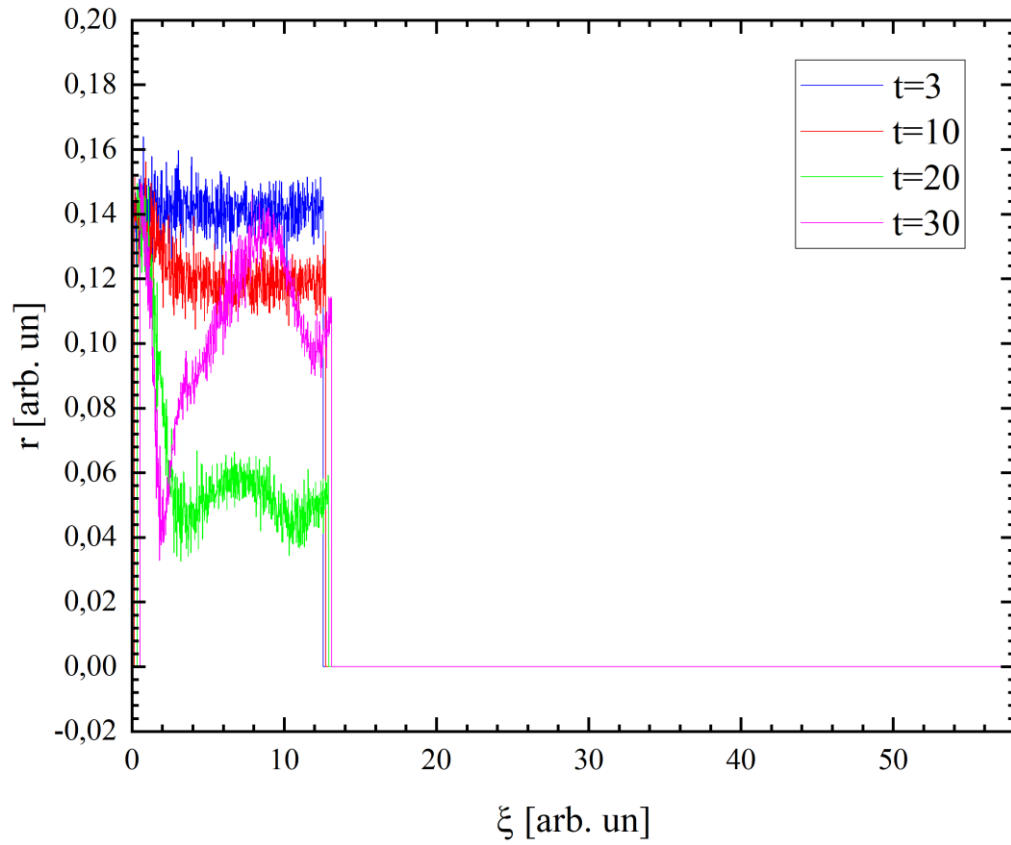


Рис. 2.8- Еволюція з часом радіусу однорідного згустку-передвісника (довжиною $l_{pr} = \lambda/2$ та густиною $n_{pr} = n_b/2$, n_b – густина основного згустку) та одного головного однорідного згустку, довжина якого $l_b = 3\lambda/2$. Радіус, струм та енергія згустків як і на рис. 2.7.

