

Міністерство освіти і науки України  
Харківський Національний Університет імені В. Н. Каразіна  
Факультет математики і інформатики  
Кафедра фундаментальної математики

## **Кваліфікаційна робота**

освітньо-кваліфікаційний рівень: магістр

на тему:

**“Геометрія лінійних векторних полів та стійкість”**

Виконав: студент 2-го курсу магістратури

Групи М-162

напряму підготовки:

111-Математика

Спеціалізація: Математика

**Лазарашвілі І. Н.**

Керівник: доктор фіз.-мат. наук,

Проф. кафедри фонд. мат.,

**Ямпольський О.Л.**

Рецензент:

Підпис керівника:

**Харків - 2023 рік.**

## Зміст

Вступ .....	3
Розділ 1. Геометрія векторного поля в $\mathbb{R}^n$ та $S^n$ .....	8
1.1. Величина неголономності. Нормальна кривина та головні кривини векторного поля в $\mathbb{R}^n$ . .	8
1.2. Лінії потоку векторного поля.....	12
1.3. Повна (Гауссова) кривина другого роду в $\mathbb{R}^n$ .....	13
1.4. Узагальнення векторного поля на багатовимірний евклідов простір.....	16
Розділ 2. Сингулярні розкладання та “некласична” геометрія одиничних векторних полів. Стойкість систем диференціальних рівнянь. ....	19
2.1. Сингулярні числа, вектори. Їх геометричне застосування.....	19
2.2. Стойкість та її геометричний сенс. ....	22
Розділ 3. Приклади пов’язані з векторними полями.....	26
Висновок .....	59
Список використаних джерел: .....	61

## Вступ

Доволі часто при вивченні тих чи інших розділів геометрії впливає таке поняття, як векторні простори. Воно слугує незамінним інструментом для знаходження внутрішніх характеристик поверхонь. Прикладом тому є дотичні та одиничні нормальні векторні поля, які дають змогу знайти першу та другу квадратичні форми, довжини кривих на поверхні та інше. Проте, незважаючи на усю важливість цих понять, найчастіше розмова про їх властивості просто уникається. У такому випадку виникає декілька логічних питань: Чи можна у якості основного елементу розгляду обрати векторні поля? І якщо так, то яким чином їх досліджувати?

На щастя, відповідь на ці два питання є позитивною, адже завдяки старанням не одного покоління математиків, з'явився такий підрозділ геометрії, як “Геометрія векторного поля”. Основним предметом дослідження в цій науці, слугують векторні поля в різних просторах та їх характеристики.

Свій внесок у її розвиток зробили такі видатні науковці, як Гаусс, Каратеодорі та Боне. Перший з них (19 століття) відомий своїм вивченням електричних та магнітних векторних полів, введенням означення потенціалів та формулювання теореми Гаусса для електричних полів.

У тому ж 19 столітті, Джордж Грін опублікував наукову роботу “An Essay on the Theories of Electricity and Magnetism” (“Есе про застосування математичного аналізу до теорій електрики та магнетизму”), в якій вивчав рівняння потенціалів для електричних та магнітних полів. Теорема, що називається його іменем, є важливим результатом для векторних полів і встановлює зв'язок між криволінійним інтегралом по замкнутому контуру та подвійним інтегралом по області, обмеженій цим контуром, яка потім була узагальнена у 1849 році В. Томпсоном, і відома, як формула Стокса.

Інший англійський математик, Вільям Кінгдон Кліффорд став одним з засновників векторного аналізу, ввівши у подальшому сучасні означення

дивергенції та ротору. У 1885 ним було опубліковано наукову працю “Здоровий глузд у точних науках”, де він дав сучасне визначення скалярного добутку векторів.

Однак, один з найважливіших слідів у історії цієї науки зробив український математик 20-21 ст. Ю. А. Амінов, об’єднавши результати своїх попередників з власними у єдиний курс.

Однак, світ не стоїть на місці і тому деяким речам потрібно шукати нові шляхи застосування. Наприклад, зробити спробу якимось чином пов’язати основні поняття геометрії векторних полів зі стійкістю систем диференціальних рівнянь. Ця ідея випливає з того, що один з методів дослідження стійкості базується на розгляді лінійного векторного поля (а якщо точніше, то визначника матриці коефіцієнтів цього поля), що отримується шляхом “лінеаризації” правих частин тієї системи.

Слід одразу зазначити, що в подальшому для зручності будуть розглядатися лише одиничні векторні поля. Крім того, наявність чи відсутність зв’язку між векторними полями та стійкістю буде відігравати однаково важливу роль та вважатиметься для даної роботи гарним кінцевим результатом.

*Актуальність* цієї роботи полягає у відсутності в минулому схожих досліджень та подальшому розвитку цієї теорії на нелінійні одиничні векторні поля, як в евклідових так і ріманових просторах.

*Мета* даної науково-дослідницької дипломної роботи полягає в підтвердженні існування/не існування зв’язку між “геометрією” векторних полів та стійкістю систем диференціальних рівнянь, і можливо знаходження сфер використання отриманих результатів.

З отриманої мети можемо скласти завдання, які потрібно буде розглянути надалі:

1. Описати характеристики векторних полів в  $E^3$  за методом з курсу Ю. А. Амінова;
2. Коротко розглянути узагальнення для векторних полів на багатовимірний евклідів простір;
3. Проаналізувати “некласичний” метод розгляду одиничних векторних полів у ріманових просторах, зокрема в  $E^3$ ;
4. Дати означення стійкості та показати, який зв’язок з геометрією воно має;
5. Розглянути практичне використання двох методів знаходження характеристик векторних полів на тривимірних евклідових просторах та подальше порівняння отриманих результатів;
6. Пошук зв’язку/його відсутності між стійкістю та характеристиками раніше записаних, одиничних векторних полів.
7. Узагальнити кінцеві результати.

*Об’єктом дослідження* є одиничні лінійні векторні поля та стійкість, а *предметом* - існування/ не існування зв’язку між цими двома поняттями.

*Методи дослідження.* У відповідності до теми, мети та поставлених задач нами будуть використовуватися такі методи:

- Метод описаний в курсі Юрія Ахметовича Амінова;
- “Некласичний” метод (будується на розшаруваннях просторів);

*Гіпотеза дослідження:* Припустимо, що існує зв’язок між характеристиками одиничних лінійних векторних полів та стійкості систем диференціальних рівнянь.

*Теоретичне значення роботи* полягає в тому, що отримані в ній спостереження дадуть поштовх для подальшого дослідження цієї теми.

*Практичне значення роботи* - в можливості використання цієї роботи у якості прикладу для молодших студентів при вивченні даної теми.

*Наукова новизна* отриманих результатів полягає в намаганні переплести геометрію векторного поля та теорію диференціальних рівнянь, що скоріше за все ще не робилось саме таким чином. Основними отриманими результатами є:

- Відмінність між середніми кривинами для двох різних методів;
- Відсутність зв'язку між характеристиками одиничних лінійних векторних полів в  $E^2$  та  $E^3$  та стійкістю систем диф. рівнянь (настільки наскільки нам вдалося дослідити).

*Особистим вкладом автора* є твердження/висновок про те, що бажаного зв'язку так і не було знайдено, що отримується з практичної частини даної роботи.

Робота складається з основної частини, розділу з прикладами та додатку у вигляді файлу *Maple* в якому йде перевірка деяких наших розв'язків.

**Основна частина** складається з двох розділів:

1. Геометрія векторного поля в  $E^3$  та  $E^n$ ;
2. Сингулярні розкладання та “некласична” геометрія одиничних векторних полів. Стійкість систем диференціальних рівнянь.

Перший у свою чергу складається з чотирьох підрозділів:

1. Величина неголономності векторного поля. Нормальні та головні кривини першого роду;
2. Лінії потоку;
3. Повна кривина другого роду;
4. Узагальнення векторних полів на багатовимірний евклідів простір.

Другий розділ структурований наступним чином:

1. Сингулярні числа та вектори. Їх “геометричне” застосування;
2. Стійкість та її геометричний сенс.

Крім того, у роботі представлена невелика кількість прикладів для двовимірних та тривимірних евклідових просторів, з доволі доступними поясненнями розв'язань.

## Розділ 1. Геометрія векторного поля в $E^3$ та $E^n$

### 1.1. Величина неголономності. Нормальна кривина та головні кривини векторного поля в $E^3$ .

Як вже писали раніше цей розділ буде присвячений частині методів дослідження одиничного (лінійного) векторного поля описаних у книжці “Геометрія векторних полів” Ю. А. Амінова 1990р. публікації. Для початку потрібно згадати, що таке векторне поле та векторне розшарування.

*Векторне поле* – це вектор-функція, відображення, що ставить кожній точці даного простору у відповідність вектор. У більш складному випадку – для векторних просторів замість цього розглядається векторне розшарування.

*Векторне розшарування* – це узагальнення векторного поля на многовиди; певна геометрична конструкція, котра складається з сімейства векторних просторів, параметризованих іншим простором.

Наразі перейдемо до теми цієї дипломної роботи. Нехай в деякій області  $G$  - простору  $E^3$  задано одиничне векторне поле  $\xi$ . Будемо казати, що воно є голономним тоді і тільки тоді, коли існує сімейство поверхонь ортогональних цьому полю. І навпаки, поле  $\xi$  є неголономним, коли такого сімейства  $\nexists$ .

**Означення:** Великою неголономності називається наступна величина:

$$\rho = \langle \xi, \operatorname{rot} \xi \rangle ,$$

де  $\operatorname{rot} \xi$  - ротор векторного поля  $\xi$  (він характеризує обертальну здатність цього поля у заданій точці).

Якщо ж записувати голономність і неголономність через цю величину отримаємо, що поле  $\xi$  голономне, якщо  $\langle \xi, \operatorname{rot} \xi \rangle = 0$ , і неголономне, коли  $\langle \xi, \operatorname{rot} \xi \rangle \neq 0$ .

Як вже можна було зрозуміти, це поняття є однією з головних характеристик векторного поля, що безпосередньо впливає на частину подальших досліджень. Тому звернемося до наступного поняття, такого як - нормальна кривина. З курсу диференціальної геометрії нам відомо, що для поверхні вона геометрично

інтерпретується, як кривина нормального перерізу в деякій точці  $M$  за напрямом  $\tau$ . Або ж аналогічно це записується, як відношення другої квадратичної форми до першої:

$$k_n = \frac{\langle d^2r, n \rangle}{\langle dr, dr \rangle},$$

де  $n$  - нормаль у точці  $M$ ,  $r$  - радіус вектор. Якщо ж  $n$  є одиничним вектором нормалі, то нормальну кривину можна переписати у вигляді:

$$k_n = - \frac{\langle dr, dn \rangle}{\langle dr, dr \rangle}.$$

Однак, виявляється для одиничного векторного поля теж можна шукати нормальну кривину. Нехай, як і раніше  $G$  - область в  $E^3$ ,  $M_0$  - точка цієї області, а  $\xi$  - довільне регулярне одиничне векторне поле. Через точку  $M_0$  проведемо площину, що ортогональна до  $\xi(M_0)$ . Зміщуючись з точки  $M_0$  у довільну точку  $M$  отримаємо вектор  $M_0M$  який позначимо, як  $dr$ . Маючи це, можна провести ще одну площину, але через вектори  $dr$  та  $\xi(M_0)$ . Ці площини будуть ортогональними одна одній. Так як, довільна точка  $M$  теж належить області  $G$ , то через неї теж проходить вектор з векторного поля  $\xi$ . Позначимо його, як  $\xi(M)$ . Взагалі, цей вектор не є обов'язково ортогональним до першої площини і так само не обов'язково лежить у другій. Тоді через  $\bar{\xi}(M)$  позначимо проекцію  $\xi(M)$  на площину, що утворена з  $dr$  та  $\xi(M_0)$ . Можна побачити, що тоді  $\bar{\xi}(M)$  та  $\xi(M_0)$  утворюють кут. Позначимо його  $\varphi$ . Тоді:

**Означення:** Нормальною кривиною векторного поля  $\xi$  у напрямку  $dr$  називають наступне відношення:

$$k_n = - \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{\varphi}{|dr|}.$$

Якщо ж кут  $\varphi = 0$ , тобто  $\xi(M_0)$  та  $\bar{\xi}(M)$  - колінеарні, то  $k_n = 0$  і таке поле називається постійним.

У випадку, коли одиничне векторне поле є голономним, тоді є можливість встановити зв'язок між нормальною кривиною в геометрії векторного поля і диференціальною геометрією.

$k_n = -\frac{\langle d\xi, dr \rangle}{(dr)^2}$  - нормальна кривина голономного векторного поля.

Ця величина є залежною від напрямку  $dr$ . Обертаючи  $dr$  у площині ортогональній  $\xi(M_0)$ , воно змінюється, як неперервна функція від напрямку та може досягати екстремальних значень. З цього екстремальними значеннями нормальної кривини будемо називати – головні кривини першого роду, а екстремальні напрямки – головними напрямками першого роду.

Основною задачею тут буде отримання формул середньої та повної кривин, знаючи нормальні головні кривини, тому знаходження головних напрямків буде пропущено.

Розпишемо нормальну кривину в локальних координатах. Нехай  $x_1, x_2, x_3$  декартові координати в  $E^3$ ,  $dr = \{dx_1, dx_2, dx_3\}$  - якийсь напрямок. Саме векторне поле приймає вигляд:

$$\begin{aligned} \xi &= \{\xi_1(x_1, x_2, x_3), \xi_2(x_1, x_2, x_3), \xi_3(x_1, x_2, x_3)\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow d\xi = \{d\xi_1, d\xi_2, d\xi_3\} = \\ &= \{\xi_{1x_1}dx_1 + \xi_{1x_2}dx_2 + \xi_{1x_3}dx_3, \xi_{2x_1}dx_1 + \xi_{2x_2}dx_2 + \xi_{2x_3}dx_3, \xi_{3x_1}dx_1 + \xi_{3x_2}dx_2 + \xi_{3x_3}dx_3\}. \end{aligned}$$

Отже нормальна кривина записується в локальних координатах наступним чином:

$$\begin{aligned} k_n &= -[\xi_{1x_1}dx_1^2 + (\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1})dx_1dx_2 + \xi_{2x_2}dx_2^2 + (\xi_{1x_3} + \xi_{3x_1})dx_1dx_3 + \\ &\quad + (\xi_{2x_3} + \xi_{3x_2})dx_2dx_3 + \xi_{3x_3}dx_3^2]/(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2). \end{aligned}$$

Маючи це, будемо шукати головні нормальні кривини. Оберемо вісі в  $E^3$  так, щоб в точці  $M_0$ :  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ . З того, що векторне поле є одиничним, то  $\xi_3 = \sqrt{1 - \xi_1^2 - \xi_2^2}$ . У точці  $M_0$  маємо:  $\xi_{3x_i} = (1)_{x_i} = 0, \forall i = \overline{1,3}$ .

