ISSN 0453—8048
ISSN 0153—1850

ВЕСТНИК

ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 177

1979

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 44

СОДЕРЖАНИЕ

ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 177

Прикладная математика и механика

Выпуск 44

Редактор В. Н. Забелин
Художественный редактор А. С. Ролянова
Технический редактор Л. Т. Момот
Корректор Л. А. Федоренко
Информ. бланк № 4078

...бор 20.04.78. Подп. в печать 21.09. 78.
...60 × 90/16. Бумага типогр. №3.
...6 усл. печ. л., 7,4
...652. Зак. 8-159.

...1001.

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ВЕСТНИК
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
№ 177

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 44

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ «ВИЩА ШКОЛА»
1979

518+531
УДК 517.919.583
Прикладная математика и механика, вып. 44. Вестн. Харьк. ун-та, № 177. Харьков, издательское объединение «Вища школа», 1979. 94+2 с.

В вестнике опубликованы статьи по математической теории оптимальных процессов, дифференциальным уравнениям, теории устойчивости, а также по некоторым вопросам прикладной математики и механики.

Предназначен для научных работников и специалистов.

Списки лит. в конце статей.

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета (протокол № 5 от 10 февраля 1978 г.)

Адрес редакционной коллегии:

310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, госуниверситет, механико-математический факультет, тел. 40-14-40.

Редакция естественнонаучной литературы

$В\frac{20203-652}{М226(04)-79}$

УДК 518:517

А. С. СОХИН, канд. физ.-мат. наук

ОДИН ЭКОНОМИЧНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим эллиптическую краевую задачу вида

$$-d^2u(t)/dt^2 + Au(t) = f(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0 \tag{1'}$$

в гильбертовом пространстве, где A — линейный самосопряженный положительно определенный возможно неограниченный оператор, заданный в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(.\ ,\ .)_H$ и нормой $\|\cdot\|_H$, имеющий плотную в H область определения $D(A)$; $f(t)$ — заданная сильно непрерывная функция со значениями в H; $u(t)$ — искомая сильно непрерывная функция со значениями в H. Постановка и решение задач вида (1) — (1′) рассмотрены в [1].

Введем обозначения: $D = d/dt$; $D^2 = d^2/dt^2$; $L[X, Y]$ — множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства X в гильбертово пространство Y; $C(0, 1; H)$ — множество непрерывных на $[0, 1]$ функций со значениями в H, нормированных по формуле

$$\|u\|_{C(H)} = \max_{0 < t < 1} \|u(t)\|_H;$$

$$C_0(0, 1; H) = \{u(t)\colon u \in C(0, 1; H),\ u(0) = u(1) = 0\};$$

$$C_0^1(0, 1; H) = \{u(t)\colon u \in C_0(0, 1; H),\ Du \in C(0, 1; H)\};$$

$$C^2(0, 1; H) = \{u(t);\ u,\ Du,\ D^2u \in C(0, 1; H)\};$$

$L_2(0, 1; H)$ — пополнение множества функций из $C(0, 1; H)$ по скалярному произведению

$$(u, v)_{L_2(H)} = \int_0^1 (u(t), v(t))_H dt, \quad \|u\|_{L_2(H)} = \sqrt{(u, u)_{L_2(H)}};$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, 1; H)$ — пополнение множества функций из $C_0^1(0, 1; H)$ по скалярному произведению

$$(u, v)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(H)} = (Du, Dv)_{L_2(H)} = \int_0^1 (Du(t), Dv(t))_H dt,$$

$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(H)} = \sqrt{(u,\ u)_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(H)}}.$$

Заметим, что справедливо включение $C_0(0,\ 1;\ H) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ 1;\ H)$ и неравенство $\|u\|_{C(H)} \leqslant \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(H)}$.

Найдем решение задачи (1) — (1′) как предел последовательности $u_n(t)$ $(n = 0,\ 1,\ \ldots)$ функций, которые определяются по схеме, формально совпадающей с неявной схемой переменных направлений [2]:

$$\begin{gathered} u_0(t) \in C_0(0,\ 1;\ H) \cap C^2(0,\ 1;\ H), \\ (u_{n-1/2}(t) - u_{n-1}(t))/\tau_n - D^2 u_{n-1}(t) + A u_{n-1/2}(t) = f(t), \\ (u_n(t) - u_{n-1/2}(t))/\tau_n - D^2 u_n(t) + A u_{n-1/2}(t) = f(t), \end{gathered} \tag{2}$$

где $u_0(t)$ — заданное начальное приближение; $u_{n-1/2}(t)$ — вспомогательное приближение; $0 < \tau_n$ — итерационные параметры. Таким образом, вместо задачи обращения оператора $-D^2 + A$ предлагается задача многократного обращения операторов вида $1/\tau_n I - D^2$ и $1/\tau_n I + A$ (I — тождественный оператор), действующих соответственно в $L_2(0,\ 1;\ H)$ и в H.

Схемы вида (2) для случая ограниченных самосопряженных разностных операторов и их преимущества перед схемой простой итерации при различном выборе итерационных параметров рассмотрены в [2]. Циклический выбор параметров при решении разностной задачи Дирихле в квадрате на квадратной сетке впервые предложен в [3]. В данной работе этот метод обобщен на случай неограниченных операторов. Набор итерационных параметров также циклический, но длина цикла (период) неограниченно возрастает с увеличением номера итерации. Разрешающий оператор сильно стремится к нулю.

Исключая из равенств (2) вспомогательное приближение $u_{n-1/2}(t)$, получаем:

$$\begin{gathered} u_n(t) = (I - \tau_n D^2)^{-1}(I - \tau_n A)(I + \tau_n A)^{-1}(I + \tau_n D^2)\, u_{n-1}(t) + \\ + (I - \tau_n D^2)^{-1}(I - \tau_n A)(I + \tau_n A)^{-1}\tau_n f(t) + \tau_n (I - \tau_n D^2)^{-1} f(t). \end{gathered} \tag{2′}$$

Пусть B — линейный оператор, действующий из H в H. Обозначим $B_L : u(t) \to Bu(t)$, $u(t) \in L_2(0,\ 1;\ H)$. Тогда оператор B_L действует из $L_2(0,\ 1;\ H)$ в $L_2(0,\ 1;\ H)$. Заметим, что если $B \in L(H,\ H)$, то $B_L \in L[L_2(0,\ 1;\ H),\ L_2(0,\ 1;\ H)]$.

Лемма 1. *Оператор* $G = (I - \tau_n D^2)^{-1}$ *перестановочен с операторами* $(I - \tau_n A)_L$, $[(I + \tau_n A)^{-1}]_L$, $I - \tau_n D^2$.

Доказательство. Докажем сначала, что $GA_L = A_L G$. Пусть $g(t,\ s)$ — функция Грина скалярной краевой задачи

$$-z''(t) + \tau_n z(t) = f(t),\ 0 < t < 1;\ z(0) = z(1) = 0.$$

Тогда при $u \in L_2(0, 1; H)$ имеем

$$G(t)\,u = Gu(t) = \int_0^1 g(t, s)\,u(s)\,ds,$$

где

$$G(t) \in L[L_2(0, 1; H), H], \ \forall t \in [0, 1],$$
$$G \in L[L_2(0, 1; H), L_2(0, 1; H)].$$

Пусть

$$u \in \{u(t) \colon u \in C(0, 1; H), \ Au \in L_2(0, 1; H)\} \subseteq D(A_L),$$

тогда, заменяя интеграл суммой Римана, получаем

$$GA_L u = G(t)\,A_L u = \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} g(t, s_i)\,Au(s_i)\,\Delta s_i =$$
$$= \lim_{m \to \infty} A\left(\sum_{i=1}^{m} g(t, s_i)\,u(s_i)\,\Delta s_i\right) = \lim_{m \to \infty} Au_m(t),$$

где

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g(t, s_i)\,u(s_i)\,\Delta s_i,$$

причем,

$$\lim_{m \to \infty} u_m(t) = G(t)\,u \ \text{ в } H \ \forall t \in [0, 1].$$

В силу замкнутости оператора A

$$G(t)\,u \in D(A) \ \ \forall t \in [0, 1] \ \text{ и } \ \lim_{m \to \infty} Au_m(t) = AG(t)\,u = A_L Gu.$$

Оставшиеся утверждения доказываются аналогично.

Лемма 2. *Пусть P — замыкание симметрического положительно определенного оператора — D^2 в областью определения $D(-D^2) = C_0(0, 1; H) \cap C^2(0, 1; H)$, тогда P — самосопряженный оператор в $L_2(0, 1; H)$ с дискретным спектром $\lambda(P) = \{\lambda \colon \lambda = \lambda_r = \pi^2 r^2, \ r = 1, 2, \ldots\}$.*

Лемма 3. *Пусть $\{E_r, \ r = 1, 2, \ldots\}$ — разложение единицы, порождаемое оператором P, тогда $E_r u = \sqrt{2}\,\sin(\pi r t)\,u_r$,* где $u_r = \int_0^1 \sqrt{2}\,\sin(\pi r s)\,u(s)\,ds \in H \ \ \forall r = 1, 2, \ldots$. *Функция $g(P)$ оператора P определяется равенством $g(P)\,u = \sum_{r=1}^{\infty} g(\lambda_r)\,E_r u$, причем,*

$$D(g(P)) = \left\{u \in L_2(0, 1; H) : \sum_{r=1}^{\infty} |g(\lambda_r)|^2 \, \|u_r\|_H^2 < \infty\right\}.$$

Доказательство лемм 2 и 3 нетрудно получить, следуя теории симметрических операторов в гильбертовом пространстве.

Следствие. *Пусть $u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, 1; H)$, тогда*

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(H)} = \|Du\|^2_{L_2(H)} = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r \, \|u_r\|_H^2.$$

Воспользовавшись перестановочностью фигурирующих в (2′) операторов, получим факторизованную схему

$$(I+\tau_n A)(I+\tau_n P)u_n(t) = (I-\tau_n A)(I-\tau_n P)u_{n-1}(t) + \\ + 2\tau_n f(t) \qquad (2'')$$

для $n=0, 1, \ldots$ при произвольном начальном приближении $u_0(t) \in C_0(0, 1; H) \cap C^2(0, 1; H)$.

Пусть $u(t)$ — решение задачи (1) — (1′). Тогда разность

$$z^{(n)}(t) = u_n^{(t)} - u(t), \quad z^{(n-1/2)}(t) = u_{n-1/2}(t) - u(t)$$

удовлетворяет уравнениям

$$(z^{(n-1/2)}(t) - z^{(n-1)}(t))/\tau_n + Pz^{(n-1)}(t) + Az^{(n-1/2)}(t) = 0,$$
$$(z^{(n)}(t) - z^{(n-1/2)}(t))/\tau_n + Pz^{(n)}(t) + Az^{(n-1/2)}(t) = 0 \qquad (3)$$

для $n=0, 1, \ldots$ при произвольном начальном приближении $z^{(0)}(t) \in C_0(0, 1; H) \cap C^2(0, 1; H)$.

Теорема 1 (*сходимость*). *При выборе итерационных параметров* $\tau_i = (m/d)m^{2i-2}$, $\tau_{i+p_n} = \tau_i$, $i=1, 2, \ldots, p_n$, $0<m<1$, *где* $p_n = (1/\alpha)\sqrt{n}$, $d=\pi^2$ — *нижняя граница оператора* P, *последовательность* $z^{(n)}(t)$ *сходится к нулю по норме* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0, 1; H)$, *справедливо неравенство* $\|Dz^{(n)}\|_{L_2(H)} \leqslant (\|Dz^{(0)}\|_{L_2(H)} + (1/\pi m^2) \times \|D^2 z^{(0)}\|_{L_2(H)}) \exp(-1.2\sqrt{n})$, $m \simeq 0{,}4$.

Доказательство. Исключая из равенства (3) вспомогательное значение $z^{(n-1/2)}(t)$, получим

$$z^{(n)}(t) = S_n z^{(n-1)}(t), \quad z^{(n)}(t) \in D(P), \qquad (4)$$

где оператор перехода

$$S_n = S_n(A)S_n(P), \quad S_n(A) = (I+\tau_n A)^{-1}(I-\tau_n A),$$
$$S_n(P) = (I+\tau_n P)^{-1}(I-\tau_n P), \quad n=1, 2, \ldots$$

$S_n(A)$, $S_n(P)$ — самосопряженные, ограниченные единицей операторы, действующие, соответственно, в H и в $L_2(0, 1; H)$. Из равенств (4) и (4′) находим $z^{(n)}(t) = T_n z^{(0)}(t)$, где разрешающий оператор

$$T_n = \prod_{i=1}^{n} S_i = T_n(A)T_n(P),$$

$$T_n(A) = \prod_{i=1}^{n} S_i(A), \quad T_n(P) = \prod_{i=1}^{n} S_i(P), \quad n=1, 2, \ldots$$

$T_n(A)$, $T_n(P)$ — самосопряженные, ограниченные единицей операторы, действующие, соответственно, в H и в $L_2(0, 1; H)$. Из неравенства

$$\|DT_n z^{(0)}(t)\|_H^2 = \|T_n(A)DT_n(P)z^{(0)}(t)\|_H^2 \leqslant \|DT_n(P)z^{(0)}(t)\|_H^2,$$

лемм 2 и 3 и следствия получим

$$\|DT_n z^{(0)}\|^2_{L_2(H)} = \int_0^1 \|DT_n z^{(0)}(t)\|^2_H dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \|DT_n(P) z^{(0)}(t)\|^2_H dt =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r |T_n(\lambda_r)|^2 \|z_r^{(0)}\|^2_H, \quad \lambda_r = \pi^2 r^2, \tag{5}$$

где $z_r^{(0)} = \int_0^1 \sqrt{2} \sin(\pi rs) z^{(0)}(s)\, ds$.

Подберем параметры τ_n так, чтобы $\|DT_n z^{(0)}\|_{L_2(H)} \to 0$ при $n \to \infty$ возможно быстрее. Следуя работе [3], выберем итерационные параметры τ_n как функцию индекса периодической функцией с некоторым подлежащим отысканию периодом p_n (в отличие от задачи с ограниченными операторами число p_n зависит от номера итерации). Пусть последовательность целых чисел $D_n \to \infty$, $n \to \infty$ (числа D_n выберем далее). Параметры $\tau_1, \ldots, \tau_{p_n}$ и число p_n подберем так, чтобы $\forall \lambda_r \in [d, dD_n]$ нашелся хоть один индекс $j \in [1, p_n - 1]$ такой, что $m \leqslant \tau_j \lambda_r \leqslant 1/m$, где фиксированное число $m \in (0, 1)$. Оптимальное значение числа m будет выбрано далее.

Последовательность чисел $\{\tau_i\}$ подчиним условию $d = m/\tau_1 < < m/\tau_2 < \ldots < m/\tau_{p_n}$. Положим

$$m/\tau_{p_n} = dD_n. \tag{6}$$

Для каждого $\lambda_r \in [d, dD_n]$ найдется индекс $j \in [1, p_n - 1]$ такой, что $m/\tau_j \leqslant \lambda_r \leqslant m/\tau_{j+1}$, значит, $m \leqslant \tau_j \lambda_r \leqslant m\tau_j/\tau_{j+1}$. Положим $\tau_i/\tau_{i+1} = 1/m^2$ $\forall i \in [1, p_n - 1]$. Таким образом,

$$\tau_i = (m/d)\, m^{2i-2}, \quad i = 1, 2, \ldots, p_n. \tag{7}$$

Нужная последовательность параметров построена. Из неравенства (5), считая n кратным p_n, учитывая периодичность τ_i и обозначая

$$g_n(\lambda_r) = \prod_{i=1}^{p_n} [(1 - \tau_i \lambda_r)/(1 + \tau_i \lambda_r)]^2,$$

получим

$$\|DT_n z^{(0)}\|^2_{L_2(H)} \leqslant \|DT_n(P) z^{(0)}\|^2_{L_2(H)} =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r [g_n(\lambda_r)]^{n/p_n} \|z_r^{(0)}\|^2_H = I_1(n) + I_2(n), \tag{8}$$

где

$$I_1(n) = \sum_{r=1}^{D_n} \lambda_r [g_n(\lambda_r)]^{n/p_n} \|z_r^{(0)}\|^2_H,$$

$$I_2(n) = \sum_{r=D_n+1}^{\infty} \lambda_r [g_n(\lambda_r)]^{n/p_n} \| z_r^{(0)} \|_H^2.$$

В силу выбора параметров найдется $j \in [1, p_n]$ такой, что $m \leqslant \leqslant \tau_j \lambda_r \leqslant 1/m$ $\forall r \in [d, dD_n]$. Замечая, что

$$\max_{m \leqslant x \leqslant 1/m} [(1-x)/(1+x)]^2 = [(1-m)/(1+m)]^2 = h < 1$$

и учитывая неравенство $g_n(\lambda_r) \leqslant h$ для $\lambda_r \in [d, dD_n]$, получим

$$I_1(n) \leqslant h^{n/p_n} \sum_{r=1}^{D_n} \lambda_r \| z_r^{(0)} \|_H^2 \leqslant h^{n/p_n} \| Dz^{(0)} \|_{L_2(H)}^2. \tag{8'}$$

Замечая, что $g_n(\lambda_r) \leqslant 1$ $\forall r \in [D_n, \infty]$, получим

$$I_2(n) \leqslant \sum_{r=D_n+1}^{\infty} \lambda_r \| z_r^{(0)} \|_H^2. \tag{8''}$$

Выберем p_n так, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} n/p_n = \infty$. Из равенства (8) и неравенства (8′) и (8″) вытекает:

$$\lim_{n\to\infty} \| DT_n z^{(0)} \|_{L_2(H)} = 0 \quad \forall z^{(0)} \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, 1; H).$$

Оценим точнее убывание $\| DT_n z^{(0)} \|_{L_2(H)}$, учитывая, что

$$z^{(0)} \in C_0(0, 1; H) \cap C^2(0, 1; H) \subseteq D(P).$$

В этом случае $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \lambda_r^2 \| z_r^{(0)} \|_H^2 < \infty$, $\lambda_r = \pi^2 r^2$. Справедливо неравенство

$$I_2(n) \leqslant (1/\lambda_{D_n}) \sum_{r=D_n}^{\infty} \lambda_r^2 \| z_r^{(0)} \|_H^2 \leqslant 1/(dD_n^2) \| Pz^{(0)} \|_{L_2(H)}^2.$$

Таким образом, получено неравенство

$$\| DT_n z^{(0)} \|_{L_2(H)} \leqslant h^{n/p_n} \| Dz^{(0)} \|_{L_2(H)}^2 + 1/(dD_n^2) \| Pz^{(0)} \|_{L_2(H)}^2. \tag{9}$$

Выберем последовательность p_n из условия равного по порядку убывания обоих слагаемых в неравенстве (9):

$$h^{n/p_n} = m^4/D_n^2. \tag{10}$$

Учитывая равенство (7), условие (6) запишем в виде

$$D_n = (m^2)^{-p_n+1}. \tag{10'}$$

Равенства (10) и (10′) представляют собой систему функциональных уравнений относительно p_n и D_n, решая которую, находим:

$$p_n = \sqrt{n}/\alpha(m), \ \alpha(m) = \sqrt{2 \ln \frac{1}{m} \Big/ \ln \frac{1+m}{1-m}}. \tag{10''}$$

Из неравенства (9) и формул (10″) следует

$$\|DT_n z^{(0)}\|_{L_2(H)} \leqslant h^{n/(2p_n)} \left(\|Dz^{(0)}\|_{L_2(H)} + 1/(\pi m^2)\|Pz^{(0)}\|_{L_2(H)}\right) =$$

$$= \exp\left(-\beta(m)\sqrt{n}\right)\left(\|Dz^{(0)}\|_{L_2(H)} + 1/(\pi m^2)\|Pz^{(0)}\|_{L_2(H)}\right), \quad (11)$$

где

$$\beta(m) = \sqrt{2\ln(1/m)\ln[1+m)/(1-m)]}.$$

Оптимальное значение $m \in (0, 1)$ найдем из условия максимума по m функции $\beta(m)$ или из условия $\alpha(m) = 1$. Вычисления дают оптимальное значение $m_0 \cong 0.4$, $\beta_0 = \beta(m_0) \cong 1.2$, $1/\alpha(m_0) \simeq 0.7$, $m_1 \simeq 0.55$, $\beta_1 = \beta(m_1) \simeq 1.1$, $\alpha(m_1) = 1$, $p_n = \sqrt{n}$. Теорема доказана.