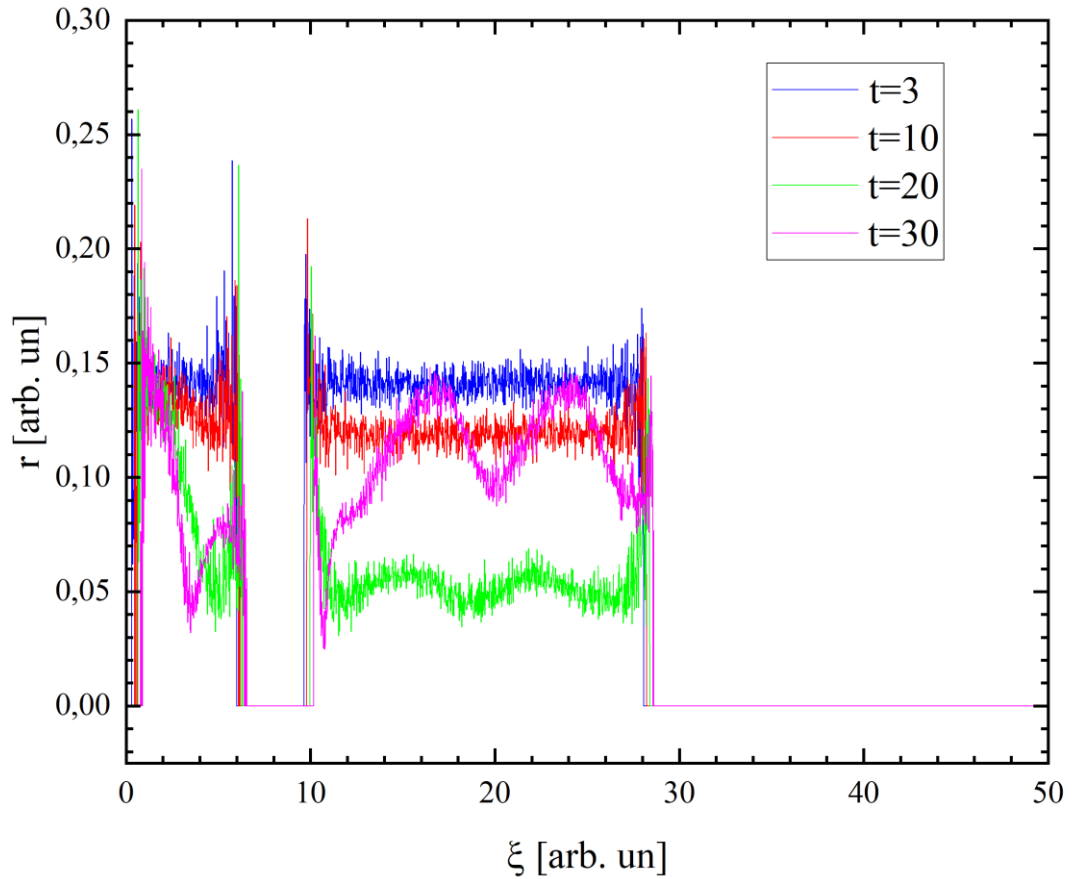


Рис. 2.9- Еволюція з часом радіусу косинусо-подібного згустку-передвісника (довжиною $l_{pr} = \lambda$ (по основі)) та густиною $n_{pr} = n_b/2$, n_b – густина основного згустку) та одного головного напів косинусо-подібного згустку, довжина якого $l_b = 4\lambda$ (по основі). Центральна частина – однорідна, довжиною 4λ , фронти є косинусо-подібними з довжиною $\lambda/2$ (по основі) кожен. Радіус, струм та енергія згустків – ідентичні до рис. 2.7.