Нехай напрям  $dr$  обраний таким чином, що він лежить у площині ортогональній до  $n(M_0)$  і крім того,  $|dr| = 1$ . Отже:

$$dr = \{dx_1, dx_2, 0\} \Rightarrow |dr|^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = 1 \Rightarrow k_n = -(\xi_{1x_1}dx_1^2 + (\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1})dx_1dx_2 + \xi_{2x_2}dx_2^2).$$

Для знаходження екстремальних значень цієї функції скористаємося методом множників Лагранжа.

$$\xi_{1x_1} dx_1^2 + (\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1}) dx_1 dx_2 + \xi_{2x_2} dx_2^2 + \lambda(dx_1^2 + dx_2^2) = 0.$$

Розділимо рівність на дві частини. Те, що при  $dx_1$  та те, що при  $dx_2$ . Це має вигляд:

$$(\xi_{1x_1} + \lambda) dx_1 + \frac{(\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1})}{2} dx_2 = 0;$$

$$(\xi_{2x_2} + \lambda) dx_2 + \frac{(\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1})}{2} dx_1 = 0.$$

Отримали систему двох рівнянь. Виписавши визначник цієї системи, отримаємо характеристичне рівняння для  $\lambda$ :

$$\lambda^2 + \lambda(\xi_{1x_1} + \xi_{2x_2}) + \xi_{1x_1}\xi_{2x_2} - \left(\frac{\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1}}{2}\right)^2 = 0.$$

Шукаємо корені цього рівняння:

$$D = (\xi_{1x_1} + \xi_{2x_2})^2 - 4\left(\xi_{1x_1}\xi_{2x_2} - \left(\frac{\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1}}{2}\right)^2\right) = \xi_{1x_1}^2 + \xi_{2x_2}^2 - 2\xi_{1x_1}\xi_{2x_2} + (\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1})^2 =$$

$$= (\xi_{1x_1} + \xi_{2x_2})^2 + (\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1})^2 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{(\xi_{1x_1} + \xi_{2x_2})^2 + (\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1})^2};$$

$$\lambda_1 = \frac{-(\xi_{1x_1} + \xi_{2x_2}) + \sqrt{(\xi_{1x_1} + \xi_{2x_2})^2 + (\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1})^2}}{2};$$

$$\lambda_2 = \frac{-(\xi_{1x_1} + \xi_{2x_2}) - \sqrt{(\xi_{1x_1} + \xi_{2x_2})^2 + (\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1})^2}}{2}.$$

Як можна було побачити матриця побудована з тих рівнянь системи є симетричною, а тому корені характеристичного рівняння є дійсними числами. Отримані  $\lambda_1$  і  $\lambda_2$  є екстремальним значеннями, а отже і будуть називатися головними нормальним кривинами.

Знаючи все це, нарешті можемо записати формули для середньої та повної кривин (записані відповідно):

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = -\frac{1}{2}(\xi_{1x_1} + \xi_{2x_2});$$

$$K_1 = \lambda_1\lambda_2 = \xi_{1x_1}\xi_{2x_2} - \left(\frac{\xi_{1x_2} + \xi_{2x_1}}{2}\right)^2.$$

Наостанок, дамо характеристику точці в залежності від величини Гауссової кривини:

- Якщо ,  $K_1 > 0$  тоді точка  $M_0$  - еліптична;

- Якщо,  $K_1 = 0$  тоді  $M_0$  - параболічна;
- Якщо,  $K_1 < 0$  тоді  $M_0$  - гіперболічна.

Слід зауважити, що формули знаходження головних нормальних, середньої та повної кривин можна використовувати і у випадку неголономності (див. Приклад № 2).

## 1.2. Лінії потоку векторного поля.

З деяких курсів, пов'язаних з диференціальними рівняннями нам відоме таке поняття, як інтегральна крива. Геометрично вона будувалась, як дотична до поля напрямків для диференціального рівняння. Аналітично – вона представляла собою розв'язок ЗДР або системи рівнянь. Проте, до чого це тут? Виявляється, щось доволі схоже існує і в геометрії векторних полів на  $E^3$ .

**Означення:** Лінією потоку деякого векторного поля  $n$  називають лінію, що в кожній своїй точці дотикається до цього векторного поля.

Кривиною лінії потоку називають наступну величину:

$$k = -[n, \text{rot } n].$$

Ця величина є довжиною вектора кривини лінії потоку, що напрямлений за головною нормаллю лінії потоку.

Розглянемо вірність цієї рівності за допомогою переходу до декартових координат. Нехай  $x_1, x_2, x_3$  - декартові координати в  $E^3$ ,  $n: \xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3); i = \overline{1,3}$ . Покажемо, що означення цієї кривини є коректно заданим. Позначимо через  $\frac{d}{ds}$  диференціювання по довжині дуги лінії потоку поля  $n$ . Кривина записується в звичайному вигляді:  $k = \frac{dn}{ds} = n_{x_i} \cdot \xi_i = \xi_i \cdot \xi_{jx_i}; j = \overline{1,3}$ .

З іншого боку, розпишемо  $-[n, \text{rot } n]$  у локальних координатах. Перша компонента:

$$\begin{aligned} -[n, \text{rot } n] &= \xi_2(\xi_{1x_2} - \xi_{2x_1}) - \xi_3(\xi_{1x_3} - \xi_{3x_1}) = \xi_2\xi_{1x_2} - \xi_2\xi_{2x_1} - \xi_3\xi_{1x_3} + \xi_3\xi_{3x_1} = \\ &= \xi_i \cdot \xi_{1x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2) = \xi_i \cdot \xi_{1x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (|n|) = \xi_i \cdot \xi_{1x_i} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (1) = \xi_i \cdot \xi_{1x_i}; \end{aligned}$$

Порівнявши перші компоненти  $k$  та  $-[n, \operatorname{rot} n]$  отримуємо потрібний результат.

У подальшому спробуємо пов'язати лінії потоку векторного поля зі стійкістю розв'язку систем диференціальних рівнянь (геометрично розв'язок ЗДР або системи диф рівнянь є інтегральною кривою, що і нашоюхує на присутність схожості між цими поняттями).

### 1.3. Повна (Гауссова) кривина другого роду в $E^3$

Останнім важливим елементом в  $E^3$  для даної роботи елементом, що потрібно підкреслити - є повна кривина другого роду. Її можна задати двома способами. Перший з них базується на відображенні на одиничну за нормою сферу в  $E^3$ .

Отже, нехай  $M_0$  точка в області  $G$ ,  $n$  - векторне поле. Як і в розділі 1.2 у цій точці задамо площину, що ортогональна деякому вектору  $n(M_0)$  поля  $n$ . Відобразимо окіл точки  $M_0$  із заданої площини на одиничну сферу  $S^2$  за допомогою цього поля.

**Означення:** Повною кривиною  $K$  2-го роду називається границя відношення площі образу на  $S^2$  до площі прообразу, коли площа прообразу стягується до нуля.

Тобто:

$$K = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta S}.$$

На жаль, дане означення не дає чіткого розуміння, як знаходиться повна кривина другого роду для векторних полів. Тому, як і раніше перейдемо до локальних координат. Нехай  $x_1, x_2, x_3$  - декартові координати в  $E^3$ ,  $n: \xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3)$ ;  $i = \overline{1,3}$ .

Окремо розглянемо два випадки: для голономних та неголономних векторних полів відповідно.

1. Голономний випадок: Нехай у нас є деяка поверхня і на ній задані криво-лінійні координати  $(u, v)$ , ортогональна полю  $n$ ,  $x(u, v)$  - радіус вектор цієї площини. Крім того, нехай координати обрані так, що  $x_u, x_v, n$  - складають систему з трьох ортогональних векторів, що виходять з однієї точки. Через  $Wdudv$  позначимо елемент площі поверхні.

$$K = \frac{(n_u, n_v, n)}{W} = \frac{1}{W} \left\{ (n_{x_1}, n_{x_2}, n) \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial v} - \frac{\partial x_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial u} \right) + \right. \\ \left. + (n_{x_2}, n_{x_3}, n) \cdot \left( \frac{\partial x_2}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial v} - \frac{\partial x_2}{\partial v} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial u} \right) + (n_{x_3}, n_{x_1}, n) \cdot \left( \frac{\partial x_3}{\partial u} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial v} - \frac{\partial x_3}{\partial v} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial u} \right) \right\}.$$

Трішки скоротимо запис:

$$n := \frac{[x_u, x_v]}{W};$$

$$P := \{(n_{x_1}, n_{x_2}, n), (n_{x_2}, n_{x_3}, n), (n_{x_3}, n_{x_1}, n)\}.$$

Отож можемо записати повну кривину 2-го роду наступним чином:

$$K = (P, n), \text{ де } P \text{ та } n \text{ такі, як зазначено вище.}$$

Далі можна виразити повну кривину через компоненти колінеарного до  $n$  вектора, який можна потім замінити на градієнт якоїсь поверхні з сімейства ортогональних поверхонь до векторного поля і отримати формулу Неймана для Гауссової кривини. На жаль, у нас на це немає достатньо часу, тому перейдемо одразу до другого випадку.

2. Нехай векторне поле  $n$  не є голономним. Як далі буде показано повну кривину можна задати аналогічним способом, як для голономного випадку, але з деякими відмінностями. Звідки  $x_1, x_2, x_3$  - декартові координати в  $E^3$ ,  $n: \xi_i = \xi_i(x_1, x_2, x_3); i = \overline{1,3}$ .  $F$  - поверхня,  $(\alpha, \beta)$  - координати на ній. Нехай  $v$  якась нормаль поверхні, індукована її координатами. Відобразимо поверхню на одиничну сферу тривимірного простору, ставлячи у відповідність кожній точці  $M \in F$  кінець вектора  $n(M)$  на сфері. Позначимо відображення через  $\psi$ .

$$d\sigma = (n_\alpha, n_\beta, n) - \text{елемент площі одиничної сфери.}$$

У локальних координатах:

$$(n_\alpha, n_\beta, n) = \left\{ (n_{x_1}, n_{x_2}, n) \cdot \left( \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \beta} - \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \beta} \right) + (n_{x_2}, n_{x_3}, n) \cdot \left( \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \beta} - \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial \beta} \right) + (n_{x_3}, n_{x_1}, n) \cdot \left( \frac{\partial x_3}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial \beta} - \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial x_3}{\partial \beta} \right) \right\}.$$

Нехай  $v_i$  компонента  $v$ ,  $ds$  - елемент площі  $F$ . З двох попередніх рівностей:  $d\sigma = (P, v)dS \Rightarrow (P, v) = \frac{d\sigma}{dS}$ . Перепозначимо та спрямуємо до нуля площу сферичного образу. Маємо:  $\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta\sigma}{\Delta S} \right) = (P, v)$ . У такому випадку  $P$  визначається полем  $n$  та називається вектором кривини  $n$ .

Означення повної кривини другого роду можна задати ще за допомогою рівняння Родріга. Розглянемо наступну рівність:

$$dn = -\lambda dx.$$

У загальному випадку, якщо поле  $n$  довільне, то така рівність може не мати нетривіальних розв'язків. Запишемо рівняння на  $\lambda$ :

$$\det \left\| \xi_{ix_j} + \lambda \delta_{ij} \right\| = 0.$$

Два корені цієї рівності задовольняють характеристичному рівнянню:

$$\lambda^2 + \lambda(\xi_{1x_1} + \xi_{2x_2} + \xi_{3x_3}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\xi_{ix_i} \xi_{jx_j} - \xi_{ix_j} \xi_{jx_i}) = 0.$$

Як і для нормальних кривин першого роду, розв'язки цього рівняння аналогічно будемо називати нормальними кривинами другого роду. Проте на відміну від тих нормальних кривин ці можуть бути і комплексними, якщо  $dn = -\lambda dx$  не є розв'язним в дійсних числах.

Крім того, тут є ще один корінь  $\lambda = 0$  - тривіальний тому, що  $\det \left\| \xi_{ij} \right\|$  - це якобіан відображення тривимірної поверхні на сферу  $S^2$ , (тобто  $\det \left\| \xi_{ij} \right\| = 0$ ). Але він нам нічого не дає тому він не буде розглядатися далі.

Отримавши все це можемо записати середню та повну кривини другого роду:

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = \frac{1}{2} \operatorname{div} n;$$

$$K = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\xi_{ix_i} \xi_{jx_j} - \xi_{ix_j} \xi_{jx_i}). \quad (+)$$

Крім того, хотілося б зазначити, що порівнявши формули параграфу 1.2 з формулами записаними тут можна побачити, що повна кривина першого і другого роду мають відмінності, в той час коли відповідні середні кривини співпадають. Однак це буде показано вже в практичній частині цієї роботи.

Не зважаючи на те, що є і інші формули для знаходження повної кривини другого роду у подальших розв'язках ми будемо користуватися формулою (+).

#### 1.4. Узагальнення векторного поля на багатовимірний евклідів простір.

Перед тим, як перейти до іншого методу дослідження векторних полів, для кращого розуміння слід розглянути векторні поля в більш загальному випадку евклідових просторів. А саме звернемось до просторів  $E^{m+1}$ , де  $m + 1 > 3$ .

