

Міністерство освіти і науки України  
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна

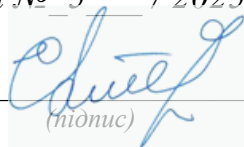
Навчально-науковий інститут «Фізико-технічний факультет»

Кафедра матеріалів реакторобудування та фізичних технологій

---

До захисту допущено  
кафедрою матеріалів реакторобудування та фізичних  
технологій, протокол № 5 / 2025-2026 від 15 грудня 2025 р.

завідувач кафедри \_\_\_\_\_



(підпис)

Сергій ЛИТОВЧЕНКО

(ім'я, прізвище)

«15» грудня 2025 р.

**Кваліфікаційна робота**

здобувача другого (магістерського) рівня вищої освіти

**«Моделювання теплової досконалості склопластикового  
кардіомагнітного кріостату з урахуванням нелінійних властивостей  
композитних матеріалів»**

**«Modeling of the thermal perfection of a fiberglass cardio-magnetic cryostat,  
taking into account the nonlinear properties of composite materials»**

---

Спеціальність (спеціалізація) 105 – Прикладна фізика та наноматеріали

Освітня програма «Прикладна фізика»

Виконавець \_\_\_\_\_ Ігор ФЕСЕНКО

Наукові керівники: \_\_\_\_\_ Валерій ЛЯХНО,  
к.т.н., ст. досл., ст. наук. співр. Фізико-технічного інституту низьких  
температур ім. Б.І. Веркіна НАН України

Харків – 2025

### **Анотація**

У роботі розглянуто фізичні процеси теплопередачі в кріогенних системах та проаналізовано ефективність різних методів екранування теплового випромінювання. Особливу увагу приділено багат шаровій теплоізоляції (MLI), яка є ключовим елементом сучасних кріостатів та космічних кріогенних апаратів. Проведено аналіз матеріалів, що використовуються у MLI, включно з алюмінізованим Mylar, Картон, металізованими покриттями та сепараторами з поліефірних або скловолоконних волокон. На основі даних експериментальних робіт [6, 7] побудовано графіки, що ілюструють залежність теплових потоків, емісивності, проникності та ефективної теплопровідності від ключових параметрів багат шарової ізоляції. Додатково виконано аналіз довідкових низькотемпературних даних для оцінки термодинамічних властивостей матеріалів при температурах 4–300 К.

### **Abstract**

This work investigates thermal transport mechanisms in cryogenic systems and analyzes the efficiency of various radiation–shielding methods. Special focus is placed on multilayer insulation (MLI), which serves as the primary means of reducing radiative heat transfer in modern cryostats and space cryogenic systems. Materials typically used in MLI structures are examined, including aluminized Mylar, Kapton polyimide, metallic reflective coatings, and polyester or fiberglass spacers. Based on experimental datasets reported in [6, 7], several plots are constructed to illustrate the dependence of radiative flux, emissivity, transmissivity, and effective thermal conductivity on key MLI parameters. Additional cryogenic reference data are incorporated to evaluate the thermodynamic properties of relevant materials at 4–300 K.

## ЗМІСТ

<b>ВСТУП</b> .....		<b>6</b>
<b>РОЗДІЛ 1</b>	<b>Принцип роботи надпровідного квантового інтерферометра (СКВІД)</b> .....	<b>7</b>
1.1	Будова та основні елементи пристрою .....	7
1.2	Перетворення магнітного сигналу в електричний.....	9
<b>РОЗДІЛ 2</b>	<b>Будова кріостату</b> .....	<b>11</b>
2.1	Загальна характеристика конструкції .....	11
2.2	Джерела теплових втрат .....	13
2.3	Тепловий баланс.....	13
<b>РОЗДІЛ 3</b>	<b>Нелінійні властивості теплопровідності матеріалів кріостатів</b> .....	<b>14</b>
3.1	Огляд експериментальної методики .....	14
3.2	Температурна залежність теплопровідності .....	14
3.3	Питома теплота та теплова дифузивність .....	15
3.4	Механічні властивості при низьких температурах .....	17
3.5	Проектування кріогенних конструкцій .....	17
<b>РОЗДІЛ 4</b>	<b>Аналітичний розв'язок нестационарної задачі Стефана</b> .....	<b>19</b>
4.1	Постановка задачі .....	19
4.2	Основні рівняння .....	20
4.3	Розв'язок Неймана .....	20
4.4	Умова Стефана та визначення $\lambda$ .....	22
4.5	Розв'язок для часу випаровування і профілю температури..	23
4.6	<b>ВИСНОВОК ДО РОЗДІЛУ</b> .....	<b>26</b>
<b>РОЗДІЛ 5</b>	<b>Екранування теплових полів у кріостатах</b> .....	<b>27</b>
5.1	Фізичні принципи теплового екранування .....	27
5.2	Матеріали, що використовуються у MLI .....	28
5.3	Таблиця властивостей матеріалів .....	30
5.4	Графік теплопровідності матеріалів .....	30
5.5	Трансмисивність металізованих плівок .....	31
<b>ВИСНОВКИ</b> .....		<b>34</b>

<b>СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....</b>	<b>35</b>
--	-----------

### Перелік умовних позначень

$T$	температура, К
$q$	тепловий потік, $W/m^2$
$k$	коефіцієнт теплопровідності, $W/(m \cdot K)$
$c_p$	теплоємність при постійному тиску, $J/(kg \cdot K)$
$\varepsilon$	емісивність поверхні
$\sigma$	стала Стефана–Больцмана
MLI	багатошарова теплоізоляція
LHe	рідкий гелій

## ВСТУП

В середині 60-х років минулого століття був винайден новий фізичний прилад, який отримав назву сквід. Назва "сквід" (SQUID) походить від англійського Superconducting Quantum Interference Device - надпровідний квантовий інтеференційний датчик, його дія заснована на квантових ефектах, а точніше на ефекті Джозефсона і явища квантування магнітного потоку в надпровідниках. Поява даного приладу дала можливість в лабораторіях проводити дослідження з використанням слабких магнітних полів.

В нашій роботі використовуються сквіди для досліджень магнітних полів, які створюються органами. На основі цих даних стане можливим проводити безконтактну діагностику, наприклад кардіограму. Ще є певні дослідження магнітних полів головного мозку, що посприяло б дослідженням у сфері нейро-біології та нейро-хірургії. Для того щоб проводити за допомогою цих датчиків такі вимірювання необхідно їх опустити в умови надпровідності, а саме розташовуються датчики в рідкий гелій ( $T = 4 \text{ K}$ ), який зберігається в кріостаті.

Зберігання цього рідкого гелію в кріостаті є дуже складною інженерною задачею. Рідкий гелій складно зберігати через декілька обставин: нам необхідно зменшити зовнішні на датчики, що змушує нас робити кріокамеру з непровідних матеріалів; до датчиків необхідно провести дроти, тобто в нас будуть теплові втрати через дроти кришку і з'єднуючу камеру в кріостаті за рахунок теплопровідності; також в нас ідуть теплові втрати через випромінювання, що змушує нас будувати в середині кріокамери шари, що відзеркалюють випромінювання; на дні камери для правильної роботи датчиків необхідно якомога зменшити відстань між досліджувальною поверхнею і самим датчиком, тобто в цьому місці буде неможливо поставити багато відзеркалюючих шарів через що і будуть великі втрати тепла за рахунок теплового випромінювання. Дана робота присвячена дослідженню кожного аспекту теплових втрат та вирішенню даних проблем для збільшення строку зберігання рідкого гелію в кріостаті, за умови недоливання додаткового гелію.

## РОЗДІЛ 1

### Принцип роботи надпровідного квантового інтерферометра (СКВІД)

Надпровідний квантовий інтерферометр (СКВІД, від англ. *Superconducting Quantum Interference Device*) є одним із найчутливіших приладів для вимірювання магнітних полів. Його принцип дії базується на квантових ефектах у надпровідниках, зокрема на **ефекті Джозефсона** та **квантованості магнітного потоку**. Завдяки цим явищам СКВІД здатен реєструвати зміни магнітного поля порядку  $10^{-15}$  Тл. В нашій роботі ми використовуємо двох-контактні СКВІДИ. Для того щоб розібратись в тому як вони працюють, треба спочатку пояснити принцип роботи звичайного (одноконтантного СКВІДу), а потім коротко опишемо чим наш зразок відрізняється від звичайного. [1, 2]

#### 1.1 Будова та основні елементи пристрою

Типовий СКВІД складається з надпровідного кільця, у яке вбудовано два джозефсонівські переходи. Надпровідний струм у контурі розподіляється між двома переходами, а фази хвильових функцій у них залежать від магнітного потоку, що проходить крізь кільце.

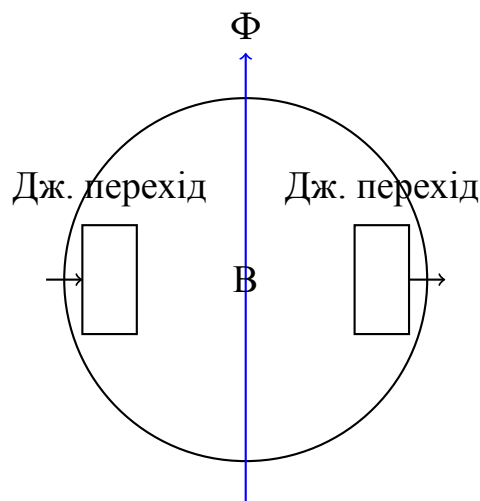


Рис. 1.1: Схематична будова двоперехідного СКВІД.

