

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Фізичний факультет
Кафедра фізики низьких температур

«Допущено до захисту»
В. О. зав. кафедри
фізики низьких температур
проф. Шкловський В.О.
« ____ » _____ 2025 р.

Оцінка « _____ »
Голова ЕК
_____ р.
« ____ » _____ 2025 р.

Проскурняк Олена Іванівна

Випрямлення напруги в надпровідних системах з слабкими зв'язками

Кваліфікаційна робота на здобуття
освітнього ступеня «Магістр»
спеціальність 104 – «фізика та астрономія»
освітньо-професійна програма «Фізика»

Науковий керівник:
професор кафедри фізики низьких
температур доктор фіз.-мат. наук
Гриб О. М.

Анотація

Проскурняк О. І. «Випрямлення напруги в надпровідних системах з слабкими зв'язками» . - Рукопис

Кваліфікаційна робота на здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня «Магістр» за спеціальністю 104 – «фізика та астрономія» – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, 2024. – С.40, Рис. 13.

Змодельована динаміка асиметричних квантових інтерферометрів в постійному магнітному полі при дії змінного струму. Досліджено ефект випрямлення напруги в асиметричному двохконтактному інтерферометрі та фрактальному інтерферометрі. Проаналізовано залежності випрямленої напруги від магнітного поля. Знайдені оптимальні параметри двохконтактного інтерферометра для отримання максимальної випрямленої напруги. Вивчено вплив шумів на залежності випрямленої напруги від магнітного поля. Знайдено, що максимальна напруга зменшується при збільшенні максимальної амплітуди шумів.

Ключові слова: випрямлення напруги, квантова інтерференція, контакти, фрактали.

Abstract

Proskurniak O. I. «Voltage rectification in superconducting systems with weak links». – Manuscript.

Qualifying work for educational and qualification level – «Master», direction of training 104 – “physics and astronomy”. – Kharkiv National V. N. Karazin University, 2025, – P. 40, Fig. 13.

Dynamics of asymmetric quantum interferometers in a constant magnetic field under the action of alternating current was numerically modeled. The effect of voltage rectification in an asymmetric two-junction interferometer and a fractal interferometer was investigated. Dependences of rectified voltage on magnetic field were analyzed. The optimal parameters of the two-junction interferometer were found to obtain the maximum rectified voltage. The influence of noise on dependences of the rectified voltage on magnetic field was studied. It was found that the maximum voltage decreases with an increase in the maximum amplitude of the noise.

Keywords: voltage rectification, quantum interference, weak links, fractals.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ	7
1.1 Ефекти Джозефсона.....	7
1.2. Теорія інтерферометра з двома контактами.....	8
1.3 Ефект випрямлення напруги.....	11
1.4 Системи з фрактальним розподілом критичних струмів.....	12
1.5 Постановка задачі.....	15
2 МОДЕЛЬ ЕФЕКТУ ВИПРЯМЛЕННЯ НАПРУГИ	16
2.1 Модель динаміки двохконтактного інтерферометра.....	16
2.2 Модель динаміки фрактального інтерферометра.....	17
3 РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ТА ОБГОВОРЕННЯ	19
3.1 Циркулюючий струм в інтерферометрі при розкиді критичних струмів контактів	19
3.2 Ефект випрямлення напруги при постійному струмі зміщення.....	21
3.3 Ефект випрямлення напруги при змінному струмі.....	25
3.4 Вплив шуму на контакт та на ефект випрямлення напруги.	26
3.5 Ефект випрямлення напруги у фрактальному інтерферометрі.	32
3.6 Вплив шуму на ефект випрямлення струму у фрактальному інтерферометрі.....	34
ВИСНОВКИ	38
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	39