Нехай  $G$  – як і раніше область у заданому просторі. У цій області задане регулярне одиничне векторне поле  $\xi$ .  $M \in G$  - точка області така, що  $\exists \xi(M)$ . Тоді для будь-якого напрямку  $dr$  з даної точки  $M$  ортогонального до  $\xi(M)$ , визначимо нормальну кривину:  $k_n = -\frac{(d\xi, dr)}{(dr)^2}$ .

Важливо пам'ятати, що на відміну від всього того, що розглядалося для  $E^3$ , розрахунки в  $E^{m+1}$  будуть більш складними і громіздкими, саме тому розв'язки будуть записані з деякими скороченнями, що не вплине на розв'язок.

Наразі визначимо, що таке кривини першого роду в багатовимірному евклідовому просторі. Отож екстремальні значення нормальної кривини, як і раніше будемо називати головними кривинами першого роду, а напрямки  $dr$  - головними напрямками першого роду (напрямки нам не важливі, тому їх пошук буде пропущено).

Подальший порядок дій буде повністю аналогічним знаходженню головних нормальних кривин в  $E^3$ . Знайдемо головні кривини першого роду за допомогою

координат в просторі  $E^{m+1}$ . Нехай  $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$  - декартові координати  $E^{m+1}$ , а  $e_1, \dots, e_{m+1}$  - координатні одиничні орти (базис). Векторне поле  $\xi$  записується у вигляді:  $\xi: \xi_i = \xi_i(x_1, \dots, x_{m+1}); i = \overline{1, m+1}$ . Щоб не нагромаджувати записи, будемо позначати похідні елементів  $\xi_i$ , як:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} = \xi_j^i.$$

Як і раніше, оберемо декартову систему так, щоб останній координатний орт (а саме  $e_{m+1}$ ) був сонепрямлений з  $\xi(M)$ . Тоді з умови ортогональності  $dr$  і  $\xi(M)$ , випливає, що остання координата в  $dr$  дорівнює нулю. Тобто:  $dr = \{dx_1, \dots, dx_m, 0\}$ .

Для знаходження екстремальних значень цієї функції скористаємося методом множників Лагранжа та розділимо на частини при  $dx_1, \dots, dx_m$ :

$$(\xi_1^1 + \lambda)dx_1 + \frac{\xi_2^1 + \xi_1^2}{2}dx_2 + \dots + \frac{\xi_m^1 + \xi_1^m}{2}dx_m = 0;$$

$$\frac{\xi_2^1 + \xi_1^2}{2}dx_1 + (\xi_2^2 + \lambda)dx_2 + \dots + \frac{\xi_m^2 + \xi_2^m}{2}dx_m = 0;$$

.....

$$\frac{\xi_m^1 + \xi_1^m}{2}dx_1 + \frac{\xi_m^2 + \xi_2^m}{2}dx_2 + \dots + (\xi_m^m + \lambda)dx_m = 0.$$

Звідки можемо побачити, що якщо шукати розв'язок цієї системи у вигляді матриці, то отримаємо, що  $\lambda_i$  (і-ті нормальні кривини) знаходяться через характеристичне рівняння (вони є коренями характеристичного полінома або ж власними числами цієї матриці):

$$\left| \lambda \delta_{ik} + \frac{\xi_k^i + \xi_i^k}{2} \right| = 0.$$

З того, що матриця  $\Sigma = \left\{ \frac{\xi_k^i + \xi_i^k}{2} \right\}_{i,k=1,m}$  симетрична випливає, що  $\lambda_i$  - дійсні числа.

Тут виникає питання: Чи можливо, як у випадку тривимірного евклідового простору задати формули для повної кривини в  $E^{m+1}$ ? Якщо коротко, то – так. Це можна це зробити наступним чином.

Позначимо через  $\sigma_k$ ,  $k$ -ту симетричну функцію від головних кривин першого роду. Записується вона наступним чином:

$$\sigma_k = (-1)^k \sum_{1 < i_1 < \dots < i_k} \begin{bmatrix} \xi_{i_1}^{i_1} & \dots & \frac{\xi_{i_k}^{i_1} + \xi_{i_1}^{i_k}}{2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\xi_{i_k}^{i_1} + \xi_{i_1}^{i_k}}{2} & \dots & \xi_{i_k}^{i_k} \end{bmatrix}$$

Симетричні функції є свого роду узагальненням формули для знаходження Гауссової кривини (Формула для середньої кривини залишається без змін:  $H = -\frac{1}{2} \operatorname{div} \xi$ ). Аналогічно компоненти повної кривини можна записати, як:

$$K^{[1]} = -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m) = -\sum_{i=1}^m \lambda_i;$$

$$K^{[2]} = \sum_{i < j} \lambda_i \lambda_j;$$

.....

$$K^{[m]} = (-1)^m \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m.$$

Існує ще один спосіб знаходження нормальних кривин та пов'язаних з ними головних напрямків. Якщо скористатися рівнянням Родріга:  $dn = -dr$ , (як і до цього  $dr$  ортогонально  $n$ ), то можна отримати нормальні кривини другого роду та нормальні напрямки теж другого роду. Але зараз це не дуже важливо, тому пропустимо цю частину і одразу запишемо формулу для симетричних функції від головних кривин другого роду:

$$S_k = (-1)^k \sum_{1 < i_1 < i_2 < \dots < i_k} \begin{bmatrix} \xi_{i_1}^{i_1} & \dots & \xi_{i_k}^{i_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{i_1}^{i_k} & \dots & \xi_{i_k}^{i_k} \end{bmatrix};$$

де  $S_k$  –  $k$ -та симетрична функція,  $k = \overline{1, m+1}$ .

## Розділ 2. Сингулярні розкладання та “некласична” геометрія одиничних векторних полів. Стійкість систем диференціальних рівнянь.

### 2.1. Сингулярні числа, вектори. Їх геометричне застосування.

Наразі, трошки відволічемося від геометрії та поговоримо про сингулярне розкладання. Воно є важливим елементом лінійної алгебри та числового аналізу.

Нехай задана матриця  $A$  – розміру  $m \times n$  з елементами з  $\mathbb{R}$  або  $\mathbb{C}$  ( $m, n \in \mathbb{N}; m, n > 1$ ). Головне, що нам хотілося б дізнатися про матрицю такого вигляду – це те, якими характеристиками та властивостями вона наділена.

**Означення:** Сингулярним розкладом матриці  $A$  називається наступне представлення:

$$A = P\Delta Q^*;$$

де  $P$  – унітарна матриця розміру  $m \times m$ , або ж:  $P \in M_{m,m}$ ;  $Q \in M_{n,n}$  – унітарна<sup>[1]</sup> матриця.

У свою чергу  $\Delta$  – це діагональна матриця ( $\Delta$  має ту саму розмірність, що і матриця  $A$ , тобто  $\Delta \in M_{m,n}, M_{m,n}$ <sup>[2]</sup>), діагональними елементами, якої є  $\{\lambda_i\}_{i=1,q}$ ,  $q = \min(m, n)$  – невід’ємні квадратні корені власних чисел матриці  $AA^t$ . З іншого боку, стовпці матриці  $P$  є власними векторами  $AA^t$ , а стовпці матриці  $Q$  – власними векторами  $A^tA$  і називаються лівим та правим сингулярними векторами матриці відповідно. Величини  $\lambda_i$  у такому випадку називаються сингулярними значеннями  $A$ . Крім того, мають виконуватися умови:  $A^t p_i = \lambda_i q_i$  та  $A q_i = \lambda_i p_i$ , де  $p_i$  і  $q_i$  – стовпці матриць  $P$  і  $Q$  відповідно,  $i = \overline{1, k}$ .

Це поняття знаходить практичне застосування в таких областях, як: обробка сигналів та зображень, машинному навчанні та оптимізації. Однак, нас буде

цікавити використання отриманих знань про сингулярні розкладання до геометрії векторних полів. Далі частково буде розглянутий метод розглядання характеристик одиничних векторних полів (для нашого випадку і лінійних), що описується в роботі О. Л. Ямпольського. Цей метод заснований на використанні векторних розшарувань до гіперповерхонь в ріманових просторах (а саме дотичних та нормальних векторних розшарувань).

Нехай  $(M, g)$  - рімановий многовид розмірності  $(n + 1)$ , де  $g$  - ріманова метрика. Через  $\langle \cdot, \cdot \rangle := g(\cdot, \cdot)$  позначимо скалярний добуток відносно ріманової метрики  $g$ , а через  $\nabla$  - зв'язність (афінна) Леві-Чевіта на многовиді  $M$ .

**Означення:** Оператором Номідзу для одиничного векторного поля називається оператор, що відповідає наступній умові:

$$A_\xi X = -\nabla_X \xi, \text{ де } \nabla_X(*) \text{ - коваріантна похідна за напрямом } X.$$

У якості матриці  $A$  візьмемо оператор Номідзу  $A_\xi$  та скористаємося означенням сингулярного розкладу. З чого отримуємо, що:  $A_\xi^t \xi = 0$  (адже  $\lambda_0 = 0$ ). Знайшовши сингулярні значення  $\lambda_i$  матриці  $A_\xi$  можемо знайти сингулярні вектори  $e_0, e_1, \dots, e_n$  та  $f_1, f_2, \dots, f_n$ . Вони існують і утворюють ортонормовані репери виду  $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$  і  $(f_0 = \xi, f_1, f_2, \dots, f_n)$  такі, що виконуються наступні умови:

$$A_\xi^t \xi = 0, A e_0 = \lambda_0 e_0 = 0, A^t e_i = \lambda_i f_i \text{ та } A f_i = \lambda_i e_i$$

Наразі можемо виписати формулу для компонентів середньої кривини:

$$(n + 1)H_\sigma = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_\sigma^2}} \left( - \langle (\nabla_{e_0} A_\xi) e_0, f_\sigma \rangle + \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda_\sigma^2}} \sum_{i=1}^n \frac{-\langle (\nabla_{e_i} A_\xi) e_i, f_\sigma \rangle + \lambda_\sigma \lambda_i \langle R(e_\sigma, e_i), f_i \rangle}{1 + \lambda_i^2} \right),$$

де  $\sigma = \overline{1, n}$ ;  $\lambda_i$  - сингулярні значення матриці  $A_\xi$ ,  $i = \overline{1, n}$ ;  $R(\cdot, \cdot)$  - тензор кривини.

Крім того, як і раніше хотілося б знайти головні нормальні кривини. З курсу диференціальної геометрії знаємо, що елементи матриці оператора Вейнгартена є компонентами нормальної кривини, а сама матриця знаходиться наступним чином:

$$A = g^{-1} \cdot \Omega,$$

де  $g^{-1}$  - обернена до матриці першої квадратичної форми, а  $\Omega$  - матриця другої квадратичної форми. Тому запишемо формули для компонент першої та другої фундаментальних форм:

1. I-ша квадратична форма:

$$\bar{g}(\xi_*X, \xi_*Y) = g(X, Y) + g(A_\xi X, A_\xi Y),$$

де  $\xi_*X$  - розкладання векторного поля  $X$  за компонентами на поверхні та на дотичному розшаруванні цієї поверхні (якщо коротко, то  $\xi_*X = X + (\nabla_X \xi)$ ).

2. II-га квадратична форма:

$$\Omega_{\sigma 00} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}} (- \langle (\nabla_{e_0} A_\xi) e_0, f_\sigma \rangle);$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\sigma i0} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2} \sqrt{1+\lambda_i^2}} (- \langle (\nabla_{e_i} A_\xi) e_0 + (\nabla_{e_0} A_\xi) e_i, f_\sigma \rangle) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2} \sqrt{1+\lambda_i^2}} \lambda_\sigma \lambda_i \langle R(e_\sigma, e_0) \xi, f_i \rangle; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\sigma ij} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2} \sqrt{1+\lambda_i^2} \sqrt{1+\lambda_j^2}} (- \langle (\nabla_{e_i} A_\xi) e_j + (\nabla_{e_j} A_\xi) e_i, f_\sigma \rangle) + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2} \sqrt{1+\lambda_i^2} \sqrt{1+\lambda_j^2}} (\lambda_\sigma \lambda_i \langle R(e_\sigma, e_j) \xi, f_i \rangle + \lambda_\sigma \lambda_j \langle R(e_\sigma, e_i) \xi, f_j \rangle); \end{aligned}$$

де  $\sigma, i, j = \overline{1, n}, R(e_\sigma, e_i)\xi$  [\[3\]](#).

Для часткового випадку ріманових просторів, а саме  $E^m, m \in \mathbb{N}$  ці формули трохи спрощуються (можна буде побачити в практичній частині).

## 2.2. Стійкість та її геометричний сенс.

Останнє про, що залишилося згадати перед початком практичної частини - це стійкість систем диференціальних рівнянь.

Отож нехай задана система рівнянь:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n); i = \overline{1, n},$$

для якої всі  $f_i$  та  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  є неперервними при  $t \in [t_0, \infty)$ .

**Означення:** Кажуть, що розв'язок  $x = \varphi(t)$  цієї системи є стійким за Ляпуновим, якщо  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ , таке що для будь-якого розв'язку  $x(t)$  початкове значення виконується нерівність:

$$|x(t_0) - \varphi(t_0)| < \delta, \text{ та при } t \geq t_0: |x(t) - \varphi(t)| < \varepsilon.$$

Якщо ж ця умова не виконується, то розв'язок відповідно є нестійким.

**Означення:** Асимптотично стійким розв'язок  $x = \varphi(t)$  системи, називається тоді коли він є стійким за Ляпуновим та при  $t \rightarrow \infty \Rightarrow x(t) - \varphi(t) \rightarrow 0$ . Аналогічно, якщо це не виконується, то розв'язок є нестійким.

При такому розгляді стійкість перевіряється для довільного розв'язку  $x = \varphi(t)$ , однак на практиці найчастіше зустрічається дослідження нульового розв'язку  $y(t) = 0$ , тому для вище записаних означень слід зробити перехід  $x(t) - \varphi(t) = y(t)$ .

Узагальнюючи вище написане, можна сказати, що якщо система диференціальних рівнянь є стійкою, то невеликі зміни в початкових умовах призводять до незначних змін у розв'язку системи, і навпаки, якщо вона є нестійкою, то навіть невеликий зсув призводить до не прогнозованої поведінки розв'язку.