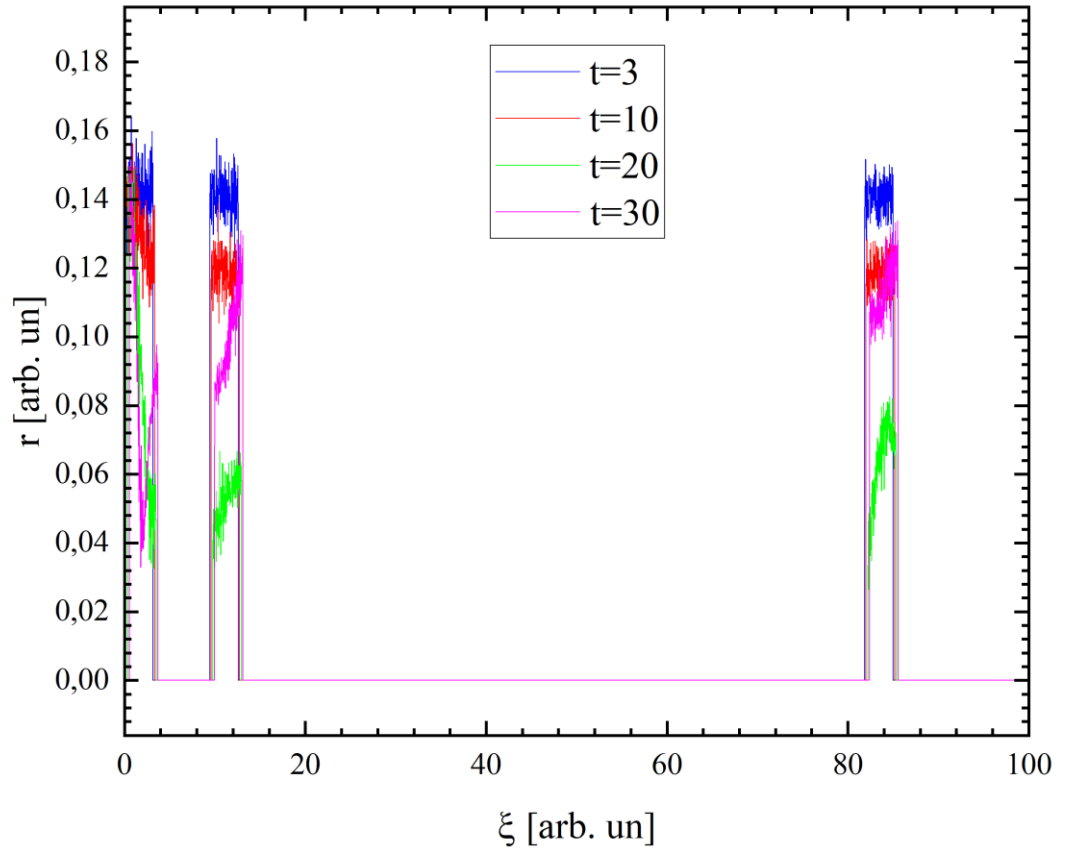


Рис. 2.10- Еволюція з часом радіусу однорідного згустку-передвісника (довжиною $l_{pr} = \lambda/2$ та густиною $n_{pr} = n_b/2$, n_b – густина основного згустку) та двох віддалених головних однорідних згустків, довжина яких $l_b = \lambda/2$. Радіус, струм та енергія згустків як і на рис. 2.7.