ВСТУП

Ефект випрямлення напруги в системах з слабкими зв'язками (контактами Джозефсона) з розкидом критичних струмів спостерігається в магнітному полі при прикладенні змінного радіочастотного струму до цих систем [1, 2]. Ефект полягає в тому, що при означених умовах на контактах такої системи з'являється постійна напруга. Частота змінного струму знаходиться в діапазоні 1 - 10 МГц [1-4]. Ефект випрямлення напруги в різних системах з контактами Джозефсона може бути застосований в квантових комп'ютерах для створення систем регулювання струму через кубіти. Інтерес представляє випадок, коли до системи зі слабкими зв'язками прикладається тільки змінний струм. Цей ефект проявляється також в гранульованих плівках «надпровідник- діелектрик» де гранули надпровідника утворюють контакти Джозефсона [3-6]. В цьому випадку виникає перколяційний надпровідний кластер з контурами різних масштабів, які мають різну кількість контактів Джозефсона [4]. Залежності випрямленої напруги від магнітного поля мають самоподібні (фрактальні) властивості [7-9]. Фрактальні властивості мають також а також границі нормальної та надпровідної фази та фрактальних системах шарів надпровідних та нормальних металів [10, 11]. Таким чином, дослідження ефекту випрямлення напруги актуальні як для прикладних, так і для фундаментальних досліджень. Однак, крім названих вище досліджень, до цього часу не існує послідовної теорії цього ефекту. Не вивчено детально динаміка контактів та роль синхронізації осциляцій напруги на контактах в цьому ефекті. Не проведений пошук оптимальних параметрів для отримання максимальної величини цього ефекту. Далі, не досліджена роль шумів у формуванні ефекту випрямлення напруги. Ці дослідження дозволять побудувати послідовну модель ефекту і розробити його теорію. Оскільки досліджуваний об'єкт (електричні властивості контактів Джозефсона) має суттєво нелінійну динаміку, теоретичні дослідження можливо проводити тільки за допомогою чисельного моделювання.

В даній роботі чисельними методами досліджується випрямлення напруги в асиметричному двохконтактному інтерферометрі і у фрактальному інтерферометрі. Розраховуються залежності випрямленої напруги від магнітного поля при різних значеннях амплітуди і частоти змінного струму, який протікає через систему з контактами Джозефсона.

Метою досліджень є встановлення характеру залежностей випрямленої напруги від магнітного поля в системах з контактами Джозефсона і виявлення дії шумів на цей ефект.

Об'єкт досліджень – електричні властивості систем надпровідників з контактами Джозефсона.

Предмет дослідження – ефект випрямлення напруги в квантових інтерферометрах в магнітному полі.

Метод дослідження – чисельне моделювання динаміки систем надпровідників з контактами Джозефсона.

Робоча гіпотеза - припущення, що розрахункові моделі надпровідників з контактами Джозефсона в магнітному полі (квантових інтерферометрів) адекватно відповідають системам, розроблених в експериментах.

В першому розділі кваліфікаційної роботи наведено послідовну теорію двохконтактних надпровідних інтерферометрів, пояснена суть ефекту випрямлення напруги і описано модельні самоподібні системи з багатьма контактами Джозефсона, які дозволяють моделювати динаміку контактів в природних самоподібних системах, таких як перколяційні кластери, де було знайдено ефект випрямлення напруги. В другому розділі роботи описані математичні моделі двохконтактного та фрактального інтерферометрів, а також наведено алгоритм розрахунку випрямленої напруги. Третій розділ кваліфікаційної роботи присвячено опису результатів розрахунків. В цьому розділі представлено результати розрахунків. Особистий внесок автора був вирішальним в проведенні розрахунків та в обробці результатів. Робота виконана на кафедрі фізики низьких температур фізичного факультету Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна.

1 АНАЛІТИЧНИЙ ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ

1.1 Ефекти Джозефсона.

Розглянемо структуру «надпровідник - бар'єр – надпровідник». Згідно моделі Фейнмана для такої структури [12], визначимо ψ_R та ψ_L як хвильові функції куперівської пари для правого та лівого надпровідника. Тоді кожен надпровідний електрод описується єдиним квантовим станом, так що $|\psi_L|^2$ є густиною куперівських пар ρ_L у лівому надпровіднику і т.д. Тунельний контакт між двома надпровідниками проявляється у перекритті ψ_R та ψ_L , так що може відбуватися тунелювання куперівських пар з лівого електроду в правий.