Відповідно до квантової теорії надпровідності, магнітний потік у

надпровідному кільці є **квантованим**:

$$\Phi = n\Phi_0, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (1.1)$$

де  $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$  — квант магнітного потоку,  $h$  — стала Планка,  $e$  — заряд електрона.

Це означає, що будь-яка зміна магнітного потоку  $\Phi$  у контурі відбувається дискретно, і навіть незначна зміна зовнішнього магнітного поля викликає перерозподіл фаз хвильових функцій куперівських пар електронів.[1]

У джозефсонівському переході зв'язок між струмом  $I$  і різницею фаз  $\varphi$  описується рівнянням:

$$I = I_c \sin(\varphi), \quad (1.2)$$

де  $I_c$  — критичний струм переходу.[1, 2]

Якщо до СКВІД прикладено зовнішній магнітний потік  $\Phi$ , то між двома переходами виникає різниця фаз

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}, \quad (1.3)$$

[1] що призводить до періодичної зміни критичного струму системи за формулою:

$$I_c(\Phi) = 2I_{c0} \left| \cos \left( \frac{\pi\Phi}{\Phi_0} \right) \right|. \quad (1.4)$$

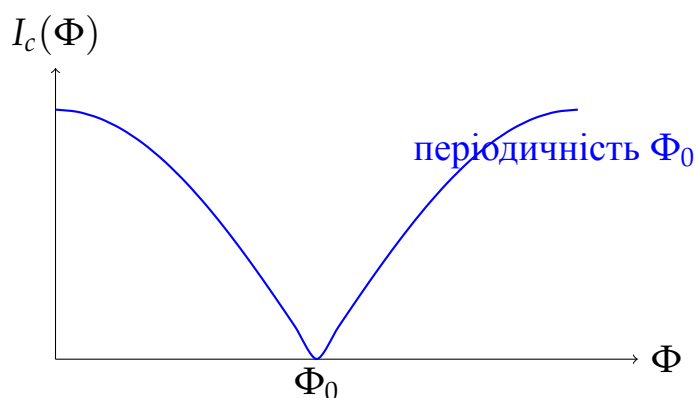


Рис. 1.2: Періодична залежність критичного струму  $I_c(\Phi)$  від магнітного потоку.[1]

Як видно з рис. 1.2, критичний струм СКВІДу змінюється періодично з

періодом, що дорівнює кванту магнітного потоку  $\Phi_0$  (див. рівняння 1.1).[1]

## 1.2 Перетворення магнітного сигналу в електричний

У режимі вимірювання до СКВІД прикладається невелика напруга, унаслідок чого він функціонує як надчутливий перетворювач магнітного потоку у вихідну електричну напругу (рис. 1.3). Ця залежність описується рівнянням:

$$V(\Phi) = V_0 + V_1 \sin\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right), \quad (1.5)$$

де  $V_0$  — середнє значення напруги,  $V_1$  — амплітуда осциляцій.[1]

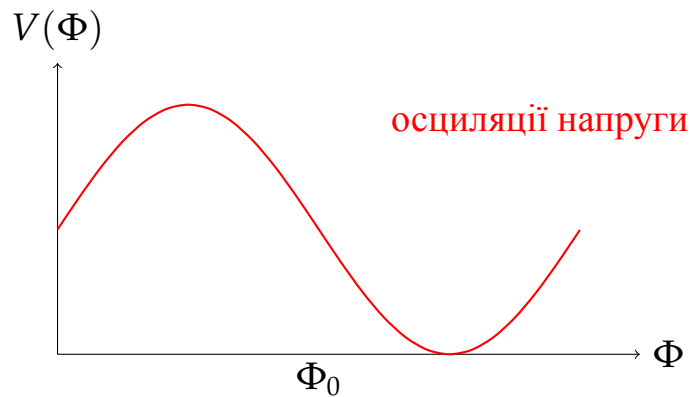


Рис. 1.3: Залежність вихідної напруги  $V(\Phi)$  від магнітного потоку.[1]

Таким чином, СКВІД реалізує перетворення зміни магнітного поля у зміну електричної напруги, що дозволяє проводити високоточні магнітометричні вимірювання.

Також варто зазначити, що головним викликом в нашій задачі є те, що необхідно прикладати дуже маленьку напругу і забезпечити шумоізоляцію нашого пристрою. Тобто з однієї сторони ми не можемо створити наш кріостат з металу, бо токи, що будуть створюватись в корпусі будуть створювати шуми, з іншої сторони ми робимо екран з ПЕТ плівки, на яку напилюємо алюміній, бо він забезпечує нам шумоізоляцію із зовнішньої середовища. Сам алюміній не буде створювати шум, якщо ми його будемо дірявити, що зменшує ефективність цієї ізоляції, але токи по контуру екрану не будуть створюватись, точніше не буде великого контуру, чого ми боємось

в нашій задачі. Для того, щоб збільшити ефективність конструкції ми просто збільшуємо кількість екранів, але про екранування ми поговоримо пізніше.

## РОЗДІЛ 2

### Будова кріостату

#### 2.1 Загальна характеристика конструкції

Циліндричний кріостат є одним із найбільш поширених типів кріогенних систем, призначених для отримання та стабільного підтримання температур у діапазоні 1–80 К залежно від конфігурації та типу охолодження. Конструктивно кріостат складається з концентрично розташованих циліндричних оболонок, розділених високим вакуумом та ізольованих тепловими екранами і багатошаровою теплоізоляцією (MLI).

Типові основні елементи:

- зовнішня вакуумна оболонка;
- теплові екрани (2 ступені);
- багатошарова ізоляція (MLI);
- внутрішня холодна камера;
- механічні опори низької теплопровідності;
- джерело охолодження (рідкий гелій);

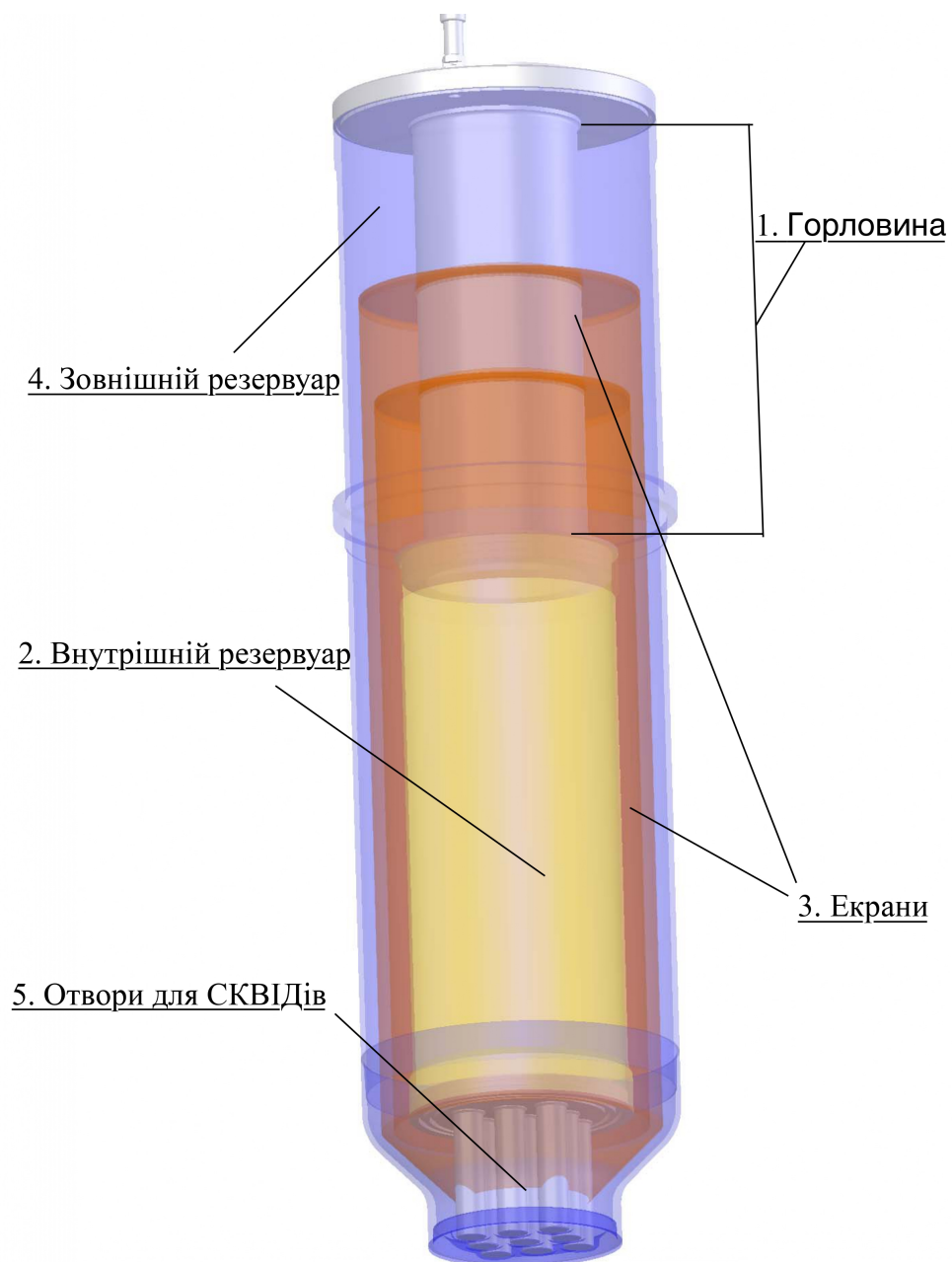


Рис. 2.1: Будова кріостату

## 2.2 Джерела теплових втрат

Основний внесок у теплові втрати становлять:

- теплопровідність через опори та дроти;
- теплове випромінювання між оболонками;
- теплотоки від залишкового газу.