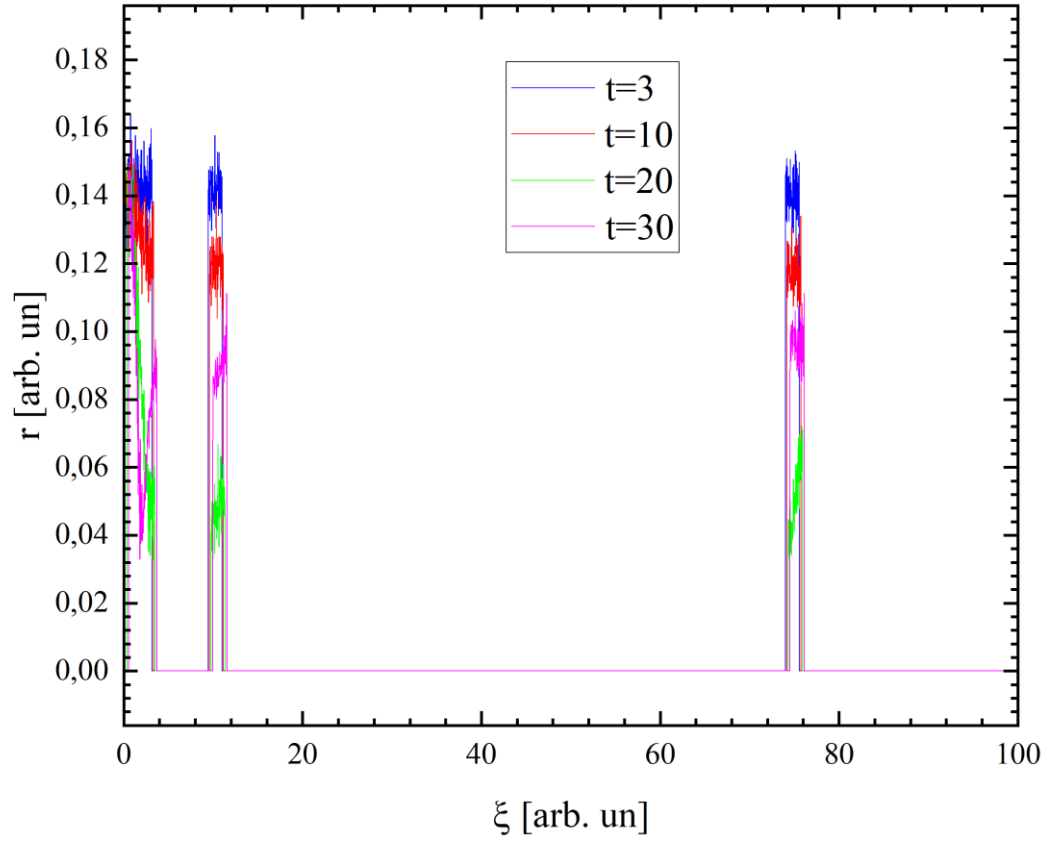


Рис. 2.11- Еволюція з часом радіусу однорідного згустку-передвісника (довжиною $l_{pr} = \lambda/2$ та густиною $n_{pr} = n_b/2$, n_b – густина основного згустку) та двох віддалених головних однорідних згустків, довжина яких $l_b = \lambda/4$. Радіус, струм та енергія згустків як і на рис. 2.7.