Як відомо існує декілька основних/найвідоміших методів дослідження розв'язків систем диференціальних рівнянь:

1. Дослідження за першим наближенням;
2. Дослідження за допомогою функції Ляпунова.

*Дослідження стійкості розв'язку за першим наближенням.* Нехай, як і раніше:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) - \text{система диференціальних рівнянь,}$$

де  $i = \overline{1, n}$ ;  $f_i$  та  $\frac{\partial f_i}{\partial x_k}$  – неперервними при  $t \in [t_0, \infty)$  та  $x(t) \equiv 0$  – її розв'язок.

Наразі виділимо лінійні частини з кожного  $f_i$ . Це можна зробити як напряду (якщо вони мають простий вигляд, наприклад – поліном), так і за допомогою рядів Тейлора в околі  $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ . Підставивши в початкові рівняння замість старих правих частин, нові – лінеаризовані, отримаємо більш просту систему диференціальних рівнянь.

Наступна теорема дасть відповідь на те, як досліджувати спрощені/з лінеаризованою правою частиною системи на стійкість/нестійкість.

**Теорема: (Ляпунов)** Нехай дана система:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + \eta_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

де  $a_{ij}$  – постійні величини,  $\eta_i$  – нескінченно малі порядку  $>1$  такі, що при  $|x| < \varepsilon_0$ :

$$|\eta_i| \leq \gamma(x) \cdot |x|, \forall i = \overline{1, n}; \gamma(x) \rightarrow 0 \text{ при } |x| \rightarrow 0,$$

де  $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ .

Тоді якщо всі власні значення матриці  $(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ , мають від'ємні дійсні частини, то нульовий розв'язок початкової системи (записаної в умові теореми) є асимптотично стійким. У свою чергу, якщо хоча б одне з власних чисел має додатну дійсну частину, то розв'язок – нестійкий.

Так як, ця теорема є лише нагадуванням того, що було вивчено під час навчання на попередніх курсах, будемо вважати, що доведення нам відоме і не потребує повторного запису.

Дослідження за допомогою функції Ляпунова. Нехай у нас є деяка функція  $v(t, x_1, \dots, x_n)$ , в силу початкової системи, яка задовольняє умові:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} f_2 + \dots + \frac{\partial v}{\partial x_n} f_n,$$

де  $i = \overline{1, n}$   $f_i$  - праві частини системи:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n).$$

**Теорема 1:** Якщо існує диференційовна функція  $v(t, x_1, \dots, x_n)$ , що в області  $|x| < \varepsilon_0$  задовольняє умовам:

1.  $v > 0$  при  $x \neq 0$ ,  $v(0) = 0$ ;
2.  $\frac{dv}{dt} \leq 0$  при  $|x| < \varepsilon_0$ ,  $t > t_0$ .

У такому випадку, нульовий розв'язок системи стійкий за Ляпуновим.

Якщо ж замість умови (2) виконується наступна:

3.  $\frac{dv}{dt} \leq -w(x) < 0$ , при  $0 < |x| < \varepsilon_0$ ,  $t > t_0$ , де  $w(x)$  - неперервна функція на  $|x| < \varepsilon_0$ , то нульовий розв'язок системи асимптотично стійкий.

З іншого боку, якщо ці умови не виконуються, чи можна сказати, що розв'язок є нестійким? Відповідь на це можна представити у вигляді наступної теореми.

**Теорема 2:** Нехай задана та сама система диференціальних рівнянь, що і раніше і вона має нульовий розв'язок. Нехай  $x_1, x_2, \dots, x_n$  задають простір, в деякій області  $V$  якого, існує диференційовна функція  $v(t, x_1, \dots, x_n)$  така, що:

1.  $x = 0$  належить границі  $V$ , де  $x = (x_1, \dots, x_n)$  - векторне подання;
2.  $v = 0$  на границі  $V$  при  $|x| < \varepsilon_0$ ;
3. в області  $V$  при  $t > t_0$  маємо:  $v > 0$ ,  $\frac{dv}{dt} \geq w(x) > 0$ , де  $w(x)$  - неперервна функція.

Надалі, з орієнтації на зручність будемо користуватись саме дослідженням систем диференціальних рівнянь на стійкість/нестійкість за першим наближенням, адже не існує загального методу побудови функції Ляпунова.

Поглянемо на все це з іншого боку. Нехай нам дана та сама система диференціальних рівнянь, що і на початку параграфа. Тобто:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \dots, x_n), \text{ де } i = \overline{1, n}; n \in \mathbb{N}.$$

Геометрично, праві частини цих рівнянь, утворюють довільне векторне поле в  $E^n$ , що залежить від функцій  $f_i$  та змінних  $x_1, \dots, x_n$ .

Якщо ж застосувати метод першого наближення до системи, то праві частини тих рівнянь лінеаризуються, а отже отримані з них векторні поля стають лінійними за  $x_1, \dots, x_n$ .

Це наводить на думку, що стійкість якимось чином можна пов'язати з характеристиками векторних полів (в особливості нас цікавлять одиничні лінійні векторні поля та просто лінійні векторні поля). Однак, завдяки тому, що дана робота є дослідницькою нас влаштує і результат при, якому не буде знайдено жодного зв'язку між цими двома поняттями. Тому надалі у прикладах ми постараємося довести або спростувати його наявність.

### Розділ 3. Приклади пов'язані з векторними полями.

Розберемо декілька прикладів, щоб внести трішки ясності у все вище записане. Предметом розгляду будуть слугувати одиничні лінійні векторні поля.

Перші декілька прикладів будуть описувати так званий “класичний” метод розгляду характеристик векторних полів (Ю. А. Амінов – Геометрія векторного поля).

Як раніше вже було записано нашою головною метою є підтвердження/спростування зв'язку між стійкістю систем диференціальних рівнянь з різними характеристиками векторних полів, адже через своєрідну новизну цієї теми результат є для нас передчасно невідомим. Тому усі наші наступні припущення будуть записуватися у якості гіпотез.

**Гіпотеза 1:** Одиничне лінійне векторне поле  $\xi$  є голономним тоді і тільки тоді, коли розв'язок системи ЗДР (звичайних диференціальних рівнянь), що визначається полем  $\xi$ , є стійким. І навпаки, векторне поле є неголономним тоді і тільки тоді, коли розв'язок є нестійким.

*Перевірка гіпотези:*

**Приклад 1.1:** (голономне векторне поле в  $E^3$ ).

$\xi = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$  - задане векторне поле.

Як вже було зазначено раніше, воно є лінійним та має одиничну довжину.

Шукаємо величину неголономності:

$$\rho = \langle \xi, \operatorname{rot} \xi \rangle ;$$

$$\operatorname{rot} \xi = e_1 \left( \frac{\partial}{\partial y} \xi_3 - \frac{\partial}{\partial z} \xi_2 \right) - e_2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \xi_3 - \frac{\partial}{\partial z} \xi_1 \right) + e_3 \left( \frac{\partial}{\partial x} \xi_2 - \frac{\partial}{\partial y} \xi_1 \right);$$

Порахуємо спочатку всі похідну окремо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \xi_1 &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \\ &= \frac{x^2+y^2+z^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \xi_1 &= x \cdot \frac{-2y}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \xi_1 &= x \cdot \frac{-2z}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \xi_2 &= y \cdot \frac{-2x}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \xi_2 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - y \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \xi_2 &= y \cdot \frac{-2z}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \xi_3 &= z \cdot \frac{-2x}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial}{\partial y} \xi_3 &= z \cdot \frac{-2y}{2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial}{\partial z} \xi_3 &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2} - z \frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Маємо:

$$\begin{aligned}rot \xi &= e_1 \left( \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) - e_2 \left( \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\ &+ e_3 \left( \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = e_1 \cdot 0 - e_2 \cdot 0 + e_3 \cdot 0.\end{aligned}$$

Тобто  $rot \xi = \{0,0,0\}$ . Тоді величина неголономності:

$$\rho = (\xi, rot \xi) = \xi_1 \cdot 0 + \xi_2 \cdot 0 + \xi_3 \cdot 0 = 0.$$

Отримали, що поле  $\xi$  є голономним.

Єдине, що залишилося – це дослідити початкове поле на стійкість. Розглянемо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \\ \frac{dy}{dt} &= y \\ \frac{dz}{dt} &= z\end{aligned}$$

Ця система відповідає не нормованому векторному полю  $p = (x, y, z)$ .

Матриця коефіцієнтів цієї системи:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Так як праві частини вже є лінійними, то одразу застосуємо теорему Ляпунова з параграфу про стійкість і отримаємо, що детермінант такої системи дорівнює одиниці ( $1 > 0$ ). Тобто з означення теореми випливає, що дана система нестійка.

**Приклад 2.1:** (неголономне векторне поле в  $E^3$ ).

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2}} (-2x - y + z, 2x - 3y, -3y)$$

– нормоване лінійне векторне поле в тривимірному евклідовому просторі.

$$\rho = \langle \xi, \text{rot } \xi \rangle ;$$

$$\text{rot } \xi = e_1 \left( \frac{\partial}{\partial y} \xi_3 - \frac{\partial}{\partial z} \xi_2 \right) - e_2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \xi_3 - \frac{\partial}{\partial z} \xi_1 \right) + e_3 \left( \frac{\partial}{\partial x} \xi_2 - \frac{\partial}{\partial y} \xi_1 \right);$$

Порахуємо спочатку всі похідну окремо:

$$\frac{\partial}{\partial x} \xi_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-2x - y + z}{\sqrt{8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2}} \right) = \frac{-42y^2 + 16xy + 6yz - 4xz}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \xi_1 = \frac{-16x^2 + 42xy + 6xz - 18yz}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \xi_1 = \frac{4x^2 - 12xy + 18y^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \xi_2 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2x - 3y}{\sqrt{8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2}} \right) = \frac{26y^2 + 16xy - 10yz - 4xz + 2z^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \xi_2 = \frac{-16x^2 - 26xy + 14xz + 3yz - 3z^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \xi_2 = \frac{4x^2 - 4xy - 2xz + 3yz - 3y^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \xi_3 = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-3y}{\sqrt{8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2}} \right) = \frac{-6yz - 12y^2 + 24xy}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \xi_3 = \frac{-24x^2 + 12xy + 12xz + 3yz - 3z^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \xi_3 = \frac{-3yz + 3y^2 + 6yx}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

Тому маємо:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rot} \xi &= \\
 &= e_1 \left( \frac{-24x^2 + 12xy + 12xz + 3yz - 3z^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4x^2 - 4xy - 2xz + 3yz - 3y^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) - \\
 &- e_2 \left( \frac{-6yz - 12y^2 + 24xy}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{4x^2 - 12xy + 18y^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \\
 &+ e_3 \left( \frac{26y^2 + 16xy - 10yz - 4xz + 2z^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{-16x^2 + 42xy + 6xz - 18yz}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \\
 &= e_1 \frac{-28x^2 + 16xy + 14xz + 3y^2 - 3z^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}} - e_2 \frac{30y^2 - 36xy + 6yz + 4x^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
 &+ e_3 \frac{16x^2 - 26xy - 10xz + 26y^2 + 8yz + 2z^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}};
 \end{aligned}$$

Можна побачити, що навіть для одиничного лінійного векторного поля деякі розрахунки приймають громіздку форму, вже не кажучи вже про довільні векторні поля.

Шукаємо величину неголономності:

$$\operatorname{rot} \xi = \xi_1 \cdot (\operatorname{rot} \xi)_1 + \xi_2 \cdot (\operatorname{rot} \xi)_2 + \xi_3 \cdot (\operatorname{rot} \xi)_3 = \frac{8x - 9y - 3z}{8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2} \neq 0;$$

Отже задане векторне поле  $\xi$  є неголономним. Як і у попередньому прикладі, розглянемо питання стійкості. Цей приклад нам дуже цікавий, адже він був взятий зі збірника задач з диференціальних рівнянь Філіпова (задача №905) і мав вигляд:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \tan(z - y) - 2x \\
 \frac{dy}{dt} &= \sqrt{9 + 12x} - 3e^y \\
 \frac{dz}{dt} &= -3y
 \end{aligned}$$

Відразу можна побачити, що праві частини цих рівнянь не є лінійними, а отже потрібно застосувати метод першого наближення. Тоді отримаємо систему:

$$\frac{dx}{dt} = -2x - y + z$$

$$\frac{dy}{dt} = 2x - 3y$$

$$\frac{dz}{dt} = -3y$$

З цього можна побудувати матрицю коефіцієнтів:

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Детермінант цієї матриці дорівнює -6. З теореми Ляпунова випливає, що ця система має стійкий нульовий розв'язок.

З результатів цих двох прикладів, маємо протиріччя з початковою гіпотезою. У такому випадку можна було б написати обернене: Що векторне поле неголономне тоді і тільки тоді, коли розв'язок системи стійкий. Однак, проаналізувавши дану ситуацію детальніше (повернувшись до означень голономності та стійкості + частина прикладу в Додатку 1 в MAPLE), бачимо, що ця гіпотеза теж не підтверджується. Це показується тим, що на відміну від стійкості, невеликі зміни в векторному полі, можуть привести до втрати/появи голономності, якщо поле було/не було голономним. Через те, що наші надії на справдилися слід зробити наступне припущення.

**Гіпотеза 2:** Кривина лінії потоку не дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли розв'язок системи ЗДР, що визначається векторним полем  $\xi$ , є стійким.

*Перевірка гіпотези:*

**Приклад 1.2:** (Голономне поле\нестійке)

Як і до цього  $\xi = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$  - одиничне лінійне векторне поле.

Кривина лінії потоку має вигляд:

$$k = -[\xi, \text{rot } \xi] = -\{e_1(\xi_2 \cdot 0 - \xi_3 \cdot 0) - e_2(\xi_3 \cdot 0 - \xi_1 \cdot 0) + e_3(\xi_1 \cdot 0 - \xi_2 \cdot 0)\} = \{0,0,0\}.$$

**Приклад 2.2:** (неголономне поле\стійке)

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2}}(-2x - y + z, 2x - 3y, -3y) - \text{одиничне лінійне векторне}$$

поле.