Еволюція системи в часі описується системою рівнянь Шредингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_L}{\partial t} = E_L \psi_L + K \psi_R, \quad (1.1)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_R}{\partial t} = E_R \psi_R + K \psi_L, \quad (1.2)$$

де E_L та E_R – енергії куперівських пар в електродах, K – тунельний гамільтоніан. Якщо до електродів прикладено постійну напругу V , то можна відраховувати значення енергії від середини енергії eV (e – заряд електрона), так що отримаємо такі рівняння:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_L}{\partial t} = \frac{eV}{2} \psi_L + K \psi_R, \quad (1.3)$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi_R}{\partial t} = -\frac{eV}{2} \psi_R + K \psi_L. \quad (1.4)$$

Для вирішення цієї системи підставимо в (1.3), (1.4) вирази для хвильових функцій ψ_L і ψ_R :

$$\psi_L = \rho_L^{1/2} e^{i\varphi_L}, \quad \psi_R = \rho_R^{1/2} e^{i\varphi_R}, \quad (1.5)$$

де φ_L та φ_R – фази хвильової функції куперівських пар в лівому та правому електродах, відповідно. В результаті вирішення системи (1.4), (1.5) отримуємо такі вирази для густини струму $J \equiv \partial \rho_L / \partial t = -\partial \rho_R / \partial t$ та різниці фаз $\varphi = \varphi_R + \varphi_L$, у припущенні, що $\rho_L = \rho_R = \rho$:

$$J = J_c \sin \varphi, \quad (1.6)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2eV}{\hbar}, \quad (1.7)$$

де $J_1 = (2K/\hbar)\rho$ – критична густина струму. Вирази (1.6) та (1.7) називаються першим та другим співвідношенням Джозефсона, відповідно.

Якщо струм через контакт перевищує критичний струм (тобто, кількості куперівських пар недостатньо для забезпечення збереження повного струму), то частина струму переноситься через тунельний бар'єр збудженнями (нормальними електронами), так що на бар'єрі виникає різниця потенціалів V , яка породжує звичайний одноелектронний струм $I_e = V/R$, де R – електричний опір бар'єру. Застосувавши друге співвідношення Джозефсона (1.8) до цього виразу, отримуємо такий вираз:

$$I_e = \frac{\Phi_0}{2\pi R} \frac{d\varphi}{dt}, \quad (1.8)$$

де $\Phi_0 = h/2e$ – квант магнітного потоку. Сума струму Джозефсона та квазічастинкового струму є повним струмом I , який тече через контакт:

$$\frac{\Phi_0}{2\pi R} \frac{d\varphi}{dt} + I_c \sin\varphi = I. \quad (1.9)$$

Диференціальне рівняння (1.9) називають умовою збереження струму через контакт або рівнянням динаміки фази, а електротехнічну модель слабкого зв'язку, в якій струм через контакт дорівнює сумі джозефсонівського струму куперівських пар та одноелектронного струму, називається резистивною моделлю контакту. Підкреслимо ще раз, що змінна φ , яка входить в рівняння (1.9), дорівнює різниці фаз хвильових функцій куперівських пар на берегах контакту.

1.2 Теорія інтерферометра з двома контактами.

Теорія інтерферометра на постійному струмі детально розвинута в роботах [2, 12], і в подальшому опису теорії ми будемо притримуватись розробленому в цих роботах підходу. Інтерферометр на постійному струмі представляє собою надпровідне кільце (або петлю з надпровідного матеріалу, напиленого на діелектричну підкладку, в залежності від технологічного виконання). Струмові електроди підключені до такого кільця в двох діаметрально протилежних напрямках. Кожне плече, по якому тече струм, розірване

слабким зв'язком. Напруга на інтерферометрі вимірюється між точками, які близькі до струмових електродів, так що вимірюється не напруга на окремому слабкому зв'язку, а напруга на всьому приборі (тобто, на двох слабких зв'язках). Напруга на інтерферометрі дорівнює середньому значенню напруги на двох слабких зв'язках. Інтерферометр розміщується в магнітному полі, яке перпендикулярне площі отвору кільця. Величина цього магнітного поля і є результатом вимірювання за допомогою такого інтерферометра.