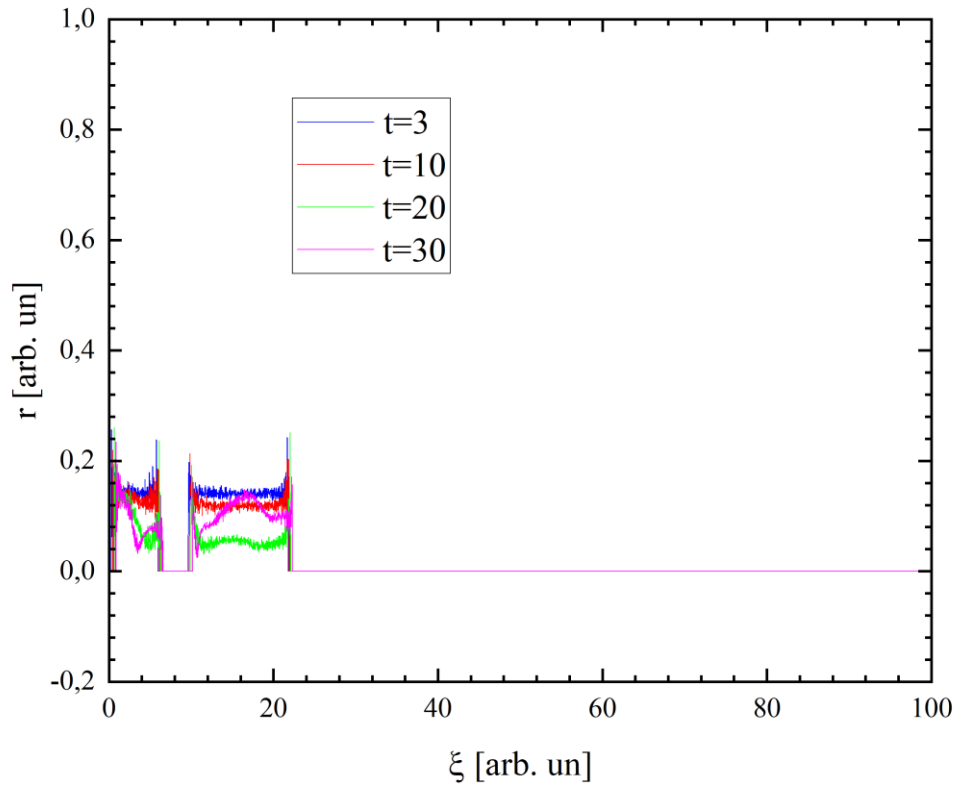


Рис. 2.12- Еволюція з часом радіусу косинусо-подібного згустку-передвісника (довжиною $l_{pr} = \lambda$ та густиною $n_{pr} = n_b/2$, n_b – густина основного згустку) та одного головного напів косинусо-подібного згустку, довжина якого $l_b = 2\lambda$. Центральна частина – однорідна, довжиною λ , фронти є косинусо-подібними з довжиною $\lambda/2$ кожен. Радіус, струм та енергія згустків – аналогічні до рис. 2.7.

ВИСНОВКИ ДО РОЗДІЛУ 2

У цьому розділі було продемонстровано, що згусток-попередник потрібен для більш рівномірного фокусування та щоб згусток, що прискорюється, не втрачав енергію на створення плазмової лінзи. Плазмова лінза зменшує енергетичний розкид згустків, оскільки голова згустку, яка має більшу енергію, втрачає енергію, а хвіст, який має меншу енергію, її отримує. Продemonстровано, що в лінійному випадку можна забезпечити фокусування згустків з довжиною, більшою за довжину хвилі.

ВИСНОВКИ

У даній роботі вирішені дві задачі зі зменшення енергетичного розкиду та покращення форми електронних згустків, що прискорюються кільватерними прискорювачами, а саме: пригнічення поперечної нестійкості електронних згустків та формування плазмової лінзи, що фокусує електронні згустки та зменшує їх енергетичний розкид. У першій задачі було аналітично продемонстровано наявність нового ефекту – пригнічення поперечної нестійкості електронних згустків за рахунок радіальної неоднорідності електронів плазми. Було продемонстровано числовим моделюванням наявність цього ефекту та проведено деякі оцінки періодів радіальних коливань електронів згустку. У другій задачі числовим моделюванням з використанням РІС коду було продемонстровано формування пасивної плазмової лінзи для гаусо-подібних електронних згустків. Окрім цього, було наведено часову еволюцію розмірів згустків, яка продемонструвала ефект фокусування. Отримані результати можуть бути використані експериментаторами для покращення якості прискорених електронних згустків.

ДОДАТОК А

ПОПЕРЕЧНИЙ РОЗПОДІЛ ЕЛЕКТРОНІВ ПЛАЗМИ У НЕЛІНІЙНОМУ РЕЖИМІ

Наведемо типову залежність густини електронів плазми від поперечної координати у слабо нелінійному режимі.