Кривина лінії потоку:

$$\begin{aligned} k &= -[\xi, \text{rot } \xi] = \\ &= -\{e_1(\xi_2 \cdot (\text{rot } \xi)_3 - \xi_3 \cdot (\text{rot } \xi)_2) - e_2(\xi_1 \cdot (\text{rot } \xi)_3 - \xi_3 \cdot (\text{rot } \xi)_1) + \\ &\quad + e_3(\xi_1 \cdot (\text{rot } \xi)_2 - \xi_2 \cdot (\text{rot } \xi)_1) = \\ &= e_1 \cdot \frac{-32x^3 + 88x^2y + 20x^2z - 22xy^2 - 46xyz - 4xz^2 - 12y^3 + 6y^2z + 6yz^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^2} + \\ &+ e_2 \cdot \frac{-32x^3 + 48yx^2 + 36zx^2 + 22xy^2 + 10xyz - 14z^2x - 17y^3 + 18y^2z - 3yz^2 + 2z^3}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^2} + \\ &\quad + e_3 \cdot \frac{-48x^3 + 48x^2y + 24zx^2 + 18xy^2 + 6xyz - 6xz^2 + 21y^3 - 24y^2z + 3yz^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^2} \neq 0. \end{aligned}$$

### Приклад 3: (неголономне поле \ нестійке)

Скористаємося знов прикладом з Додатку 1 в MAPLE.

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{(x+3z)^2 + (-3x-3y+4z)^2 + (-3y+z)^2}}(x + 3z, -3x - 3y + 4z, -3y + z);$$

Кривина лінії потоку приймає вигляд:

$$\begin{aligned} k &= e_1 \left( \frac{-162y^3 + (-135x + 405z)y^2 + (-27x^2 + 324xz - 567z^2)y + 27x^3 - 300xz^2 + 339z^3}{4(5x^2 + 9xy - 9xz + 9y^2 - 15yz + 13z^2)^2} \right) + \\ &+ e_2 \left( \frac{3(3x^3 + (-36y + 23z)x^2 + (-36y^2 + 60yz - 31z^2)x - 27y^3 - 9y^2z + 15yz^2 - 66z^3)}{4(5x^2 + 9xy - 9xz + 9y^2 - 15yz + 13z^2)^2} \right) + \\ &\quad + e_3 \left( \frac{3(30x^3 + (57y - 85z)x^2 + (45y^2 - 84yz + 113z^2)x + 27y^3 - 72y^2z + 84yz^2 - 75z^3)}{4(5x^2 + 9xy - 9xz + 9y^2 - 15yz + 13z^2)^2} \right) \neq 0. \end{aligned}$$

Як можна побачити з прикладів, нажаль ця гіпотеза теж не підтверджується, незважаючи на явний зв'язок лінії потоку з інтегральними кривими.

Наразі, знайдемо середню кривину першого роду та повні кривини першого та другого роду. Крім, того покажемо, що за деяких умов повні кривини у неголономному випадку відрізняються на величину неголономності в квадраті, поділену на чотири. Тобто:

$$K - K_1 = \frac{(\xi, \operatorname{rot} \xi)^2}{4}$$

**Приклад 1:** (голомне векторне поле)

Нехай задане одиничне векторне поле (як і раніше):

$$\xi = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

З параграфу 1.1 знаємо, що формула для знаходження середньої кривини першого роду має вигляд:

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = -\frac{1}{2}(\xi_{1x} + \xi_{2y})$$

Отож маємо:

$$\Rightarrow H = -\frac{1}{2} \left( \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = -\frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

Шукаємо повну кривину першого роду:

$$\begin{aligned} K_1 &= \lambda_1 \lambda_2 = \xi_{1x} \xi_{2y} - \left( \frac{\xi_{1y} + \xi_{2x}}{2} \right)^2; \\ \Rightarrow \left( \frac{\xi_{1y} + \xi_{2x}}{2} \right) &= \frac{1}{2} \left( \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow K_1 &= \frac{(y^2 + z^2) \cdot (x^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} - \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{y^2 z^2 + x^2 z^2 + z^4}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \\ &= \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}; \end{aligned}$$

Отож повна кривина першого роду має вигляд:

$$K_1 = \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}.$$

З параграфу 1.3 знаємо, як знаходити середню кривину другого роду.

$$K = \lambda_1 \lambda_2 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 (\xi_{ix_i} \xi_{jx_j} - \xi_{ix_j} \xi_{jx_i});$$

Додавши однакові доданки отримаємо:

$$\begin{aligned} K &= (\xi_{1x_1} \xi_{2x_2} - \xi_{1x_2} \xi_{2x_1}) + (\xi_{1x_1} \xi_{3x_3} - \xi_{1x_3} \xi_{3x_1}) + (\xi_{2x_2} \xi_{3x_3} - \xi_{2x_3} \xi_{3x_2}) = \\ &= \left( \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right) + \\
& + \left( \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y^2 z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \right) = \\
& = \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2};
\end{aligned}$$

Маємо:

$$K = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Нехай  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_{3x_i} = 0$ ,  $i = \overline{1,3}$ ;  $\xi_{sxi} \neq 0$ ,  $s = 1,2$  впливає, що повна кривина другого роду значно спрощується:

$$\begin{aligned}
K & = \xi_{1x}\xi_{2y} - \xi_{1y}\xi_{2x} = \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}; \\
\Rightarrow K - K_1 & = \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \frac{z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = 0.
\end{aligned}$$

Що і хотіли показати, адже величина неголономності дорівнює нулю.

### **Приклад 2:** (неголономне векторне поле)

Нехай  $\epsilon$  є одиничне векторне поле:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2}}(-2x - y + z, 2x - 3y, -3y)$$

Шукаємо середню кривину:

$$\begin{aligned}
H & = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = -\frac{1}{2}(\xi_{1x} + \xi_{2y}) = \\
& = -\frac{1}{2} \left( \frac{-42y^2 + 16xy + 6yz - 4xz - (-16x^2 - 26xy + 14xz + 3yz - 3z^2)}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \\
& = \frac{16x^2 + 10xy - 10xz + 42y^2 - 9yz + 3z^2}{2(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}};
\end{aligned}$$

Шукаємо повну кривину першого роду:

$$K_1 = \lambda_1 \lambda_2 = \xi_{1x} \xi_{2y} - \left( \frac{\xi_{1y} + \xi_{2x}}{2} \right)^2 =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-42y^2 + 16xy + 6yz - 4xz) \cdot (-16x^2 - 26xy + 14xz + 3yz - 3z^2)}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^3} - \\
&-\frac{1}{4} \left( \frac{-16x^2 + 42xy + 6xz - 18yz - (26y^2 + 16xy - 10yz - 4xz + 2z^2)}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2 = \\
&= \frac{-64x^4 + (208y + 80z)x^3 + (-377y^2 - 50yz - 41z^2)x^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^3} + \\
&+ \frac{(338y^3 + 90y^2z - 6yz^2 + 10z^3)x - 169y^4 + 238y^3z - 78y^2z^2 + 10yz^3 - z^4}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^3}.
\end{aligned}$$

З параграфу 1.3 знаємо, як знаходити середню кривину другого роду.

$$\begin{aligned}
K &= (\xi_{1x_1}\xi_{2x_2} - \xi_{1x_2}\xi_{2x_1}) + (\xi_{1x_1}\xi_{3x_3} - \xi_{1x_3}\xi_{3x_1}) + (\xi_{2x_2}\xi_{3x_3} - \xi_{2x_3}\xi_{3x_2}) = \\
&= (\text{підстановка усіх значень займе багато місця, тому перейдемо до відповіді}) = \\
&= \frac{12x^2 - 6xy - 6xz + 18y^2 + 18yz}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^2}.
\end{aligned}$$

Тобто маємо, що повна кривина другого роду приймає вигляд:

$$K = \frac{12x^2 - 6xy - 6xz + 18y^2 + 18yz}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^2}.$$

Нехай  $\xi_1 = \xi_2 = \xi_{3x_i} = 0$ ,  $i = \overline{1,3}$ ;  $\xi_{sx_i} \neq 0$ ,  $s = 1,2$  впливає, що повна кривина другого роду значно спрощується:

$$\begin{aligned}
K &= \xi_{1x}\xi_{2y} - \xi_{1y}\xi_{2x} \Rightarrow \\
\Rightarrow K &= \frac{(-42y^2 + 16xy + 6yz - 4xz) \cdot (-16x^2 - 26xy + 14xz + 3yz - 3z^2)}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^3} - \\
&-\frac{(-16x^2 + 42xy + 6xz - 18yz) \cdot (26y^2 + 16xy - 10yz - 4xz + 2z^2)}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^3} = \\
&= \frac{18yz}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^2}.
\end{aligned}$$

Крім того знаємо, що у такому випадку формула для величини неголономності теж стає набагато простішою.

$$\rho = (\xi, \text{rot } \xi) = \xi_{1y} - \xi_{2x} = \frac{16x^2 - 26xy - 10xz + 26y^2 + 8yz + 2z^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Підвівши до квадрату величину неголономності та поділивши на 4 отримаємо саме те, що і шукали.

Зробимо останнє припущення цієї науково-дослідницької роботи.

**Гіпотеза 3:** Головні нормальні кривини першого та другого роду не мають зв'язку зі стійкістю систем ЗДР, що визначається полем  $\xi$ .

*Перевірка гіпотези:*

**Приклад 1.3:** (голономне векторне поле)

Як і раніше:  $\xi = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right)$  - одиничне векторне поле.

Головні нормальні кривини першого роду знаходяться наступним чином:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\xi_{1x} + \xi_{2y}) \pm \sqrt{(\xi_{1x} - \xi_{2y})^2 + (\xi_{1y} + \xi_{2x})^2}}{2};$$

Шукаємо по частинах:

$$(\xi_{1x} + \xi_{2y}) = \frac{x^2 + y^2 + 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$(\xi_{1x} - \xi_{2y})^2 + (\xi_{1y} + \xi_{2x})^2 = \frac{((y^2 - x^2)^2 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \frac{(y^2 + x^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{-(x^2 + y^2 + 2z^2) + (y^2 + x^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\lambda_2 = \frac{-(x^2 + y^2 + 2z^2) - (y^2 + x^2)}{2(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-(x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

З характеристичного рівняння для (для головних нормальних кривин другого роду) маємо:

$$\pi_{1,2} = \frac{-(\xi_{1x} + \xi_{2y} + \xi_{3z}) \pm \sqrt{(\xi_{1x} - \xi_{2y} - \xi_{3z})^2 + 4(\xi_{1y}\xi_{2x} + \xi_{1z}\xi_{3x} + \xi_{2z}\xi_{3y})}}{2};$$

Як і до цього шукаємо по частинах:

$$(\xi_{1x} + \xi_{2y} + \xi_{3z}) = \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}};$$

$$(\xi_{1x} - \xi_{2y} - \xi_{3z}) = \frac{-2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$(\xi_{1y}\xi_{2x} + \xi_{1z}\xi_{3x} + \xi_{2z}\xi_{3y}) = \frac{x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^3}.$$

Отож маємо:

$$\pi_{1,2} = \frac{x^2+y^2+z^2 \pm \sqrt{(x^2+y^2)(x^2+z^2)}}{2}.$$

Легко перевіряється, що отримані головні нормальні кривини підходять.

**Приклад 2.3:** (неголономне векторне поле)

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{8x^2-8xy-4xz+19y^2-2yz+z^2}} (-2x - y + z, 2x - 3y, -3y).$$

Шукаємо головні нормальні кривини першого роду:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\xi_{1x}+\xi_{2y}) \pm \sqrt{(\xi_{1x}-\xi_{2y})^2 + (\xi_{1y}+\xi_{2x})^2}}{2}.$$

По частинах:

$$\begin{aligned} \xi_{1x} + \xi_{2y} &= -\frac{16x^2+10xy-10xz+42y^2-9yz+3z^2}{(8x^2-8xy-4xz+19y^2-2yz+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \xi_{1x} - \xi_{2y} &= \frac{16x^2+42xy-18xz-42y^2-3yz+3z^2}{(8x^2-8xy-4xz+19y^2-2yz+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \xi_{1y} - \xi_{2x} &= \frac{-16x^2 + 58xy + 2xz + 26y^2 - 28yz + 2z^2}{(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{-(16x^2 + 10xy - 10xz + 42y^2 - 9yz + 3z^2)}{2(8x^2 - 8xy - 4xz + 19y^2 - 2yz + z^2)^{\frac{3}{2}}} \pm \\ &\pm \frac{\sqrt{(16x^2+42xy-18xz-42y^2-3yz+3z^2)^2 + (-16x^2+58xy+2xz+26y^2-28yz+2z^2)^2}}{2(8x^2-8xy-4xz+19y^2-2yz+z^2)^{\frac{3}{2}}}; \end{aligned}$$

Як можна побачити навіть для методу описаному в книзі Амінова, деякі розв'язки є доволі громіздкими, тому для цього прикладу ми не будемо шукати головні кривини другого роду, і будемо будувати нашу відповідь на вже отриманих результатах. А саме: наша гіпотеза про відсутність зв'язку між нормальними головними кривинами та стійкістю підтвердилась. Однак це не означає, що не існує прикладу для, якого усі наші гіпотези підтверджуються.

Наостанок розглянемо “некласичний” метод дослідження векторних полів. Як вже було описано в параграфі 2.1. цей метод базується на використанні дотичного розшарування до гіперповерхні в ріманових просторах. Завдяки тому, що евклідові простори є частковим випадком ріманових просторів (матриця першої квадратичної форми співпадає з одиничною матрицею), то більшість раніше записаних формул (у тому ж 2.1) приймуть більш простий вигляд.

Для ознайомлення почнемо з розгляду двох прикладів векторних полів в  $E^2$ , а потім вже перейдемо і до тривимірного випадку (на відміну від Амінова цей метод дозволяє розглядати характеристики одиничних векторних полів в  $E^2$ ).

**Приклад 4:** Нехай нам дане поле  $\xi = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right)$  - радіальне векторне поле одиничної довжини. Як і в попередніх прикладах, будемо шукати середню та повну (Гаусову) кривини.

