С.Н. Зиненко

Математический анализ

Ряды и интегралы с параметром

(сборник задач)

2019

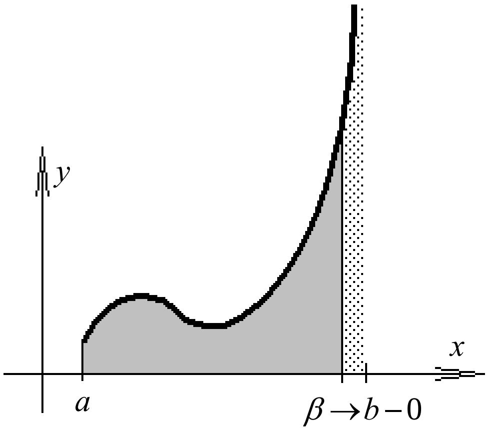
41. Сходимость несобственных интегралов

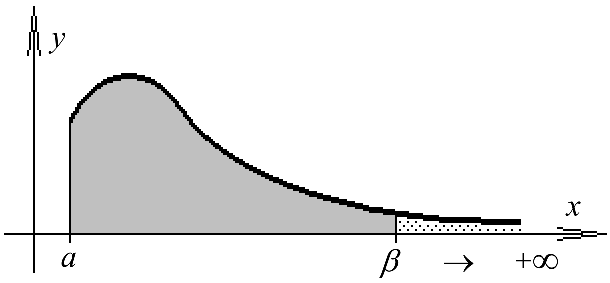
Несобственным интегралом от ***неограниченной функции*** *называется*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)\,dx$$

Несобственным интегралом по ***неограниченному промежутку*** *называется*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^\beta f(x)\,dx$$





Обозначив через $\omega = b-0,\ +\infty$, *удобно объединить оба случая*

$$\int_a^\omega f(x)dx = \lim_{\beta\to\omega}\int_a^\beta f(x)dx$$

Если предел ***существует*** *и* ***конечен***, *несобственный интеграл называется* ***сходящимся.***
Из формулы Ньютона-Лейбница

$$\int_a^\omega f(x)dx = \lim_{\beta\to\omega}\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{\beta\to\omega} F(x)\Big|_a^\beta = \lim_{\beta\to\omega}\big(F(\beta)-F(a)\big) = F(\omega)-F(a) = F(x)\Big|_a^\omega$$

вытекает, что ***сходимость*** *несобственного интеграла равносильна* ***сходимости*** *первообразной, т.е.* ***существованию конечного*** *предела*

$$\lim_{x\to\omega} F(x) = F(\omega)$$

В случае ***неотрицательной*** *подынтегральной функции* $\boldsymbol{f(x)\ge 0}$ *отметим следующие простые признаки* ***сходимости*** *несобственных интегралов, позволяющие выяснить* ***сходимость*** *опосредованно (т.е. без нахождения первообразной).*

Теорема *(признак сравнения в общей форме)*

Пусть
1) $(\ 0\le\ )\ f(x)\le g(x)$
$\Rightarrow$
1) если “бóльший” $\int_a^\omega g(x)dx<\infty$ $\Rightarrow$ *“мéньший”* $\int_a^\omega f(x)dx<\infty$ ***сх***
если “мéньший” $\int_a^\omega f(x)dx=\infty$ $\Rightarrow$ *“бóльший”* $\int_a^\omega g(x)dx=\infty$ ***расх***

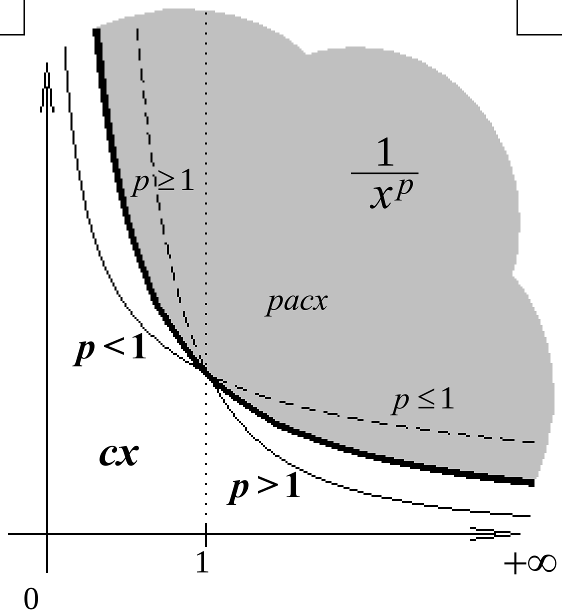
Теорема *(признак сравнения в предельной форме)*