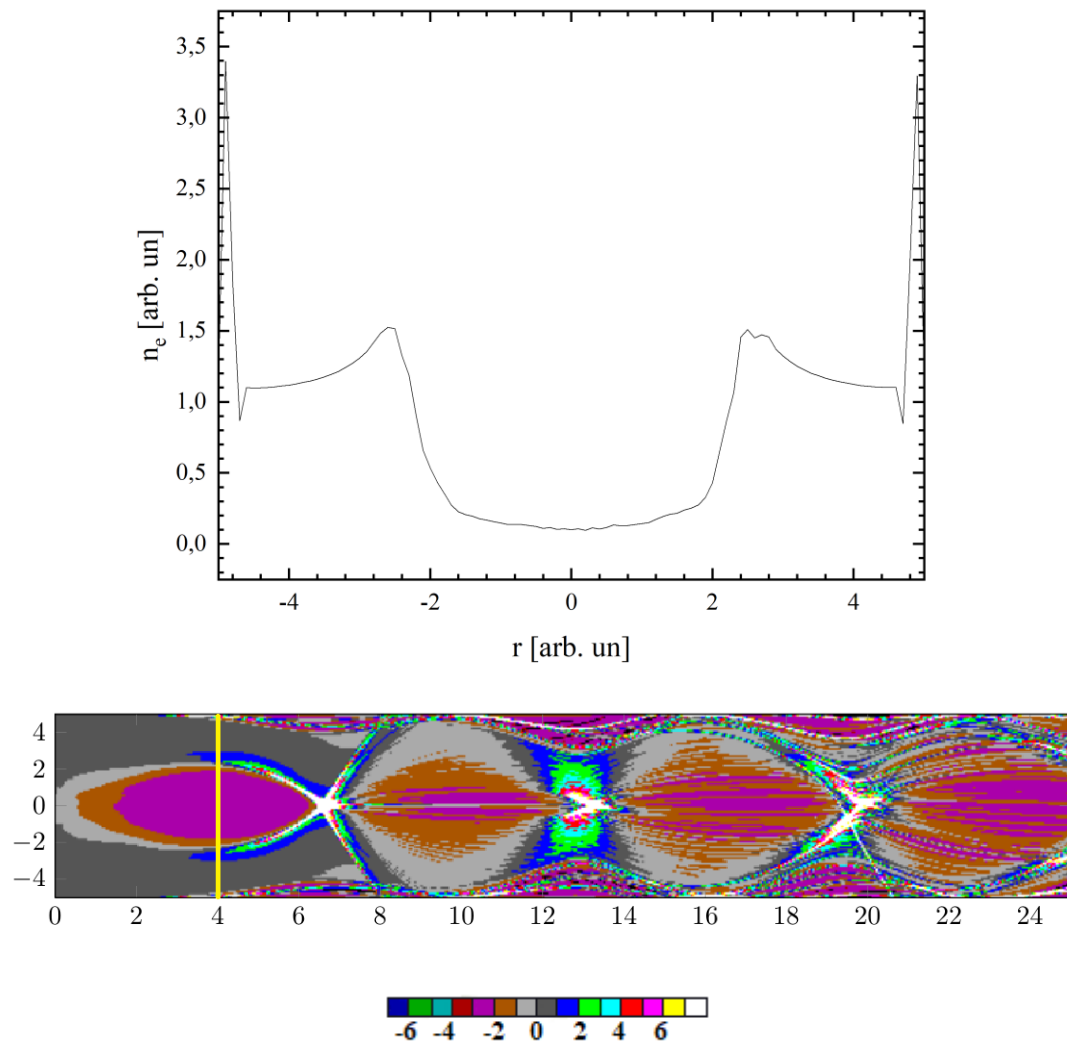


Рис. А.1- Розподіл електронів плазми (вгорі) та положення відповідного перерізу (внизу). Струм згустку $I_b = 0.81$, довжина - $0.2/2\pi$. Повздовжній профіль – косинусо-подібний. $\xi = 4$.