Замечание. Из включения $C_0(0, 1; H) \subset \overset{\circ}{W}{}_2^1(0, 1; H)$ следует:

$$\max_{0<t<1} \|z^{(n)}(t)\|_H \to 0, \quad n \to \infty.$$

В реальном вычислительном процессе по схеме (2) в результате ошибок округления будет найдена величина $\tilde{u}_n$ вместо u_n, удовлетворяющая уравнению (2) с некоторой $\tilde{f}_n$ вместо f. Чтобы оценить погрешность $z^{(n)} = u_n - \tilde{u}_n$ вычислений, надо найти оценку решения задачи (2) с $\Delta f_n = f - \tilde{f}_n$ вместо f через начальное приближение $\Delta z^{(0)} = u_0 - \tilde{u}_0$ и погрешность Δf_n правой части, т. е. оценить решение задачи ($\Delta z^{(0)}$ известно):

$$z^{(n)}(t) = S_n z^{(n-1)}(t) + \tau_n \psi_n(t), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\psi_n(t) = 2(I + \tau_n A)^{-1}(I + \tau_n P)^{-1}\Delta f_n(t)$.
Нетрудно видеть, что

$$z^{(n)}(t) = T_n \Delta z^{(0)}(t) + \sum_{j=1}^{n} \tau_j T_{n,j}\psi_j(t), \quad (12)$$

где разрешающие операторы $T_{n,j}$ определяются равенствами

$$T_{n,n} = I, \quad T_{n,j} = \prod_{i=j+1}^{n} S_i.$$

Теорема 2 (*устойчивость*). *Итерационная схема* (2) *устойчива по начальному приближению и по правой части, т. е.*

$$\|Dz^{(n)}\|_{L_2(H)} \leqslant C\left(\|D\Delta z^{(0)}\|_{L_2(H)} + \max_{i\in[1,n]}\|\Delta f_i\|_{L_2(H)}\right), \quad (13)$$

где постоянная C не зависит от n.

Доказательство. Устойчивость по начальному приближению следует из неравенства $\|DT_n\Delta z^{(0)}\|_{L_2(H)} \leqslant \|D\Delta z^{(0)}\|_{L_2(H)}$. Исследуем второе слагаемое в равенстве (12). Принимая во внимание периодичность итерационных параметров, получим равенства

$$\sum_{j=1}^{n} \tau_j T_{n,j} \psi_j = \sum_{s=0}^{n/p_n - 1} \sum_{i=1}^{p_n} \tau_i T_{n,\, i+sp_n} \psi_{i+sp_n}, \quad S_{j+kp_n} = S_j,$$

из которых, учитывая $\| T_{n,j}(A) \| \leqslant 1$, получим

$$\| T_{n,\, i+sp_n}(A)\, D T_{n,\, i+sp_n}(P)\, \psi_{i+sp_n}(t) \|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\| D \prod_{j=i+1+sp_n}^{n} S_j(P)\, \psi_{i+sp_n}(t) \right\|_H^2 =$$

$$= \left\| D \prod_{j=1+i+sp_n}^{(s+1)p_n} S_j(P) \prod_{j=1}^{(n/p_n - s - 1)p_n} S_{(s+1)p_n + j}(P)\, \psi_{i+sp_n}(t) \right\|_H^2 .$$

Принимая во внимание лемму 3 и неравенство $0 < S_j(\lambda_r) < 1$, получаем последовательно такие неравенства:

$$\| D T_{n,\, i+sp_n} \psi_{i+sp_n} \|_{L_2(H)}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r \prod_{j=i+1+sp_n}^{(s+1)p_n} S_j^2(\lambda_r) \prod_{j=1}^{n-(s+1)p_n} S_{(s+1)p_n+j}^2(\lambda_r) \| \psi_r^{(i+sp_n)} \|_H^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r \prod_{j=1}^{n-(s+1)p_n} S_j^2(\lambda_r) \| \psi_r^{(i+sp_n)} \|_H^2 =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r \left[\prod_{j=1}^{p_n} S_j^2(\lambda_r) \right]^{n/p_n - s - 1} \| \psi_r^{(i+sp_n)} \|_H^2 =$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r [g_n(\lambda_r)]^{n/p_n - s - 1} \| \psi_r^{(i+sp_n)} \|_H^2,$$

где

$$\psi_r^{(i+sp_n)} = \int_0^1 \sqrt{2} \cdot \sin(\pi r t)\, \psi_{i+sp_n}(t)\, dt \quad \forall r = 1, 2, \ldots$$

Так как $\psi_{i+sp_n} \in D(P)$, то $\sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r^2 \| \psi_r^{(i+sp_n)} \|_H^2 < \infty$. Действуя далее как в теореме 1, получаем неравенства

$$\| D T_{n,\, i+sp_n} \psi_{i+sp_n} \|_{L_2(H)}^2 \leqslant h^{n/p_n - s - 1} \times$$

$$\times \| D \psi_{i+sp_n} \|_{L_2(H)}^2 + 1/(dD_n^2) \| P \psi_{i+sp_n} \|_{L_2(H)}^2,$$

$$\| D \psi_{i+sp_n} \|_{L_2(H)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\tau_i}} \| \Delta f_n \|_{L_2(H)},$$

$$\| D \psi_{i+sp_n} \|_{L_2(H)} \leqslant \frac{2}{\sqrt{\tau_i}} \| \Delta f_n \|_{L_2(H)}.$$

Учитывая равенство (10), записываем

$$\left\| DT_{n,\,i+sp_n}\psi_{i+sp_n}\right\|_{L_2(H)} \leqslant 2\left(h^{(n/p_n-s-1)/2}\big/\sqrt{\tau_i}+\right.$$

$$\left.+\,1/(dm\tau_i)\,h^{n/(2p_n)}\right)\left\|\Delta f_{i+sp_n}\right\|_{L_2(H)}.$$

Из последнего неравенства вытекает оценка сверху второго слагаемого в формуле (12):

$$\left\| D\sum_{j=1}^{n}\tau_j T_{n,\,j}\psi_j\right\|_{L_2(H)} < \sum_{s=0}^{n/p_n-1}\sum_{i=1}^{p_n}\tau_i\left(2h^{(n/p_n-s-1)/2}\big/\sqrt{\tau_i}+\right.$$

$$\left.+\,h^{n/(2p_n)}\big/(dm\tau_i)\right)\max_{i,\,s}\left\|\Delta f_{i+sp_n}\right\|_{L_2(H)} = C_n\max_{i\in[1,\,n]}\left\|\Delta f_i\right\|_{L_2(H)},$$

где

$$C_n = 2\left(1-h^{2n/p_n}\right)/(1-h^2)\sqrt{m/d}\,(1-m^{p_n})/(1-m)+$$

$$+\,2nh^{n/(2p_n)}/(md) \leqslant 2/(1-h^2)\sqrt{m/d}/(1-m)+$$

$$+\,2\,(2/\beta\,(m))^2\exp\,(-2)/(md) = C_1.$$

Полагая $C=\max\,(1,\,C_1)$, получаем неравенство (13).

Список литературы: 1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. М., «Наука», 1967. 464 с. 2. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971. 552 с. 3. *Peaceman D. W., Rachford H. H.* The numerical solution of parabolic and elliptic differential uquations.—«J. Soc. industr. app. math.», 1955, vol. 3, No1, p. 28—42.

Поступила 24 июня 1977 г.

УДК 517.934.1

С. И. ВОВНА, Е. Н. ПОДОЛЬСКИЙ, канд. физ.-мат. наук

АВТОКОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ САМОХОДНАЯ МАШИНА — АВТОМАТ ВОЖДЕНИЯ

В работе [1] рассмотрена математическая модель самоходной колесной машины, совершающей плоско-параллельное движение. При некоторых предположениях, справедливых на практике для сельскохозяйственных машин, движущихся вдоль рабочего гона, доказано, что самоходную машину можно описать при помощи следующей кинематической схемы (рис. 1).

1. На продольной оси машины имеется точка Ф, скорость которой во все время движения направлена вдоль оси AB.

2. Скорость точки B составляет угол α с осью AB, который пропорционален углу поворота передних колес α_1. Положение

точки Ф на AB и коэффициент пропорциональности α и α_1 зависят только от коэффициентов сопротивления увода передних и задних колес и рабочих органов машины.

3. Продольная (вдоль AB) составляющая скорости любой точки машины есть постоянная величина v.

Датчиком автомата вождения является штанга CP, которая в точке C шарнирно прикреплена к машине, а в точке P отслеживает заданную кривую — в данной работе прямую, принятую за ось ox.

Автомат вождения должен по углу $\varphi(t)$ выработать угол $\alpha(t)$ (через угол поворота колес $\alpha_1(t)$ по закону

$$\alpha(t) = -k\varphi(t), \tag{1}$$

где k выбирается из условия наилучшего отслеживания заданной кривой [2].

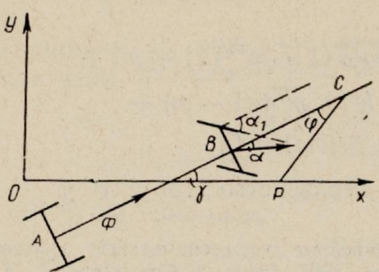

Рис. 1

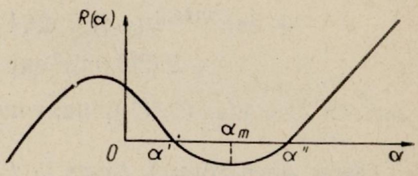

Рис. 2

Задача данной работы — строгий учет зон нечувствительности, шарнирных люфтов и временного запаздывания, приводящих к тому, что теоретический закон (1) выполняется лишь приближенно.

Обозначим через $\xi(t)$ меру отклонения от закона (1): $\xi(t) = \varphi(t) + \alpha(t)/k$. Рассматриваемая система работает следующим образом. Пока $|\xi(t)| < \delta_з + \delta_ш$, угол $\alpha(t)$ остается постоянным. Здесь $2\delta_з$ — величина зоны нечувствительности золотника, а $2\delta_ш$ — суммарный люфт в шарнирах системы автовождения (обе величины пересчитаны на угол поворота штанги копира).

При достижении величиной $\xi(t)$ значения $\delta_з + \delta_ш$ возникает сигнал правого поворота и, если в течение времени (запаздывание при включении) не возникнет сигнал окончания правого поворота

$$\xi(t) = \delta_з - \delta_ш, \tag{2}$$

то через промежуток времени Δ_1 начинается правый поворот: изменение $\alpha(t)$ по линейному закону с угловой скоростью $-c$ (если сигнал (2) возникает, то поворот не происходит). Когда в процессе поворота величина $\xi(t)$ достигает значения $\delta_з - \delta_ш$, вырабатывается сигнал окончания поворота, и через промежуток времени Δ_2 (запаздывание при выключении) правый поворот заканчивается. Аналогично (с соответствующей заменой в необходимых случаях знаков) описывается и левый поворот.

В работе [3] рассмотрен идеализированный процесс, в котором повороты осуществляются скачком. В данной работе исследуются реальные повороты с конечной угловой скоростью c.

Поступая аналогично [3], будем различать три типа возможных движений системы, описывающихся следующими системами дифференциальных уравнений:

1) правый поворот

$$\dot{\xi} = \frac{v}{l}\left(\gamma + \frac{L}{L_B}\alpha\right) - \frac{c}{k};\ \dot{\gamma} = \frac{v}{L_B}\alpha,\ \dot{\alpha} = -c;$$

2) левый поворот

$$\dot{\xi} = \frac{v}{l}\left(\gamma + \frac{L}{L_B}\alpha\right) + \frac{c}{k};\ \dot{\gamma} = \frac{v}{L_B}\alpha;\ \dot{\alpha} = c;$$

3) движение между поворотами

$$\dot{\xi} = \frac{v}{l}\left(\gamma + \frac{L}{L_B}\alpha\right);\ \dot{\gamma} = \frac{v}{L_B}\alpha,\ \dot{\alpha} = 0,$$

где l равно длине штанги CP, $L = |\Phi C| - l$, $L_B = |\Phi B|$ (рис. 1).

1. *Постановка задачи*. Рассмотрим движение машины с чередующимися правыми и левыми поворотами. Будем полагать, что после каждого n-го поворота угол α_n меняет знак.

Пусть момент времени t_n — момент выработки сигнала очередного поворота, то есть $|\xi(t_n)| = \delta_з + \delta_ш$.

Найдем связи между величинами, характеризующими движение в моменты t_n и t_{n+1}. Для определенности рассмотрим правый поворот. В соответствии с этим $\xi(t_n) = \delta_з + \delta_ш$, $\alpha(t_n) = \alpha_n > 0$.

На интервале

$$[t_n,\ t_n + \Delta_1],\ \alpha(t) = \alpha_n,\ \gamma(t) = \gamma(t_n) + \frac{v\alpha_n}{L_B}(t - t_n),$$

$$\xi(t) = \delta_з + \delta_ш + \frac{v}{l}\left(\gamma(t_n) + \frac{L}{L_B}\alpha_n\right)(t - t_n) + \frac{v^2\alpha_n}{2lL_B}(t - t_n)^2.$$

Таким образом, при $t = t_n + \Delta_1$,

$$\gamma(t_n + \Delta_1) = \gamma(t_n) + \frac{v\alpha_n}{L_B}\Delta_1 \equiv \gamma_n, \tag{3}$$

$$\xi(t_n + \Delta_1) = \delta_з + \delta_ш + \frac{v}{l}\left(\gamma_n + \frac{L - v\Delta_1}{L_B}\alpha_n\right)\Delta_1 + \frac{v^2\alpha_n}{2lL_B}\Delta_1^2. \tag{4}$$

Рассмотрим интервал $[t_n + \Delta_1,\ t_n' + \Delta_2]$, где t_n' — момент выработки сигнала окончания правого поворота, то есть $\xi(t_n') = \delta_з - \delta_ш$. На этом интервале происходит правый поворот:

$$\alpha(t) = \alpha_n - c(t - t_n - \Delta_1),\ \gamma(t) = \gamma_n + \frac{v\alpha_n}{L_B}(t - t_n - \Delta_1) -$$

$$-\frac{vc}{2L_B}(t-t_n-\Delta_1)^2,\quad \xi(t)=\xi(t_n+\Delta_1)+$$

$$+\left(\frac{v}{l}\left(\gamma_n+\frac{L}{L_B}\alpha_n\right)-\frac{c}{k}\right)(t-t_n-\Delta_1)+$$

$$+\frac{v}{2l}\left(\frac{v\alpha_n}{L_B}-\frac{Lc}{L_B}\right)(t-t_n-\Delta_1)^2-\frac{cv^2}{6lL_B}(t-t_n-\Delta_1)^3.$$

Таким образом,

$$\alpha(t_n'+\Delta_2)=\alpha_{n+1}<0,\quad t_n'+\Delta_2-t_n-\Delta_1=\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{c},$$

$$\gamma(t_n'+\Delta_2)=\gamma_n+\frac{v\alpha_n}{L_B}\cdot\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{c}-\frac{vc}{2L_B}\left(\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{c}\right)^2=$$

$$=\gamma_n+\frac{v\left(\alpha_n^2-\alpha_{n+1}^2\right)}{2cL_B},$$

$$\xi(t_n'+\Delta_2)=\xi(t_n+\Delta_1)+\left(\frac{v}{l}\left(\gamma_n+\frac{L}{L_B}\alpha_n\right)-\frac{c}{k}\right)\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{c}+$$

$$+\frac{v}{2l}\left(\frac{v\alpha_n}{L_B}-\frac{Lc}{L_B}\right)\frac{(\alpha_n-\alpha_{n+1})^2}{c^2}-\frac{cv^2}{6lL_B}\cdot\frac{(\alpha_n-\alpha_{n+1})^3}{c^3}. \tag{5}$$

На интервале $\left[t_n'+\Delta_2,\ t_{n+1}\right]$

$$\alpha(t)=\alpha_{n+1},\quad \gamma(t)=\gamma(t_n'+\Delta_2)+\frac{v\alpha_{n+1}}{L_B}(t-t_n'-\Delta_2),$$

$$\xi(t)=\xi(t_n'+\Delta_2)+\frac{v}{l}\left(\gamma(t_n'+\Delta_2)+\frac{L}{L_B}\alpha_{n+1}\right)(t-$$

$$-t_n'-\Delta_2)+\frac{v^2\alpha_{n+1}}{2lL_B}(t-t_n'-\Delta_2)^2.$$

Так как $\xi(t_{n+1})=-\delta_з-\delta_ш$, то

$$-\delta_з-\delta_ш=\xi(t_n'+\Delta_2)+\frac{v}{l}\left(\gamma_n+\frac{v\left(\alpha_n^2-\alpha_{n+1}^2\right)}{2cL_B}+\right.$$

$$\left.+\frac{L}{L_B}\alpha_{n+1}\right)(t_{n+1}-t_n'-\Delta_2)+\frac{v^2\alpha_{n+1}}{2lL_B}(t_{n+1}-t_n'-\Delta_2)^2.$$