Якісно принцип дії інтерферометра можна описати так. Відомо, що магнітне поле модулює як критичні струми окремих контактів, так і критичний струм всього інтерферометру [12]. Це значить, що, розміщуючи інтерферометр в зовнішньому магнітному полі, можна виміряти критичний струм інтерферометра, і по змінам у критичному струмі дізнатись величину магнітного поля. Замість змін критичного струму можна вимірювати зміни напруги на інтерферометрі, які, зрозуміло, пов'язані зі змінами критичного струму. Слідуючи роботам [2, 12], побудуємо теорію таких змін для інтерферометра, контакти якого мають малі ємності, так що в математичному описі динаміки кожного окремого контакту можна обмежитись резистивною моделлю контакту. Залежності напруги від струму для контактів в цьому випадку не мають гістерезисів. Нехай через інтерферометр тече постійний струм I . Позначимо через $i_1(t), i_2(t)$ струми в плечах інтерферометру. Тоді струм I дорівнює сумі струмів:

$$I = i_1(t) + i_2(t). \quad (1.10)$$

В тому випадку, коли струми в плечах не дорівнюють один одному, в петлі існує циркулюючий струм i_s :

$$i_s = \frac{i_2(t) - i_1(t)}{2}. \quad (1.11)$$

В рамках резистивної моделі динамічні рівняння контактів виглядають так:

$$i_1(t) = I_a \sin \varphi_a(t) + \frac{V_a}{R_a} \quad (1.12)$$

$$i_2(t) = I_b \sin \varphi_b(t) + \frac{V_b}{R_b}, \quad (1.13)$$

де індекси a та b позначають контакти в плечі 1 та в плечі 2, відповідно.

В тому разі, коли індуктивності плечей однакові ($L_a = L_b = L/2$), то напруга V на інтерферометрі дорівнює:

$$V = V_a + \frac{L}{2} \frac{di_1}{dt}, \quad (1.14)$$

$$V = V_b + \frac{L}{2} \frac{di_2}{dt}. \quad (1.15)$$

Це значить, що при заданому струмі I напруга на інтерферометрі дорівнює:

$$V(t) = \frac{\hbar}{2e} \frac{d}{dt} \varphi(t), \quad (1.16)$$

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_a(t) + \varphi_b(t)}{2} \quad (1.17)$$

В тому випадку, коли критичні струми контактів однакові ($I_a = I_b = I_c$), можна переписати вирази (1.10), (1.11) так:

$$I = I_0 [\sin \varphi_a(t) + \sin \varphi_b(t)] + 2 \frac{V(t)}{R}, \quad (1.18)$$

$$i_s = I_c [\sin \varphi_a(t) - \sin \varphi_b(t)] + \frac{(V_a - V_b)}{R}. \quad (1.19)$$

В останньому рівнянні можна знехтувати одноелектронним членом (наближення Оуботера [2]). Тоді рівняння (1.18), (1.19) виглядають так:

$$I = 2I_c \sin \left(\frac{\varphi_a + \varphi_b}{2} \right) \cos \left(\frac{\varphi_a - \varphi_b}{2} \right) + 2 \frac{V(t)}{R}, \quad (1.20)$$

$$i_s = 2I_c \cos \left(\frac{\varphi_a + \varphi_b}{2} \right) \sin \left(\frac{\varphi_a - \varphi_b}{2} \right). \quad (1.21)$$

З умови квантування магнітного потоку слідує, що

$$\frac{\varphi_a + \varphi_b}{2} = -\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}, \quad (1.22)$$

де $\Phi = \Phi_e + Li_s$ - повний магнітний потік у петлі, а Φ_e - зовнішній магнітний потік. Тоді система рівнянь (1.20), (1.21) буде така:

$$I = 2I_c \sin \varphi(t) \cos \frac{\pi \Phi}{\Phi_e} + \frac{2V(t)}{R} \quad (1.23)$$

$$\frac{\Phi - \Phi_e}{\Phi_0} = \frac{\beta_L}{\pi} \sin \pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \cos(\varphi(t)). \quad (1.24)$$