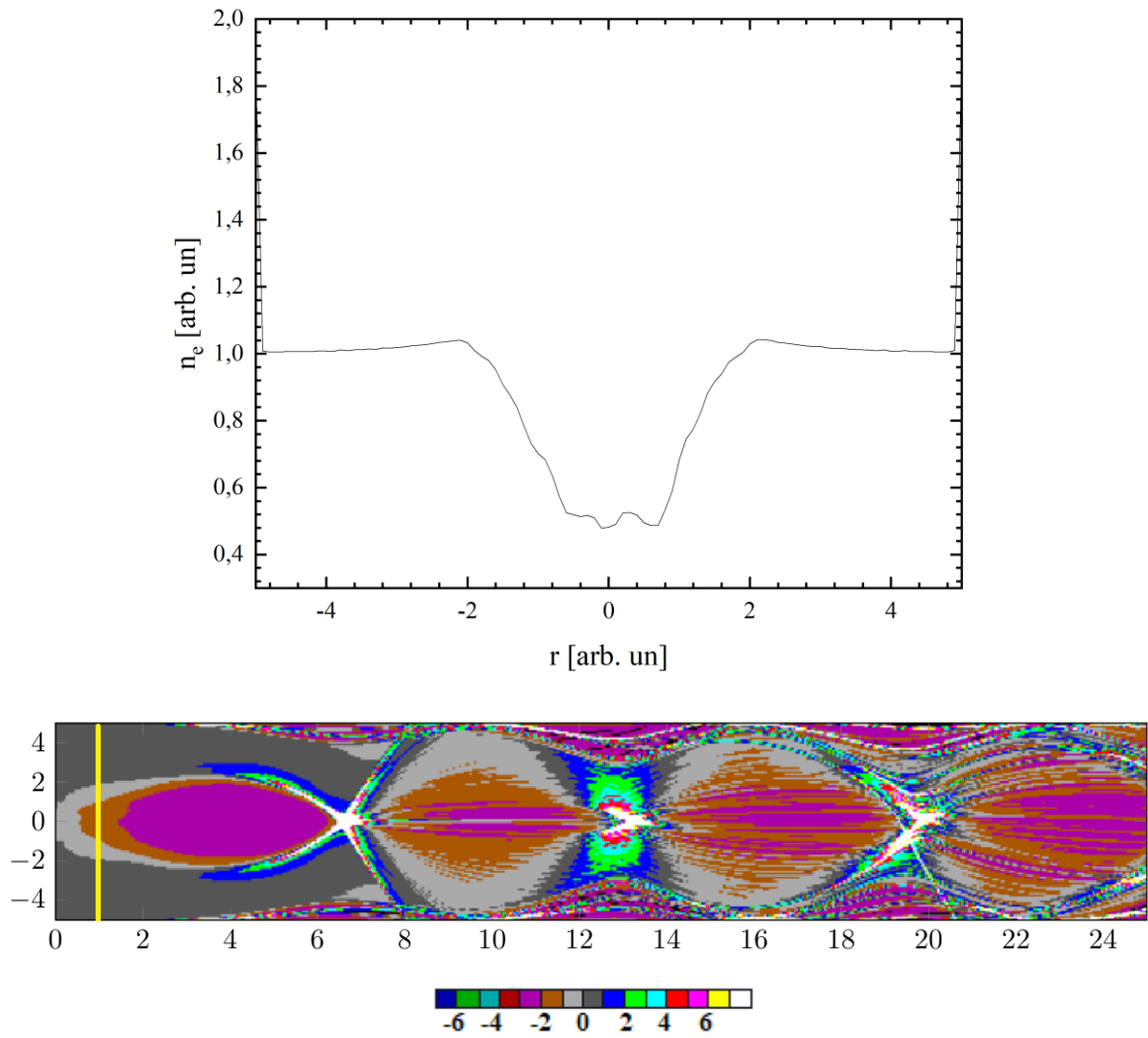


Рис. А.2- Розподіл електронів плазми (вгорі) та положення відповідного перерізу (внизу). Струм згустку $I_b = 0.81$, довжина - $0.2/2\pi$. Повздовжній профіль – косинусо-подібний. $\xi = 1$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. CUTTONE G. Applications of particle accelerators in medical physics. XLVIII International Winter Meeting on Nuclear Physics in Memoriam of Ileana Iori, м. Bormio, Italy, 25 січ. 2010 р. Trieste, Italy, 2010. URL: <https://doi.org/10.22323/1.103.0057>.
2. Kutsaev S. V. Advanced Technologies for Applied Particle Accelerators and Examples of Their Use (Review). Technical Physics. 2021. Т. 66, № 2. С. 161–195. URL: <https://doi.org/10.1134/s1063784221020158>.
3. Esarey E., Schroeder C. B., Leemans W. P. Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators. Reviews of Modern Physics. 2009. Т. 81, № 3. С. 1229–1285. URL: <https://doi.org/10.1103/revmodphys.81.1229>.
4. J. Osterhoff. Principles of Plasma Accelerators. <https://indico.desy.de/event/37353/contributions/135119/attachments/80321/104931/2023-02-22%20%7C%20Hamburg.pdf>.
5. Multi-GeV Electron Beams from Capillary-Discharge-Guided Subpetawatt Laser Pulses in the Self-Trapping Regime / W. P. Leemans та ін. Physical Review Letters. 2014. Т. 113, № 24. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.113.245002>.
6. Petawatt Laser Guiding and Electron Beam Acceleration to 8 GeV in a Laser-Heated Capillary Discharge Waveguide / A. J. Gonsalves та ін. Physical Review Letters. 2019. Т. 122, № 8. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.122.084801>.
7. Energy doubling of 42 GeV electrons in a metre-scale plasma wakefield accelerator / I. Blumenfeld та ін. Nature. 2007. Т. 445, № 7129. С. 741–744. URL: <https://doi.org/10.1038/nature05538>.
8. High-efficiency acceleration of an electron beam in a plasma wakefield accelerator / M. Litos та ін. Nature. 2014. Т. 515, № 7525. С. 92–95. URL: <https://doi.org/10.1038/nature13882>.