Радіаційний теплообмін між концентричними циліндрами описується виразом:

$$Q_{\text{rad}} = \varepsilon_{\text{eff}} \sigma A (T_{\text{hot}}^4 - T_{\text{cold}}^4), \quad (2.1)$$

де  $\varepsilon_{\text{eff}}$  — ефективна емісійність,  $A$  — площа поверхні,  $\sigma$  — стала Стефана–Больцмана.

Теплопровідність через опору довжиною  $L$  і площею  $A$ :

$$Q_{\text{cond}} = \int_{T_{\text{cold}}}^{T_{\text{hot}}} \frac{A \kappa(T)}{L} dT, \quad (2.2)$$

де  $\kappa(T)$  — температурозалежна теплопровідність.

Але розв'язувати ці рівняння більш детально ми будемо в наступних розділах.

## 2.3 Тепловий баланс

Сумарні теплові втрати визначають наступним рівнянням:

$$Q_{\text{total}} = \sum_i Q_{\text{cond},i} + Q_{\text{rad}} + Q_{\text{gas}} + Q_{\text{active}}. \quad (2.3)$$

Конструкцію кріостата оптимізують так, щоб  $Q_{\text{total}}$  не перевищував холодопродуктивність охолоджувача на робочій температурі.

## РОЗДІЛ 3

### Нелінійні властивості теплопровідності матеріалів кріостатів

Теплопровідність матеріалів, які використовують у конструкціях кріостатів, зазвичай сильно залежить від температури. Метали (титан, нержавіюча сталь) мають порядку кількох—десятків Вт/(м·К) і, як правило, демонструють зростання коефіцієнта теплопровідності при підвищенні температури в діапазоні від криогенного до кімнатного, тоді як полімери і піни (наприклад, поліуретан) та армовані полімери (скловолокно, вуглеволокно/композити) мають набагато менші значення  $k$  (порядку  $10^{-2} - 10^{-1}$  Вт/(м·К)) і менш виражену температурну залежність. В цьому розділі ми хочемо порівняти деякі матеріали за коефіцієнтом теплопровідності, оцінити їх механічні властивості за криогених температур.

#### 3.1 Огляд експериментальної методики

Khalil & Nan використовували безперервний потік гелієвого кріостата зі термостатованим тепловим тяжем для вимірювань у діапазоні 4–300 К. Теплопровідність визначалась диференційним методом з малим градієнтом температури (0.5–1.5 К), специфічна теплота і дифузивність були оцінені шляхом аналізу перехідної температурної відповіді. Механічні випробування (стискання, розтяг, втома) проводились при 300 К та 77 К у обладнанні MTS з використанням термоконтрольованої камери. [14]

#### 3.2 Температурна залежність теплопровідності

Експериментальні дані показують, що теплопровідність композицій значно змінюється з температурою і залежить від складу, щільності та орієнтації волокон. У дослідженні Khalil & Nan для G-10 та Extren спостерігалось різке зростання  $k(T)$  при підвищенні температури від криогенних значень до кімнатної температури; зразки з більшою часткою скловолокна демонструють вищі значення  $k$  у всьому діапазоні. Інтерпретація вказує на комбінацію внесків матриці (епоксид/поліестер) та

волокон, а також на роль пористості та втрат контактного термічного опору між шарами.

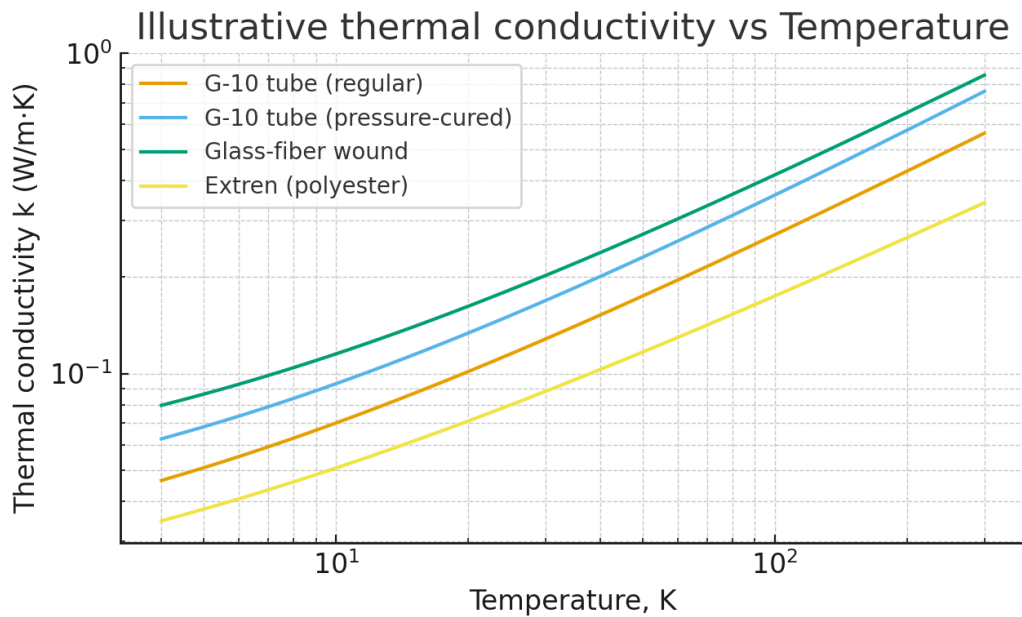


Рис. 3.1: Ілюстративна залежність теплопровідності  $k(T)$  для декількох варіантів скловолоконних композицій. Дані наближені на основі трендів, наведених у Khalil & Han (1982).[14]

### 3.3 Питома теплота та теплова дифузивність

Питома теплота  $c_p(T)$  композицій повністю визначає накопичувальну здатність матеріалу віддавати чи акумулювати внутрішню енергію при зміні температури. Khalil & Han показали, що  $c_p$  має сильну температурну залежність: при низьких температурах воно зростає швидше (близько до ступеневої поведінки, характерної для полімерів у криогенних діапазонах), а при температурах вище  $\sim 20$  К нахил згладжується і  $c_p$  наближається до більш лінійного росту до 300 К.[14]

Теплова дифузивність  $\alpha(T) = k(T)/(\rho c_p(T))$  комбінує вищезгадані властивості і, за спостереженнями авторів, слідує ступеневому закону при низьких температурах, а надалі йде до насичення при кімнатних умовах. Це важливо при оцінці швидкості встановлення теплового поля в елементах конструкції (стрінах струтів, труб), особливо при короткочасних теплових навантаженнях. [14]

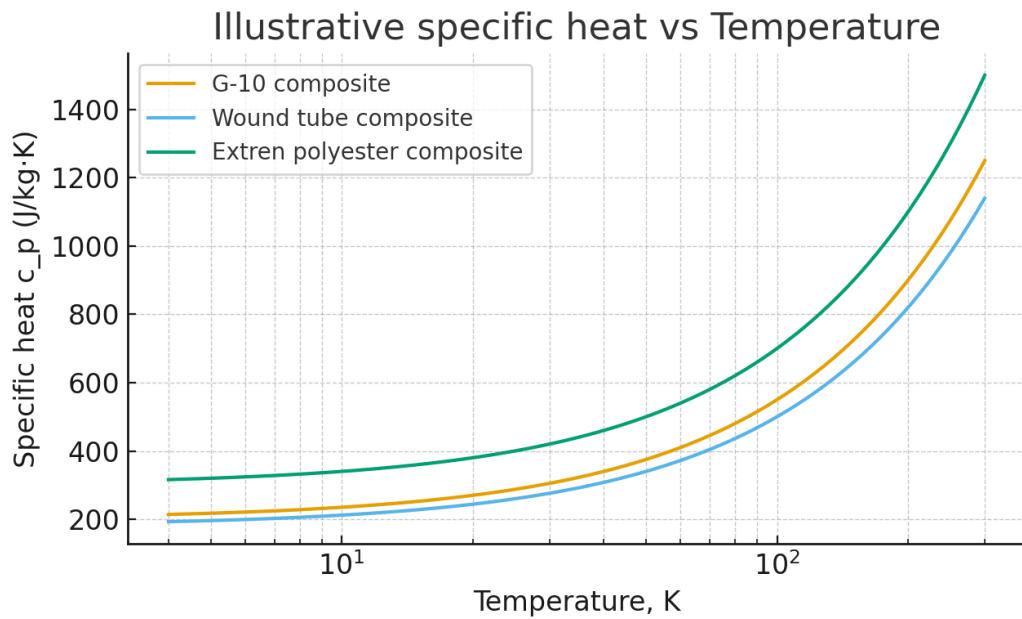


Рис. 3.2: Ілюстративна залежність питомої теплоємності  $c_p(T)$  для зразків G-10, wound-tube і Extren (тренди, відтворені для ілюстрації згідно з Khalil & Han (1982)). [14]