де $\beta_L = 2\pi LI_c / \Phi_0$. Якщо $L \rightarrow 0$, то $\beta_L \rightarrow 0$, так що з (1.24) слідує, що $\Phi \simeq \Phi_e$, і з (1.23) маємо:

$$I = I_c(\Phi_e) \sin \varphi(t) + \frac{2}{R} \frac{\hbar}{2e} \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad (1.25)$$

$$I_c(\Phi_e) = 2I_c \cos \frac{\pi \Phi_e}{\Phi_0}. \quad (1.26)$$

Рішення рівняння (1.25) для напруги V на інтерферометрі має такий вигляд:

$$V = 0 \text{ при } 0 \leq |I| \leq I_c(\Phi_e) = 2I_0 |\cos \pi \Phi_e|, \quad (1.27)$$

$$V = \frac{R}{2} \sqrt{I^2 - I_c^2} \text{ при } |I| > I_c(\Phi_e). \quad (1.28)$$

Зауважимо, що в (1.27), (1.28) змінною V ми позначили напругу, усереднену по великому проміжку часу, який значно більше, ніж період джозефсонівських коливань напруги на слабкому зв'язку, які зумовлені коливаннями різниці фаз (1.7).

Вище було докладно описано випадок малих індуктивностей плечей інтерферометра. В цьому разі система рівнянь (1.23), (1.24) допускає аналітичне рішення. Однак, в експериментах параметр β_L звичайно більше одиниці, і систему рівнянь (1.23), (1.24) приходиться вирішувати чисельними методами.

1.3. Ефект випрямлення напруги.

В роботах [1-6] була описана поява постійної напруги на інтерферометрі, через який пропускається низькочастотний струм, частота якого набагато менше, ніж джозефсонівська частота генерації. Інтерферометр знаходиться в постійному зовнішньому магнітному полі. Були отримані залежності постійної напруги від магнітного поля. Амплітуда низькочастотного струму була як більше, так і менше максимального критичного струму інтерферометра. Якщо амплітуда була меншою, ніж критичний струм, то на залежностях напруги від магнітного поля з'являлись ділянки, на яких напруга дорівнювала нулю. В роботах [1, 2] було надано пояснення цього ефекту. Найбільш важливою особливістю даного ефекту було те, що контакти інтерферометру мали різні критичні струми (такий інтерферометр називається асиметричним). Якщо через інтерферометр проходить постійний, а не змінний струм, в асиметричному інтерферометрі існує додатковий струм, утворює власне магнітне поле. Завдяки названому магнітному полю утворюється додатковий магнітний потік. Однак, зміна напрямку постійного струму приводить до зміни напрямку додаткового циркулюючого струму на

протилежний і, відповідно, до зміни знаку додаткового магнітного поля на протилежний. Це значить, що сума зовнішнього магнітного поля та додаткового магнітного поля приймає два різних значення при зміні напрямку постійного струму. Таким чином, при проходженні змінного струму через інтерферометр, магнітне поле через інтерферометр змінюється. В тому випадку, коли амплітуда постійного струму більша, ніж максимальний критичний струм інтерферометра, залежність випрямленого струму від магнітного поля повторює алгебраїчну суму випрямленої напруги при струмах протилежної полярності. Наприклад, для симетричного інтерферометра така сума дорівнює нулю, оскільки залежності максимального критичного струму від магнітного поля $I_{cM}^2(\Phi_e)$ для протилежних напрямів струму I_b однакові для будь-яких $I_b \geq I_{cM}(\Phi_e)$:

$$|V| = \frac{R}{2} \left| \sqrt{I_b^2 - I_{cM}^2(\Phi_e)} - \sqrt{I_b^2 - I_{cM}^2(\Phi_e)} \right| = 0. \quad (1.29)$$

Однак, при $I_{c1} \neq I_{c2}$ перший член в круглих скобках не дорівнює другому члену, так що $|V| \neq 0$.

1.4. Системи з фрактальним розподілом критичних струмів.

