
УДК 517.38

В. А. ЗОЛОТАРЕВ, А. А. ЯНЦЕВИЧ

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ
УРАВНЕНИЙ С НЕСАМОСОПРЯЖЕННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ**

В работе [1] рассматривалась абстрактная задача Коши (АЗК) в гильбертовом пространстве H :

$$\frac{dz_t}{dt} = A(t) z_t, \quad z_t|_{t=0} = z_0, \quad A(t) \in [H, H], \quad (1)$$

причем на $K(t, s) = \langle z_t, z_s \rangle_H$ налагались определенные условия (например, в виде дифференциальных уравнений в частных производ-

ных), которые приводили к нелинейным операторным уравнениям для $A(t)$, и, следовательно, выделялись определенные разновидности кривых в гильбертовых пространствах. Такой подход с вероятностной точки зрения позволил ввести новые классы нестационарных процессов и построить спектральный анализ таких процессов по корреляционной функции (КФ).

В данной статье продолжается анализ операторных уравнений, начатый в работе [1], в случае, когда $A(t)$ несамосопряжен.

1. Пусть КФ, удовлетворяет уравнению

$$(\partial_t^2 - \partial_s^2) K(t, s) = \sum_{\alpha, \beta=1}^r \varphi_\alpha(t) I_{\alpha\beta} \overline{\varphi_\beta(s)}. \quad (2)$$

Из (1), (2) следует, что

$$\langle (B(t) - B^*(s)) z_t, z_s \rangle = \sum_{\alpha, \beta=1}^r \varphi_\alpha(t) I_{\alpha\beta} \overline{\varphi_\beta(s)}, \quad (3)$$

где через $B(t)$ обозначено выражение $\frac{dA}{dt} + A^2(t)$. Если $B(t)$ не зависит от t , то для $A(t)$ получается уравнение Риккати

$$\frac{dA}{dt} + A^2(t) = B, \quad (4)$$

где $B - B^* = \sum_{\alpha, \beta=1}^r \langle \cdot, e_\alpha \rangle I_{\alpha\beta} e_\beta$, e_α — каналовые элементы, $(I_{\alpha\beta})$ — эволюция [2].

В случае $B = B^*$ анализ уравнения (4), а также вид $K(t, s)$ изучен в [1].

II. Конкретизируя вид B и решая уравнение (4), можно изучать разные классы нестационарных кривых в H .

1. Пусть $H = L^2(R_1)$, а оператор B имеет вид

$$B = \int_0^x G(x-y) dy. \quad (5)$$

Заранее не будем предполагать, что $\overline{(B - B^*) L^2(R_1)}$ конечномерно.

Решение (4) будем искать в виде $A(t) = \int_0^x K(x-y, t) \cdot dy$. Тогда для ядра $K(x-y, t)$ получаем уравнение

$$\frac{\partial K(x-y, t)}{\partial t} + \int_0^{x-y} K(x-y-\eta, t) K(\eta, t) d\eta = G(x-y),$$

полагая $x-y = \xi$, получаем нелинейное интегродифференциальное уравнение

$$\frac{\partial K(\xi, t)}{\partial t} + \int_0^\xi K(\xi-\eta) K(\eta, t) d\eta = G(\xi). \quad (6)$$

После преобразования Фурье приходим к уравнению Риккати

$$\frac{\partial \hat{K}(\lambda, t)}{\partial t} + \hat{K}^2(\lambda, t) = \hat{G}(\lambda), \quad (7)$$

решение которого, удовлетворяющее условию $\hat{K}(\lambda, 0) = 0$, имеет вид

$$\hat{K}(\lambda, t) = \sqrt{\hat{G}(\lambda)} \frac{1 - e^{-2\sqrt{\hat{G}(\lambda)} t}}{1 + e^{-2\sqrt{\hat{G}(\lambda)} t}}.$$

Следовательно, для $K(\xi, t)$ окончательно получаем

$$K(\xi, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R_1} e^{-i\xi\lambda} \sqrt{\hat{G}(\lambda)} \frac{1 - e^{-2\sqrt{\hat{G}(\lambda)} t}}{1 + e^{-2\sqrt{\hat{G}(\lambda)} t}} d\lambda. \quad (8)$$

Пример 1. Пусть $G(\xi) \equiv G_0(\xi) = j\chi_{[-a, a]}(\xi)$, где $\chi_{[-a, a]}(\xi)$ — характеристическая функция интервала $[-a, a]$, тогда

$$\begin{aligned} \hat{G}_0(\lambda) &= \frac{i}{\lambda \sqrt{2\pi}} \sin \lambda a; \\ K(\xi, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{R_1} e^{i\lambda\xi} \sqrt{\frac{i \sin \lambda a}{\lambda \sqrt{2\pi}}} \operatorname{th} \sqrt{\frac{ia \sin \lambda a}{\lambda \sqrt{2\pi}}} d\lambda. \end{aligned}$$

Пример 2. Пусть $G(\xi) = \xi^n \chi_{[-a, a]}(\xi)$, тогда $\hat{G}(\lambda) = i^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \hat{G}_0(\lambda)$ и нахождение $K(\xi, t)$ сводится к квадратуре.