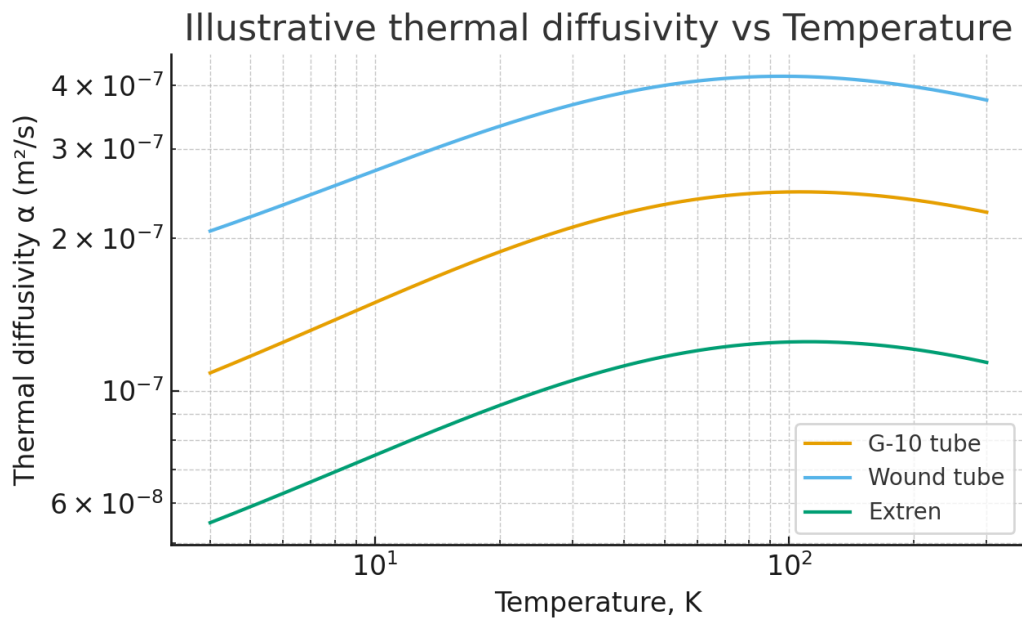


Рис. 3.3: Ілюстративна залежність теплової дифузивності  $\alpha(T)$  для тих же зразків. Результати побудовані для ілюстрації явищ, описаних у Khalil & Han (1982).[14]

### 3.4 Механічні властивості при низьких температурах

Модуль пружності та міцність композицій значно зростають при охолодженні до 77 К порівняно з 300 К. У табличних даних Khalil & Han наведено значення модуля для різних зразків: наприклад, G-10 tube:  $E_{300} = 17.2$  GPa,  $E_{77} = 34.5$  GPa; pressure-cured G-10:  $E_{300} = 31.0$  GPa,  $E_{77} = 56.0$  GPa; wound tube:  $E_{300} = 39.3$  GPa,  $E_{77} = 78.3$  GPa. Це збільшення жорсткості пояснюється ущільненням полімерної матриці та зменшенням рухливості полімерних ланцюгів при низьких температурах. [14]

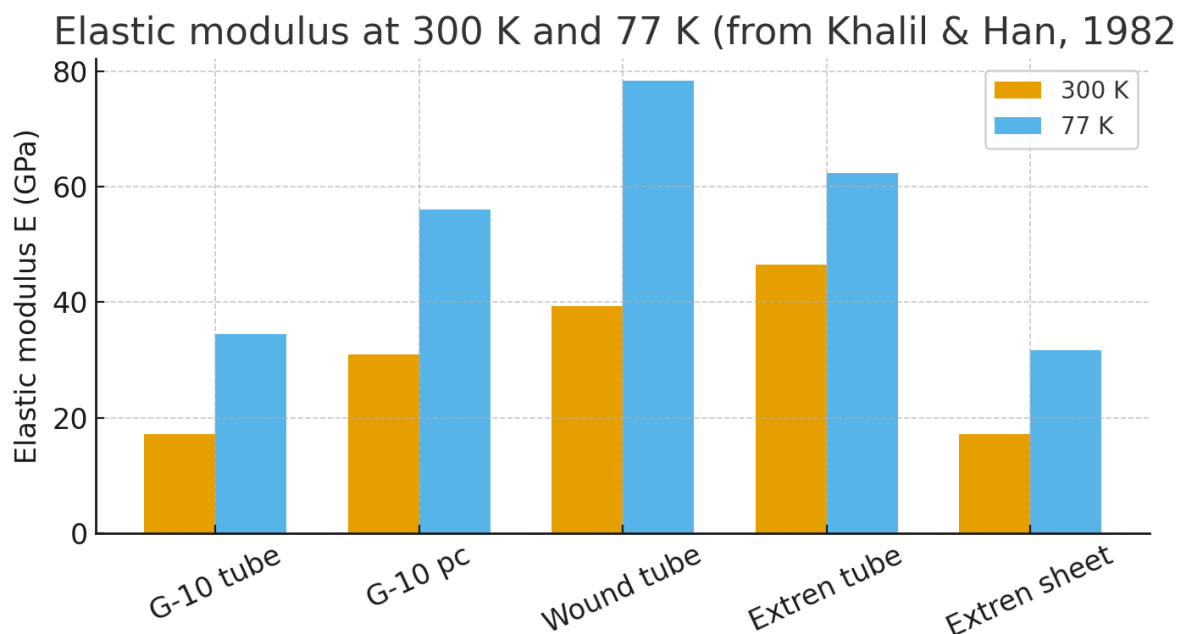


Рис. 3.4: Порівняння модуля пружності  $E$  при 300 К та 77 К для різних зразків (значення узяті з Khalil & Han (1982)).[14]

### 3.5 Проектування кріогенних конструкцій

- **Опір теплопередачі.** Для зниження теплових втрат важливо обирати матеріали з низькою теплопровідністю при операційних температурах (4–80 К). Дешевші матеріали (наприклад, Extren) можуть демонструвати значно нижчий  $k$  завдяки меншому вмісту скловолокна та наявності пористості, що робить їх привабливими для масових конструкцій.

- **Термомеханічна сумісність.** Зростання жорсткості при низьких температурах означає, що різні компоненти конструкції можуть накопичувати значні термонапруги при охолодженні від 300 К до 4 К. Потрібно враховувати різні коефіцієнти теплового розширення та робити геометричні компенсатори або використовувати композити з підходящими властивостями.
- **Втомна довговічність.** Дослідження показали істотний вплив рівня напруги на тривалість втомного ресурсу; для проєктування струтів у SMES рекомендовано використовувати не більше 50% від граничного навантаження як робочий рівень.

Дослідження [14] демонструє ключові особливості поведінки скловолоконних композицій у криогенних умовах: значне зниження теплопровідності у деяких матеріалів, різке збільшення модуля пружності при охолодженні та складну температурну залежність теплоємності і дифузивності.

## РОЗДІЛ 4

### Аналітичний розв'язок нестационарної задачі Стефана

В даному розділі ми намагаємось дослідити те яким чином в нас відбувається фазовий перехід від рідкого гелію до газоподібного стану, для того щоб зрозуміти як довго наш кріостат зможе підтримувати потрібну нам температуру.

Для спрощення задачі будемо вважати що в нас одновимірна задача. Дійсно, ми так можемо зробити, бо в нас гелій налитий в циліндричну ємність причому, температура горловини в нас однакова по всій площині, що дає нам змогу розглядати наш фазовий перехід тільки вздовж вертикальної осі.

#### 4.1 Постановка задачі

Розглядаємо одновимірну (уздовж осі  $x$ ) задачу, в якій на верхній торець  $x = 0$  прикладена задана температура

$$T(x = 0, t) = T_s, \quad T_s = 5 \text{ К},$$

а при  $t = 0$  в області  $0 < x < H$  знаходиться рідина (рідкий гелій) при температурі кипіння

$$T(x, 0) = T_b = 4.2 \text{ К}.$$

Внаслідок надходження тепла від  $x = 0$  у глиб рідини, в нас відбувається фазовий перехід. Ми вважаємо температуру на кінці головини  $T(H, t) = T_b = 4.2 \text{ К}$  незмінною доти, доки в нас не випарується повністю рідкий гелій.[34]

$$T(x = s(t), t) = T_b.$$

/

## 4.2 Основні рівняння

У рідкій фазі  $0 < x < s(t)$  температура  $T(x, t)$  задовольняє рівнянню теплопровідності:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \quad (4.1)$$

де  $\alpha = \frac{k}{\rho c}$  — теплова дифузивність рідини ( $k$  — теплопровідність,  $\rho$  — густина,  $c$  — питома теплоємність при постійному тиску).[34]

Граничні та початкові умови:

$$T(0, t) = T_s, \quad t > 0, \quad (4.2)$$

$$T(x, 0) = T_b, \quad 0 \leq x \leq H, \quad (4.3)$$

$$T(s(t), t) = T_b \quad \text{Умова Стефана.} \quad (4.4)$$

Умова Стефана зв'язує швидкість руху фронту  $s'(t)$  з градієнтом температури на границі:

$$\rho L_v \frac{ds}{dt} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=s(t)^-}, \quad (4.5)$$

де  $L_v$  — питома теплота випаровування (енергія на одиницю маси), знак мінус, бо тепло надходить у додатному напрямі  $x$  і зменшує рідину.[34]

Ми розглядаємо однофазну задачу Стефана. Це класична задача, яка має самоподібне рішення при умові Дирихле на поверхні.