Як відомо [12, 13], довгий контакт можна розглядати як систему паралельно з'єднаних надпровідних петель з «елементарними» контактами, параметри яких дорівнюють параметрам частин довгого контакту, на які умовно поділений цей довгий контакт. В довгому контакті з неоднорідним розподілом критичних струмів виникають циркулюючі струми в петлях, які з'єднують ці «елементарні» контакти. Оскільки петлі, розташовані поряд, мають спільні «елементарні» контакти, циркулюючі струми з різних петель взаємодіють один з одним. Така взаємодія приводить до появи додаткової різниці потенціалів на «елементарних» контактах, що, в свою чергу, веде до розповсюдження збудження вздовж ланцюга петель, тобто, вздовж контакту. Ефекти, які пов'язані з таким розповсюдженням збуджень, добре відомі. Поява флюксонів (електромагнітних збуджень солітонного типу) і поява резонансних

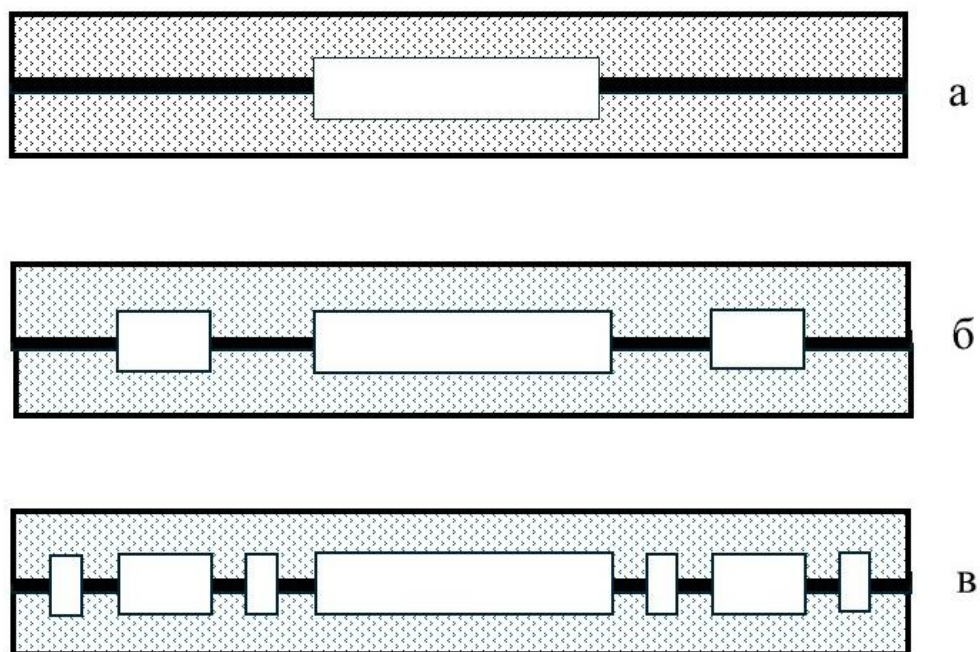


Рисунок 2.2 – етапи формування інтерферометру з фрактальним розподілом критичних струмів [9]. Надпровідні області позначені крапками, діелектричний бар'єр позначений чорним кольором, а області, в яких джозефсонівський струм відсутній – білим кольором.

коливань електромагнітних хвиль на модах резонансів довгого контакту, яка приводить до появи сходинок Фіске на залежностях напруги від струму, відносяться саме до розповсюдження електромагнітних збуджень в контакті. Досить велика ємність довгих контактів, по суті, унеможлиблює появу ефекту випрямлення напруги в його «класичній» формі, вивченій експериментально на прикладі двохконтактного інтерферометра. Однак, ефект випрямлення напруги спостерігається в гранульованих плівках Sn-Ge на порозі перколяції в магнітному полі [3-6]. У місцях торкання надпровідних гранул Sn утворюється контакти Джозефсона з малою ємністю. Надпровідні гранули утворюють петлі. Контакти Джозефсона в цих петлях мають широкий розкид критичних струмів. На порозі протікання виникає сітка контактів Джозефсона, яка складається з петель різного розміру і з різною індуктивністю (перколяційний кластер). Такий кластер має самоподібну фрактальну структуру, тобто, в