Обозначая $\gamma(t_{n+1}+\Delta_1)$ через γ_{n+1}, аналогично (3), имеем

$$\gamma(t_{n+1})=\gamma_{n+1}-\frac{v\Delta_1}{L_B}\alpha_{n+1}=$$

$$=\gamma_n+\frac{v\left(\alpha_n^2-\alpha_{n+1}^2\right)}{2cL_B}+\frac{v\alpha_{n+1}}{L_B}(t_{n+1}-t_n'-\Delta_2).$$

Исключая из двух последних соотношений время, получим

$$0=\delta_з+\delta_ш+\xi(t_n'+\Delta_2)+\frac{v}{l}\left(\gamma_n+\frac{v\left(\alpha_n^2-\alpha_{n+1}^2\right)}{2cL_B}+\right.$$

$$+\frac{L}{L_B}\alpha_{n+1}\Big)\left[(\gamma_{n+1}-\gamma_n)\frac{L_B}{v\alpha_{n+1}}-\Delta_1-\frac{\alpha_n^2-\alpha_{n+1}^2}{2c\alpha_{n+1}}\right]+$$

$$+\frac{v^2\alpha_{n+1}}{2lL_B}\left[(\gamma_{n+1}-\gamma_n)\frac{L_B}{v\alpha_{n+1}}-\Delta_1-\frac{\alpha_n^2-\alpha_{n+1}^2}{2c\alpha_{n+1}}\right]^2,$$

или, упрощая,

$$0=\delta_з+\delta_ш+\xi\left(t_n'+\Delta_2\right)+\frac{L_B}{2l\alpha_{n+1}}\left\{\left[\gamma_n+\frac{v\left(\alpha_n^2-\alpha_{n+1}^2\right)}{2cL_B}\right]^2-\gamma_{n+1}^2\right\}+$$

$$+\frac{L-v\Delta_1}{l}\gamma_{n+1}-\frac{L}{l}\gamma_n-\frac{v\Delta_1}{lL_B}\left(L-\frac{v\Delta_1}{2}\right)\alpha_{n+1}-\frac{Lv}{2clL_B}\left(\alpha_n^2-\alpha_{n+1}^2\right). \quad (6)$$

Для исключения неизвестной величины $\xi\left(t_n'+\Delta_2\right)$ аналогично (5), запишем

$$\xi\left(t_n'\right)=\delta_з-\delta_ш=\xi\left(t_n+\Delta_1\right)+\left(\frac{v}{l}\left(\gamma_n+\frac{L}{L_B}\alpha_n\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{c}{k}\right)\left(\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{c}-\Delta_2\right)+\frac{v}{2l}\left(\frac{v\alpha_n}{L_B}-\frac{Lc}{L_B}\right)\left(\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{c}-\right.$$

$$\left.-\Delta_2\right)^2-\frac{cv^2}{6lL_B}\left(\frac{\alpha_n-\alpha_{n+1}}{c}-\Delta_2\right)^3.$$

После вычитания полученного соотношения из (5) имеем

$$\xi\left(t_n'+\Delta_2\right)=\delta_з-\delta_ш+\frac{v\Delta_2}{l}\gamma_n+\frac{v^2\Delta_2}{2clL_B}\left(\alpha_n^2-\right.$$

$$\left.-\alpha_{n+1}^2\right)+\frac{v\Delta_2}{lL_B}\left(L-\frac{v\Delta_2}{2}\right)\alpha_{n+1}-\omega, \quad (7)$$

где $\omega=\frac{c\Delta_2}{k}-\frac{Lcv\Delta_2^2}{2lL_B}+\frac{cv^2\Delta_2^3}{6lL_B}.$

Подставляя (4), (7) в (5), (6), получим два уравнения для α_{n+1} и γ_{n+1}

$$\left\{\begin{aligned}
&0=2\delta_з-\omega-\frac{L-v\Delta_2}{l}\gamma_n+\frac{L-v\Delta_1}{l}\gamma_{n+1}-\left[\frac{v\Delta_1}{lL_B}\left(L-\frac{v\Delta_1}{2}\right)-\right.\\
&\left.-\frac{v\Delta_2}{lL_B}\left(L-\frac{v\Delta_2}{2}\right)\right]\alpha_{n+1}-\frac{v\left(L-v\Delta_2\right)}{2clL_B}\left(\alpha_n^2-\alpha_{n+1}^2\right)-\\
&-\frac{L_B}{2l\alpha_{n+1}}\left\{\left[\gamma_n+\frac{v\left(\alpha_n^2-\alpha_{n+1}^2\right)}{2cL_B}\right]^2-\gamma_{n+1}^2\right\},\\
&0=2\delta_ш+\omega+\frac{v\left(\Delta_1-\Delta_2\right)}{l}\gamma_n+\frac{v\Delta_1}{lL_B}\left(L-\frac{v\Delta_1}{2}\right)\alpha_n-\\
&-\frac{v\Delta_2}{lL_B}\left(L-\frac{v\Delta_2}{2}\right)\alpha_{n+1}+\frac{v\left(L-v\Delta_2\right)}{2clL_B}\left(\alpha_n^2-\alpha_{n+1}^2\right)-\\
&-\left(\frac{1}{k}-\frac{v\gamma_n}{cl}\right)\left(\alpha_n-\alpha_{n+1}\right)+\frac{v^2\left(\alpha_n-\alpha_{n+1}\right)^2}{6lL_Bc^2}\left(2\alpha_n+\alpha_{n+1}\right).
\end{aligned}\right. \quad (8)$$

2. *Отыскание периодического решения.* Найдем симметричный периодический режим, в котором $\alpha_n \equiv \alpha = -\alpha_{n+1}$, $\gamma_n \equiv \gamma = -\gamma_{n+1}$. Для отыскания α и γ получим два уравнения

$$0 = 2\delta_з - \omega - \frac{1}{l}(2L - v(\Delta_1 + \Delta_2))\gamma +$$

$$+ \frac{v(\Delta_1 - \Delta_2)}{2lL_B}(2L - v(\Delta_1 + \Delta_2))\alpha,$$

$$0 = 2\delta_ш + \omega + \frac{v(\Delta_1 - \Delta_2)}{l}\gamma + \left[\frac{vL}{lL_B}(\Delta_1 + \Delta_2) -\right.$$

$$\left. - \frac{v^2}{2lL_B}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2)\right]\alpha - 2\left[\frac{1}{k} - \frac{v\gamma}{cl}\right]\alpha + \frac{2}{3}\frac{v^2\alpha^3}{lL_Bc^2}.$$

Отсюда γ выражается через α по формуле

$$\gamma = \frac{v(\Delta_1 - \Delta_2)}{2L_B}\alpha + Fl \quad \left(F = \frac{2\delta_з - \omega}{2L - v(\Delta_1 + \Delta_2)}\right), \tag{9}$$

а α удовлетворяет следующему кубическому уравнению

$$R(\alpha) \equiv 2\delta_ш + \omega + v(\Delta_1 - \Delta_2)F - 2\left[\frac{1}{k} - \frac{vF}{c} -\right.$$

$$\left. - \frac{Lv(\Delta_1 + \Delta_2) - v^2\Delta_1\Delta_2}{2lL_B}\right]\alpha + \frac{v^2(\Delta_1 - \Delta_2)}{clL_B}\alpha^2 + \frac{2v^2}{3lL_Bc^2}\alpha^3 = 0. \tag{10}$$

Получим теперь ряд условий, налагаемых на параметры системы и необходимых для существования симметричного режима.

Из очевидного неравенства $\gamma(t_n' + \Delta_2) > \gamma(t_{n+1})$, или

$$\gamma_n + \frac{v(\alpha_n^2 - \alpha_{n+1}^2)}{2cL_B} > \gamma_{n+1} - \frac{v\Delta_1}{L_B}\alpha_{n+1},$$

получаем для симметричного решения

$$2\gamma - \frac{v\Delta_1}{L_B}\alpha > 0.$$

Тогда из (9) следует

$$\frac{1}{2}\left(2\gamma - \frac{v\Delta_1}{L_B}\alpha\right) + \frac{v\Delta_2\alpha}{2L_B} = Fl > 0.$$

Так как в реальных условиях времена запаздывания Δ_1 и Δ_2 невелики, то ограничимся случаем

$$2L - v(\Delta_1 + \Delta_2) > 0. \tag{11}$$

Тогда необходимо, чтобы

$$2\delta_з - \omega > 0. \tag{12}$$

Рассмотрим наиболее интересный для практики случай [3]:

$$\Delta_1 \geqslant \Delta_2. \tag{13}$$

Наложим еще условие:

$$2\delta_3 + \omega + v(\Delta_1 - \Delta_2) F > 0. \tag{14}$$

Тогда как необходимое условие существования положительного корня уравнения (10) имеем

$$\frac{1}{k} - \frac{Lv(\Delta_1 + \Delta_2) - v^2 \Delta_1 \Delta_2}{2lL_B} - \frac{vF}{c} > 0. \tag{15}$$

Покажем, что из этого условия вытекает $\omega \geqslant 0$. При этом условие (14) выполняется автоматически.

По определению ω и неравенству (15)

$$\omega = c\Delta_2 \left(\frac{1}{k} - \frac{vL\Delta_2}{2lL_B} + \frac{v^2 \Delta_2^2}{6lL_B} \right) = c\Delta_2 \left(\frac{1}{k} - \right.$$

$$\left. - \frac{Lv(\Delta_1 + \Delta_2) - v^2 \Delta_1 \Delta_2}{2lL_B} - \frac{vF}{c} \right) + c\Delta_2 \left(\frac{vL\Delta_1}{2lL_B} - \right.$$

$$\left. - \frac{v^2 \Delta_1 \Delta_2}{2lL_B} + \frac{v^2 \Delta_2^2}{6lL_B} + \frac{vF}{c} \right) \geqslant c\Delta_2 \frac{v\Delta_1}{2lL_B} (L - v\Delta_2).$$

Из (11) и (13) следует

$$L - v\Delta_2 > 0, \tag{16}$$

откуда $\omega \geqslant 0$.

Из (14) и (15) следует, что график кубического многочлена $R(\alpha)$ пересекает ось ординат в точке с положительной ординатой и с наклоном вниз. Для существования положительных корней график $R(\alpha)$ должен иметь вид, изображенный на рис. 2.

Точка минимума α_m является большим корнем уравнения

$$-2\left[\frac{1}{k} - \frac{Lv(\Delta_1 + \Delta_2) - v^2 \Delta_1 \Delta_2}{2lL_B} - \frac{vF}{c} \right] +$$

$$+ \frac{2v^2(\Delta_1 - \Delta_2)}{clL_B} \alpha_m + \frac{2v^2}{lL_B c^2} \alpha_m^2 = 0. \tag{17}$$

Отсюда имеем еще одно условие существования решения: кубический многочлен при $\alpha = \alpha_m$ меньше нуля

$$R(\alpha_m) < 0 \tag{18}$$

(по причине, указанной ниже, случай $R(\alpha_m) = 0$ мы не рассматриваем).

Так как нас интересует режим движения с чередующимися правыми и левыми поворотами, то получим еще условие отсутствия двух поворотов подряд в одну и ту же сторону. Проверим прежде всего, что из полученных ранее условий следует

$$\xi(t_n' + \Delta_2) < \delta_з + \delta_ш, \tag{19}$$

т. е. во время первого правого поворота не возникнет новый сигнал правого поворота.

Действительно, для предельного решения из (7) получим, что (19) можно переписать в виде

$$2\delta_ш + \omega - \frac{v\Delta_2}{l}\gamma + \frac{v\Delta_2}{lL_B}\left(L - \frac{v\Delta_2}{2}\right)\alpha > 0.$$

Левая часть этого неравенства с помощью (9) приводится к виду

$$2\delta_ш + c\Delta_2\left(\frac{1}{k} - \frac{vF}{c} - \frac{Lv\Delta_2}{2lL_B} + \frac{v^2\Delta_2^2}{6lL_B}\right) +$$

$$+ \frac{v\Delta_2}{lL_B}\left(L - \frac{v\Delta_1}{2}\right)\alpha = 2\delta_ш + c\Delta_2\left(\frac{1}{k} - \frac{Lv(\Delta_1 + \Delta_2) - v^2\Delta_1\Delta_2}{2lL_B} -\right.$$

$$\left. - \frac{vF}{c}\right) + c\Delta_2\left(\frac{v^2\Delta_2^2}{6lL_B} + \frac{v\Delta_1}{2lL_B}(L - v\Delta_2)\right) + \frac{v\Delta_2}{lL_B}\left(L - \frac{v\Delta_1}{2}\right)\alpha.$$

В силу неравенств (15), (16), (11) все слагаемые неотрицательны.

Условие отсутствия второго правого поворота: при $t_n' + \Delta_2 < t < t_{n+1}$ или $\xi(t) < \delta_з + \delta_ш$, или в некоторый момент $t_{сн}$ сигнал правого поворота вырабатывается, но в момент $t_{ск} < t_{сн} + \Delta_1$ вырабатывается сигнал окончания поворота.

Как показывают вычисления, это условие можно записать в следующем виде:

$$\frac{v}{lL_B}(L_B\gamma - L\alpha) < \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2v^2\alpha}{lL_B}G} & \left(N \equiv \dfrac{v^2\alpha\Delta_1}{2lL_B} - \dfrac{2\delta_ш}{\Delta_1} \leqslant 0\right) \\ \sqrt{\left(\dfrac{v^2\alpha\Delta_1}{2lL_B} - \dfrac{2\delta_ш}{\Delta_1}\right)^2 + \dfrac{2v^2\alpha}{lL_B}G} & (N > 0), \end{cases} \tag{20}$$

где

$$G = 2\delta_ш + \omega - \frac{v\Delta_2}{l}\gamma + \frac{v\Delta_2}{lL_B}\left(L - \frac{v\Delta_2}{2}\right)\alpha.$$

При выполнении (13), (11) условия (12), (15), (18), (20) являются также и достаточными для существования двух периодических симметричных решений. Исследуем эти решения на устойчивость.

Заметим, что условия (12), (15), (18), (20) имеют форму строгих неравенств (именно для этой цели в (18) вместо $\leqslant 0$ взято < 0), что гарантирует существование близких к периодическим решений с чередующимися поворотами (по крайней мере, для того решения, которое окажется устойчивым).

3. *Исследование устойчивости.* Заменяя в уравнениях (8) α_n, γ_n на $|\alpha_n|$, $|\gamma_n|$, а α_{n+1}, γ_{n+1} соответственно на $-|\alpha_{n+1}|$, $-|\gamma_{n+1}|$, получим уравнения (на которые будем в дальнейшем ссылаться под тем же номером), описывающие переход от левого поворота к правому. Поэтому, в соответствии с методом точечных отображений (например, [4]), уравнения (8) определяют отображение

точки $(|\alpha_n|, |\gamma_n|)$ плоскости $|\xi| = \delta_з + \delta_ш$ в точку $(|\alpha_{n+1}|, |\gamma_{n+1}|)$ той же плоскости. А каждая из двух найденных в предыдущем пункте точек (α, γ) является неподвижной точкой этого преобразования. При этом условием локальной устойчивости неподвижной точки, то есть условием устойчивости автоколебаний системы является условие устойчивости матрицы

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial|\alpha_{n+1}|}{\partial|\alpha_n|} & \dfrac{\partial|\alpha_{n+1}|}{\partial|\gamma_n|} \\ \dfrac{\partial|\gamma_{n+1}|}{\partial|\alpha_n|} & \dfrac{\partial|\gamma_{n+1}|}{\partial|\gamma_n|} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

вычисленной в предельной точке (α, γ) — при $|\alpha_{n+1}| = |\alpha_n| = \alpha$, $|\gamma_{n+1}| = |\gamma_n| = \gamma$.

Если же хоть одно из собственных значений этой матрицы по модулю больше единицы, то периодическое движение неустойчиво.

Вычисляя частные производные в точке (α, γ) с помощью уравнений (8), получим

$$\frac{\partial|\alpha_{n+1}|}{\partial|\alpha_n|} = \frac{1}{Z_1}\left\{-\frac{1}{k} + \frac{v\gamma}{cl} + \frac{v\Delta_1}{lL_B}\left(L - \frac{v\Delta_1}{2}\right) + \frac{v\alpha}{clL_B}(L - v\Delta_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{2v^2\alpha^2}{lL_Bc^2}\right\}, \quad \frac{\partial|\alpha_{n+1}|}{\partial|\gamma_n|} = \frac{1}{Z_1}\frac{v}{l}\left(\frac{2\alpha}{c} + \Delta_1 - \Delta_2\right),$$

$$\frac{\partial|\gamma_{n+1}|}{\partial|\alpha_n|} = \frac{\alpha}{Z_2}\left\{\frac{v\gamma}{c} - \frac{v\alpha}{cL_B}(L - v\Delta_2) + \frac{\partial|\alpha_{n+1}|}{\partial|\alpha_n|}W\right\},$$

$$\frac{\partial|\gamma_{n+1}|}{\partial|\gamma_n|} = \frac{1}{Z_2}\left\{L_B\gamma - (L - v\Delta_2)\,\alpha + \alpha\frac{\partial|\alpha_{n+1}|}{\partial|\gamma_n|}W\right\},$$

где

$$Z_1 = \frac{1}{k} - \frac{v\gamma}{cl} - \frac{v\Delta_2}{lL_B}\left(L - \frac{v\Delta_2}{2}\right) + \frac{v\alpha}{clL_B}(L - v\Delta_2),$$

$$Z_2 = L_B\gamma + (L - v\Delta_1)\,\alpha,$$

$$W = \frac{v\Delta_1}{L_B}\left(L - \frac{v\Delta_1}{2}\right) - \frac{v\Delta_2}{L_B}\left(L - \frac{v\Delta_2}{2}\right) + \frac{v\alpha}{cL_B}(L - v\Delta_2) - \frac{v\gamma}{c}.$$

Необходимым и достаточным условием устойчивости матрицы второго порядка (21) являются неравенства $|D| < 1$,

$$\left|\frac{Sp}{D+1}\right| < 1, \tag{22}$$

где D — определитель матрицы, Sp — ее след.