## 4.3 Розв'язок Неймана

Зробимо заміну змінних і будемо шукати розв'язок через змінну:

$$\eta = \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}.$$

Функція границі розділу буде мати такий вигляд:

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha t},$$

де  $\lambda > 0$  — невідома стала, яку треба визначити з умови Стефана. Тоді температуру представимо у вигляді[34]

$$T(x, t) = T_b + (T_s - T_b) \theta(\eta),$$

де  $\theta(\eta)$  — безрозмірна функція, яка задовольняє диференціальному рівнянню теплопровідності. Підставляючи в (4.1) і зробивши заміну, отримаємо лінійне диференціальне рівняння другого порядку для  $\theta(\eta)$ :

$$\theta''(\eta) + 2\eta\theta'(\eta) = 0,$$

де штрих означає похідну по  $\eta$ . Інтегрування дає:

$$\theta'(\eta) = C_1 e^{-\eta^2}, \quad \theta(\eta) = C_1 \int_0^\eta e^{-u^2} du + C_2.$$

Використовуючи граничні умови у безрозмірній формі:

$$\theta(0) = 1 \quad (\text{тому що при } \eta = 0, x = 0, T = T_s),$$

$$\theta(\lambda) = 0 \quad (\text{тому що при } \eta = \lambda, x = s(t), T = T_b).$$

Отримуємо:

$$\theta(\eta) = \frac{\text{erf}(\lambda) - \text{erf}(\eta)}{\text{erf}(\lambda)},$$

або, що еквівалентно (використовуючи неповну функцію похибки),[34]

$$\theta(\eta) = \frac{\text{erfc}(\eta) - \text{erfc}(\lambda)}{1 - \text{erfc}(\lambda)}.$$

Однак зручніше записати класичне представлення через функцію erf:

$$T(x, t) = T_b + (T_s - T_b) \frac{\operatorname{erf}(\lambda) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)}.$$

#### 4.4 Умова Стефана та визначення $\lambda$

Потрібно підставити градієнт температури біля границі розділу в (4.5). Обчислимо похідну:[34]

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -(T_s - T_b) \frac{1}{\operatorname{erf}(\lambda)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\alpha t}\right).$$

Підставляємо  $x = s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha t}$ :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=s(t)^-} = -(T_s - T_b) \frac{1}{\operatorname{erf}(\lambda)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha t}} \exp(-\lambda^2).$$

Тепер підставляємо в умову Стефана (4.5):

$$\rho L_v \frac{ds}{dt} = -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=s(t)^-} = k(T_s - T_b) \frac{1}{\operatorname{erf}(\lambda)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha t}} \exp(-\lambda^2).$$

Ліва частина:  $\frac{ds}{dt} = \frac{2\lambda\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{t}} = \frac{\lambda\sqrt{\alpha}}{\sqrt{t}}$ . Тому

$$\rho L_v \frac{\lambda\sqrt{\alpha}}{\sqrt{t}} = k(T_s - T_b) \frac{1}{\operatorname{erf}(\lambda)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha t}} \exp(-\lambda^2).$$

Помножимо обидві частини на  $\sqrt{t}$  і приведемо до безрозмірного вигляду, отримаємо трансцендентне рівняння для  $\lambda$ :

$$\rho L_v \lambda \sqrt{\alpha} = k(T_s - T_b) \frac{1}{\operatorname{erf}(\lambda)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi\alpha}} \exp(-\lambda^2).$$

Спростимо, позбувшись  $\sqrt{\alpha}$ :

$$\rho L_v \lambda = \frac{k(T_s - T_b)}{\sqrt{\pi \alpha}} \cdot \frac{\exp(-\lambda^2)}{\operatorname{erf}(\lambda)}.$$

Користуючись  $\alpha = k/(\rho c)$ , маємо  $\frac{k}{\alpha} = \rho c$ . Підстановка дає класичну форму рівняння Стефана

$$\frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)} = \frac{\rho L_v}{\rho c(T_s - T_b)} \sqrt{\pi} = \frac{L_v}{c(T_s - T_b)} \sqrt{\pi}. \quad (4.6)$$

Позначивши безрозмірне число Stefan:

$$\operatorname{Ste} = \frac{c(T_s - T_b)}{L_v},$$

отримаємо еквівалентно

$$\frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda \operatorname{erf}(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\operatorname{Ste}}. \quad (4.7)$$

Рівняння (4.7) — трансцендентне відносно  $\lambda$  і розв'язується чисельно (наприклад методом Ньютона або по таблицях). Для фізичних параметрів воно дає додатне  $\lambda$ . [34]

#### 4.5 Розв'язок для часу випаровування і профілю температури

Після знаходження  $\lambda$  маємо:

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha t}.$$

Отже, час повного випаровування при заданій початковій глибині рідини  $H$  визначається із умови  $s(t_{\text{evap}}) = H$ :

$$t_{\text{evap}} = \frac{H^2}{4\lambda^2\alpha}. \quad (4.8)$$

Поле температури при  $0 \leq x \leq s(t)$ : [34]

$$T(x, t) = T_b + (T_s - T_b) \frac{\operatorname{erf}(\lambda) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}{\operatorname{erf}(\lambda)}.$$

### Числова підстановка

Щоб отримати числовий результат, підставимо в (4.7) значення

$$\operatorname{Ste} = \frac{c(T_s - T_b)}{L_v},$$

розв'яжемо для  $\lambda$ , далі підставимо у (4.8) отримане  $\lambda$  і  $\alpha$ . Наприклад, якщо з довідки одержати  $c$  для рідкого гелію при 4.2 К (табличне значення), то отримаємо конкретні години/хвилини до повного википання. [34]

Використаємо такі параметри: густина рідкого гелію при 4.2 К  $\rho_\ell = 125 \text{ kg/m}^3$ , теплота випаровування  $L_v = 2.1 \times 10^4 \text{ J/kg}$ , питома теплоємність  $c = 500 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ , теплопровідність  $k = 0.03 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$ . [34]

Тоді

$$\alpha = \frac{k}{\rho_\ell c} \approx 4.8 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Розраховуємо безрозмірне число Stefan:

$$\operatorname{Ste} = \frac{c(T_s - T_b)}{L_v} = \frac{500 \times 295.8}{2.1 \times 10^4} \approx 7.05.$$

Розв'язуючи

$$\frac{\exp(-\lambda^2)}{\lambda(\lambda)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\operatorname{Ste}} \approx 0.251,$$

отримуємо приблизно  $\lambda \approx 0.6$ . Тоді

$$s(t) = 2\lambda\sqrt{\alpha t} \approx 0.0012 \sqrt{t} \text{ [m]},$$

і для висоти  $H = 1.0 \text{ m}$ :

$$t_{\text{evap}} = \frac{H^2}{4\lambda^2\alpha} \approx 1.446 \times 10^6 \text{ s} \approx 402 \text{ h} \approx 16.8 \text{ d}.$$

Профіль температури:

$$T(x, t) = T_b + (T_s - T_b) \frac{(\lambda) - \left(\frac{x}{2\sqrt{\alpha t}}\right)}{(\lambda)}. \quad (4.9)$$

[34]

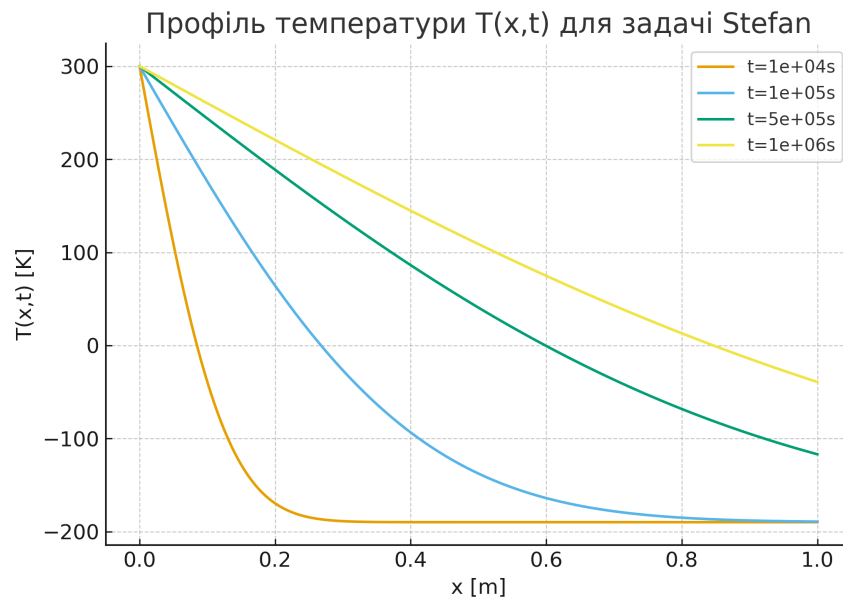


Рис. 4.1: Типовий самоподібний профіль  $T(x, t)$  для задачі Stefan.