ньому присутні петлі різних масштабів розмірів. Розрахунок критичних струмів в квазіодноримірній фрактальній структурі був проведений в роботі [7] на прикладі канторівської тріадної множини відрізків [14]. Етапи побудови такої структури наступні. На першому етапі береться довгий контакт, ділиться на три частини, і в середній частині вирізається ізоляційний бар'єр так, щоби контакт Джозефсона в цій частині довгого контакту не існував. Таким чином, на першому етапі побудови фрактального контакту Джозефсона ми утворили двохконтактний інтерферометр. На другому етапі побудови кожна з двох залишившихся частин знову ділиться на три частини, і середні частини вирізаються. Утворилося вже чотири контакти, причому між контактами утворились три отвори з двома характерними розмірами. На кожному наступному кроці побудови структури число контактів дорівнює 2^N , де N – крок побудови. Був знайдений вираз для максимального критичного струму такої структури [7]:

$$I_{cmax}(k) = I_c s 2^N \left| \frac{\sin(\pi k s)}{\pi k s} \right| \left| \prod_{n=1}^N \cos(2\pi 3^{-n} k L) \right|, \quad (1.30)$$

де I_c – максимальний критичний струм одного контакту, s – довжина одного контакту, L – довжина системи, $k = Hd/\Phi_0$, d – сума лондонівських глибин проникнення магнітного поля в електроди та товщини бар'єру. В граничному випадку $sk \rightarrow 0$ маємо вираз для залежності максимального критичного струму від k , або від магнітного поля:

$$I_{cmax}(k) = \left| \prod_{n=1}^N \cos(2\pi 3^{-n} k L) \right|. \quad (1.31)$$

Залежність квадрату величини I_{cmax} від k співпадає з залежністю інтенсивності світла при проходженні через екран з отворами (щілинами), просторовий розподіл яких визначається побудовою тріадної канторівської множини відрізків, якою ми скористались для побудови розподілу контактів Джозефсона. Тут проявляється повна аналогія дифракції надструмів і дифракції світла [15]. В роботах [7-9] показано, що з квадрату залежності I_{cmax} від k (1.31) можна отримати фрактальну розмірність канторівської тріадної множини $D' = 0,63$. В роботі [9] описаний також метод обробки

експериментально отриманих залежностей $I_{cmax}(H)$, який дозволяє отримати фрактальну розмірність просторового розподілу критичних струмів в контактах.

1.5. Постановка задачі.

Оскільки метою роботи є встановлення характеру залежностей випрямленої напруги від магнітного поля в системах з контактами Джозефсона і виявлення дії шумів на цей ефект, то для досягнення мети необхідно вирішити такі задачі:

- розробити модель ефекту випрямлення напруги, застосувати модель для найпростішої системи, в якій цей ефект проявлений (двохконтактного інтерферометра) і дослідити цей ефект при різних значеннях параметрів;
- вивчити дію шумів на окремі контакти Джозефсона і застосувати розвинуту модель дії шуму до ефекту випрямлення напруги;
- застосувати розроблену модель ефекту випрямленої напруги до багатоконтактного фрактального інтерферометру як до системи,

Рішення поставлених задач описано в наступних розділах роботи. Для вирішення були використані моделі двухконтактного і фрактального інтерферометрів [9, 12]. Ці моделі докладно описані в розділі 2. Рівняння вирішувались в нормалізованих безрозмірних величинах, які зручно використовувати при апроксимації експериментальних даних. В розділі 3 спочатку досліджується циркулюючий струм в двухконтактному асиметричному інтерферометрі. Потім досліджується ефект випрямлення напруги, який виникає при циклічній зміні напрямку постійного струму, а також ефект випрямлення напруги при змінному струмі. Окреме дослідження присвячено впливу шумів на автономний контакт і на випрямлення напруги в двухконтактному інтерферометрі. В останніх підрозділах розраховано випрямлена напруги та впливу шумів у фрактальному інтерферометрі.

2. МОДЕЛЬ ЕФЕКТУ ВИПРЯМЛЕННЯ НАПРУГИ

2.1 Модель динаміки двохконтактного інтерферометра.