Имеем

$$D = -\frac{1}{Z_1Z_2}[L_B\gamma - (L - v\Delta_2)\,\alpha]\left[\frac{1}{k} - \frac{v\gamma}{cl} - \right.$$

$$\left. - \frac{v\Delta_1}{lL_B}\left(L - \frac{v\Delta_1}{2}\right) - \frac{v\alpha}{clL_B}(L - v\Delta_1)\right].$$

Так как в силу (9)

$$Z_2 = \left(L - \frac{v(\Delta_1 + \Delta_2)}{2}\right)\alpha + lL_B F,$$

$$Z_1 = \frac{v\alpha}{2clL_B}(2L - v(\Delta_1 + \Delta_2)) + \left(\frac{1}{k} - \frac{vF}{c} - \right.$$

$$\left. - \frac{Lv(\Delta_1 + \Delta_2) - v^2\Delta_1\Delta_2}{2lL_B}\right) + \frac{v(\Delta_1 - \Delta_2)(L - v\Delta_2)}{2lL_B},$$

то в соответствии с (11), (12), (13), (16) знаменатель D положителен. Поэтому условие $|D| < 1$ сводится к следующей системе неравенств:

$$\frac{v\alpha}{lL_B}\left(L - \frac{v(\Delta_1 + \Delta_2)}{2}\right)^2\left(\frac{2\alpha}{c} + \Delta_1 - \Delta_2\right) + 2lL_B F\left(\frac{1}{k} - \frac{vF}{c} - \right.$$

$$\left. - \frac{Lv(\Delta_1 + \Delta_2) - v^2\Delta_1\Delta_2}{2lL_B}\right) + \frac{v^2F}{2}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 - 2\Delta_1\Delta_2) > 0,$$

$$\left(L - \frac{v(\Delta_1 + \Delta_2)}{2}\right)\left[2\alpha\left(\frac{1}{k} - \frac{vF}{c} - \frac{Lv(\Delta_1 + \Delta_2) - v^2\Delta_1\Delta_2}{2lL_B}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{v^2\alpha}{2lL_B}(\Delta_1^2 + \Delta_2^2 - 2\Delta_1\Delta_2) + vF\left(\frac{2\alpha}{c} + \Delta_1 - \Delta_2\right)\right] > 0.$$

Эта система неравенств выполняется для каждого из решений (α, γ).

Условие (22) приводит к таким неравенствам

$$-2\alpha\left(L - \frac{v(\Delta_1 + \Delta_2)}{2}\right)\left[\frac{2v^2}{c^2lL_B}\alpha^2 + \frac{2v^2(\Delta_1 - \Delta_2)}{clL_B}\alpha - \right.$$

$$\left. - 2\left(\frac{1}{k} - \frac{vF}{c} - \frac{Lv(\Delta_1 + \Delta_2) - v^2\Delta_1\Delta_2}{2lL_B}\right)\right] > 0,$$

$$\left(L - \frac{v(\Delta_1 + \Delta_2)}{2}\right)\left(\frac{2\alpha}{c} + \Delta_1 - \Delta_2\right)\left(\frac{2v^2\alpha^2}{clL_B} + 2F + \frac{v\alpha(\Delta_1 - \Delta_2)}{lL_B}\right) > 0.$$

Второе неравенство в силу условий (11), (12), (13) выполнено для обоих положительных корней уравнения (10). Левая часть первого неравенства при $\alpha = \alpha_m$ (рис. 2) обращается в нуль, и поэтому первое неравенство выполнено для меньшего корня α'. Для большего корня $Sp/(D+1) > 1$, следовательно, периодическое решение, определяемое корнем α'', является неустойчивым.

Таким образом, в системе устанавливаются устойчивые автоколебания. Амплитуда колебаний угла α равняется корню α'. Нетрудно проверить, что амплитуда колебаний угла γ достигается при $t = t_n + \Delta_1 + \frac{\alpha}{c}$ и равна

$$\gamma_{\max} = \gamma + \frac{v\alpha^2}{2cL_B}, \tag{23}$$

где γ определяется через α' из уравнения (9), а период колебаний T выражается формулой

$$T = 2\left(\frac{2L_B\gamma}{v\alpha} + \frac{2\alpha}{c}\right). \tag{24}$$

4. *Асимптотика быстрых поворотов.* Для практики наиболее интересен случай большой угловой скорости c. Рассмотрим асимптотику решения при $c \to \infty$, считая, что при этом $c\Delta_2$ остается конечным, ибо в противном случае нарушилось бы условие (12), что практически привело бы к возникновению во время правого поворота сигнала левого поворота, то есть правые и левые повороты следовали бы друг за другом без паузы, независимо от отслеживаемой кривой.

Положим $c\Delta_2 = \omega_0 k$. Тогда

$$\omega = \omega_0 - \frac{1}{c}\frac{Lv\omega_0^2k^2}{2lL_B} + \frac{1}{c^2}\frac{v^2\omega_0^3k^3}{6lL_B},$$

$$F = F_0 + \frac{F_1}{c} + \frac{F_2}{c^2} + \ldots,$$

где

$$F_0 = \frac{2\delta_з - \omega_0}{2L - v\Delta_1},$$

$$F_1 = \frac{v\omega_0 k\left(2\delta_з - \omega_0\right)}{\left(2L - v\Delta_1\right)^2} - \frac{Lv\omega_0^2k^2}{2lL_B\left(2L - v\Delta_1\right)}$$

и т. д.

Находя α в виде

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{c} + \frac{\alpha_2}{c^2} + \ldots, \tag{25}$$

получим (ограничиваясь двумя первыми членами)

$$\alpha_0 = \frac{2\delta_ш kL + kv\Delta_1\left(\delta_3 - \delta_ш\right) + \omega_0 k\left(L - v\Delta_1\right)}{\left(L - \frac{v\Delta_1}{2}\right)\left(2 - \frac{Lv\Delta_1 k}{lL_B}\right)},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{Lv\Delta_1}{2lL_B}\right)^{-1}\left\{-\frac{Lv\omega_0^2k^2}{2lL_B} + v\Delta_1 F_1 - \right.$$

$$\left. - v\omega_0 kF_0 + 2\alpha_0\left(\frac{\omega_0 kv}{2lL_B}\left(L - v\Delta_1\right) + vF_0\right) + \frac{v^2\Delta_1}{lL_B}\alpha_0^2\right\}.$$

Из уравнений (9), (23) и (24) имеем

$$\gamma_{\max} = \gamma_0 + \frac{1}{c}\left(\gamma_1 + \frac{v\alpha_0^2}{2L_B}\right) + 0\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

$$T = 4\left[\frac{L_B\gamma_0}{v\alpha_0} + \frac{1}{c}\left(\frac{L_B}{v\alpha_0}\left(\gamma_1 - \frac{\alpha_1\gamma_0}{\alpha_0}\right) + \alpha_0\right)\right] + 0\left(\frac{1}{c^2}\right),$$

где

$$\gamma_0 = \frac{v\Delta_1}{2L_B}\alpha_0 + l\frac{2\delta_з - \omega_0}{2L - v\Delta_1}, \quad \gamma_1 = lF_1 + \frac{v\Delta_1\alpha_1 - vw_0k\alpha_0}{2L_B}.$$

Отметим, что α в формуле (25) соответствует меньшему, устойчивому, корню уравнения (10). Второй корень, соответствующий неустойчивому режиму, уходит при $c \to \infty$ на бесконечность.

Найденные α, γ, T позволяют найти форму автоколебаний и другие интересующие нас величины, в частности, отклонение любой точки машины от отслеживаемой прямой.

Сравнение с результатами работы [3] показывает, что (в сопоставимых обозначениях) нулевое приближение α_0, γ_0 совпадает с полученным в [3] решением для случая поворотов скачком.

Таким образом, данная работа позволяет уточнить найденное в [3] периодическое решение и доказывает устойчивость полученных автоколебаний.

Список литературы. 1. *Синяков В. А.* Обоснование кинематической модели автомата вождения.— «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1978, вып. 43, с. 11—15. 2. *Кашурко А. С., Подольский Е. Н., Синяков В. А.* Выбор оптимальных параметров автомата вождения самоходной корнеуборочной машины КС-6.— В кн.: Электроприборы для испытаний, исследований и эксплуатационного контроля сельскохозяйственных машин. Материалы первого всесоюз. совещ. М., 1977, с. 91—96. 3. *Вовна С. И., Кашурко А. С., Подольский Е. Н., Синяков В. А.* Влияние зон нечувствительности, люфтов и запаздывания на работу автомата вождения самоходной машины.— «Вестн. Харьк. ун-та. Прикладная математика и механика», 1977, вып. 42, с. 27—36. 4. *Неймарк Ю. И.* Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний. М., «Наука», 1972. 471 с.

Поступила 14 января 1978 г

УДК 583.3:532:538.4

В. И. ЕРМАКОВ

РАВНОВЕСИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕЙ И НЕПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТЕЙ МЕЖДУ ДВУМЯ ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ СЛАБОИСКРИВЛЕННЫМИ ЗАРЯЖЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Рассматривается задача об определении равновесной формы границы раздела идеально проводящей и диэлектрической жидкостей, находящихся в электрическом и гравитационном полях, и исследуется ее устойчивость.

Постановка задачи. Пусть область $\Omega_1 = \{-\infty < x,\ z < \infty,\ F_1(x, z) \leqslant y \leqslant F(x, z, t)\}$ занята непроводящей жидкостью с плотностью ρ_1 и проницаемостью ε, а область $\Omega_2 = \{-\infty < x,\ z < \infty,\ F(x, z, t) \leqslant y \leqslant F_2(x, z)\}$ заполнена жидким проводником с плотностью ρ_2 (см. рис. 1). Здесь F_1 и F_2 — известные функции, а $y = F$ — уравнение, описывающее заранее неизвестную и подлежащую определению форму границы раздела жидкости.

Электрическое поле $\vec{E}$ в системе создается внешним источником, который поддерживает постоянную разность потенциалов U между идеально проводящими поверхностями $y = F_2$ и $y = F_1$.

Поскольку Ω_2, занимаемая идеально проводящей жидкостью, граничит с поверхностью $y = F_2$, то в Ω_2 потенциал электрического поля постоянен и равен U. В области Ω_1 потенциал электрического поля Φ должен удовлетворять уравнению Лапласа, а на границе Ω_1 условиям

$$\Phi(x,\ F(x,\ z,\ t),\ z) = U; \tag{1}$$

$$\Phi(x,\ F_1(x,\ z),\ z) = 0. \tag{2}$$

На границе раздела $y = F$, кроме того, должно выполняться условие [1, 2]

$$\frac{\varepsilon E^2}{2} - \left[\rho \frac{\partial \psi}{\partial t}\right] - \left[\rho \left(\frac{V^2}{2} - V_n^2\right)\right] - [\rho] g F - 2\gamma\varkappa = C, \tag{3}$$

где через $[H]$ обозначен скачок величины H на поверхности раздела $[H] \equiv H_2 - H_1$; $\vec{n}$ — нормаль к поверхности; $\varkappa$ — ее средняя кривизна; ψ_i — потенциал скорости $\vec{V}_i$ в области Ω_i; g — ускорение силы тяжести; γ — коэффициент поверхностного натяжения; C — некоторая функция времени.

В дальнейшем перейдем к безразмерным переменным, взяв в качестве характерных величин среднюю глубину диэлектрика h и U/h для электрического поля. Обозначения для новых переменных сохраним прежние, а безразмерные параметры суть: $b = \varepsilon U^2/\gamma h$, $B = B_1 - B_2$, $B_i = \rho_i g h^2/\gamma$.

Уравнения равновесия. Для определения формы поверхности раздела сред необходимо найти потенциал электрического поля как решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω_1 с неизвестной границей $y = F(x, z)$ при условиях (1, 2) и так, чтобы вдоль этой границы выполнялось следующее из (3) нелинейное соотношение:

$$b(\nabla\Phi)^2/2 + BF - 2\varkappa = C. \tag{4}$$

Следует отметить, что поставленная задача эквивалентна задаче об определении формы свободной поверхности жидкости при стационарном течении ее по неровному дну [3, 4]. Для решения этой задачи могут быть применены методы, предложенные М. А. Лаврентьевым [5]. При некоторых предположениях относительно характера границ области Ω_1 эти методы позволяют свести задачу к решению некоторого нелинейного дифференциального уравнения.

В настоящей работе используется метод разложения по малому параметру. В качестве малого параметра выбрано число μ, характеризующее величину максимального отклонения функции F_1 от своего среднего значения $h_1 = 0$: $F_1 = \mu f$, $f = 0(1)$. Представим искомые величины в виде $F = 1 + \eta = 1 + \mu\eta_1 + \mu^2\eta_2 + \ldots$; $\Phi = y + \varphi = y + \mu\varphi_1 + \mu^2\varphi_2 + \ldots$; $C = B + \frac{b}{2} + c = B + \frac{b}{2} + \mu c_1 + \mu^2 c_2 + \ldots$

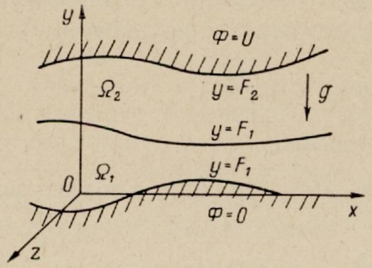

Рис. 1

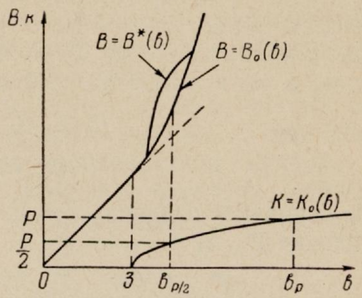

Рис. 2

Нахождение первого приближения сводится к определению в области $\Omega_0 = \{0 \leqslant y \leqslant 1, \ -\infty < x, \ z < \infty\}$ гармонической функции φ_1, удовлетворяющей на границе Ω_0 условиям

$$\varphi_1|_{y=0} = -f; \quad \left(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2} - b\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} + B\varphi_1\right)\Bigg|_{y=1} = 0. \tag{5}$$

Форму поверхности раздела в первом приближении получаем после определения φ_1 согласно равенству

$$\eta_1 = -\varphi_1|_{y=1}. \tag{6}$$

Определив потенциал в области Ω_1, можно найти поле $\vec{E} = -\nabla\Phi$ внутри диэлектрика и плотность распределения электрических зарядов на поверхности $y = F_1$: $\vartheta = -1 - \mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\Big|_{y=0}$ и на поверхности раздела $y = F$: $\vartheta = 1 + \mu\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\Big|_{y=1}$.

Устойчивость равновесия. Для бесконечно малых возмущений $\zeta = \zeta(x, z, t)$ равновесной поверхности раздела и возмущений ψ_1', ψ_2', $\Phi'(x, y, z, t)$ равновесных потенциалов скоростей и электрического поля из (1—4) имеем $\Delta\psi_i' = 0$; $(\vec{r} \in \Omega_i, \ i = 1, \ 2)$; $\partial\psi_i'/(\partial y) - \nabla\psi_i'\nabla F_i = 0$ при $y = F_i$; $\partial\psi_i'/(\partial y) - \nabla\psi_i'\nabla F = \partial\zeta/(\partial t)$ при $y = F$;

$$\Delta\Phi' = 0; \quad (\vec{r} \in \Omega_1); \tag{7}$$

$$\left(\Phi' + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\zeta\right)\Bigg|_{y=F} = 0; \quad \Phi'|_{y=F_1} = 0; \quad \left(B_1\frac{\partial\psi_1'}{\partial t} - B_2\frac{\partial\psi_2'}{\partial t} + b\nabla\Phi\nabla\Phi' + \right.$$

$$+ b\nabla\Phi\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial y}\zeta\Big)\Big|_{y=F} + B\zeta - L(\zeta) = C'; \quad L(\zeta) = (1 + F_x^2 +$$

$$+ F_z^2)^{-3/2}\{\zeta_{xx}(1 + F_z^2) - 2\zeta_{xz}F_xF_z + \zeta_{zz}(1 + F_x^2) +$$

$$+ 2\zeta_x(F_{zz}F_x - F_{xz}F_z) + 2\zeta_z(F_{xx}F_z - F_{xz}F_x) - 3(F_{xx}(1 + F_z^2) -$$

$$- 2F_xF_zF_{xz} + F_{zz}(1 + F_x^2))(F_x\zeta_x + F_z\zeta_z)(1 + F_x^2 + F_z^2)^{-1}\}.$$

Возмущение ζ должно удовлетворять условию сохранения объема области Ω_1, которое можно записать как $\bar{\zeta} = 0$, где черта над некоторым H обозначает его среднее значение:

$$\overline{H} = \lim_{l\to\infty}\frac{1}{4l^2}\int_{-l}^{l}\int_{-l}^{l} H dx dz.$$

Очевидно, равновесие будет устойчивым, если возмущения ζ, Φ', ψ_1', ψ_2' не нарастают со временем. Выпишем систему, определяющую вид наиболее опасных возмущений в случае наступления так называемого [6] кризиса монотонной неустойчивости. Для этого решение системы (7) будем искать в виде $\{\zeta, \Phi_1', \psi_1', \psi_2', C'\} = \{\zeta^*, \Phi^*, \psi_1^*, \psi_2^*, C^*\} e^{\omega t}$ и затем, следуя [6], положим $\omega = 0$. Тогда из (7) получаем $\psi_i^* = \mathrm{const}_i$, а для Φ^*, ζ^* и C^* имеем следующую краевую задачу: $\Delta\Phi^* = 0$;

$$\left(\Phi^* + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\zeta^*\right)\Big|_{y=F} = 0; \ \Phi^*|_{y=F_1} = 0;$$

$$b\nabla\Phi\left(\nabla\Phi^* + \zeta^*\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)\Big|_{y=F} + B^*\zeta^* - L(\zeta^*) = C^*; \quad \bar{\zeta}^* = 0. \tag{8}$$

При $\mu = 0$, т. е. когда границы Ω_1 плоские, задача (8) имеет следующее нетривиальное решение [2, 7]: $\Phi_0 = -\zeta_0 \,\mathrm{Sh}\, ky/\mathrm{Sh}\, k$, $\zeta_0 = \sin\vec{k}(\vec{r} + \vec{r}_0)$, $C_0 = 0$, где $\vec{k}$ — волновой вектор возмущений. Направление $\vec{k}$ и сдвиг по фазе $\vec{r}_0$ могут быть произвольными. Волновое число k_0 наиболее опасных возмущений определяется из уравнения $b(\mathrm{Sh}\,2k - 2k) = 2k\,\mathrm{Sh}^2 k$ при $b > 3$ и равно нулю при $b \leqslant 3$. Критическое значение числа Бонда $B_0 = -k_0^2 + bk_0 \,\mathrm{Cth}\, k_0$. На рис. 2 приведен график k_0 и B_0 в зависимости от значений b. Область устойчивости D_0 поверхности раздела лежит выше кривой $B = B_0(b)$.