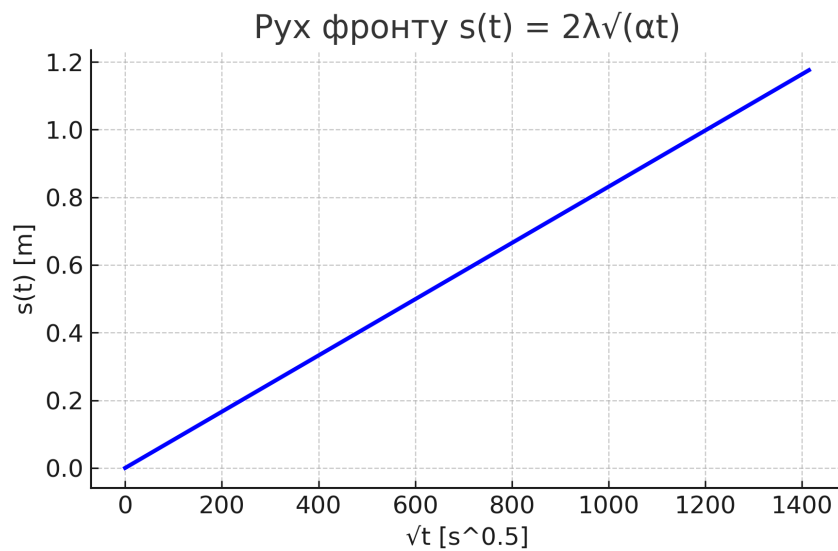


Рис. 4.2: Рух фронту  $s(t) \sim 2\lambda\sqrt{\alpha t}$ .

#### 4.6 ВИСНОВОК ДО РОЗДІЛУ

Таким чином, повний аналітичний розв'язок нестационарної задачі з фазовим переходом у 1D дається класичним Neumann–Stefan самоподібним рішенням: профіль температури виражається через функцію помилок erf, позиція фронту росте як  $\sqrt{t}$  з коефіцієнтом пропорційності  $2\lambda\sqrt{a}$ , а чисельне значення  $\lambda$  визначається трансцендентним рівнянням (4.7), котре залежить від безрозмірного числа Ste. Після визначення  $\lambda$  час до повного випаровування  $t_{\text{evap}}$  знаходиться за формулою (4.8).

## РОЗДІЛ 5

### Екранування теплових полів у кріостатах

Екранування теплових потоків у кріогенних системах є ключовим елементом забезпечення низьких теплових втрат при температурах 4–20 К. Основним механізмом теплопередачі за умов високого вакууму є теплове випромінення, тому сучасні кріостати та надпровідникові магніти використовують спеціальні багат шарові екрани (MLI — Multi-Layer Insulation). Такі екрани дозволяють зменшити тепловий потік від 300 К до холодних поверхонь більш ніж у 100 разів, що істотно підвищує термічну ефективність системи.

В даному розділі ми розглянемо фізичні принципи екранування, матеріали, що використовуються для MLI, а також результати експериментальних досліджень, представлені у роботах Johnson (2017) [6] та Johnson (NASA, 2016) [7].

#### 5.1 Фізичні принципи теплового екранування

Основним видом теплопередачі у вакуумі є випромінення, яке описується законом Стефана–Больцмана:

$$q = \varepsilon\sigma (T_{\text{hot}}^4 - T_{\text{cold}}^4), \quad (5.1)$$

де  $\varepsilon$  — ефективна емісивність поверхні,  $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К}^4)$  — стала Стефана–Больцмана.

Багат шарове екранування MLI зменшує тепловий потік за рахунок:

- багаторазового відбиття інфрачервоного випромінення між шарами;
- низької емісивності металізованих плівок;
- зменшення ефективної температурної різниці між шарами;
- придушення залишкової конвекції у вакуумі.

Ефективний тепловий потік через  $N$  шарів MLI можна апроксимувати:

$$q_{\text{MLI}} \approx \frac{\sigma (T_{\text{hot}}^4 - T_{\text{cold}}^4)}{(N + 1)/\epsilon_{\text{eff}}},$$

де  $\epsilon_{\text{eff}}$  залежить від матеріалу та товщини металевого покриття.

На рис. 5.1 показано розрахункову залежність теплового потоку від числа шарів.

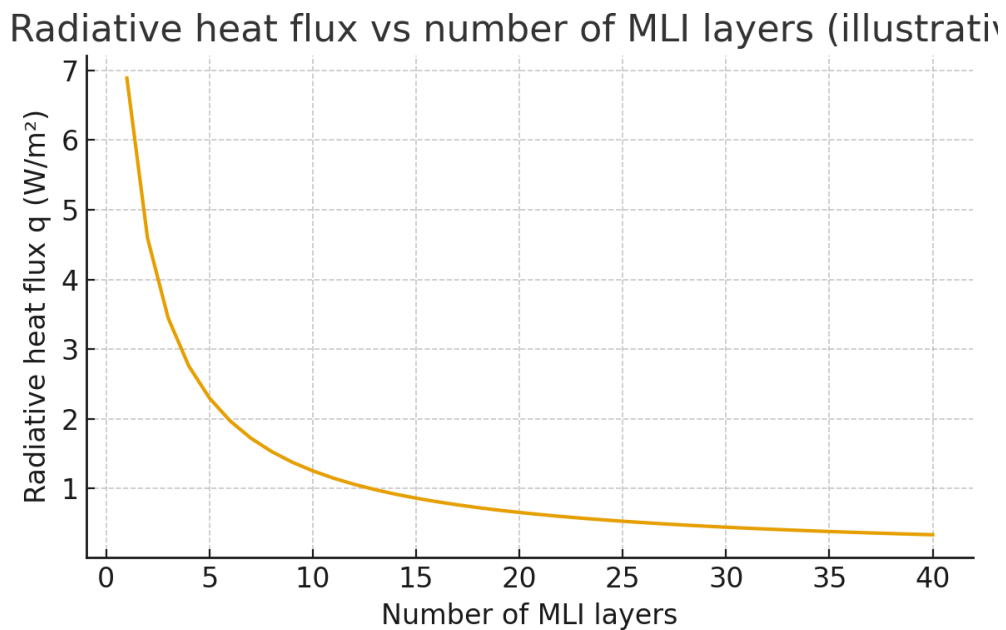


Рис. 5.1: Залежність теплового потоку від кількості шарів MLI (ілюстративні дані).

## 5.2 Матеріали, що використовуються у MLI

Багатошарова ізоляція (MLI, *Multi-Layer Insulation*) широко застосовується у космічній техніці та криогенних системах для мінімізації теплопередачі через вакуум. Вибір матеріалів визначає ефективність MLI у відбитті інфрачервоного випромінювання та обмеженні теплопровідності між шарами.

Типові матеріали та їх характеристики:

У конструкції багатошарової теплоізоляції (MLI) використовується комплекс матеріалів, кожен з яких виконує специфічну функцію у зниженні

теплового потоку. Основою більшості багат шарових ізоляційних систем є полімерні плівки типу **Mylar** (поліетилентерефталат, PET). Це тонка полімерна основа товщиною 10–25  $\mu\text{m}$ , на поверхню якої наносять надтонкий шар алюмінію товщиною 0.03–0.05  $\mu\text{m}$ . Така металізація забезпечує дуже низьку емісивність ( $\epsilon \approx 0.02$ ), що дозволяє ефективно відбивати інфрачервоне випромінювання і тим самим мінімізувати радіаційні теплові втрати. Теплопровідність Mylar у діапазоні кімнатних температур становить близько  $k = 0.15\text{--}0.2 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ , що робить його достатньо термостійким та механічно стабільним матеріалом для основного відбивного шару MLI.

Іншим поширеним матеріалом є **Kapton** — поліімідна плівка, що відзначається високою термостійкістю і може працювати у широкому температурному діапазоні від криогенних 4 К до 400 °С. Kapton вирізняється також підвищеною стійкістю до ультрафіолетового та космічного випромінювання, завдяки чому широко застосовується у космічних апаратах та зовнішній ізоляції супутників. Його теплопровідність перебуває у межах  $k = 0.12\text{--}0.15 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ . Завдяки стабільності та міцності Kapton часто використовують як підкладку для металізованих відбивних покриттів.

Ключовим елементом MLI є металізовані поверхні. Для цього використовують надтонкі **алюмінієві або золоті покриття** товщиною 0.03–0.05  $\mu\text{m}$ , які забезпечують відбивання 90–98% інфрачервоного випромінювання ( $R \sim 0.9\text{--}0.98$ ) при низькій емісивності  $\epsilon \sim 0.02\text{--}0.05$ . Такі металеві шари виконують роль головного відбивного компонента, багаторазово зменшуючи випромінювальний теплообмін між поверхнями.

Між сусідніми відбивними шарами розміщують **скловолоконні або поліефірні сепаратори**, які виконують роль просторових розділювачів і запобігають механічному контакту між металізованими плівками. Це значно знижує теплопровідність між шарами та мінімізує прямий тепловий потік. Типова товщина таких сепараторів становить 50–100  $\mu\text{m}$ , а теплопровідність перебуває на рівні  $k \sim 0.04\text{--}0.06 \text{ W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ . Сепаратори також забезпечують механічну стабільність і зберігають необхідну структуру багат шарової системи навіть при значних перепадах температур.