9. Beam Loading in the Nonlinear Regime of Plasma-Based Acceleration / M. Tzoufras та ін. Physical Review Letters. 2008. Т. 101, № 14. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.101.145002>.
10. Mitigation of the Hose Instability in Plasma-Wakefield Accelerators / T. J.

Mehrling та ін. Physical Review Letters. 2017. Т. 118, № 17. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.118.174801>

11. Martinez de la Ossa A., Mehrling T. J., Osterhoff J. Intrinsic Stabilization of the Drive Beam in Plasma-Wakefield Accelerators. Physical Review Letters. 2018. Т. 121, № 6. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.121.064803>.

12. Stable electron beam propagation in a plasma column / S. Diederichs та ін. Physics of Plasmas. 2022. Т. 29, № 4. С. 043101. URL: <https://doi.org/10.1063/5.0087807>.

13. Byrd P. F. Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists. 2-ге вид. Berlin : Springer-Verlag, 1971. 358 с.

14. Observation of Plasma Focusing of a 28.5 GeV Positron Beam / J. S. T. Ng та ін. Physical Review Letters. 2001. Т. 87, № 24. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.87.244801>.

15. Transverse Envelope Dynamics of a 28.5-GeV Electron Beam in a Long Plasma / C. E. Clayton та ін. Physical Review Letters. 2002. Т. 88, № 15. URL: <https://doi.org/10.1103/physrevlett.88.154801>.

16. PLASMA LENS FOR ELECTRON AND POSITRON BEAMS / D. S. Bondar et al. Problems of Atomic Science and Technology. 2021. P. 70–73. URL: <https://doi.org/10.46813/2021-134-070>.

17. Observations of low-aberration plasma lens focusing of relativistic electron beams at the underdense threshold / M. C. Thompson та ін. Physics of Plasmas. 2010. Т. 17, № 7. С. 073105. URL: <https://doi.org/10.1063/1.3457924>.

18. Improvement of Properties of Self-Injected and Accelerated Electron Bunch by Laser Pulse in Plasma, Using Pulse Precursor. East European Journal of Physics. 2019. URL: <https://doi.org/10.26565/2312-4334-2019-2-10>.

19. Transverse dynamics of a short, relativistic electron bunch in a plasma lens / G. Hairapetian та ін. Physics of Plasmas. 1995. Т. 2, № 6. С. 2555–2561. URL: <https://doi.org/10.1063/1.871217>.