При $\mu \neq 0$ решение системы (8) отыскиваем в виде $\Phi^* = \Phi_0 + \mu\Phi_1 + \mu\Phi_2 + \ldots$, $\zeta^* = \zeta_0 + \mu\zeta_1 + \mu^2\zeta_2 + \ldots$, $B^* = B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 + \ldots$, $C^* = \mu C_1 + \mu^2 C_2 + \ldots$. Тогда для следующего приближения имеем задачу

$$\Delta\psi_1 = 0; \quad (\vec{r} \in \Omega_0); \quad \Phi_1(1) + \zeta_1 = \zeta_0(\eta_1 k\,\mathrm{Cth}\,k - \varphi_{1y}(1));$$

$$\Phi_1(0) = \zeta_0 f_1 k\,\mathrm{Sh}^{-1}k; \quad b\Phi_{1y}(1) + B_0\zeta_1 - \Delta\zeta_1 - C_1 =$$

$$= b\zeta_0(k\,\mathrm{Cth}\,k\varphi_{1y}(1) - \varphi_{1yy}(1) + k^2\eta_1) - b\nabla\zeta_0\nabla\eta_1 - B_1\zeta_0. \tag{9}$$

Умножим граничные условия (9) на ζ_0 и проведем усреднение. Применяя формулу Грина, исключим из рассмотрения Φ и ζ_1. Получаем: $B_1 = b\overline{N\zeta_0}$;

$$N = \zeta_0 \{2k \operatorname{Cth} k\varphi_{1y}(1) - \varphi_{1yy}(1) - \eta_1 k^2 (\operatorname{cth}^2 k - 1) - \\ - k^2 \operatorname{sh}^{-2} kf\} - \nabla\zeta_0 \nabla\eta_1. \qquad (10)$$

Периодический электрод. Рассмотрим частный случай, когда $f = \sin px$. Тогда решением задачи (5) будут

$$\varphi_1 = [A \operatorname{Sh} py + \operatorname{Sh} p(1 - y)]/\operatorname{Sh} p; \quad \eta_1 = Af, \qquad (11)$$

где $A = -bp/\operatorname{Sh} p\,(B + p^2 - bp \operatorname{Cth} p)$.

Решение (11) в первом приближении описывает равновесие, если значения параметров B, b и p таковы, что амплитуда $A \leqslant 1$.

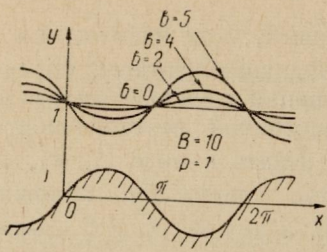

Рис. 3

Исследуем устойчивость этого решения, воспользовавшись (10). При этом исключим из рассмотрения случай своеобразного резонанса, когда частота наиболее опасных в нулевом приближении возмущений совпадает с p. Рассматриваемые значения параметра b для этого должны быть вдали от $b_p = 4\operatorname{Sh}^2 p/(\operatorname{Sh} 2p - 2p)$, так как для граничных точек области D_0 при стремлении b к b_p амплитуда A неограниченно возрастает. Вычисления согласно (10) дают

$$B_1 = \begin{cases} 0 & \text{при } \vec{k} \neq \vec{p}/2 \\ M \sin \vec{p}\vec{r}_0 & \text{при } \vec{k} = \vec{p}/2, \end{cases}$$

где

$$M = -\frac{bp^2}{16}\left\{\frac{4b\,(1 + \operatorname{Cth}^2 p/2 + 4\operatorname{Cth} p/2 \operatorname{Cth} p)}{3p - 4b \operatorname{Cth} p + 2b \operatorname{Cth} p/2} + \frac{3}{\operatorname{Sh}^2 p/2}\right\}.$$

В отличие от нулевого, в первом приближении проявляется зависимость от направления $\vec{k}$ и сдвига по фазе $\vec{r}_0$. Для абсолютной устойчивости нужно выбрать те значения $\vec{k}$ и $\vec{r}_0$, для которых $B^* = B_0(k, b) + \mu B_1(\vec{k}, b, \vec{r}_0)$ будет максимальным. Соответствующая кривая $B = B^*(b)$ (рис. 2) ограничивает снизу область D_1 устойчивости волнистой поверхности раздела, (11). Поскольку D_1 содержится в D_0, где $A < 0$, то устойчивыми могут быть только те равновесные конфигурации поверхности раздела, которые имеют впадину над возвышенностью дна, как показано на рис. 3.

В заключение автор благодарит И. Е. Тарапова и И. И. Иевлева за оказанное внимание к работе.

Список литературы: 1. *Тарапов И. Е.* Некоторые вопросы гидростатики намагничивающихся и поляризующихся сред.— «Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа», 1974, № 5, с. 141—144. 2. *Ермаков В. И.* Об устойчивости границы раздела двух диэлектрических жидкостей в электрическом поле.— «Магнитная гидродинамика», 1976, № 4, с. 85—89. 3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Проблемы гидродинамики и их математические модели. М., «Наука», 1973. 234 с. 4. *Моисеев Н. Н., Тер-Крикоров А. М.* Исследование движения тяжелой жидкости при скоростях, близких к критической.— «Тр. МФТИ», 1959, № 3, с. 25—59. 5. *Лаврентьев М. А.* О некоторых краевых задачах для систем эллиптического типа.— «Сиб. мат. журн.», 1962, т. 3, № 5, с. 715—728. 6. Гидромеханика невесомости. М., «Наука», 1976. 504 с. Авт.: *В. Г. Бабский, Н. Д. Копачевский, А. Д. Мышкис* и др. 7. *Taylor G. A., McEwan A. D.* The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field.— «J. fluid mech.», 1965, vol. 22, No 1, p. 1—15.

Поступила 14 декабря 1977 г.

УДК 517.919.2

А. П. ПРИХОДЬКО

О МНОЖЕСТВАХ ДОСТИЖИМОСТИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим геометрические свойства множеств достижимости линейного управляемого процесса в случае, если фазовое пространство X и пространство управлений U банаховы. Обозначим $[U, X]$ пространства линейных ограниченных операторов, действующих из U в X.

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + v(t), \tag{1}$$

где $A(t) \in [X, X]$ при каждом $t \geqslant t_0$ и

$$\begin{gathered} A(\cdot) \in L_1^{\mathrm{loc}}([t_0, +\infty), [X]), [X] = [X, X]; \\ B(t) \in [U, X] \text{ при } t \geqslant t_0; \\ B(\cdot) \in L_p^{\mathrm{loc}}([t_0, +\infty), [U, X]) \text{ при } p \geqslant 1; \end{gathered} \tag{1.1}$$

$u(t)$ — сильно измеримая функция из U; $u(\cdot) \in L_{p'}^{\mathrm{loc}}([t_0, +\infty), U)$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right)$, $v(\cdot) \in L_1^{\mathrm{loc}}([t_0, +\infty), X)$. Тогда решение уравнения (1), исходящее из x_0, существует единственно и представляется при $t \geqslant t_0$ формулой Коши

$$x(t, u) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau)[B(\tau)u(\tau) + v(\tau)]d\tau, \tag{2}$$

где $\Phi(t, \tau)$ — разрешающий оператор однородного уравнения [3] $dx/dt = A(t)x$. Если на управления налагаются ограничения $u(\cdot) \in \tilde{\Omega}$, где $\tilde{\Omega} \subset L_{p'}^{\mathrm{loc}}([t_0, +\infty), U)$, то множеством достижимости уравнения (1) за время $t \geqslant t_0$ при ограничениях $\tilde{\Omega}$ называют $K(\tilde{\Omega}, x_0, t_0, t) = \{x(t, u)$, если $u(\cdot) \in \tilde{\Omega}\}$. Очевидно, выпуклость, замкнутость, слабая компактность и слабая замкнутость множества инварианты относительно сдвига, поэтому, не нарушая общности, будем рассматривать множество достижимости $K(\tilde{\Omega}, t)$ при $x_0 = 0$, $v(\tau) = 0$.

Теорема 1. *Замыкание множества достижимости уравнения (1) — выпукло.*

Доказательство. Пусть $x_1, x_2 \in \overline{K}(\tilde{\Omega}, t)$; покажем, что для каждого $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \overline{K}(\tilde{\Omega}, t)$.

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ такие, что $\| x_i - \hat{x}_i \| \leqslant \varepsilon$; $\hat{x}_i \in K(\tilde{\Omega}, t)$, $i=1, 2$. Для них имеют место равенства $\hat{x}_i = \int\limits_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) u_i(\tau) d\tau$. Далее введем банахово пространство $\tilde{X} = X \times X$ с нормой $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$ и воспользуемся обобщением леммы А. А. Ляпунова [1].

В пространстве $\tilde{X}$ рассмотрим следующую меру:

$$F(e) = \begin{pmatrix} \int\limits_{e} \Phi(t, \tau) B(\tau) u_1(\tau) d\tau \\ \int\limits_{e} \Phi(t, \tau) B(\tau) u_2(\tau) d\tau \end{pmatrix},$$

где e измеримое множество из $[t_0, t]$. $F(e)$ имеет ограниченную вариацию

$$\operatorname{Var} F \leqslant \max \left\{ \begin{matrix} \int\limits_{t_0}^{t} \| \Phi(t, \tau) B(\tau) u_1(\tau) \| d\tau \\ \int\limits_{t_0}^{t} \| \Phi(t, \tau) B(\tau) u_2(\tau) \| d\tau \end{matrix} \right\}$$

и неатомическая, так как интеграл Бохнера абсолютно непрерывен [2]. По выбору $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ имеем $\left\| F(J) - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$, где $J = [t_0, t]$. Теперь заметим, что замыкание образа F выпуклое множество, поэтому для каждого $\lambda \in [0, 1]$ существует измеримое множество $D_{\lambda, \varepsilon} \subset J$, $mD_{\lambda, \varepsilon} = \lambda mJ$ такое, что $\left\| F(D_{\lambda, \varepsilon}) - \lambda \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$.

Заметим также, что $\left\| F(J \setminus D_{\lambda,\varepsilon}) - (1-\lambda)\begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix} \right\| < \varepsilon$. Тогда для управления

$$u_{\lambda,\varepsilon}(\tau) = \begin{cases} u_1(\tau) : \tau \in D_{\lambda,\varepsilon} \\ u_2(\tau) : \tau \in J \setminus D_{\lambda,\varepsilon} \end{cases}$$

имеет место следующая оценка:

$$\left\| \lambda \hat{x}_1 + (1-\lambda)\hat{x}_2 - \int_J \Phi(t, \tau) B(\tau) u_{\lambda,\varepsilon}(\tau)\, d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \left\| \lambda \hat{x}_1 - \int_{D_{\lambda,\varepsilon}} \Phi(t, \tau) B(\tau) u_1(\tau)\, d\tau \right\| +$$

$$+ \left\| (1-\lambda)\hat{x}_2 - \int_{J/D_{\lambda,\varepsilon}} \Phi(t, \tau) B(\tau) u_2(\tau)\, d\tau \right\| \leqslant 2\varepsilon.$$

Отсюда $\| \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 - x(t, u_{\lambda,\varepsilon}) \| \leqslant \lambda \| x_1 - \hat{x}_1 \| + (1-\lambda) \| x_2 - \hat{x}_2 \| + \| \lambda \hat{x}_1 + (1-\lambda)\hat{x}_2 - x(t, u_{\lambda,\varepsilon}) \| \leqslant 3\varepsilon$. Следовательно, в силу произвольности ε, $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \overline{K}(\tilde{\Omega}, t)$, т. е. множество $\overline{K}(\tilde{\Omega}, t)$ выпукло.

Пусть $\Omega \subset U$ — некоторое подмножество пространства управлений. Обозначим через $H(\Omega)$ выпуклую оболочку множества Ω.

Обозначим $K_\Omega(t) = K(\tilde{\Omega}, t)$, где $\tilde{\Omega} = \{u(\cdot) \in L_1([t_0, t], U)$, $u(\tau) \in \Omega$ почти всюду$\}$. В конечномерном пространстве ($X = R^n$, $U = R^m$), если Ω — бикомпактное множество [4], то $K_\Omega(t) = K_{H(\Omega)}(t)$. В бесконечномерном пространстве этот факт не верен. Покажем, что $\overline{K}_{H(\Omega)}(t) = \overline{K}_\Omega(t)$.

Определение 1. *Релейным множеством* $(R(\Omega))$ *для множества* Ω *назовем такое подмножество* Ω, *что* $\overline{H(R(\Omega))} = \overline{H(\Omega)}$.

Из теоремы Крейна — Мильмана [5] следует, что множество крайних точек бикомпактного множества в банаховом пространстве является его релейным множеством.

Теорема 2. *Пусть в уравнении* (1) *выполнены условия* (1.1). *Тогда* $\overline{K}_\Omega(t) = \overline{K}_{R(\Omega)}(t)$.

Лемма (2.1). *В условиях теоремы 2 предположим, что* Ω_1 *плотное подмножество* Ω.

Тогда $\overline{K}_{\Omega_1}(t) = \overline{K}_\Omega(t)$. Действительно, в силу $\Omega_1 \subset \Omega$ имеем $\overline{K}_{\Omega_1}(t) \subset \overline{K}_\Omega(t)$. Далее покажем, что $K_{\Omega_1}(t)$ плотно в $K_\Omega(t)$. Если $x \in K_\Omega(t)$, то $x = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau)\, d\tau$. Тогда, по теореме Петтиса [2], для всякого $\varepsilon > 0$ существует кусочно-постоянная функция $u_\varepsilon(t)=\sum_{i=1}^{N} u_i\chi_i(t)$, $u_i\in\Omega$, где $\chi_i(t)$ — характеристические функции множеств J_i, $\bigcup_{i=1}^{N} J_i=[t_0,\ t]$, $J_i\cap J_k=\varnothing$, $j\neq k$, такая что

$$\|x(t,\ u_\varepsilon)-x\|<\varepsilon/2,\quad x(t,\ u_\varepsilon)=\sum_{i=1}^{N}\int_{J_i}\Phi(t,\ \tau)B(\tau)u_i d\tau.$$

Выберем на каждом J_i постоянные управления $\bar{u}_i\in\Omega_1$, такие что

$$\left\|\int_{J_i}\Phi(t,\ \tau)B(\tau)u_i d\tau-\int_{J_i}\Phi(t,\ \tau)B(\tau)\bar{u}_i d\tau\right\|<\frac{\varepsilon}{2N}.$$

Существование $\bar{u}_i$ следует из условия $\bar{\Omega}_1\supset\Omega$. Рассмотрим $\bar{u}(t)=\sum_{i=1}^{N}\bar{u}_i\chi_i(t)$, $\bar{u}(t)\in\Omega_1$. Тогда

$$x(t,\ \bar{u}(t))\in K_{\Omega_1}(t)\ \text{ и }\ \|x(t,\ u_\varepsilon)-x(t,\ \bar{u})\|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{N}\left\|\int_{J_k}\Phi(t,\ \tau)B(\tau)u_i d\tau-\int_{J_k}\Phi(t,\ \tau)B(\tau)\bar{u}_i d\tau\right\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, $\|x-x(t,\ \bar{u})\|\leqslant\|x-x(t,\ u_\varepsilon)\|+\|x(t,\ u_\varepsilon)-$ $-x(t,\ \bar{u})\|\leqslant\varepsilon$, т. е. $x\in\bar{K}_{\Omega_1}(t)$. Таким образом, $\bar{K}_\Omega(t)\subset\bar{K}_{\Omega_1}(t)$.

Доказательство теоремы. Из включения $\Omega\subset H(\Omega)$ очевидно: $\bar{K}_{H(\Omega)}(t)\supset K_\Omega(t)$. Покажем, что $\bar{K}_\Omega(t)\supset\bar{K}_{H(\Omega)}(t)$. Пусть $x(t)\in K_{H(\Omega)}(t)$, тогда

$$x(t)=\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\ \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau$$

и $u(\tau)\in H(\Omega)$ почти всюду.
Существует ступенчатая функция

$$u_\varepsilon(t)=\sum_{i=1}^{N}u_i\chi_i(t),\quad u_i\in H(\Omega)$$

и $\|x(t)-x(t,\ u_\varepsilon)\|<\varepsilon/2$. Из условия $u_i\in H(\Omega)$ имеем

$$u_i=\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_j^i u_j^i,\quad\sum_{j=1}^{m_i}\lambda_j^i=1,\quad\lambda_j^i\geqslant 0,\quad u_j^i\in\Omega.$$

Далее воспользуемся обобщенной леммой A. A. Ляпунова: так как

$$\int_{J_k}\Phi(t,\ \tau)B(\tau)u_k d\tau=\sum_{j=1}^{m_k}\lambda_j^k\int_{J_k}\Phi(t,\ \tau)B(\tau)u_j^k d\tau,$$

существует $u_{\varepsilon,k}(t)\in\Omega$ на множестве J_k такое, что

$$\left\|\int_{J_k}\Phi(t,\ \tau)B(\tau)u_k d\tau-\int_{J_k}\Phi(t,\ \tau)B(\tau)u_{\varepsilon,k}(\tau)d\tau\right\|<\frac{\varepsilon}{2N}.$$

Тогда для управления $\bar{u}(t) = u_{\varepsilon,k}(t)$, $t \in J_k$ выполняется условие $\bar{u}(t) \in \Omega$ при $t \geqslant t_0$ и

$$\left\| \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) u_\varepsilon(\tau) d\tau - \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) \bar{u}(\tau) d\tau \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно получим оценку $\| x(t) - x(t, \bar{u}) \| < \varepsilon$ или, в силу произвольности ε, $x(t) \in \overline{K}_\Omega(t)$, поэтому $\overline{K}_\Omega(t) \supset K_{H(\Omega)}(t)$. Наконец, в силу леммы 1.2 имеем $\overline{K}_{R(\Omega)}(t) = \overline{K}_\Omega(t)$. Таким образом мы получили обобщенный принцип релейности: если точка x_1 лежит в $\overline{K}_\Omega(t)$ (или достижима), то существует последовательность релейных управлений $u_n(\tau)$ таких, что $x(t, u_n) \underset{n\to\infty}{\to} x_1$.