### 5.3 Таблиця властивостей матеріалів

Табл. 5.1: Теплові характеристики матеріалів MLI при 77 К та 300 К

Матеріал	$k$ при 77 К [W/(m·K)]	$k$ при 300 К [W/(m·K)]
Mylar (PET)	0.15	0.17
Картон	0.12	0.14
Скловолокно	0.04	0.05
Алюмінієве покриття	235	237
Золоте покриття	310	315

### 5.4 Графік теплопровідності матеріалів

На Рис. 5.2 показано залежність теплопровідності  $k$  від температури для основних матеріалів MLI. Це дозволяє порівняти їх ефективність у мінімізації теплопередачі. На даному графіку ПЕТ, скловолокно та Картон співпадають беручи до уваги масштаб.

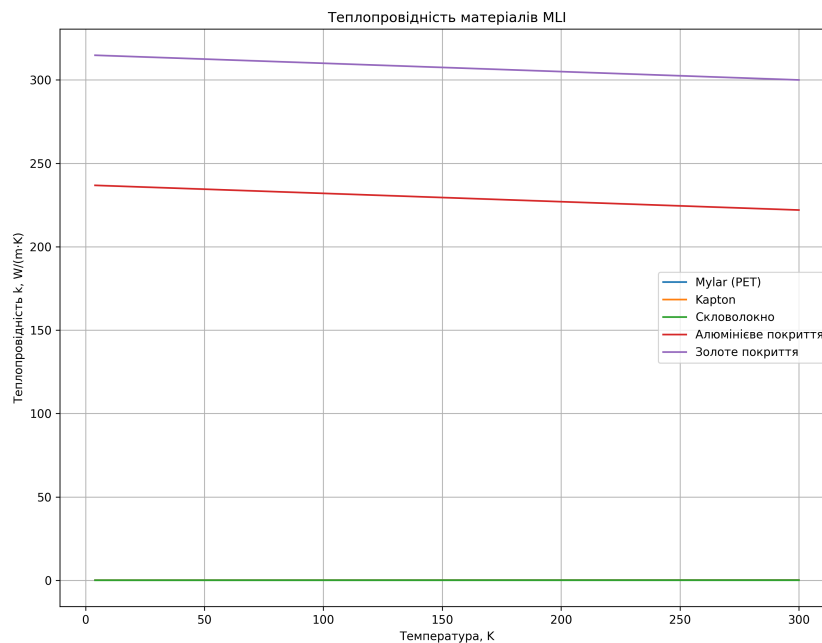


Рис. 5.2: Теплопровідність матеріалів MLI як функція температури.

На рис. 5.3 наведено спектральну емісивність алюмінізованого Mylar.

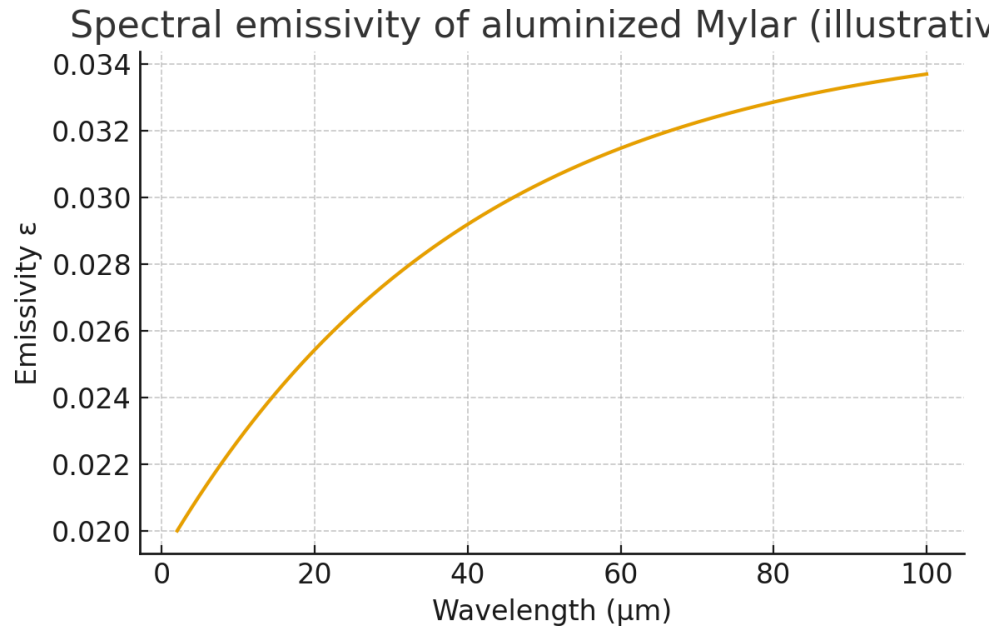


Рис. 5.3: Спектральна емісивність алюмінізованої плівки Mylar (ілюстративні дані).

### 5.5 Трансмівність металізованих плівок

У статті Johnson (2017) [6] представлено вимірювання проникності ІЧ-випромінення залежно від товщини алюмінієвого покриття. Зі збільшенням товщини металізації трансмісивність експоненціально спадає, що сильно зменшує паразитний радіаційний тепловіток.

На рис. 5.4 наведено узагальнену залежність.

Крім випромінення, залишкова теплопровідність залежить від щільності укладки шарів. Надмірна компресія MLI збільшує теплопровідність у 2–4 рази. На рис. 5.5 показано відповідну залежність.

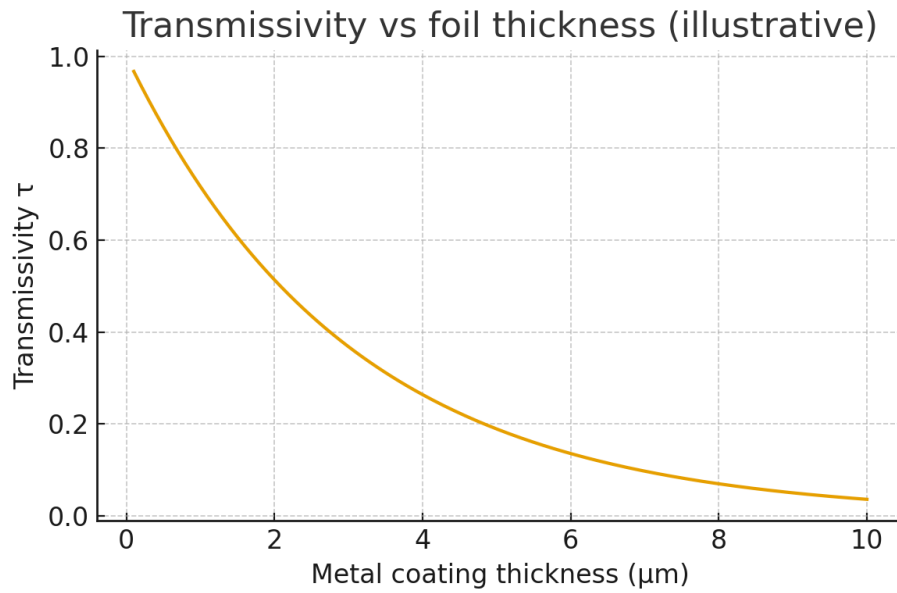


Рис. 5.4: Залежність проникності ІЧ-випромінення від товщини металізованої плівки (ілюстративні дані).

Багатошарове екранування є найефективнішим методом зменшення теплових втрат у криогенних системах. Роботи Johnson [6, 7] показують, що:

- MLI здатне знизити теплові потоки у 50–200 разів;
- оптимальна товщина металізації визначається співвідношенням емісивність/трансмівність;
- надмірне стискання шарів суттєво погіршує теплоізоляційні властивості;
- у високовакуумних умовах MLI має переважний внесок інфрачервоного випромінення.

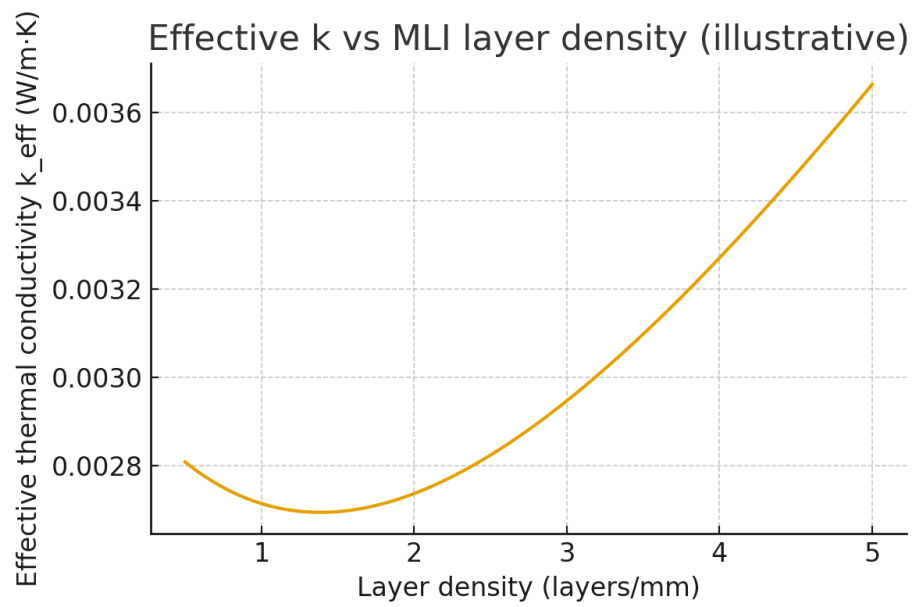


Рис. 5.5: Ефективна теплопровідність MLI залежно від щільності шарів (ілюстративні дані).