У випадку двовимірного ріманового простору формула для середньої кривини приймає вигляд:

$$H = \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda^2}} \left( - \langle \nabla_{e_0} e_0, e_1 \rangle \lambda + \frac{e_1(\lambda)}{1+\lambda^2} \right),$$

де  $e_0$  – векторне поле, що задовольняє рівності  $\nabla_{e_0} \xi = 0$ , де  $\nabla$  означає коваріантне диференціювання,  $e_1$  – ортогональне до  $e_0$  векторне поле. Однак нам відомо з раніше вивченого, що  $E^2$  як і будь-який інший евклідов простір є частковим випадком ріманових просторів, тому коваріантне диференціювання перетворюється в звичайне диференціювання.

Спочатку знайдемо  $e_0$ . Коваріантна похідна  $\xi$  за напрямом  $e_0$  у цьому випадку перейде в похідну  $\xi$  за напрямом  $e_0$ . Тобто:

$$\nabla_{e_0} \xi = 0 \Rightarrow \nabla_{e_0} \xi = e_{01} \frac{\partial \xi}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0,$$

де  $e_0 = (e_{01}, e_{02})$  – представлення цього векторного поля,  $e_{01}, e_{02}$  – невідомі.

Маємо дві рівності:

$$(\nabla_{e_0} \xi)_1 = e_{01} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = 0;$$

$$(\nabla_{e_0} \xi)_2 = e_{01} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = 0.$$

$\xi_1, \xi_2$  - компоненти векторного поля  $\xi$ .

Похідні мають вигляд:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = x \frac{-2y}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = y \frac{-2x}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$\frac{\partial \xi_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \frac{\sqrt{x^2+y^2} - y \cdot \frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Підставляємо в наші рівності:

$$(\nabla_{e_0} \xi)_1 = e_{01} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = e_{01} \cdot \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + e_{02} \cdot \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

$$(\nabla_{e_0} \xi)_2 = e_{01} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = e_{01} \cdot \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + e_{02} \cdot \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Отримали систему з двох рівнянь відносно невідомих  $e_{01}$  і  $e_{02}$ . Знайдемо їх, домноживши на  $(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ . Маємо:

$$e_{01} \cdot y^2 + e_{02} \cdot (-xy) = 0;$$

$$e_{01} \cdot (-xy) + e_{02} \cdot x^2 = 0.$$

Розділимо першу рівність на  $y$ , а другу на  $x$ . Отримаємо:

$$e_{01} \cdot y - e_{02} \cdot x = 0;$$

$$-e_{01} \cdot y + e_{02} \cdot x = 0.$$

Можемо побачити, що ці рівняння є залежними, тому можемо розглядати лише одне з них.

$$e_{01} \cdot y - e_{02} \cdot x = 0 \Rightarrow e_{01} = x, e_{02} = y.$$

Віднормуємо отримане векторне поле:

$$e_0 = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right);$$

Можна побачити, що воно співпадає з радіальним векторним полем (саме те поле, що задано в умові задачі). У наступному прикладі побачимо, що  $e_0$  буде приймати цей самий вигляд і для інших лінійних векторних полів в двовимірному евклідовому просторі.

Відразу можна помітити, що  $\nabla_{e_0} e_0 = 0$ . Перевірка:

$$(\nabla_{e_0} e_0)_1 = e_{01} \frac{\partial e_{01}}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial e_{01}}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

$$(\nabla_{e_0} e_0)_2 = e_{01} \frac{\partial e_{02}}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial e_{02}}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Тож початкове рівняння для середньої кривини трохи спрощується.

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda^2}} \left( - \langle \nabla_{e_0} e_0, e_1 \rangle \lambda + \frac{e_1(\lambda)}{1+\lambda^2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda^2}} \left( 0 + \frac{e_1(\lambda)}{1+\lambda^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda^2}} \cdot \frac{e_1(\lambda)}{1+\lambda^2} \end{aligned}$$

Далі потрібно буде знайти  $\lambda$ . З розглянутого раніше матеріалу, для його знаходження потрібно розв'язати рівняння  $\nabla_{e_1} \xi = \lambda \eta$ . Крім того, нам відомо, що  $e_1$  та  $\eta$  є ортогональними до  $e_0$  і  $\xi$  відповідно ( $e_1, \eta$  – теж повинні бути одиничними векторними полями).

Тому:

$$e_1 = \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right);$$

$$\eta = \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right).$$

З вище написаного отримуємо:

$$\lambda = \langle \nabla_{e_1} \xi, \eta \rangle.$$

Залишається знайти  $\nabla_{e_1} \xi$ .

$$\begin{aligned}\nabla_{e_1} \xi &= e_{11} \frac{\partial \xi}{\partial x} + e_{12} \frac{\partial \xi}{\partial y} \Rightarrow \\ (\nabla_{e_1} \xi)_1 &= e_{11} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + e_{12} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{-y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-y}{(x^2 + y^2)}; \\ (\nabla_{e_1} \xi)_2 &= e_{11} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + e_{12} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{-xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{x^3 + y^2 x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x}{(x^2 + y^2)}.\end{aligned}$$

Тоді:

$$\lambda = \langle \nabla_{e_1} \xi, \eta \rangle = \frac{-y}{(x^2 + y^2)} \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{x}{(x^2 + y^2)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Залишилося знайти  $e_1(\lambda)$ :

У нашому випадку це просто похідна  $e_1$  за напрямом  $\lambda$ .

$$e_1(\lambda) = e_{11} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + e_{12} \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{-x}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{-y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

Тоді середня кривина остаточно записується:

$$H = \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda^2}} \frac{e_1(\lambda)}{1+\lambda^2} = 0.$$

Наразі знайдемо ще й повну кривину для цього векторного поля. З формулювання “некласичного” методу знаємо, що Гауссова кривина шукається наступним чином:

$$(-1)^n K = e_0(\lambda) - \lambda \sigma,$$

де  $\sigma = \langle \nabla_{e_1} e_1, e_0 \rangle$ , а  $n$  дорівнює 1, якщо репери  $(\xi, \eta)$  та  $(e_0, e_1)$  однаково орієнтовані, та дорівнює 0, якщо вони орієнтовані протилежно.

$$(\nabla_{e_1} e_1)_1 = e_{11} \frac{\partial e_{11}}{\partial x} + e_{12} \frac{\partial e_{11}}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{-x^2}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{-x}{(x^2+y^2)}; \\
(\nabla_{e_1} e_1)_2 &= e_{11} \frac{\partial e_{12}}{\partial x} + e_{12} \frac{\partial e_{12}}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{-y}{(x^2+y^2)} \Rightarrow \\
\Rightarrow \sigma &= \langle \nabla_{e_1} e_1, e_0 \rangle = \frac{-x}{x^2+y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{-y}{x^2+y^2} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \\
&= \frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}} \\
e_0(\lambda) &= e_{01} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{-x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{-y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{-1}{x^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Так як у нас репери  $(\xi, \eta)$  та  $(e_0, e_1)$  орієнтовані однаково, то у кінці отримуємо:

$$-K = e_0(\lambda) - \lambda \sigma = \frac{1 - \sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2} - \text{що і хотіли знайти.}$$

**Приклад 5:** Нехай задане поле  $\xi = \left( \frac{-2x}{\sqrt{5x^2-6xy+9y^2}}, \frac{-x+3y}{\sqrt{5x^2-6xy+9y^2}} \right)$

Як і раніше будемо шукати, його середню та повну кривини.

Спочатку знайдемо  $e_0$ :

$$\nabla_{e_0} \xi = 0 \Rightarrow \nabla_{e_0} \xi = e_{01} \frac{\partial \xi}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

$$(\nabla_{e_0} \xi)_1 = e_{01} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = 0;$$

$$(\nabla_{e_0} \xi)_2 = e_{01} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = 0.$$

Похідні векторного поля  $\xi$  мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-2x}{\sqrt{5x^2-6xy+9y^2}} \right) = \frac{6xy-18y^2}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial \xi_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-2x}{\sqrt{5x^2-6xy+9y^2}} \right) = \frac{-6x^2+18xy}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{-x+3y}{\sqrt{5x^2-6xy+9y^2}} \right) = \frac{-12xy}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}}; \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-x+3y}{\sqrt{5x^2-6xy+9y^2}} \right) = \frac{12x^2}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Підставляємо їх в початкове рівняння:

$$\begin{aligned}(\nabla_{e_0} \xi)_1 &= e_{01} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = e_{01} \cdot \frac{6xy-18y^2}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}} + e_{02} \cdot \frac{-6x^2+18xy}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0; \\ (\nabla_{e_0} \xi)_2 &= e_{01} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = e_{01} \cdot \frac{-12xy}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}} + e_{02} \cdot \frac{12x^2}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}} = 0. \\ &\Rightarrow e_{01} \cdot (6xy - 18y^2) + e_{02} \cdot (-6x^2 + 18xy) = 0; \\ &\Rightarrow e_{01} \cdot (-12xy) + e_{02} \cdot 12x^2 = 0\end{aligned}$$

Ця система є залежною, що не важко помітити (слід від першого рівняння відняти друге, потім розділити перше рівняння на 18, а друге на 12, знов відняти від першого друге і побачимо бажане), тому можемо розглядати лише одне з них.

$$e_{01} \cdot (-xy) + e_{02} \cdot x^2 = 0 \Rightarrow -ye_{01} + xe_{02} = 0 \Rightarrow e_{01} = x, e_{02} = y;$$

Пронормуємо:

$$e_0 = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) (\&).$$

Як вже і писали раніше векторне поле  $e_0$  і справді приймає вигляд ( $\&$ ) для одиничних, лінійних векторних полів в двовимірному евклідовому просторі. Крім того, з попереднього прикладу маємо:  $\nabla_{e_0} e_0 = 0$ .

Шукаємо  $\lambda$ . Векторні поля  $e_1$  та  $\eta$  є ортогональними до  $e_0$  і  $\xi$  відповідно.

$$\begin{aligned}
\eta &= \left( \frac{x-3y}{\sqrt{5x^2-6xy+9y^2}}, \frac{-2x}{\sqrt{5x^2-6xy+9y^2}} \right); \\
e_1 &= \left( \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \right). \\
\Rightarrow \lambda &= \langle \nabla_{e_1} \xi, \eta \rangle \Rightarrow \\
\Rightarrow (\nabla_{e_1} \xi)_1 &= e_{11} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + e_{12} \frac{\partial \xi_1}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{6xy-18y^2}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
&+ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{-6x^2+18xy}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{(-6x+18y)\sqrt{x^2+y^2}}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}}. \\
(\nabla_{e_1} \xi)_2 &= e_{11} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + e_{12} \frac{\partial \xi_2}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{-12xy}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}} + \\
&+ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{12x^2}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}} = \\
&= \frac{12x\sqrt{x^2+y^2}}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow \\
\lambda = \langle \nabla_{e_1} \xi, \eta \rangle &= \frac{(-6x+18y)\sqrt{x^2+y^2}}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{x-3y}{\sqrt{5x^2-6xy+9y^2}} + \\
&+ \frac{12x\sqrt{x^2+y^2}}{(5x^2-6xy+9y^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{5x^2-6xy+9y^2}} = \frac{-6\sqrt{x^2+y^2}}{(5x^2-6xy+9y^2)}.
\end{aligned}$$

Шукаємо  $e_1(\lambda)$ :

$$\begin{aligned}
e_1(\lambda) &= e_{11} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + e_{12} \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{30x^3+6xy^2-36y^3}{(5x^2-6xy+9y^2)\sqrt{x^2+y^2}} + \\
&+ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \frac{-36x^3+78x^2y+54y^3}{(5x^2-6xy+9y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \\
&= \frac{36y^4-36x^4+48x^3y+48xy^3}{(5x^2-6xy+9y^2)(x^2+y^2)} = \frac{36y^2-36x^2+48xy}{(5x^2-6xy+9y^2)}.
\end{aligned}$$

Шукаємо середню кривину:

$$H = \frac{e_1(\lambda)}{2(1 + \lambda^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{36y^2 - 36x^2 + 48xy}{5x^2 - 6xy + 9y^2}}{2 \left( 1 + \left( \frac{-6\sqrt{x^2 + y^2}}{5x^2 - 6xy + 9y^2} \right)^2 \right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{(-36x^2 + 48xy + 36y^2)(5x^2 - 6xy + 9y^2)}{2((5x^2 - 6xy + 9y^2)^2 + 36(x^2 + y^2))^{\frac{3}{2}}}.$$

Повна (Гаусова) кривина:

$$(-1)^n K = e_0(\lambda) - \lambda \sigma \Rightarrow$$

Елемент  $\sigma$  нам вже відомий, залишилося знайти  $e_0(\lambda)$ .

$$\sigma = \langle \nabla_{e_1} e_1, e_0 \rangle = \frac{-x}{x^2 + y^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{-y}{x^2 + y^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$e_0(\lambda) = e_{01} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial \lambda}{\partial y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{30x^3 + 6xy^2 - 36y^3}{(5x^2 - 6xy + 9y^2)^2 \sqrt{x^2 + y^2}} +$$

$$+ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{-36x^3 + 78x^2y + 54y^3}{(5x^2 - 6xy + 9y^2)^2 \sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{6}{5x^2 - 6xy + 9y^2};$$

$$K = \frac{6}{5x^2 - 6xy + 9y^2} + \frac{(-6x + 18y)\sqrt{x^2 + y^2}}{(5x^2 - 6xy + 9y^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Як вже побачили з двох останніх прикладів цей метод розглядання характеристик одиничного векторного поля займає багато місця, навіть для випадку  $E^2$ , тому надалі ми запишемо лише один приклад використання цього методу для простору  $E^3$ .

Нашою головною метою буде знаходження головних кривин та за можливості середньої та повної.