Следствие 1.2. *Если Ω_1 и Ω_2 — такие множества, что $\overline{H(\Omega_1)} = \overline{H(\Omega_2)}$, то замыкания соответствующих множеств достижимости совпадают: $\overline{K}_{\Omega_1}(t) = \overline{K}_{\Omega_2}(t)$.*

Слабая компактность множеств достижимости. Пусть отображение φ действует из нормированного пространства X в нормированное пространство Y и множество $D \subset X$, тогда

$$\varphi(D) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{y \in Y : y = \varphi(x),\ x \in D\}.$$

Если $Y = R^1$, то условия $\varphi(D) \leqslant c_1$, $\varphi(D) \geqslant c_2$ будут означать выполнение соответствующего неравенства для каждого элемента из множества $\varphi(D)$.

Теорема 3. *Предположим, что в уравнении (1) выполнены условия (1.1) и* $\tilde{\Omega} \subset L_{p'}([t_0, t], U)$ $(1/p + 1/p' = 1)$. Тогда, если $\tilde{\Omega}$ или $B(\cdot)\tilde{\Omega}$ — слабо компактные множества в $L_{p'}([t_0, t], U)$ или $L_1([t_0, t], X)$, то множество достижимости $K(t)$ слабо компактно, замкнуто и выпукло.

Доказательство. Заметим, что $\overline{K}(t)$ является, в силу теоремы 1, множеством выпуклым, а замкнутость $K(t)$ следует из слабой компактности, поэтому достаточно показать, что $K(t)$ слабо компактно.

Предположим, что $x_n = \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) u_n(\tau) d\tau$, $u_n(\cdot) \in \tilde{\Omega}$ — произвольная последовательность из $K(t)$. Тогда в силу слабой компактности $\tilde{\Omega}$ существует подпоследовательность $u_{n_k}(\tau) \rightharpoonup u_0(\tau)$ в пространстве $L_{p'}([t_0, t], U)$ и $u_0(\cdot) \in \tilde{\Omega}$.

Пусть $f \in X^*$ — произвольный линейный ограниченный функционал, тогда $\langle f, \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) u(\tau) d\tau \rangle = \int_{t_0}^{t} \langle f, \Phi(t, \tau) B(\tau) \times$

$\times u(\tau) > d\tau = <\ddot{f}, u(\cdot)>$ — некоторый линейный ограниченный функционал из $L^*_{p'}([t_0, t], U)$. Следовательно,

$$<\hat{f}, u_{n_k}(\cdot)> \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} <\hat{f}, u_0(\cdot)> \text{ или}$$

$$<f, \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) u_{n_k}(\tau) d\tau> \to <f, \int_{t_0}^{t} \Phi(t, \tau) B(\tau) u_0(\tau) d\tau>$$

и множество $K(t)$ слабо компактно. В случае, если $B(\cdot)\tilde{\Omega} = \{B(\tau) u(\tau), u(\tau) \in \tilde{\Omega}\}$ компактно, доказательство проводится аналогично.

Лемма 1. *Если U рефлексивное сепарабельное банахово пространство, то всякое выпуклое замкнутое ограниченное множество A можно описать при помощи счетного числа линейных неравенств:* $<f_i, u> \geqslant c_i$, где $f_i \in U^*$, $i = 1, 2, 3 \ldots$

Доказательство. Заметим, что из рефлексивности и сепарабельности U следует сепарабельность U^*. Пусть $\{f_i\}_1^\infty$ счетная плотная в U^* последовательность, обозначим $c_i = \min\limits_{u \in A} <f_i, u>$.

Из этого следует, что, если $u \in A$, то $<f_i, u> \geqslant c_i$. Обратно, пусть $\hat{u}$ удовлетворяет системе и $\hat{u} \bar{\in} A$. В силу замкнутости A существует шар $S(\hat{u}, \varepsilon) = \{u : \|u - \hat{u}\| \leqslant \varepsilon\}$, такой что $S(\hat{u}, \varepsilon) \cap A = \varnothing$. Тогда по теореме Хана — Банаха существует такой ненулевой функционал f, что $<f, A> \geqslant c$, $<f, S(\hat{u}, \varepsilon)> \leqslant c$. Нетрудно видеть, что

$$<f, \hat{u}> \leqslant c - \|f\| \cdot \varepsilon.$$

Заметим, что множество $M = \{\hat{u}, A\}$ ограничено, как объединение двух ограниченных множеств, поэтому существует $R > 0$, такое что для каждого $z \in M$ будет $\|z\| < R$.

Выберем f_{i_0} из условия

$$\|f - f_{i_0}\| < \frac{\|f\| \cdot \varepsilon}{4R}. \tag{3}$$

Тогда

$$<f_{i_0}, u> \leqslant \frac{1}{4}\|f\| \cdot \varepsilon + <f, \hat{u}> \leqslant c - \frac{3}{4}\|f\| \cdot \varepsilon. \tag{4}$$

другой стороны, в силу (3) $<f_{i_0}, y> \geqslant c - \frac{\|f\|}{4}\varepsilon$, $y \in A$, т. е. $\geqslant c - \frac{1}{4}\|f\|\varepsilon$, но это противоречит (4), так как $<f_{i_0}, \hat{u}> < c_{i_0}$.

Лемма 2. Если $u(t) \in L_1([a, b], U)$, где U — банахово пространство, то почти всюду на $[a, b]$ $\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s+\varepsilon} \|u(t)-u(s)\|\,dt \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0$.
Числа s, удовлетворяющие лемме, называются регулярными точками функции $u(t)$.

Доказательство. Если $u(t)$ сильно измерима, то по теореме Петтиса [2], $u(t)$ почти всюду сепарабельнозначная, т. е. существует $E_0 \subset [a, b]$, $mE_0 = 0$ и множество $M = \{u(t) : t \in [a, b] \setminus E_0\}$ сепарабельное. Пусть $\{u_i\}_1^\infty$ — плотная в M последовательность. Так как скалярные функции $\|u(t)-u_i\| \in L_1[a, b]$, то почти всюду на $[a, b]$ $\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s+\varepsilon} \|u(t)-u_i\|\,dt \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \|u(s)-u_i\|$ при $s \in [a, b]\setminus E_i$, $mE_i = 0$. Обозначим $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$. Тогда в силу почти всюду сепарабельнозначности функции $u(t)$ имеем: для каждого $s \in [a, b] \setminus E$ и для каждого $\delta > 0$ существует $i_0 = i_0(s, \delta)$ такое, что $\|u(s)-u_{i_0}\| < \delta/3$. Поэтому

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s+\varepsilon} \|u(t)-u_{i_0}\|\,dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s+\varepsilon} \|u(t)-u(s)\|\,dt\right| < \delta/3. \qquad (5)$$

Так как $s \in [a, b]\setminus E$, то s — регулярная точка для всех функций $\|u(t)-u_i\|$. Тогда $\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s+\varepsilon} \|u(t)-u_i\|\,dt \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \|u(s)-u_i\|$. Следовательно, существует такое ε_0, что $\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s+\varepsilon} \|u(t)-u(s)\|\,dt < \delta/3 + \|u(s)-u_{i_0}\|$. Подставляя его в (5), получаем

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s+\varepsilon} \|u(t)-u(s)\|\,dt < \delta \text{ при } \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Определение 2: *семейство множеств $\Omega_t \subset U$ назовем слабо непрерывным, если для каждого $f \in U^*$, множества $\langle f, \Omega_t\rangle \subset R^1$ непрерывно зависят от t в метрике Хаусдорфа.*

Теорема 4. *Пусть для уравнения* (1) *пространство управлений U — рефлексивное банахово пространство. Тогда множество достижимости $K(t)$ будет слабо компактным, если $u(t) \in \Omega_t$ почти всюду, где Ω_t слабо непрерывное семейство выпуклых замкнутых ограниченных множеств, $\|\Omega_t\| \leqslant r(t)$, $r(t) \in L_{p'}[t_0, t]$, $p' > 1$.*

Доказательство. Пространство $Y = L_{p'}([t_0, t], U)$ рефлексивно при $p' > 1$ в силу рефлексивности U [6]. Сопряженным к нему является $Y^* = L_p([t_0, t], U^*)$. Обозначим $\tilde{\Omega} = \{u(\cdot) \in Y : u(\tau) \in \Omega_\tau$, $\tau \in [t_0, t]$ почти всюду$\}$, и покажем, что $\tilde{\Omega}$ слабо компактно в Y. Пусть $u_n(\cdot) \in \tilde{\Omega}$, $n = 1, 2, \ldots$, тогда $\|u_n(\cdot)\|_{L_{p'}} \leqslant \left(\int_{t_0}^{t} r^{p'}(\tau)\,d\tau\right)^{1/p'} = c$, т. е. $u_n(\cdot)$ лежат в шаре радиуса c пространства Y. По теореме Эберлейна — Шмульяна [2] существует подпоследовательность $u_{n_k}(\cdot)$, слабо сходящаяся к $u_0(\cdot)$. Покажем, что $u_0(\cdot)\in\tilde{\Omega}$. Для каждого $f\in U^*$, $\|f\|=1$ обозначим $c_f(\tau)=\min\{<f, u>: u\in\Omega_\tau\}$. Очевидно, $c_f(\tau)$ — непрерывные функции, и

$$\Omega_\tau=\{u: <f, u> \geqslant c_f(\tau), \|f\|=1\}.$$

Пусть E такое нуль-множество, что функция $u_0(\tau)$ регулярна на $[t_0, t]\diagdown E$, тогда при $s\in[t_0, t]\diagdown E$ имеем

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s+\varepsilon}<f, u_{n_k}(\tau)>d\tau\geqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s+\varepsilon}c_f(\tau)\,d\tau;\quad \|f\|=1. \tag{6}$$

В силу слабой сходимости $u_{n_k}(\cdot)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}u_0(\cdot)$ будет

$$\int_s^{s+\varepsilon}<f, u_{n_k}(\tau)>d\tau\underset{k\to\infty}{\to}\int_s^{s+\varepsilon}<f, u_0(\tau)>d\tau.$$

Поэтому, переходя к пределу по k в неравенстве (6), получим

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s+\varepsilon}<f, u_0(\tau)>d\tau\geqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_s^{s+\varepsilon}c_f(\tau)\,d\tau;\quad \|f\|=1.$$

В силу регулярности $u(s)$ при $\varepsilon\to0$ получим $<f, u_0(s)>\geqslant c_f(s)$. Следовательно, $u_0(s)\in\Omega_s$ почти всюду, т. е. $\tilde{\Omega}$ слабо компактно, тогда $K(t)$ также слабо компактно в силу теоремы 3.

Определение 3. *Семейство множеств $\Omega_t\subset U$ будем называть слабо измеримым, если многозначное отображение $<f, \Omega_t>$ измеримо для каждого $f\in U^*$.*

Теорема 5. *Предположим, что U — рефлексивное сепарабельное банахово пространство, а ограничения на управления задаются в виде $u(\tau)\in\Omega_\tau$ почти всюду, где Ω_τ — слабо измеримое семейство выпуклых, замкнутых и ограниченных почти всюду на $[t_0, t]$ множеств, $\|\Omega_t\|\leqslant r(t)$, $r(t)\in L_{p'}[t_0, t]$, $p'>1$. Тогда множество достижимости $K(t)$ слабо компактно.*

Доказательство. Обозначим $Y=L_{p'}([t_0, t], U)$, $\tilde{\Omega}=\{u(\cdot)\in Y: u(\tau)\in\tilde{\Omega}_\tau$ почти всюду$\}$ и покажем, что $\tilde{\Omega}$ слабо компактно в Y. Пусть $\{f_i\}_1^\infty$ плотная последовательность в U^*, тогда в силу леммы 1 множества Ω_τ можно описать счетной системой неравенств $\Omega_\tau=\{u: <f_i, u>\geqslant c_i(\tau), i=1, 2, \ldots\}$, где $c_i(\tau)=\min\limits_{u\in\Omega_\tau}<f_i, u>$. В силу слабой измеримости Ω_τ все функции $c_i(\tau)$ измеримы [7] и удовлетворяют неравенствам $c_i(\tau)\leqslant\|f\|\,r(\tau)$.

Если $u_n(\cdot)\in\tilde{\Omega}$, то, как и в теореме 4, обозначим через $u_0(\tau)$ слабый предел подпоследовательности $u_{n_k}(\tau)$ и покажем, что $u_0(\cdot)\in\tilde{\Omega}$.

Введем нуль-множества E_i такие, что функция $u_0(\tau)$ регулярна на $[t_0, t]\setminus E_0$, $c_i(\tau)$ регулярны на $[t_0, t]\setminus E_i$, $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$. На множестве $[t_0, t]\setminus E$ регулярны $u_0, (\tau)$ и все $c_i(\tau)$. Тогда, как и в теореме 4, получим $u_0(s) \in \Omega_s$ при $s \in [t_0, t]\setminus E$ и $mE = 0$, т. е. $K(t)$ слабо компактно.

Слабо компактное множество в нерефлексивном банаховом пространстве в силу теоремы Эберлейна — Шмульяна [2] нигде не плотно. Из этого факта, а также из результатов теоремы 4 и теоремы Бэра о категориях вытекают следующие теоремы об отсутствии точной управляемости [8]:

Теорема 6. *Если X — нерефлексивное банахово пространство, а U — рефлексивное, то уравнение* (1) *не является точно управляемым ни на каком отрезке* $[t_0, t]$ *управлениями из* $L_{p'}([t_0, t], U)$ *при* $1 < p' \leqslant +\infty$.

Теорема 7. *Рассмотрим автономное уравнение* $dx/dt = Ax + Bu$, где $x \in X$, $u \in U$. Если X — нерефлексивное банахово пространство, а U — рефлексивно, то это уравнение не является точно управляемым за свободное время управлениями из $L_{p'}^{\mathrm{loc}}([t_0, +\infty)\, U)$ при $1 < p' \leqslant \infty$.

Изложенные результаты остаются в силе также для уравнений с запаздываниями нейтрального типа в банаховом пространстве, для управляемых полугрупп линейных ограниченных операторов и неавтономных уравнений с неограниченными операторами функционально-дифференциальных уравнений, т. е. для всех процессов, решения которых описываются формулой Коши (2) с разрешающим оператором $\Phi(t, \tau)$, удовлетворяющим условию $\operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in [t_0, t]} \| \Phi(t, \tau) \| < +\infty$.

Список литературы: 1. *Uhl J. J., fr.* The range of vector-valued measure.— «Proc. Amer. math. soc.», 1969, vol. 21, No 1 p. 158-163. 2. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1967. 600 с. 3. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., «Наука», 1970, 534 с. 4. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1972. 565 с. 5. *Рудин У.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1975. 420 с. 6. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1969. 1012 с. 7. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. М., «Наука», 1974. 460 с. 8. *Triggiani R.* On the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces.— «Jour. math. anal. appl.», 1975, vol. 50, p. 438-446.

Поступила 24 января 1978 г.

УДК 519.3

Р. РАБАХ

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть управляемый процесс описывается уравнением

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t), \quad t \geqslant 0, \tag{1}$$

где $x \in X$, $u \in U$; X, U — банаховы пространства, A, A_1, B — линейные ограниченные операторы, $h > 0$ — постоянное запаздывание, $u(t)$ — управление, представляющее собой интегрируемую по Бохнеру функцию со значением в U.

Решение уравнения (1) определяется однозначно начальным условием

$$x_0(\cdot) = \{x(t) = \varphi(t),\ t \in [0, h);\ x(0) = x_0\}, \tag{2}$$

где $\varphi(t)$ — интегрируемая по Бохнеру функция.

Система (1) называется относительно точно управляемой за время T, если для всех $x \in X$ существует допустимое управление $u(t)$ такое, что решение уравнения (1) с нулевым начальным условием ($\varphi(t) = 0$, $x_0 = 0$) удовлетворяет условию $x(T) = x$. В качестве пространства допустимых управлений рассматривается пространство $L_1([0, T], U)$.

Система (1) называется относительно ε-управляемой, если множество достижимых состояний всюду плотно в X.

Линейные системы с запаздыванием для случая, когда $X = R^n$, $U = R^m$, рассматривали во многих работах. Явные условия относительной управляемости конечномерных систем получены в [1], в [2] содержатся многие результаты теории управления систем с запаздыванием.

В настоящей работе дается критерий относительной точной управляемости, являющейся обобщением результата, полученного в [3] для систем без запаздывания ($A_1 = 0$), с применением той же методики. Приводится также условие ε-управляемости для системы (1).

Известно, что решение уравнения (1) можно представить в виде

$$x(t) = F(t)x_0 + \int_0^h F(t-\tau) A_1 \varphi(\tau - h)\, d\tau + \int_0^t F(t-\tau) Bu(\tau)\, d\tau,$$

где оператор-функция $F(t)$ является решением уравнения $dF(t)/dt = AF(t) + A_1 F(t-h)$, с начальными условиями $F(0) = I$, $F(s) = 0$ при $s < 0$.

Нетрудно заметить, что система (1) относительно точно управляема тогда и только тогда, когда оператор $Su(\cdot) = \int\limits_0^T F(\tau) \times$ $\times Bu(\tau)\,d\tau$ отображает пространство $L_1([0, T], U)$ на все пространство X.

Для получения явного критерия относительной точной управляемости необходимо конкретное выражение оператор-функции $F(t)$. Оказывается, что $F(t)$, как и в случае конечномерного фазового пространства [4], имеет следующий вид:

$$F(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p} Q_i(jh) \frac{(t-jh)^i}{i!}, \quad t \in [ph, \ (p+1)h), \tag{3}$$

где $Q_k(s)$—операторы, представляющие собой решение определяющих уравнений [2] $Q_k(s) = AQ_{k-1}(s) + A_1 Q_{k-1}(s-h)$, $k \geqslant 1$; $Q_0(0) = I$, $Q_k(s) = 0$, $s < 0$, $k < 0$.