Пусть
1) $(\ 0\le\ )\ f(x)\underset{x\to\omega}{\sim} g(x)$
$\Rightarrow$
1) интегралы $\int_a^\omega f(x)dx$, $\int_a^\omega g(x)dx$ ***одновременно сх****одятся или* ***расх****одятся*

В качестве "эталонных" функций, с которыми чаще всего приходится сравнивать другие функции, отметим степенные $g(x)=\dfrac{1}{x^p}\ \ (p>0)$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \left[\begin{array}{l} \boldsymbol{p<1,\quad cx} \\ p\ge 1,\quad \textit{расх} \end{array}\right.$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \left[\begin{array}{l} p\le 1,\quad \textit{расх} \\ \boldsymbol{p>1,\quad cx} \end{array}\right.$$



42. Числовые ряды. Признаки сравнения

Числовым рядом с общим членом a_k $(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\infty)$ *называется последовательность частичных сумм*

$$S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ \ldots\ + a_k + \ \ldots\ + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \infty)$$

обозначаемая $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

Если предел последовательности частичных сумм

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

***существует** и **конечен**, ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *называется **сх**одящимся*

*(если предел **не** существует или **бес**конечен, ряд называется **рас**ходящимся)*
*В случае **неотрицательных** слагаемых* $\boldsymbol{a_n \geq 0}$ *отметим следующие простые признаки **сходимости** рядов, позволяющие выяснить **сходимость** опосредованно (т.е. без нахождения точного значения суммы* S *).*

***Теорема** (признак сравнения в общей форме)*

Пусть
1) $(\ 0\leq\ )\quad a_n \leq b_n$
$\Rightarrow$
1) если “бо́льший” $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n < \infty$ $\Rightarrow$ *“ме́ньший”* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ ***сх***
если “ме́ньший” $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$ $\Rightarrow$ *“бо́льший”* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$ ***расх***

***Теорема** (признак сравнения в предельной форме)*

Пусть
1) $(\ \leq 0\ )\quad a_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$
$\Rightarrow$
1) ряды $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ ***одновременно** **сх**одятся или **рас**ходятся*

В качестве “эталонных” рядов, с которыми чаще всего приходится сравнивать другие ряды, отметим следующие

гармонический ряд $(p>0)$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \left[\begin{array}{ll} p \leq 1, & \textit{расх} \\ \boldsymbol{p > 1}, & \textbf{\textit{сх}} \end{array}\right.}$$

геометрическая прогрессия $(q>0)$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \left[\begin{array}{ll} \boldsymbol{q < 1}, & \textbf{\textit{сх}} \\ q \geq 1, & \textit{расх} \end{array}\right.}$$

***Теорема** (интегральный признак)*

Пусть
1) $f(x) \underset{x\to+\infty}{\searrow} 0$
$\Rightarrow$
1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *и интеграл* $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ ***одновременно** **сх**одятся или **рас**ходятся*

43. Числовые ряды. Признаки Даламбера, Коши, Лейбница

Теорема *(признаки Даламбера и Коши)*

Пусть

1) $a_n \geq 0$ *и* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$ *или* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$

$\Rightarrow$

1) $q = \left[\begin{array}{l} <1, \quad \textbf{\textit{сх}} \\ =1, \quad ? \\ >1, \quad \textbf{\textit{расх}} \end{array}\right.$

Замечание. *Признак Даламбера разумно применять, если в составе* a_n *имеется* $(...)!$ *факториал, а признак Коши в случае, когда* a_n *имеет вид* $(...)^{\boldsymbol{n}\,\underline{ой}}$ *степени.*

Теорема *(признак Лейбница)*

Пусть

1) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \quad (a_n \geq 0)$ *- знакочередующийся, причем* $a_n \searrow 0$

$\Rightarrow$

1) ряд ***сходится***

Если ***сх****одится не только ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$*, но и ряд из "модулей"* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ***сх****одится, то такой ряд называется* ***абсолютно сходящимся****.*

Сумма ***абсолютно сх****одящегося ряда* ***не зависит от порядка*** *слагаемых.*

Теорема *(об абсолютной* ***сх****одимости)*

Пусть

1) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ *-* ***сх***

$\Rightarrow$

1) ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *-* ***сх***

Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ***сх****одится, но ряд из "модулей"* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ ***расх****одится, то такой ряд называется* ***условно сходящимся****.*