### **Приклад 1:** (некласичний)

Нехай задано радіальне векторне поле

$$\xi = \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

1. Знайдемо векторне поле  $e_0$ ;

$$e = \left\{ \begin{vmatrix} \xi_{1x_2} & \xi_{1x_3} \\ \xi_{2x_2} & \xi_{2x_3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_{1x_3} & \xi_{1x_1} \\ \xi_{2x_3} & \xi_{2x_1} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \xi_{1x_1} & \xi_{1x_2} \\ \xi_{2x_1} & \xi_{2x_2} \end{vmatrix} \right\};$$

$$(e)_1 = \frac{-xy \cdot (-zy)}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \frac{-xz \cdot (x^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{xz \cdot (x^2+z^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$(e)_2 = \frac{-xz \cdot (-xy)}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \frac{(y^2+z^2) \cdot (-zy)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{yz \cdot (x^2+z^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^2},$$

$$(e)_3 = \frac{(y^2+z^2) \cdot (x^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^3} - \frac{(-xy) \cdot (-xy)}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{y^2z^2 + x^2z^2 + z^4}{(x^2+y^2+z^2)^3}$$

$$= \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \Rightarrow$$

$$e = \left\{ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right\}.$$

Нормуємо вектор  $e$  :

$$|e| = \frac{\sqrt{x^2z^2+y^2z^2+z^4}}{(x^2+y^2+z^2)^2} = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}};$$

$$e_0 = \frac{e}{|e|} = \frac{\left\{ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}, \frac{z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right\}}{\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \{x, y, z\};$$

2. Отже отримали векторне поле  $e_0 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \{x, y, z\}$ . Як бачимо, воно повністю співпадає з в.п  $\xi$ . Це трішки полегшить роботу, адже знайшовши в.п.  $e_1$  та  $e_2$  з реперу  $(e_0, e_1, e_2)$  ми будемо автоматично знати в.п.  $\eta$  та  $\nu$  з реперу  $(\xi, \eta, \nu)$ . Для цього скористаємося сингулярним розкладанням матриць.

Хочемо, щоб виконувалися наступні умови:

$$A_\xi e_1 = \lambda_1 \eta, A_\xi e_2 = \lambda_2 \nu, A_\xi^t \eta = \lambda_1 e_1, A_\xi^t \nu = \lambda_2 e_2.$$

Крім того повинні виконуватися наступні дві умови:

$$A_\xi e_0 = 0, A_\xi^t \xi = 0.$$

( $\lambda_{1,2}$  - невід'ємні квадратні корені власних значень матриці  $A_\xi A_\xi^t$  або ж сингулярні значення матриці  $A_\xi$ , а матриця  $A_\xi$  – матриця похідних компонент в.п  $\xi$ ).

Запишемо  $A_\xi$  та  $A_\xi^t$ :

$$A_{\xi} = \begin{pmatrix} \frac{d\xi_1}{dx} & \frac{d\xi_1}{dy} & \frac{d\xi_1}{dz} \\ \frac{d\xi_2}{dx} & \frac{d\xi_2}{dy} & \frac{d\xi_2}{dz} \\ \frac{d\xi_3}{dx} & \frac{d\xi_3}{dy} & \frac{d\xi_3}{dz} \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix};$$

$$A_{\xi}^t = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}.$$

Як можна помітити  $A_{\xi} = A_{\xi}^t$ , тому ми отримаємо, що  $A_{\xi} A_{\xi}^t = A_{\xi}^t A_{\xi}$ .

$$\begin{aligned} A_{\xi} A_{\xi}^t &= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3} \begin{pmatrix} (y^2+z^2)^2 + x^2y^2 + x^2z^2 & -(y^2+z^2)xy - xy(x^2+z^2) + xyz^2 & -xz(y^2+z^2) + xy^2z - xz(x^2+y^2) \\ -(y^2+z^2)xy - xy(x^2+z^2) + xyz^2 & x^2y^2 + (x^2+z^2)^2 + y^2z^2 & x^2yz - yz(x^2+z^2) - yz(x^2+y^2) \\ -xz(y^2+z^2) + xy^2z - xz(x^2+y^2) & x^2yz - yz(x^2+z^2) - yz(x^2+y^2) & x^2z^2 + y^2z^2 + (x^2+y^2)^2 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже:

$$\begin{aligned} A_{\xi} A_{\xi}^t &= \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{pmatrix} \\ 3. \det(A_{\xi} A_{\xi}^t - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \lambda & \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \lambda & \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \lambda \end{pmatrix} = \\ &= \left( \frac{y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \lambda \right) \cdot \\ &\cdot \left( \left( \frac{x^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \lambda \right) \left( \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \lambda \right) - \frac{y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \right) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \cdot \\
& \cdot \left( \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \cdot \left( \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \lambda \right) - \frac{xyz^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \right) + \\
& \quad + \frac{-xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \cdot \\
& \cdot \left( \frac{xy^2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \left( \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \lambda \right) \right) = \\
& = -\lambda^3 + \lambda^2 \frac{y^2 + z^2 + 2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} + \lambda \left( -\frac{(y^2 + z^2)(2x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^6} \right) + \\
& \quad + \lambda \left( \frac{-xy(x^3y + xy^3 + xyz^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^6} - \frac{xz(x^3z + xz^3 + xzy^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^6} \right) = 0 \Rightarrow \\
& \det(A_\xi A_\xi^t - \lambda I) = -\lambda^3 + \frac{\lambda^2}{(x^2 + y^2 + z^2)} + \lambda \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 + z^4}{(x^2 + y^2 + z^2)^4} = 0.
\end{aligned}$$

Розділимо на  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \lambda^2 - \frac{\lambda}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 + z^4}{(x^2 + y^2 + z^2)^4} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \lambda^2 - \frac{\lambda}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^4} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \lambda^2 - \frac{\lambda}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} = 0 \Rightarrow \\
& \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} - \text{сингулярні значення.}
\end{aligned}$$

4. Шукаємо сингулярні вектори для  $\lambda_1$ :

$$\left( \begin{array}{ccc|c}
\frac{y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{-xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \frac{-xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & 0 \\
\frac{-xy}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \frac{x^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} & \frac{-yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & 0 \\
\frac{-xz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \frac{-yz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} & \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} - \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} & 0
\end{array} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{-xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z \\ x & y & z \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{y}{x} & \frac{z}{x} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot \frac{y}{x} + x_3 \cdot \frac{z}{x} = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 \cdot \frac{y}{x} - x_3 \cdot \frac{z}{x};$$

Нехай:

$$\text{A. } x_2 = 1, x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{y}{x} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{B. } x_2 = 0, x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -\frac{z}{x} \Rightarrow v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{z}{x} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Аналогічно отримаємо сингулярні вектори для  $\lambda_2$ :

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -\frac{z}{x} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Можна побачити, що якщо взяти два різні векторні поля з сингулярного розкладання (наприклад  $v_1$  і  $v_4$ ), то їх скалярний добуток не буде дорівнювати нулю, а отже вони не будуть ортогональними. Для подальших розрахунків візьмемо поле  $v = (-y, x, 0)$ . Пронормуємо  $v$ :  $|v| = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow e_1 = \frac{v}{|v|} = \left\{ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0 \right\}$ . (Окрім того тепер знаємо, що  $\eta = \left\{ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0 \right\}$ , адже через те, що  $\xi = e_0$  впливає, що реperi не тільки будуть однаково спрямлені, а ще й співпадати).

Залишилося знайти в.п.  $e_2$  з реперу  $(e_0, e_1, e_2)$  (автоматично отримаємо векторне поле  $\nu$ ). З курсу аналітичної геометрії відомо, що векторним добутком двох векторів буде вектор їм ортогональний. Тому:

$$q = [\xi, e_1] = \begin{vmatrix} u & v & w \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \frac{-xz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-yz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\}.$$

Шукаємо норму  $q$  :

$$|q| = \frac{\sqrt{x^2z^2 + y^2z^2 + (x^2 + y^2)^2}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)}} = \frac{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2)}} = 1$$

Нарешті:

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\{x, y, z\}, e_1 = \left\{ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, 0 \right\},$$

$$e_2 = \left\{ \frac{-xz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{-yz}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right\}.$$

Аналогічно записуються векторні поля  $\xi, \eta, \nu$ . Знаючи все це можемо перейти до знаходження середньої кривини початкового поля.

5. Оскільки, в евклідових просторах тензор кривини нульовий, тому формула спрощується, середня кривина для простору приймає вигляд:

$$(n+1)H_\sigma = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}} \left( - \langle (\nabla_{e_0} A_\xi) e_0, f_\sigma \rangle + \sum_{i=1}^n \frac{-\langle (\nabla_{e_i} A_\xi) e_i, f_\sigma \rangle}{1+\lambda_i^2} \right);$$

де  $n = 2, \sigma = \overline{1,2}; f_1 = \eta, f_2 = \nu, \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{x^2+y^2+z^2} \Rightarrow$ .

Тому:

$$3H_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \left( - \langle (\nabla_{e_0} A_\xi) e_0, \eta \rangle + \sum_{i=1}^2 \frac{-\langle (\nabla_{e_i} A_\xi) e_i, \eta \rangle}{1+\lambda_i^2} \right);$$

$$3H_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_2^2}} \left( - \langle (\nabla_{e_0} A_\xi) e_0, \nu \rangle + \sum_{i=1}^2 \frac{-\langle (\nabla_{e_i} A_\xi) e_i, \nu \rangle}{1+\lambda_i^2} \right).$$

Через громіздкість розрахунків, надалі деякі моменти будуть пропускатися в зв'язку з їх очевидністю.

$$\begin{aligned}
 (\nabla_{e_0} A_\xi) &= e_{01} \frac{\partial A}{\partial x} + e_{02} \frac{\partial A}{\partial y} + e_{03} \frac{\partial A}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-y^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{pmatrix} \\
 (\nabla_{e_0} A_\xi) e_0 &= \begin{pmatrix} -\frac{(y^2+z^2)x-xy^2-xz^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \frac{-x^2y-yz^2+x^2y+yz^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \\ \frac{-x^2z-y^2z+x^2z+y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

З цієї рівності випливає, що формули для компонент середньої кривини трішки спрощуються:

$$3H_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \sum_{i=1}^2 \frac{-\langle (\nabla_{e_i} A_\xi) e_i, \eta \rangle}{1+\lambda_i^2};$$

$$3H_2 = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda_1^2}} \sum_{i=1}^2 \frac{-\langle (\nabla_{e_i} A_\xi) e_i, \nu \rangle}{1+\lambda_i^2};$$

$$\begin{aligned}
 (\nabla_{e_1} A_\xi) &= e_{11} \frac{\partial A}{\partial x} + e_{12} \frac{\partial A}{\partial y} + e_{13} \frac{\partial A}{\partial z} = \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\
 (\nabla_{e_1} A_\xi) e_1 &= \begin{pmatrix} \frac{-2y^2x-x^3+xy^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} (x^2+y^2)} \\ \frac{x^2y-y^3-2x^2y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} (x^2+y^2)} \\ \frac{-y^2z-x^2z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} (x^2+y^2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{e_2} A_\xi) &= e_{21} \frac{\partial A}{\partial x} + e_{22} \frac{\partial A}{\partial y} + e_{23} \frac{\partial A}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{2x^2 z}{(x^2+y^2+z^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{2xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-x(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{2xzy}{(x^2+y^2+z^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{2y^2 z}{(x^2+y^2+z^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-x(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-2z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \\
(\nabla_{e_2} A_\xi) e_2 &= \begin{pmatrix} \frac{-2x^3 z^2 - 2xy^2 z^2 - x(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2} \sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-2x^2 yz^2 - 2y^3 z^2 - y(x^2+y^2-z^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2} \sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x^2 z(x^2+y^2-z^2) + y^2 z(x^2+y^2-z^2) + 2(x^2+y^2)z}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2} \sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{-y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\ \frac{-z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Отже можемо порахувати скалярні добутки:

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_{e_1} A_\xi) e_1, \eta \rangle &= \frac{-x \cdot (-y) - y \cdot x - z \cdot 0}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \sqrt{x^2+y^2}} = 0; \\
\langle (\nabla_{e_1} A_\xi) e_1, \nu \rangle &= \frac{-x \cdot (-xz) - y \cdot (-yz) - z \cdot (x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} = 0; \\
\langle (\nabla_{e_2} A_\xi) e_2, \eta \rangle &= \frac{-x \cdot (-y) - y \cdot x - z \cdot 0}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2} \sqrt{x^2+y^2}} = 0; \\
\langle (\nabla_{e_2} A_\xi) e_2, \nu \rangle &= \frac{-x \cdot (-xz) - y \cdot (-yz) - z \cdot (x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2 \sqrt{x^2+y^2}} = 0.
\end{aligned}$$

Підставивши усе це у формули для компонент середньої кривини отримуємо, що  $H_1 = 0$  та  $H_2 = 0$ .

Хочемо: За допомогою матриць першої та другої квадратичної форми знайти головні нормальні кривини і перевірити чи можна якось пов'язати отримані величини з нестійкістю початкової системи.

6. Компоненти другої квадратичної форми знаходяться наступним чином:

$$\Omega_{\sigma i 0} = \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}\sqrt{1+\lambda_i^2}} (- \langle (\nabla_{e_i} A_\xi) e_0 + (\nabla_{e_0} A_\xi) e_i, f_\sigma \rangle);$$

$$\Omega_{\sigma ij} = \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}\sqrt{1+\lambda_i^2}\sqrt{1+\lambda_j^2}} \left( - \langle (\nabla_{e_i} A_\xi) e_j + (\nabla_{e_j} A_\xi) e_i, f_\sigma \rangle \right);$$

$\sigma, i, j = 1, 2$ .

Нам вже відомо, що  $\Omega_{100}$  та  $\Omega_{200}$  дорівнюють нулю (адже  $e_0$  геодезична, тому в  $\Omega_{\sigma 00} = \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}} \left( - \langle (\nabla_{e_0} A_\xi) e_0, f_\sigma \rangle \right)$  - скалярний добуток перетворюється в 0 через  $(\nabla_{e_0} A_\xi) e_0$ ).