С учетом явного выражения $F(t)$ оператор S можно представить в виде

$$Su(\cdot) = \sum_{p=0}^{k} \int\limits_{t_p}^{t_{p+1}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p} Q_i(jh)\, Bu(\tau) \frac{(\tau-jh)^i}{i!}, \tag{4}$$

где $t_p = ph$ при $p \leqslant k$, $t_{k+1} = T$. Так как ряд в выражении (3) сходится равномерно на $[ph, \ (p+1)h)$, то можно переставить знаки суммирования в (4), в результате чего получим

$$Su(\cdot) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{p} Q_i(jh)\, B \int\limits_{jh}^{T} \frac{(\tau-jh)^i}{i!} u(\tau)\, d\tau. \tag{5}$$

Это соотношение позволяет нам получить обобщение теоремы 2 [3].

Теорема 1. *Система (1) относительно точно управляема за время T тогда и только тогда, когда* $\{Q_i(jh)\,BU, \ i = 0, 1, 2, \ldots N; \ j = 0, 1, 2, \ldots k\} = X$ *при некотором* $N \geqslant 0$, $k = [T/h]$. Скобками обозначена линейная оболочка соответствующих областей значений $Q_i(jh)\,BU$.

Доказательство. Необходимость. Пусть система точно управляема, тогда оператор S отображает $L_1([0, T], U)$ на все X.

Рассмотрим линейный ограниченный оператор

$$S_N u(\cdot) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} Q_i(jh)\, B \int\limits_{jh}^{T} \frac{(\tau-jh)^i}{i!} u(\tau)\, d\tau, \quad u(\cdot) \in L_1([0, T], U).$$

Если число N достаточно большое, то норма $\| S - S_N \|$ будет, как мы это покажем далее, достаточно малой и, следовательно, оператор S_N будет отображать $L_1([0, T], U)$ на все X. Это означает, что для любого $x \in X$ существует $u(t)$ такое, что $S_N u(\cdot) = x$ или же $\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} Q_i(jh) B v_{ij} = x$, где

$$v_{ij} = \int_{jh}^{T} \frac{(\tau - jh)^i}{i!} u(\tau)\, d\tau.$$

Таким образом, будет доказано, что линейная оболочка областей значений операторов $Q_i(jh) B$, $i = 0, 1, \ldots N$; $j = 0, 1, \ldots k$ совпадает со всем X.

Итак, остается показать, что $\| S - S_N \|$ можно сделать сколь угодно малой за счет выбора N. Имеем

$$\| (S - S_N) u(\cdot) \| = \left\| \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} Q_i(jh) B \int_{jh}^{T} \frac{(\tau - jh)^i}{i!} u(\tau)\, d\tau \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \| Q_i(jh) \| \| B \| \frac{(T - jh)^i}{i!} \int_{0}^{T} \| u(\tau) \| d\tau.$$

Следовательно, $\| S - S_N \| \leqslant \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} \| Q_i(jh) \| \| B \| \frac{(T - jh)^i}{i!}$ и в силу сходимости ряда (3) выражение в правой части может быть сделано сколь угодно малым за счет выбора N. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы. Управление будем искать в виде кусочно-постоянной функции. Для этого отрезки $[ph, (p+1)h]$, $p = 0, 1, \ldots, k-1$; $[kh, T]$ разобъем на $(N+1)$ равных частей $[t_m, t_{m+1}]$, $m = 0, 1, \ldots, N_1$; $N_1 = (k+1)(N+1)$. На каждом полуинтервале $[t_m, t_{m+1})$ берем $u(t) = u_m$ постоянное управление.

Введем пространство Y, представляющее собой произведение N_1 пространств U. Тогда соотношения

$$v_{ij} = \int_{jh}^{T} \frac{(\tau - jh)^i}{i!} u(\tau)\, d\tau, \; j = 0, 1, \ldots, k; \; i = 0, 1, \ldots, N, \quad (6)$$

где $u(t)$ — кусочно-постоянное управление, определенное выше, определяют линейный ограниченный оператор D, отображающий пространство Y в себя. Из линейной независимости функций

$$f_{ij}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant jh \\ \dfrac{(t - jh)^i}{i!} & \text{при } jh < t \leqslant T \end{cases}.$$

Следует обратимость оператора D (то есть D^{-1} существует и ограничен).

Введем следующие обозначения: $y = (u_0, u_1, \ldots, u_N)'$, $z = (v_{00}, v_{01}, \ldots, v_{0k}, v_{10}, \ldots, v_{N,k})'$, где штрих означает, что рассматриваются столбцы, а не строки, y и z принадлежат Y.

Подставив в (5) в качестве $u(\cdot)$ кусочно-постоянную функцию со значениями u_m в полуинтервалах $[t_m, t_{m+1})$, получим

$$Su(\cdot) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} Q_i(jh) B \int_{jh}^{T} \frac{(\tau - jh)^i}{i!} u(\tau) d\tau +$$

$$+ \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} Q_i(jh) B \int_{jh}^{T} \frac{(\tau - jh)^i}{i!} u(\tau) d\tau = CDy + Ry, \qquad (7)$$

$$\text{где} \quad Cz = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{k} Q_i(jh) Bv_{ij},$$

$$Ry = \sum_{i=N+1}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} Q_i(jh) B \int_{jh}^{T} \frac{(\tau - jh)^i}{i!} u(\tau) d\tau.$$

Учитывая обратимость оператора D, выражение (7) можно представить в виде $Su(\cdot) = (C + RD^{-1}) z$, $z = Dy$.

Из условия теоремы следует, что оператор C отображает Y на все X. Нам требуется показать, что оператор $C + RD^{-1}$ также отображает Y на все X. Это будет означать, что система относительно точно управляема с помощью кусочно-постоянных управлений.

Для доказательства требуемого факта достаточно показать, что норма $\| RD^{-1} \|$ достаточно мала при определенных условиях. Чтобы добиться этого, уменьшим величину $T - kh$. Это не повлияет на область значений оператора C, так как он не зависит от T.

Пусть $\theta = (T - kh)/(N + 1)$ — длина отрезков $[t_m, t_{m+1}] \subset [jh, T]$. Тогда аналогично тому, как это было сделано в [3], можно показать, что $\| RD^{-1} \| \leqslant K\theta$. Этим и завершается доказательство теоремы.

С л е д с т в и е 1. *Система (1) относительно точно управляема за время T тогда и только тогда, когда любая последовательность $\{f_n\} \subset X^*$, удовлетворяющая условиям* $\lim_{n \to \infty} B^* Q_i^* (jh) f_n = 0$, $i = 0, 1, \ldots, N$; $j = 0, 1, \ldots, k$, *сходится к нулю в сильном смысле.*

С л е д с т в и е 2. *Пусть оператор B вполне непрерывный. Тогда система* (1) *не может быть относительно точно управляемой ни при каком T.*

Первое утверждение доказывается аналогично доказательству теоремы 3 в [3]. Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что оператор C также будет вполне непрерывным при любых конечных N и k.

Замечание. Из доказательства теоремы легко видеть, что если система относительно точно управляема за время $T_0 > kh$, то она относительно точно управляема и за любое время $T > kh$. Более того, как и в [3], если множество достижимости за свободное время (то есть T зависит от x) совпадает со всем пространством, то система (1) точно управляема за какое-то время T_0.

В отличие от систем без запаздывания такое утверждение для ε-управляемости не имеет место. В работе [5] приводится критерий относительной управляемости для системы типа (1), но с одномерным управлением и с фиксированным временем. Для системы (1) имеют место следующие утверждения.

Теорема 2. *Система (1) относительно ε-управляема за свободное время тогда и только тогда, когда линейная оболочка* $\{Q_i(jh)\,BU,\ i = 0,\ 1,\ \ldots;\ j = 0,\ 1,\ \ldots\}$ *всюду плотна в* X.

Теорема 3. *Система* (1) *относительно ε-управляема за время T тогда и только тогда, когда линейная оболочка* $\{Q_i(jh)\,BU,\ i = 0,\ 1,\ \ldots;\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ k\}$, $k = [T/h]$ *всюду плотна в* X.

Доказательство проведем только для первого утверждения, для теоремы 3 оно будет аналогичным.

Необходимость. Пусть система (1) относительно ε-управляема за свободное время. Пусть вопреки предположению $\{Q_i(jh)\,BU,\ i = 0,\ 1,\ \ldots;\ j = 0,\ 1,\ \ldots\}$ не является всюду плотным в X. Тогда существует ненулевой функционал $f \in X^*$ такой, что $B^*Q_i^*(jh)\,f = 0,\ i,\ j = 0,\ 1,\ \ldots$, а это означает, что $B^*F^*(\tau)\,f = 0$ для любого $\tau \in [0,\ \infty]$. Рассмотрим множество достижимости системы (1) за свободное время: $\Omega = \{x \in X\colon\ x = \int\limits_0^{T_x} F(\tau)\,Bu(\tau) \times d\tau,\ T_x > 0\}$.

Легко видеть, что для всех $x \in \Omega$ имеем $<x,\ f> = 0$. А это означает, что Ω не всюду плотно в X (теорема Хана — Банаха).

Достаточность. Пусть выполнено условие теоремы, но тем не менее система (1) не является относительно ε-управляемой. Тогда существует $f \in X^*$, $f \neq 0$ такой, что $B^*F^*(\tau)\,f = 0$ для любого $\tau \in [0,\ \infty)$.

Учитывая явное выражение оператор-функции $F(\tau)$, имеем $B^* \sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{p} Q_i^*(jh)\,f\,\frac{(\tau - jh)^i}{i!} = 0,\ \tau \in [ph,\ (p+1)\,h),\ p = 0,\ 1,\ 2,,\ \ldots$

Полагая $p = 0$, получим

$$B^* \sum_{i=0}^{\infty} Q_i^*(0)\,f\,\frac{\tau^i}{i!} = 0,\ \tau \in [0,\ h),$$

что влечет за собой $B^*Q_i^*(0)\,f = 0$ для всех $i = 0,\ 1,\ \ldots$

Таким образом, при $p = 1$ имеем $B^* \sum\limits_{i=0}^{\infty} Q_i^*(h)\,f\,\frac{(\tau - h)^i}{i!} = 0$, $\tau \in [h,\ 2h)$, а это в свою очередь дает $B^*Q_i^*(h)\,f = 0$ для всех

$i=0,\ 1,\ \ldots$ — и так до бесконечности (в случае фиксированного времени до $p=k=[T/h]$, в результате чего получим $B^*Q_i^*(jh)f=0$ для всех $i,\ j=0,\ 1\ \ldots$, что противоречит условию теоремы, так как в этом случае $\{Q_i(jh)BU,\ i=0,\ 1,\ \ldots;\ j=0,\ 1,\ \ldots\}$ не всюду плотно в X. Этим и завершается доказательство теоремы.

Список литературы: 1. *Кириллова Ф. М. Чуракова С. В.* Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием.— «ДАН СССР», 1976, т. 174, № 6, с. 1260—1263. 2. *Габасов Р., Кириллова Ф.* Качественная теория оптимальных процессов. М.. Наука», 1971. 508 с. 3. *Коробов В. И., Рабах Р.* Точная управляемость в банаховом пространстве.— «Диф. уравнения», 1978, т. 14, № 1, с. 42—47. 4. *Шкляр Б. Ш.* К проблеме относительной управляемости систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа.—«Диф. уравнения», 1974, т. 10, № 8, с. 1443—1450. 5. *Наумович Р. Ф.* Об относительной квазиуправляемости уравнений с запаздыванием в банаховом пространстве.— «Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1», 1976, № 2, с. 59—61.

Поступила 31 января 1978 г.

УДК 517.934.1

В. Е. ЧУПРИНА

ε-УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ НА ПОДПРОСТРАНСТВО

Рассмотрим систему

$$\dot{x}=Ax+Bu, \tag{1}$$

где A и B — постоянные вещественные матрицы размеров $n\times n$ и $n\times r$ соответственно, вектор $x\in E_n$, вектор $u\in E_r$.

В работе [1] рассматривается задача управляемости на подпространство G из всех точек E_n за свободное время. В данной работе даются достаточные условия ε-управляемости системы (1) на подпространство за свободное время, а также необходимые условия ε-управляемости системы (1) на подпространство за свободное время, которые близки к достаточным условиям.

Приведем некоторые определения и обозначения.

Систему (1) назовем ε-управляемой на множество G за свободное время, если для любого $\varepsilon>0$ и для любого $x_0\in E_n$ существуют конечный момент времени $T=T(\varepsilon,\ x_0)\geqslant 0$ и измеримое управление $u=u(t,\ \varepsilon,\ x_0)$, $0\leqslant t\leqslant T$ — такие, что траектория $x(t)$ системы (1) при $u=u(t,\ \varepsilon,\ x_0)$, начинающаяся в точке x_0 при $t=0$, в момент времени T попадет на множество $G+V_n(0,\ \varepsilon)$, т. е. $x(T)\in(G+V_n(0,\ \varepsilon))$, где $V_n(0,\ \varepsilon)$ — n-мерный замкнутый шар из E_n с центром в нуле радиуса ε.

Множество G назовем ε-достижимым из всех точек E_n за свободное время в силу системы

$$\dot{x}=Ax, \tag{2}$$

если для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $x_0 \in E_n$ существует конечный момент времени $T = T(\varepsilon, x_0) \geqslant 0$ такой, что траектория $x(t)$ системы (2), начинающаяся в точке x_0 при $t + 0$, в момент времени T попадет на множество $G + V_n(0, \varepsilon)$.

Пусть $\varphi(\lambda) = \varphi^+(\lambda)\varphi^-(\lambda)$ — минимальный полином матрицы A, где $\varphi^-(\lambda)$ соответствует корням λ-минимального полинома с Re $\lambda < 0$, а полином $\varphi^+(\lambda)$ соответствует корням λ с Re$\lambda \geqslant 0$. Представим полиномы $\varphi^+(\lambda)$, $\varphi^-(\lambda)$ в виде $\varphi^+(\lambda) = \varphi_1^+(\lambda)\varphi_2^+(\lambda)$, $\varphi^-(\lambda) = \varphi_1^-(\lambda)\varphi_2^-(\lambda)$, где $\varphi_1^+(\lambda)$, $\varphi_1^-(\lambda)$ соответствуют вещественным корням, а $\varphi_2^+(\lambda)$, $\varphi_2^-(\lambda)$ — комплексным.

Обозначим: $L = L(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$ — подпространство управляемости системы (1),

$$K^- = \{x : \varphi^-(A)x = 0\},\ K^+ = \{x : \varphi^+(A)x = 0\},$$

$$K_1^+ = \{x : \varphi_1^+(\mathrm{A})x = 0\},\ K_2^+ = \{x : \varphi_2^+(A)x = 0\},$$

$$F = K^+ \cap (L + G),\ Q = F \cap K_2^+,\ \dim K^+ = q.$$

Обозначим через $\{Q_\alpha\}$ семейство двумерных подпространств из K_2^+, $Q_\alpha = L(\mathrm{Re}\, w, \mathrm{Im}\, w)$, где w — комплексный ненулевой вектор, «принадлежащий» [2] K_2^+ вида $w = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j w_j$, где α_j — комплексные числа, w_j — корневые векторы матрицы A, соответствующие собственным значениям $\lambda_j = \mu_j + i\nu_j$ с $\mu_j \geqslant 0$, $\nu_j \neq 0$ и такими, что $\nu_1, \ldots, \nu_l$ — соизмеримые числа.

Теорема. *Для того чтобы система* (*1*) *была ε-управляемой на подпространство G, достаточно, чтобы* 1) $K_1^+ \subset (L + C)$; 2) *если* $K_2^+ \neq 0$, *то* $\dim K^+ \cap (L + G) \geqslant q - 1$.

Доказательство. Задача ε-управляемости на подпространство G из всех точек E_n за свободное время эквивалентна [см. 2] задаче ε-достижимости подпространства из всех точек E_n за свободное время в силу системы (2).

Условия теоремы являются достаточными для ε-достижимости подпространства $L + G$ из всех точек E_n за свободное время в силу системы (2). При доказательстве теоремы используется методика работы [2].

Пусть $\dim F = q$, т. е. $F = K^+$. Возьмем произвольную точку $x_0 \in E_n$. Тогда $x_0 = x_1 + x_2$, где $x_1 \in K^-$, $x_2 \in K^+$. В подпространстве K^- система (2) ассимптотически устойчива [3]. Тогда существует конечный момент времени $T = T(\varepsilon, x_0) \geqslant 0$ такой, что $e^{At}x_1 \in V_n(0, \varepsilon) \cap K^-$. Так как $e^{At}x_2 \in (L + G)$, то $e^{At}x_0 \in (L + G + V_n(0, \varepsilon))$. Если $K_2^+ = 0$, то $K^+ = K_1^+$, и мы получаем предыдущий случай. Поэтому в дальнейшем $K_2^+ \neq 0$.

Пусть $\dim F = q - 1$, $K_1^+ \subset F$.

Не ограничивая общности, можно рассматривать такие точки x_0, что их составляющие x_1 из подпространства K^- принадлежат такому шару $V_n(0, \varepsilon_1)$, что $e^{At}x_1 \in V_n(0, \varepsilon)$ при всех $t \geqslant 0$.

Следовательно, нам достаточно показать, что существует конечный момент времени $T = T(x_0)$ такой, что $e^{At}x_2 \in (L + G)$.

В подпространстве K^+ выберем ненулевой вектор f, ортогональный подпространству F. Возьмем произвольную точку $x_2 \in K^+$. Тогда $x_2 = x_2^1 + x_2^2$, где $x_2^1 \in K_1^+$, $x_2^2 \in K_2^+$. Рассмотрим функцию $\gamma(t) = (e^{At}x_2, f)$. В силу выбора вектора f получаем $\gamma(t) = (e^{At}x_2^2, f)$. Таким образом, $e^{At_0}x_2 \in F$ тогда и только тогда, когда $\gamma(t_0) = 0$.

Возьмем произвольную точку $x_2^2 \in K_2^+ \setminus Q$ (если $x_2^2 \in Q$, то $x_2^2 \in (L + G)$, причем $(x_2^2, f) = 0$), тогда $(x_2^2, f) \neq 0$. Следовательно, $\gamma(t) \not\equiv 0$ на $[0, \infty)$.