2. Пусть $H = L_{[0, 1]}^2$ и $B = \int_0^1 G(x, y) \cdot dy$, тогда $K(x, y, t)$ удовлетворяет

$$\frac{\partial K(x, y, t)}{\partial t} + \int_0^1 K(x, z, t) K(z, y, t) dz = G(x, y).$$

Если $G(x, y) = \vartheta(x) \psi(y)$, то, полагая $K(x, y, t) = K(x, t) \psi(y)$, получаем для $K(x, t)$ уравнение

$$\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} + K(x, t) \int_0^1 \psi(z) K(z, t) dz = \vartheta(x). \quad (9)$$

Обозначая $\chi(t) = \int_0^1 \psi(z) K(z, t) dz$, из (9) имеем $\frac{d\chi}{dt} + \chi^2(t) = \vartheta(x)$, а для $K(x, t)$ линейное дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} + \chi(t) K(x, t) = \vartheta(x); \quad K(x, t)|_{t=0} = K_0(x).$$

Аналогично к квадратурам сводится случай, когда $G(x, y) = \sum_{l=1}^n \vartheta_l(x) \psi_l(y)$.

3. Пусть $B \in [L^2_{[-a, a]}, L^2_{[-a, a]}]$ имеет вид $Bf = \alpha(x)f(x) + i \int_{-a}^x f(\xi) d\xi$. Будем искать решение уравнения (4) в виде

$$Af = \beta(x, t)f(x) + i \int_{-a}^x K(x, \xi, t)f(\xi) d\xi. \quad (10)$$

Тогда из (5), (10) получаем

$$\left(\frac{\partial \beta}{\partial t} + \beta^2\right)f(x) + i \int_{-a}^x \left\{ [\beta(x, t) + \beta(\xi, t)] K(x, \xi, t) + \frac{\partial K(x, \xi, t)}{\partial t} + \right. \\ \left. + i \int_{\xi}^x K(x, s, t) K(s, \xi, t) ds \right\} f(\xi) d\xi = \alpha(x)f(x) + i \int_{-a}^x f(\xi) d\xi. \quad (11)$$

Для того, чтобы удовлетворялось соотношение (11), достаточно

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} + \beta^2 = \alpha(x); \quad (12)$$

$$\frac{\partial K(x, \xi, t)}{\partial t} + [\beta(x, t) + \beta(\xi, t)] K(x, \xi, t) + i \int_{\xi}^x K(x, s, t) K(s, \xi, t) ds = 1. \quad (13)$$

Выражение (13) является стандартным уравнением Риккати, решение которого находится в явном виде, а (13) после нахождения $\beta(x, t)$ можно решать методом последовательных приближений. В случае, когда $\alpha(x) = \alpha_0 = \text{const}$, задача (12), (13) упрощается, так как решение интегродифференциального уравнения (13) можно искать в виде

$$K(x, \xi, t) = K(x - \xi, t); \\ \frac{\partial K(x - \xi, t)}{\partial t} + 2\beta(t) K(x - \xi, t) + i \int_0^{x-\xi} K(x - \xi - s, t) K(s, t) ds = 1.$$

Продолжая соответствующие функции нулем вне интервала $[-a, a]$ и применяя преобразование Фурье, получаем скалярное уравнение Риккати

$$\frac{\partial \hat{K}(\lambda, t)}{\partial t} + 2\beta(t)\hat{K}(\lambda, t) + i\hat{K}^2(\lambda, t) = \frac{\sin \lambda a}{\lambda a \sqrt{2\pi}}. \quad (14)$$

Так как $\beta(t)$ удовлетворяет уравнению $\beta^1 + \beta^2 = \alpha_0$, полагая $\hat{K}(\lambda, t) = u(\lambda, t) + i\beta(t)$, для $u(\lambda, t)$ получаем уравнение Риккати с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u(\lambda, t)}{\partial t} + iu^2(\lambda, t) = \frac{\sin \lambda a}{\lambda a \sqrt{2\pi}} - i\alpha_0.$$

Список литературы: 1. Золотарев В. А., Янцевич А. А. Нестационарные кривые в гильбертовых пространствах и нелинейные операторные уравнения. 1990. С. 2. Лившиц М. С., Янцевич А. А. Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах. Х., 1981. 160 с.

Поступила в редколлегию 20.06.89