Сумма ***условно сх****одящегося ряда зависит от порядка слагаемых и за счет их перестановки может быть сделана равной* ***любому*** *наперед заданному* ***числу****.*

44. Степенные ряды. Ряды Тейлора

Для каждого степенного ряда

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

существует некоторый интервал $(-R, +R)$, *внутри которого ряд сходится (причем абсолютно), а вне интервала ряд расходится (на концах интервала* $x = \pm R$ *поведение ряда может быть произвольным и требует отдельного исследования).*

Для радиуса сходимости R *имеют место формулы*

Теорема *(формулы Даламбера и Коши)*

Пусть

1) $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$ *или* $\exists \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$

$\Rightarrow$

1) $R = \dfrac{1}{q}$

Степенной ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри интервала сходимости $x \in (-R, +R)$

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n x^{n-1} \qquad \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Коэффициенты a_n *можно выразить через сумму степенного ряда* $S(x)$: $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$

Рядом Тейлора *функции* $f(x)$ *называется степенной ряд*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Отметим наиболее употребительные разложения функций в ряд Тейлора

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots \qquad (-\infty, +\infty)$$

$$\sin x = +\frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \ldots (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \ldots \qquad (-\infty, +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \ldots (-1)^n \frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \ldots \qquad (-\infty, +\infty)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots (-1)^{n+1}\frac{1}{n}x^n + \ldots \qquad (-1, +1]$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}}_{C_\alpha^n} x^n + \ldots \qquad (-1, +1)$$

В частности, при $\alpha = -1$, $x \to -x$ *получаем известную формулу суммы геометрической прогрессии*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots \qquad (-1, +1)$$

45. Ряды Фурье

Если функция $f(x)$ *кусочно непрерывно дифференцируема с регулярными точками разрыва* x_0 *на отрезке* $[-\pi, +\pi]$ *длиной* 2π *(* $[\,0,\ 2\pi\,]$, $[\,a,\ b\,]$, $b = a + 2\pi$ *)*

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0) + f(x_0-0)}{2}$$

то ее можно разложить в ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad -\pi \le x \le +\pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx, \quad n = \quad 1,\ 2,\ \ldots$$

Если дополнительно функция $y = f(x)$, $x \in [-\pi, +\pi]$ *четная или нечетная, то ее ряд Фурье имеет соответственно только четную или нечетную составляющую*

четная

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad -\pi \le x \le +\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = 0$$

нечетная

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad -\pi \le x \le +\pi$$

$$a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

Отсюда вытекает возможность разлагать функцию, заданную только на отрезке $[\,0,\ +\pi\,]$ *в ряды по* ***Cos*** *или по* ***Sin****, представляющие собой ряды Фурье соответственно четного или нечетного продолжений функции на отрезок* $[\,-\pi,\ 0\,]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \qquad 0 < x < +\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} f(x)\cos nx\,dx, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

При нахождении коэффициентов ряда Фурье полезно помнить

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{+\pi} \sin nx\,dx = 0$$

$$\cos n\pi = (-1)^n, \quad \sin n\pi = 0, \quad \cos n\frac{\pi}{2} = \left[\begin{array}{ll} (-1)^m, & n = 2m \\ 0, & n = 2m+1 \end{array}\right., \quad \sin n\frac{\pi}{2} = \left[\begin{array}{ll} 0, & n = 2m \\ (-1)^m, & n = 2m+1 \end{array}\right.$$

46. Ряды Фурье по *Cos* и по *Sin*

Если функция $f(x)$ *кусочно непрерывно дифференцируема с регулярными точками разрыва* x_0 *на отрезке* $\left[-l,+l\right]$ *длиной* $2l$ *(* $\left[0,\ 2l\right]$*,* $\left[a,\ b\right]$*,* $b-a=2l$ *)*

$$f(x_0)=\frac{f\left(x_0+0\right)+f\left(x_0-0\right)}{2}$$

то ее можно разложить в ряд Фурье

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos n\frac{\pi}{l}x+b_n\sin n\frac{\pi}{l}x\right),\qquad -l\le x\le +l$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(x)\cos n\frac{\pi}{l}x\,dx,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots\qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{+l}f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,dx,\quad n=\quad 1,\ 2,\ \ldots$$

Случай интервала произвольной длины $2l$ *сводится к стандартному длиной* 2π *“сжатием” в* l *раз и “растяжением” в* π

$$f(x)=\left[\,-l\le x\le +l\ \Rightarrow\ -\pi\le \overset{\overset{y}{/\!/}}{\frac{\pi}{l}x}\le +\pi\ \Rightarrow\ x=\frac{l}{\pi}y\,\right]=f\left(\frac{l}{\pi}y\right)=g(y)$$