Обозначим R_k, $k = 1, \ldots, m$ корневые подпространства [5] матрицы A, отвечающие собственным значениям $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ при $\nu_k \neq 0$ и $\mu_k \geqslant 0$, $\dim R_k = s_k + 1$. Тогда $x_2^2 = \sum\limits_{k \in J} \overset{0}{\eta}_k$, где $\overset{0}{\eta}_k$ — k-я составляющая x_2^2 из подпространства R_k, $J = \{k : \overset{0}{\eta}_k \neq 0\}$. Обозначим $\overset{j}{\eta}_k = (A - \lambda_k E)^j \overset{0}{\eta}_k = \eta_k^{1j} + i\eta_k^{2j}$, $j = 0, 1, \ldots, s_k$. Тогда

$$\gamma(t) = \sum_{k \in J} e^{\mu_k t} \sum_{j=0}^{s_k} \frac{t^j}{j!} [(\eta_k^{1j}, f) \cos \nu_k t - (\eta_k^{2j}, f) \sin \nu_k t] =$$

$$= \sum_{k \in J'} e^{\mu_{k_0} t} \sum_{j=0}^{s_k} \frac{t^j}{j!} [(\eta_k^{1j}, f) \cos \nu_k t - (\eta_k^{2j}, f) \sin \nu_k t] + R_0(t),$$

где $\mu_{k_0} = \max\limits_{k \in J} \mu_k$ и такие, что хотя бы один коэффициент при $e^{\mu_{k_0} t}$ отличен от нуля, $J' = \{k : k \in J,\ \mu_k = \mu_{k_0}\}$. Далее,

$$\gamma(t) = e^{\mu_{k_0} t} \frac{t^{s_0}}{s_0!} \sum_{k \in J''} [(\eta_k^{1s_0}, f) \cos \nu_k t - (\eta_k^{2s_0}, f) \sin \nu_k t] + R(t),$$

где $s_0 = \max\limits_{k \in J'} s_k$, $J'' = \{k : k \in J',\ s_k = s_0\}$.

Рассмотрим функцию

$$\beta(t) = \sum_{k \in J''} [(\eta_k^{1s_0}, f) \cos \nu_k t - (\eta_k^{2s_0}, f) \sin \nu_k t].$$

По построению $\beta(t) \not\equiv 0$ на $[0, \infty)$, $\beta(t)$ — почти периодическая по Бору функция со средним значением, равным нулю [4] на $[0, \infty)$. Поэтому можно указать две неограниченно возрастающие последовательности моментов времени $t_1 < t_2 < \ldots$, $\tau_1 < \tau_2 \ldots$ и число $\delta > 0$ такое, что $\beta(t_i) > \delta$ и $\beta(\tau_i) < -\delta$ для $i = 1, 2, \ldots$

Тогда найдем номер i_0 такой, что

$$\left| e^{-\mu_{k_0} t_i} \frac{s_0!}{t_i^{s_0}} R(t_i) \right| < \frac{\delta}{2}, \quad \left| e^{-\mu_{k_0} \tau_i} \frac{s_0!}{\tau_i^{s_0}} R(\tau_i) \right| < \frac{\delta}{2}$$

при $i \geqslant i_0$, а значит $e^{-\mu k_0 t_i} \frac{s_0!}{t_i^{s_0}} \gamma(t_i) > \frac{\delta}{2}$,

$$e^{-\mu k_0 \tau_i} \frac{s_0!}{\tau_i^{s_0}} \gamma(\tau_i) < -\frac{\delta}{2} \text{ при } i \geqslant i_0.$$

Следовательно, существуют моменты времени $\overline{t}_i$ такие, что $\gamma(\overline{t}_i) = 0$ при $i \geqslant i_0$. Таким образом, существует конечный момент времени $T = T(\varepsilon, x_0) \geqslant 0$ такой, что $x(T) \in (L + G + V_n(0, \varepsilon))$, т. е. подпространство $L + G$ ε-достижимо из произвольной точки $x_0 \in E_n$ за свободное время в силу системы (2).

Замечание. Близким к достаточным условиям ε-управляемости на подпространство G будут следующие необходимые условия: 1) $K_1^+ \subset (L + G)$; 2) если $K_2^+ \neq 0$, то не существует двухмерного подпространства $Q_{\alpha_0} \in \{Q_\alpha\}$ такого, что $Q_{\alpha_0} \cap (L + G) = 0$.

Следствие. *Для того чтобы система (1) была ε-управляемой на A-инвариантное подпространство G, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $K^+ \subset (L + G)$.*

Действительно, условия: 1) $K_1^+ \subset (L + G)$; 2) если $K_2^+ \neq 0$, то $\dim K^+ \cap (L + G) \geqslant q - 1$ в случае A-инвариантного подпространства G влекут за собой условие $K^+ \subset (L + G)$.

Список литературы: 1. *Коробов В. И., Луценко А. В.* Управляемость линейной стационарной системы на подпространство за нефиксированное время.— «Укр. мат. журн», 1977, т. 29, № 4, с. 531—534. 2. *Коробов В. И., Чуприна В. Е.* Достаточные условия управляемости линейной автономной системы на произвольное множество.— Вестн. Харьк. ун-та, № 148. «Прикл. математика и механика», вып. 42, 1977, с. 83—89. 3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967. 472 с. 4. *Левитан Б. М.* Почти-периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953. 396 с. 5. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М., «Наука», 1963. 656 с.

Поступила 30 января 1978 г.

УДК 518 : 517

А. С. СОХИН, канд. физ.-мат. наук

ОДИН ОПТИМАЛЬНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Рассмотрим эволюционное уравнение

$$\frac{du(t)}{dt} + Au(t) = f(t), \quad 0 < t < T < +\infty, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0 \in H,$$

где A — линейный непрерывный положительно определенный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$; $f(t)$ — заданная непрерывная; $u(t)$ — искомая непрерывная функция вещественной переменной $t \in [0, T]$ (принимают значения в H). Как известно [1], задача (1) имеет единственное решение. Решим задачу (1) при помощи итерационной схемы вида ($u_0(t)$ выбираем произвольно)

$$\frac{u_{n+1/2}(t) - u_n(t)}{\tau} + \partial u_{n+1/2}(t) + Au_n(t) = f(t); \tag{2}$$

$$\frac{u_{n+1}(t) - u_{n+1/2}(t)}{\tau} + \partial u_{n+1/2}(t) + Au_{n+1}(t) = f(t); \quad u_k(0) = u_0,$$

$$k = n, \; n + 1/2, \; n = 0, \; 1, \; 2, \; \ldots,$$

где $\partial = \frac{d}{dt}$, $u_{n+1/2}(t)$ — вспомогательное значение, параметр $\tau > 0$. Схема (2) формально совпадает со схемой переменных направлений [2] численного решения уравнения $A_1 v + A_2 v = f$, где A_1 и A_2 — ограниченные самосопряженные разностные уравнения, возникающие при решении задачи Дирихле в квадрате на квадратной сетке. В данной работе один из операторов неограничен и несамосопряжен.

Пусть $u(t)$ — решение задачи (1). Тогда разность $z_k = u_k - u$ ($k = n$, $n + 1/2$) удовлетворяет однородным уравнениям ($z_0(t)$ выбираем произвольно):

$$\begin{aligned} &\frac{z_{n+1/2}(t) - z_n(t)}{\tau} + \partial z_{n+1/2}(t) + Az_n(t) = 0, \quad z_{n+1/2}(0) = 0, \\ &\frac{z_{n+1}(t) - z_{n+1/2}(t)}{\tau} + \partial z_{n+1/2}(t) + Az_{n+1}(t) = 0, \quad z_{n+1}(0) = 0, \end{aligned} \tag{2'}$$

$$n = 0, \; 1, \; 2, \; \ldots$$

Теорема. *Пусть A — линейный непрерывный самосопряженный положительно определенный оператор с нижней границей $d > 0$ и верхней границей $D > 0$, тогда при любом $\tau > 0$ последовательность $z_n(t)$, найденная из равенств (2′), сходится к нулю по норме пространства H при каждом $t \in (0, T)$. При выборе итерационного параметра $\tau = \tau_0 = 1/\sqrt{dD}$ сходимость к нулю наилучшая. В этом случае справедливо неравенство*

$$\| z_n(t) \| \leqslant C_3 \| z_0 \|_{C(H)} n \rho^n, \tag{3}$$

где

$$\rho = (\sqrt{D} - \sqrt{d})/(\sqrt{D} + \sqrt{d}), \quad C_3 = 2 \max [1, \ln (1 + 2T\sqrt{dD})].$$

Доказательство. Обозначим $C(0, T; H)$ — множество непрерывных функций вещественной переменной $t \in [0, T]$, принимающих значения в H, с нормой $\| f \|_{C(H)} = \max\limits_{t \in [0, T]} \| f(t) \|$. Исключая из равенств (2′) вспомогательное значение $z_{n+1/2}(t)$, получим ($z_0(t)$ выбираем произвольно):

$$z_{n+1}(t) = Sz_n(t), \; z_n(0) = 0, \; n = 0, \; 1, \; \ldots, \tag{4}$$

где оператор перехода S равен $S = S(\tau\partial) S(\tau A)$, $S(\tau\partial) = (I - \tau\partial)(I + \tau\partial)^{-1}$, $S(\tau A) = (I + \tau A)^{-1}(I - \tau A)$, I — тождественный оператор. Оператор $S(\tau A)$ — линейный непрерывный самосопряженный оператор, действующий из H в H. Из равенства (4) вытекает $z_n(t) = T_n(\tau) z_0(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, где разрешающий оператор

$$T_n(\tau) = T_n(\tau\partial) T_n(\tau A),\ T_n(\tau\partial) = [S(\tau\partial)]^n,\ T_n(\tau A) = S(\tau A)]^n.$$

Оператор $T_n(\tau A)$, действующий из H в H,— линейный самосопряженный оператор, причем, $\| T_n(\tau A) \| \leqslant 1$, $n = 1, 2, \ldots$

Положим

$$Jg(t) = (I + \tau\partial)^{-1} g(t) = \int_0^t \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t-s}{\tau}\right) g(s)\, ds \in C(0, T; H).$$

Нетрудно видеть, что

$$\| Jg(t) \| \leqslant \| g \|_{C(H)} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right] \leqslant \| g \|_{C(H)}.$$

Легко проверить непосредственно, что

$$S(\tau\partial) g(t) = (-I + 2J) g(t) \tag{5}$$

и, следовательно, $S(\tau\partial)$ и $T_n(\tau\partial)$ (при каждом $n = 1, 2, \ldots$) — линейные непрерывные операторы, действующие из $C(0, T; H)$ в H при каждом $t \in (0, T)$.

Для произвольной функции из $C(0, T; H)$ имеем

$$\| T_n(\tau) z_0(t) \| = \{([T_n(\tau A)]^2 T_n(\tau\partial) z_0(t),\ T_n(\tau\partial) z_0(t))\}^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \| T_n(\tau A) \| \cdot \| w_n(\tau, t) \| = \max_{\lambda \in [d, D]} \left| \frac{1 - \lambda\tau}{1 + \lambda\tau} \right| \cdot \| w_n(\tau, t) \|, \tag{6}$$

где

$$w_n(\tau, t) = T_n(\tau\partial) z_0(t) = [S(\tau\partial)]^n z_0(t). \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что при каждом $\tau > 0$ функция $m(\tau\lambda) = \left| \frac{1 - \lambda\tau}{1 + \lambda\tau} \right|$ принимает наибольшее значение на концах интервала $[d, D]$. Значит, $\max\limits_{\lambda \in [d, D]} m(\lambda\tau) = \max\left(\left| \frac{1 - \tau d}{1 + \tau d} \right|, \left| \frac{1 - \tau D}{1 + \tau D} \right| \right) = \rho_\tau$. Очевидно, что $0 < \rho_\tau < 1$ при любом $\tau > 0$. Из формулы (5) и равенства (7) следует $w_n(\tau, t) = (-1)^n (I - 2J)^n g(t)$. Пусть E_τ — оператор умножения на функцию $\exp\left(\frac{t}{\tau}\right)$: $E_\tau g(t) = \exp(t/\tau) g(t)$, а J_0 — оператор интегрирования: $J_0 g(t) = \int\limits_0^t g(s)\, ds$, тогда $Jg = E_\tau^{-1} J_0 E_\tau g$.

Поэтому имеем

$$w_n(\tau, t) = (-1)^n \left(I - \frac{2}{\tau} E_\tau^{-1} I_0 E_\tau\right)^n z_0(t) =$$

$$= (-1)^n E_\tau^{-1} (I - J_0)^n E_\tau z_0(t). \tag{8}$$

Получим некоторые свойства многочленов Лагерра, необходимые для дальнейшего изложения.

Лемма 1. *Для многочленов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(t)$ справедливо интегральное представление $L_n^{(0)}(t) = (I - J_0)^n(I)$, $n = 0, 1, \ldots$.*

Доказательство. По определению [3] имеем

$$L_n^{(\alpha)}(t) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{t^i}{i!} \frac{(n+\alpha)!}{(n-1)!\,(\alpha+i)!}.$$

Полагая $\alpha = 0$ и замечая, что $t^i/i! = J_0^i(1)$, непосредственно убеждаемся в справедливости утверждения.

Следствие 1. *Справедливо интегральное соотношение*

$$L_{n+1}^{(0)}(t) = L_n^{(0)}(t) - \int_0^t L_n^{(0)}(s)\,ds = (I - J_0)\,(L_n^{(0)}). \tag{9}$$

Лемма 2. *Справедливо представление*

$$(I - aJ_0)^n g(t) = \int_0^t L_n^{(0)}[a(t-s)]\,g'(s)\,ds \tag{10}$$

для непрерывно дифференцируемых функций $g(t)$, равных нулю при $t = 0$. Доказательство по индукции. При $n = 0$ равенство (10) справедливо, так как $L_0^{(0)}(t) \equiv 1$. Пусть равенство (10) справедливо при $n = k$. Тогда, учитывая формулу (9), будем иметь

$$(I - aJ_0)^{k+1} g(t) = (I - aJ_0,) \int_0^t L_k^{(0)}[a(t-s)]\,g'(s)\,ds =$$

$$= \int_0^t \Big\{ L_k^{(0)}[a(t-s)] - \int_0^{a(t-s)} L_k^{(0)}(\xi)\,d\xi \Big\}\, g'(s)\,ds =$$

$$= \int_0^t L_{k+1}^0[a(t-s)]\,g'(s)\,ds.$$

Следствие 2. *Справедливо равенство*

$$(I - aJ_0)^n g(t) = g(t) - a\int_0^t L_{n-1}^{(1)}[a(t-s)]\,g(s)\,ds. \tag{10'}$$

Доказательство. Интегрируя по частям в интеграле (10) и учитывая равенства $L_n^{(0)}(0) = 1$, $g(0) = 0$, а также равенство [3] $\frac{d}{ds} L_n^{(0)}(s) = -L_n^{(1)}(s)$, получим формулу (10′).

Продолжим доказательство теоремы. Из равенства (8) и следствия (2) вытекает явное выражение функции $w_n(\tau, t)$ через начальное приближение $z_0(t)$ при помощи многочленов Лагерра:

$$w_n(\tau, t) = (-1)^n \left\{ z_0(t) - \int_0^t \frac{2}{\tau} \exp\left(-\frac{t-s}{\tau}\right) L_n^{(1)}\left[\frac{2}{\tau}(t-s)\right] z_0(s)\,ds \right\} \tag{11}$$

Оценим функцию $w_n(\tau, t)$. Из оценок многочленов Лагерра $L_n^{(1)}(x) = O(n)$, $0 \leqslant x \leqslant a > 0$ [3, формула 7.6.11] и

$$\max e^{-x/2} x^{(\alpha+1)/2} \left| L_n^{(\alpha)}(x) \right| \sim n^{\alpha/2+1/6}, \ \alpha = 1, \ x \geqslant a$$

[3, формула 8.91.1] вытекает

$$\left| L_n^{(1)}(x) \right| \leqslant \begin{cases} C_1 n, & 0 \leqslant x \leqslant a \\ C_2 n^{7/6} \dfrac{\exp(x/2)}{x}, & x \geqslant a. \end{cases}$$

Принимая во внимание неравенства

$$1 < \frac{1+a}{1+x} \exp(x/2), \ 0 \leqslant x \leqslant a;$$

$$\frac{1}{x} \leqslant \frac{1+a^{-1}}{(1+x)}, \ x \geqslant a,$$

нетрудно получить оценку многочленов Лагерра на всей полуоси: $\left|L_n^{(1)}(x)\right| \leqslant Cn \dfrac{\exp(x/2)}{1+x}$, $0 \leqslant x < \infty$, где $C = \max[(1+a) C_1, (1+ a^{-1}) C_2]$, из которой следует

$$\| w_n(\tau, t) \| \leqslant \| z_0 \|_{C(H)} \left[1 + nC \int_0^t \frac{2}{\tau} \frac{ds}{1 + 2(t-s)/\tau} \right] =$$

$$= \| z_0 \|_{C(H)} \left[1 + nC \ln \left(1 + \frac{2t}{\tau} \right) \right].$$

Из неравенства (6) получим оценку скорости убывания погрешности $z_n(t) = T_n(\tau) z_0(t)$:

$$\| z_n(t) \| \leqslant \rho_\tau^n \left[1 + nC \ln \left(1 + \frac{2t}{\tau} \right) \right] \cdot \| z_0 \|_{C(H)}. \tag{12}$$

Выберем параметр $\tau > 0$ так, чтобы правая часть в неравенстве (12) убывала возможно быстрее при $n \to \infty$. Положим $\rho = \rho_{\tau_0} = \min\limits_{\tau > 0} \rho_\tau$. Решая уравнение $(1 - \tau_0 d)/(1 + \tau_0 d) = (\tau_0 D - 1)/(\tau_0 D + 1)$, находим для параметра τ оптимальное значение $\tau_0 = 1/\sqrt{dD}$, при этом $\rho = (\sqrt{D} - \sqrt{d})/(\sqrt{D} + \sqrt{d})$. Неравенство (12) при $\tau = \tau_0$ приобретает вид

$$\| z_n(t) \| \leqslant \rho^n [1 + nC \ln (1 + 2T \sqrt{dD})] \, \| z_0 \|_{C(H)}.$$

Полагая $C_3 = 2 \max [1, C \ln (1 + 2T \sqrt{dD})]$, получим оценку погрешности n-й итерации в форме (3).

Список литературы: 1. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М., «Мир», 1972. 414 с. 2. *Peaceman D. W., Rachford H. H.* Jhe numerical solution of parabolic and elliptic differential equations.— «J. Soc. industr. app. math», 1955, vol. 3, N 1, p. 28-42. 3. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. М., Физматгиз, 1962. 500 с.

Поступила 21 января 1978 г.