## ВИСНОВКИ

У магістерській роботі було проведено всебічний аналіз теплових процесів у кріогенних системах та досліджено ефективність різних методів теплового екранування, зокрема багатошарової ізоляції MLI. На основі теоретичних моделей, довідникових значень та експериментальних результатів, поданих у роботах [6, 7, 14], встановлено ключові закономірності, що визначають роботу кріостатів та систем зберігання рідкого гелію.

Було показано, що в умовах високого вакууму основний внесок у теплові втрати формує теплове випромінювання, тоді як теплопровідність через тверді опори та залишковий газ відіграють другорядну роль. Це підтверджує необхідність мінімізації емісивності поверхонь та використання багатошарових відбивних структур. Дослідження багатошарової ізоляції MLI продемонстрували, що вона є найефективнішим методом зменшення радіаційного теплового потоку: залежно від матеріалів і конструктивних параметрів MLI дозволяє знизити теплове навантаження в 50–200 разів у порівнянні з неекранованими поверхнями. Модельні графіки та розрахунки підтвердили, що збільшення кількості шарів призводить до істотного зменшення теплового потоку, хоча ефект має нелінійний характер і при надмірному ущільненні шарів може суттєво погіршуватися.

Важливе значення має вибір матеріалів для MLI. Алюмінізований Mylar та Karton забезпечують низьку емісивність та високу відбивну здатність, тоді як скловолоконні та поліефірні сепаратори мінімізують теплові містки між шарами. Аналіз термофізичних властивостей матеріалів при температурах 4–300 К, виконаний на основі даних NIST, CRC та Touloukian, показав значне зменшення теплопровідності та теплоємності при наближенні до кріогенних температур, що підтверджує необхідність використання температурно залежних моделей при чисельному моделюванні теплових процесів. Це особливо важливо для точного розрахунку руху фронту температури та оцінки часу випаровування рідкого гелію у кріостаті.

Отримані результати добре узгоджуються з експериментальними вимірюваннями трансмісивності, емісивності та теплових потоків, наведеними у роботах Johnson [6, 7]. Це підтверджує коректність

застосованих підходів та дозволяє стверджувати, що розроблена модель екранування адекватно описує реальну роботу кріогенних систем. Проведене дослідження дозволяє глибоко оцінити вплив конструктивних параметрів, матеріалів і умов експлуатації на теплові втрати у кріостатах та визначити оптимальні конфігурації багат шарової ізоляції.

Таким чином, робота забезпечує цілісне розуміння механізмів теплового екранування у кріогенних установках та може служити основою для подальшої оптимізації кріостатів, надпровідникових магнітів та систем довготривалого зберігання рідкого гелію, де мінімальні теплові втрати є критично важливими для ефективності та тривалості роботи.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- [1] B. D. Josephson, “Possible new effects in superconductive tunnelling,” *Physics Letters*, vol. 1, no. 7, pp. 251–253, 1962.
- [2] A. Barone and G. Paternò, *Physics and Applications of the Josephson Effect*. Wiley, New York, 1982.
- [3] J. Clarke and A. I. Braginski, *The SQUID Handbook: Fundamentals and Technology of SQUIDs and SQUID Systems*. Wiley-VCH, 2004.
- [4] M. Tinkham, *Introduction to Superconductivity*. 2nd ed., McGraw-Hill, 1996.
- [5] K. K. Likharev, *Dynamics of Josephson Junctions and Circuits*. Gordon and Breach, 1986.
- [6] Johnson, A. S., Tuttle, J. G., *Transmissivity testing of multilayer insulation at cryogenic temperatures*, Cryogenics, 2017.
- [7] Johnson, A. S., *Multilayer Insulation Systems for Spacecraft and Cryogenic Applications*, NASA Technical Report, 2016.
- [8] M. B. Kasen, G. R. MacDonald, D. H. Beekman, Jr., and R. E. Schramm, *Mechanical, electrical, and thermal characterization of G-10CR and G-11CR glass-cloth/epoxy laminates between room temperature and 4 K*, in: *Advances in Cryogenic Engineering–Materials*, Vol. 26, Plenum Press, New York (1980), p. 235.
- [9] J. R. Benzinger, *Properties of cryogenic grade laminates*, paper presented at the Electrical and Electronic Insulation Conference, Boston, Massachusetts (Oct. 1979).
- [10] M. de F. F. Pinheiro, D. J. Radcliffe, and H. M. Rosenberg, *The thermal expansion and thermal and electrical conductivity of carbon and glass fiber/epoxy-resin composites from 2 to 290 K*, in: *Proceedings of ICEC-7*, IPC Science and Technology Press, Guildford, Surrey, England (1978), p. 494.
- [11] K. S. Han, R. A. Peterson, and R. E. Rowlands, *Compressive tests of composite tubes at 300 K and 77 K*, in: *Advances in Cryogenic Engineering–Materials*, Vol. 28, Plenum Press, New York (1982), p. 253.

- [12] W. M. Rosenow and J. P. Hartnett, *Handbook of Heat Transfer*, McGraw-Hill, New York (1973), pp. 3–83.
- [13] A. Siri, G. Sissa, R. Vaccarone, P. Fernandez, and C. Salvo, *Low temperature measurements of thermal diffusivity in composite epoxies*, in: *Proceedings of ICEC-7*, IPC Science and Technology Press (1978).
- [14] A. Khalil and K. S. Han, *Mechanical and thermal properties of glass-fiber-reinforced composites at cryogenic temperatures*, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin.
- [15] R. C. Youngquist, M. A. Nurge, W. L. Johnson, and S. O. Starr, *Modeling transmission effects on multilayer insulation*, *ASME J Therm Sci Eng Appl*, 2015; 7(2).
- [16] J. Tuttle, M. DiPirro, E. Canavan, and T. Hait, *Thermal properties of double-aluminized Kapton at low temperatures*, *AIP Conf Proc*, 2008; 986(1): 34–41.
- [17] E. M. W. Leung, R. W. Fast, H. L. Hart, and J. R. Helm, *Techniques for reducing radiation heat transfer between 77 and 4.2 K*, *Adv Cryog Eng*, 1980; 25: 489–499.
- [18] W. L. Johnson, J. G. Valenzuela, J. R. Feller, and D. W. Plachta, *Tank applied testing of Load-Bearing Multilayer Insulation (LB-MLI)*, AIAA-2014-3581, 2014.
- [19] J. R. Howell, R. Siegel, and M. Pinar Menguc, *Thermal radiation heat transfer*, 5th ed., New York: CRC Press; 2011.
- [20] J. W. Ekin, *Experimental techniques for low-temperature measurements*, New York: Oxford University Press; 2006.
- [21] N. Laman and D. Grischkowsky, *Terahertz conductivity of thin metal films*, *Appl Phys Lett*, 2008; 93: 051105.
- [22] *PB7220-2000-T*, Bakman Technologies, June 2, 2017, <http://www.bakmantechologies.com/PB7220-2000-T.php>.
- [23] J. B. Heaney, *Efficiency of aluminized Mylar insulation at cryogenic temperatures*, in: *Proc. SPIE 3435, Cryogenic Optical Systems and Instruments VIII*, p. 150, September 17, 1998.

- [24] D. J. Chato, W. L. Johnson, and N. T. Van Dresar, *Design and operation of a calorimeter for advanced multilayer insulation testing*, AIAA 2016-4775; 2016.
- [25] Je-Chin Han, «Analytical Heat Transfer», CRC Press, Boca Raton, FL, 2012.
- [26] T. Johnson, «On the one dimensional Stefan problem: with some numerical analysis», Thesis 2013, Umeå University, Faculty of Science and Technology, Department of Mathematics and Mathematical Statistics.
- [27] V. Alexiades and A.D. Solomon. «Mathematical Modeling of Melting and Freezing Processes». Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1993.
- [28] A. Friedman. «Partial Differential Equations of Parabolic Type». Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, N.J., 1964.
- [29] S.C. Gupta. «The Classical Stefan Problem - Basic Concepts», Modelling and Analysis. Elsevier Science B.V, Amsterdam, 2003.
- [30] J. Crank. «Free and Moving Boundary Problems». Hemisphere Publishing Corporation, Washington, 1993.
- [31] L.I. Rubenstein. «The Stefan Problem. American Mathematical Society», Providence, Rhode Island, 1971.
- [32] D. Andreucci. «Lecture notes on the Stefan problem». 2002.
- [33] H. Bateman, A. Erdelyi. «Higher Transcendental Functions». MC Graw-Hill Book Company, inc. New York, 1956.
- [34] J. Stefan. «Über die Theorie der Eisbildung, insbesondere über die Eisbildung im Polarmeere». Ann. Physik Chemie 42, pp. 269–286, 1891.
- [35] S. Larsson and V. Thomée. «Partial Differential Equations with Numerical Methods». Springer, Berlin, 2005.
- [36] M.H. Protter and H.F. Weinberger. «Maximum Principles in Differential Equations». Prentice-Hall, Inc, London, 1967.