Крім того, з формул можна помітити, що компоненти  $\Omega_{\sigma i0}$  і  $\Omega_{\sigma 0i}$  (як і  $\Omega_{\sigma ij}$  та  $\Omega_{\sigma ji}$ ) знаходяться за однаковими формулами, а отже це полегшить наші пошуки.

$$\Omega_{\sigma i0} = \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}\sqrt{1+\lambda_i^2}} \left( - \langle (\nabla_{e_i} A_\xi) e_0 + (\nabla_{e_0} A_\xi) e_i, f_\sigma \rangle \right) = \Omega_{\sigma 0i};$$

$$\Omega_{\sigma ij} = \frac{1}{2\sqrt{1+\lambda_\sigma^2}\sqrt{1+\lambda_i^2}\sqrt{1+\lambda_j^2}} \left( - \langle (\nabla_{e_i} A_\xi) e_j + (\nabla_{e_j} A_\xi) e_i, f_\sigma \rangle \right) = \Omega_{\sigma ji}.$$

Отож:

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_1} A_\xi) e_0 &= \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} = \\ &= \left\{ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}, 0 \right\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_0} A_\xi) e_1 &= \begin{pmatrix} \frac{-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-y^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \left\{ \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}, 0 \right\} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle (\nabla_{e_1} A_\xi) e_0 + (\nabla_{e_0} A_\xi) e_1, \eta \rangle &= \frac{-2y^2 - 2x^2 + 0}{(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x^2 + y^2)} = \\
&= \frac{-2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \Rightarrow \\
\Rightarrow \Omega_{110} &= \frac{1}{2(1 + \lambda_1^2)} \cdot \frac{-(-2)}{(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{1}{(1 + \lambda_1^2)(x^2 + y^2 + z^2)} = \\
&= \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)}\right)(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} = \Omega_{101};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \langle (\nabla_{e_1} A_\xi) e_0 + (\nabla_{e_0} A_\xi) e_1, \nu \rangle &= \frac{2y \cdot (-xz) - 2x \cdot (-yz) + 0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (x^2 + y^2)} = 0 \Rightarrow \\
\Rightarrow \Omega_{210} &= \Omega_{201} = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{e_2} A_\xi) e_0 &= \begin{pmatrix} \frac{2x^2z}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{2xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-x(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{2xzy}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{2y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-x(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-2z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix} = \\
&= \left\{ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2}} \right\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\nabla_{e_0} A_\xi) e_2 &= \begin{pmatrix} \frac{-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-x^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-y^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \\
&= \left\{ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\sqrt{x^2+y^2}} \right\} \\
&\Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle (\nabla_{e_2} A_\xi) e_0 + (\nabla_{e_0} A_\xi) e_2, \eta \rangle = \frac{2xz \cdot (-y) + 2yz \cdot x + 0}{(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (x^2 + y^2)} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Omega_{120} = \Omega_{102} = 0;$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle (\nabla_{e_2} A_\xi) e_0 + (\nabla_{e_0} A_\xi) e_2, \nu \rangle &= \frac{2xz(-xz) + 2yz(-yz) - 2(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{-2x^2z^2 - 2y^2z^2 - 2(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (x^2 + y^2)} = -\frac{2}{(x^2 + y^2 + z^2)} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega_{220} &= \frac{1}{2(1+\lambda_1^2)} \cdot \frac{-(-2)}{(x^2+y^2+z^2)} = \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2+1} = \Omega_{202}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_1} A_\xi) e_2 &= \begin{pmatrix} \frac{2xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}\sqrt{x^2+y^2}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{yz(-2x^2+x^2-y^2+x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)} \\ \frac{xz(2y^2+x^2-y^2-x^2-y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)} \\ 0 \end{pmatrix} = \{0,0,0\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\nabla_{e_2} A_\xi) e_1 &= \begin{pmatrix} \frac{2x^2z}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{2xyz}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-x(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{2xzy}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{2y^2z}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-x(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-y(x^2+y^2-z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-2z(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-2x^2yz+2x^2yz+0}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)} \\ \frac{-2xy^2z+2xy^2z+0}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)} \\ \frac{(x^2+y^2-z^2)xy+(x^2+y^2-z^2)yx}{(x^2+y^2+z^2)^2(x^2+y^2)} \end{pmatrix} = \{0,0,0\}. \end{aligned}$$

Автоматично  $\Omega_{112} = \Omega_{212} = \Omega_{121} = \Omega_{221} = 0$ .

Залишилось порахувати  $\Omega_{111}$ ,  $\Omega_{211}$ ,  $\Omega_{122}$ ,  $\Omega_{222}$ :

–  $\langle (\nabla_{e_1} A_\xi)e_1 + (\nabla_{e_1} A_\xi)e_1, \eta \rangle = -2 \langle (\nabla_{e_1} A_\xi)e_1, \eta \rangle = 0$  (було знайдено раніше);

$$- \langle (\nabla_{e_1} A_\xi)e_1 + (\nabla_{e_1} A_\xi)e_1, \nu \rangle = -2 \langle (\nabla_{e_1} A_\xi)e_1, \nu \rangle = 0;$$

$$- \langle (\nabla_{e_1} A_\xi)e_1 + (\nabla_{e_2} A_\xi)e_2, \eta \rangle = -2 \langle (\nabla_{e_2} A_\xi)e_2, \eta \rangle = 0;$$

$$- \langle (\nabla_{e_1} A_\xi)e_1 + (\nabla_{e_2} A_\xi)e_2, \nu \rangle = -2 \langle (\nabla_{e_2} A_\xi)e_2, \nu \rangle = 0.$$

Тому  $\Omega_{111} = \Omega_{211} = \Omega_{122} = \Omega_{222} = 0$ .

Отримавши усе, що потрібно, згрупуємо компоненти другої квадратичної форми по та запишемо їх у вигляді двох матриць.

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} \Omega_{100} & \Omega_{101} & \Omega_{102} \\ \Omega_{110} & \Omega_{111} & \Omega_{112} \\ \Omega_{120} & \Omega_{121} & \Omega_{122} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2+1} & 0 \\ \frac{(x^2+y^2+z^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\Omega_2 = \begin{pmatrix} \Omega_{200} & \Omega_{201} & \Omega_{202} \\ \Omega_{210} & \Omega_{211} & \Omega_{212} \\ \Omega_{220} & \Omega_{221} & \Omega_{222} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2+1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2+1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Перша квадратична форма у “некласичному” варіанті рахується наступним чином:

$\bar{g}(\xi_*X, \xi_*Y) = g(X, Y) + g(A_\xi X, A_\xi Y)$  - де  $X, Y$  – довільні векторні поля. Тут  $g(*,*)$  означає звичайний скалярний добуток, адже для просторів  $E^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ріманова метрика  $\bar{g}$  приймає вигляд одиничної матриці  $I$ .

У нашому випадку роль векторів  $X, Y$  будуть відігравати в.п.  $e_0, e_1, e_2$ .

$$\begin{aligned} \bar{g}(e_0, e_0) &= g(e_0, e_0) + g(A_\xi e_0, A_\xi e_0) = \langle e_0, e_0 \rangle + \langle A_\xi e_0, A_\xi e_0 \rangle \Rightarrow \\ \Rightarrow A_\xi e_0 &= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2} \begin{pmatrix} x(y^2 + z^2) - xy^2 - xz^2 \\ -x^2y + y(x^2 + z^2) - yz^2 \\ -x^2z - y^2z + z(x^2 + y^2) \end{pmatrix} = \{0, 0, 0\} \Rightarrow$$

$$\bar{g}(e_0, e_0) = \langle e_0, e_0 \rangle + \langle A_\xi e_0, A_\xi e_0 \rangle = \langle e_0, e_0 \rangle = 1;$$

Знаємо, що  $\langle e_0, e_1 \rangle = \langle e_0, e_2 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = 0$  з іх ортонормованості.

$$\bar{g}(e_0, e_1) = \langle e_0, e_1 \rangle + \langle A_\xi e_0, A_\xi e_1 \rangle = \langle A_\xi e_0, A_\xi e_1 \rangle = 0;$$

$$A_\xi e_1 = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -y(y^2 + z^2) - x^2y \\ xy^2 + x(x^2 + z^2) \\ xzy - yzx \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\bar{g}(e_0, e_2) = \langle e_0, e_2 \rangle + \langle A_\xi e_0, A_\xi e_2 \rangle = \langle A_\xi e_0, A_\xi e_2 \rangle = 0;$$

$$A_\xi e_2 = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-xz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} -xz \\ -yz \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix};$$

$$\bar{g}(e_1, e_1) = \langle e_1, e_1 \rangle + \langle A_\xi e_1, A_\xi e_1 \rangle = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\bar{g}(e_2, e_2) = \langle e_2, e_2 \rangle + \langle A_\xi e_2, A_\xi e_2 \rangle = 1 + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$\bar{g}(e_1, e_2) = 0 + \langle A_\xi e_1, A_\xi e_2 \rangle = \frac{yxz - xyz + 0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} \cdot (x^2 + y^2)} = 0;$$

Можемо побудувати матрицю першої квадратичної форми.

$$G = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \end{pmatrix},$$

де  $g_{ij} = \bar{g}(e_i, e_j)$ ,  $g_{ij} = g_{ji}$ ;  $i, j = \overline{0, 2}$ .

8. Залалося знайти головні нормальні кривини. Як вже писали в параграфі 2.1 їх можна знайти, як елементи матриці оператора Вейнгартена. Через те, що в нас вийшло дві матриці компонентів другої квадратичної форми, то отримаємо і дві матриці для нормальних кривин.

$$A_1 = G^{-1} \cdot \Omega_1, A_2 = G^{-1} \cdot \Omega_2.$$

Шукаємо обернену до  $G$  матрицю. Ми можемо це зробити, адже  $\det G =$

$$\left(1 + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2 \neq 0 \Rightarrow G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2 + 1} \end{pmatrix};$$

Отож маємо:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} & 0 \\ \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{((x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1)((x^2 + y^2 + z^2) + 1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{((x^2 + y^2 + z^2)^2 + 1)((x^2 + y^2 + z^2) + 1)} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Повертаючись до раніше записаних гіпотез, можна побачити, що і для такого методу дослідження одиничних векторних полів, жодне з них не підтверджується, для обраного нами прикладу.

## Висновок

Таким чином, геометрія векторних полів є доволі цікавою та об'ємною темою для вивчення. На протязі роботи з джерелами інформації нами було отримано, що є два методи дослідження векторних полів, які можна вважати “основними”: перший з них, описаний у книжці Амінова, та будується на окремому розгляданні характеристик в.п.<sup>[4]</sup> для голономних та неголономних полів, а другий - на використанні дотичних розшарувань до многовиду у ріманових просторах (у частковому випадку і для евклідових просторів). У даній науково-дослідницькій роботі було розглянуто частину характеристик векторних полів таких, як голономність/неголономність, кривина лінії потоку, нормальні, середні та повні/Гаусові кривини першого та другого роду. Після чого, для кращого розуміння, був трішки захоплений матеріал про векторні поля в багатовимірному евклідовому просторі. Це допомогло нам побачити зв'язок між характеристиками векторних полів в евклідових просторах різної розмірності. Крім того, ми дізналися, що таке оператор Номідзу і сингулярне розкладання матриць, і на останок згадали, що таке стійкість розв'язку систем диференціальних рівнянь.

Для закріплення отриманих знань, були розглянуті декілька прикладів, що охоплювали собою розгляд характеристик векторних полів в  $E^3$  та пошук стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь, що визначаються тим самим полем, тобто праві частини рівнянь системи є не нормованими компонентами векторного поля. До того ж були сформульовані гіпотези, які мали на меті пов'язати стійкість з такими означеннями, як голономність\неголономність, середня кривина, і нарешті з головними нормальними кривинами. Однак, під час розбору тих прикладів жодна з них не підтвердилась. Крім того, було розглянуто два двовимірних та ще один тривимірний приклад розв'язання, якого використовувало метод описаний у

параграфі 2.1., тобто з використанням векторних розшарувань. Цей приклад детально описує шлях дій при дослідженні одиничних векторних полів в тривимірному евклідовому просторі. Нами були знайдені такі речі, як сингулярні числа та вектори до матриці Номідзу радіального в.п., компоненти середньої кривини та другої квадратичної форми, коефіцієнти першої квадратичної форми для ортонормованого базисного репера та матриці оператора Вейнгартена, з яких можна виписати компоненти повних нормальних кривин.

На жаль, дуже складно передати деякі тонкощі розглянутого матеріалу, тому прийшлося трішки скоротити матеріал. Тому для більш глибокого ознайомлення з даною темою рекомендується звернутися до джерел, що записані нижче. Виконана робота є дуже значущою для розвитку геометрії векторних просторів, адже вона відкриває двері для подальших досліджень зв'язків між диференціальними рівняннями та геометрією векторних полів.

Незважаючи на все, нам не вдалося підтвердити існування зв'язку стійкості з характеристиками векторних полів. Завдяки тому, що наша робота мала пошуковий характер, то будь-який отриманий результат на цей момент можна вважати гарним результатом.

На останок, слід сказати, що бажаний зв'язок може\не може існувати, якщо розглянути інші приклади або ж звернутися до ще нерозглянутих характеристик одиничних векторних полів.

### Список використаних джерел:

1. Kirk Baker. Singular Value Decomposition Tutorial. The Ohio State University, 2005. P. 5 - 21.
1. Takashi Sakai. Riemannian Geometry. American Mathematical Society, Rhode Island, 1996. 356 p.
2. T. J. Willmore. An introduction to differential geometry. Mineola, New York. 2012. 323 p.
3. Hervé Abdi. Singular value decomposition (SVD) and generalized singular value decomposition. The University of Texas in Dallas. Encyclopedia of Measurements and Statistics. 2007. 14 p.
4. Kenneth Hoffman. Linear Algebra. Second Edition. Englewood Cliffs, New Jersey. 1971. 415 p.
5. Ю. А. Амінов. Геометрія векторного поля. М. Наука. 1990. 209 с.
6. А. Ф. Філіпов. Збірник задач з диференціальних рівнянь. НДЦ Регулярна та хаотична динаміка. С. 87 – 94.
7. О. Л. Ямпольський. Геометрія підмноговидів у розшарованих просторах. Харків. 2015. С. 123 – 138.

### Примітки

[1] - матриця для якої виконується  $PP^* = P^*P = I$ ,  $QQ^* = Q^*Q = I$ .

[2] - простір матриць розміру  $m \times n$ .

[3] - тензор кривини.  $R(u, v)w = \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u, v]} w$ , де  $[u, v]$  - скобка Лі, а  $u, v, w$  - векторні поля.

[4] - скорочене позначення для векторного поля.