Разложив функцию $g(y)$ *в ряд Фурье на “привычном” отрезке* $-\pi\le y\le+\pi$*, после замены переменной получим разложение* $f(x)=g\left(\frac{\pi}{l}x\right)$ *на заданном отрезке* $-l\le x\le+l$

47. Интегралы Фурье. *Cos*- и *Sin*- преобразования Фурье

Если функция $f(x)$ *кусочно непрерывно дифференцируема с регулярными точками разрыва* x_0 *на всей оси* $(-\infty, +\infty)$

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

и абсолютно интегрируема, то ее можно представить интегралом Фурье

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \big(a(y)\cos xy + b(y)\sin xy\big)dy, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$a(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos yx\,dx, \quad b(y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin yx\,dx$$

Если дополнительно функция $f(x)$ *четная или нечетная, то ее интеграл Фурье имеет соответственно только четную или нечетную составляющую*

четная

$$f(x) = \int_0^{+\infty} a(y)\cos xy\,dy, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$a(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos yx\,dx, \qquad b(y) = 0$$

нечетная

$$f(x) = \int_0^{+\infty} b(y)\sin xy\,dy, \quad -\infty < x < +\infty$$

$$b(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin yx\,dx, \qquad a(y) = 0$$

Отсюда вытекает возможность представить функцию, заданную на полуоси $[\,0, +\infty\,)$, *как* ***Cos****- (****Sin****-) преобразование Фурье своего* ***Cos****- (****Sin****-) преобразования Фурье*

$$F_c(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\cos yx\,dx$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_c(y)\cos xy\,dy \qquad 0 \le x, y < +\infty$$

$$F_s(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(x)\sin yx\,dx$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} F_s(y)\sin xy\,dy \qquad 0 \le x, y < +\infty$$

Интегральной формуле Фурье можно придать “симметричный” вид, переходя к комплексной форме

$$F(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,e^{-iyx}dx \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(y)\,e^{+ixy}dy$$

Функция $F(y)$ *называется преобразованием Фурье функции* $f(x)$, *которая в свою очередь может быть восстановлена по своему преобразованию Фурье как обратное преобразование Фурье.*

48. Интегралы с параметром

Дифференцирование (интегрирование) по параметру под знаком несобственного интеграла

$$F(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,dx\,,\quad y\in[\,c,\,d\,]$$

$$\frac{d}{dy}F(y)=\frac{d}{dy}\int_a^{+\infty} f(x,y)dx=\int_a^{+\infty}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)dx,\qquad \int_c^d F(y)dy=\int_c^d\Big(\int_a^{+\infty} f(x,y)dx\Big)dy=\int_a^{+\infty}\Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx$$

как и почленное дифференцирование (интегрирование) функционального ряда

$$S(y)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y),\quad y\in[\,c,\,d\,]$$

$$\frac{d}{dy}S(y)=\frac{d}{dy}\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dy}f_n(y),\qquad \int_c^d S(y)dy=\int_c^d\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)dy=\sum_{n=0}^{\infty}\int_c^d f_n(y)dy$$

гарантированно возможно в случае ***равномерной сходимости*** *интегралов (рядов)*

Теорема *(признак Вейерштрасса)*

Пусть

1) $|f(x,y)|\le g(x)$ $\quad(\,|f_n(y)|\le g_n\,)\quad y\in[\,c,\,d\,]$

2) интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *(ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} g_n$ *)* ***сходится***

$\Rightarrow$

1) интеграл $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ *(ряд* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(y)$ *)* ***сходится***

причем ***абсолютно****, причем* ***равномерно*** *на интервале* $y\in[\,c,\,d\,]$

49. Интеграл Эйлера-Пуассона

Интеграл Эйлера-Пуассона равен

$$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}}$$

50. Эйлеровы интегралы

Гамма-функция

$$\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \quad (\alpha > 0)$$

Основное свойство (формула приведения)

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$$

Учитывая, что

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = 1$$

из основного свойства вытекает

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots)$$

Отметим

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1} dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\, dx^{\frac{1}{2}} = 2\int\limits_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

Имеет место формула дополнения

$$\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi} \quad (0 < \alpha < 1)$$

Бета-функция

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \int\limits_0^{1} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \quad (\alpha, \beta > 0)$$

связана с гамма-функцией формулой

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$$