В резистивній моделі рівняння динаміки контактів та умови квантування магнітного потоку виглядають так [12, 13]:

$$\frac{\Phi_0 C}{2\pi} \frac{d^2 \varphi_i}{dt^2} + \frac{\Phi_0}{2\pi R_i} \frac{d\varphi_i}{dt} + I_{ci} \sin \varphi_i = I_b \pm I^R, \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

$$I^R = \frac{1}{L} \left[\Phi - \frac{\Phi_0}{2\pi} (\varphi_1 - \varphi_2) \right], \quad (2.2)$$

де φ_1 та φ_2 – різниці фаз хвильових функцій куперівських пар в контактах 1 та 2, відповідно, Φ – магнітний потік, який проходить через площу петлі інтерферометра, L – індуктивність інтерферометра, i - номер контакту. Для побудови моделі динаміки двохконтактного інтерферометра зручно переписати рівняння динаміки контактів у нормалізованих величинах. Визначимо середній критичний струм $I_{ca} = 1/2 (I_{c1} + I_{c2})$ та розкид критичних струмів $\delta = (I_{c1} - I_{c2}) / (2I_{ca})$. Тоді $I_{c1} = (1 + \delta)I_{ca}$, $I_{c2} = (1 - \delta)I_{ca}$. Якщо бар'єри контактів зроблені з одного матеріалу, то характеристична напруга контактів однакова ($V_c \equiv I_{ci} R_i = const$). Тоді $R_1 = V_c / I_{c1}$, $R_2 = V_c / I_{c2}$, так що $R_1 = R_a / (1 + \delta)$, $R_2 = R_a / (1 - \delta)$, де $R_a = V_c / I_{ca}$. Далі, припустимо, що індуктивності плечей інтерферометра однакові, і введемо нормалізований параметр індуктивності інтерферометра $\beta_L = (2\pi I_{ca} L) / \Phi_0$. Будемо вважати ємності контактів C_i однаковими: $C_1 = C_2 = C$ і введемо параметр Мак-Камбера $\beta_C = (2\pi V_c R_a C) / \Phi_0$. Нормалізуємо всі струми на середній критичний струм I_{ca} та електричні опри на R_a і введемо нормалізований час $\tau = (2\pi V_c t) / \Phi_0$. Тоді рівняння (2.1), (2.2) мають такий вигляд:

$$\beta_C \frac{d^2 \varphi_i}{d\tau^2} + (1 \pm \delta) \frac{d\varphi_i}{d\tau} + (1 \pm \delta) \sin \varphi_i = i_b \pm i^R, \quad (2.3)$$

$$i^R = \frac{1}{\beta_L} [2\pi \phi - (\varphi_1 - \varphi_2)], \quad (2.4)$$

де $\phi = \Phi / \Phi_0$, $i_b = I_b / I_{ca}$, $i^R = I^R / I_{ca}$. Рівняння (2.3), (2.4) вирішувались методом Рунге-Кутта. Усереднена напруга на інтерферометрі дорівнює:

$$\bar{v} = \frac{1}{M} \frac{\Phi_0}{2\pi} \left[\frac{d\varphi_1}{d\tau} + \frac{d\varphi_2}{d\tau} \right], \quad (2.5)$$

де $M = 2$ – кількість контактів в інтерферометрі, риска над виразом позначає усереднення по часу, який значно більший, ніж період джозефсонівських коливань напруги. Для моделювання ефекту випрямлення напруги був заданий параметр δ . Значення параметра β_C вибиралось малим ($\beta_C = 0,1$) для виключення з розгляду явища гістерезису залежностей напруги від струму зміщення. В рівнянні (2.3) замість струму i_b підставляються значення змінного струму $i_a \sin(2\pi\nu\tau)$, де i_a – нормалізована амплітуда сигналу. Розраховувалась залежність усередненої напруги від нормалізованого магнітного потоку ϕ .

2.2 Модель динаміки фрактального інтерферометра.

Динаміка багатоконтактного інтерферометру моделюється подібно до динаміки двохконтактного інтерферометру. Усереднення критичних струмів проводиться по всім контактам в системі. Рівняння динаміки контактів і квантування магнітного потоку в цьому випадку наступні [9]:

$$\beta_C \frac{d^2\varphi_i}{d\tau^2} + (1 + \delta_i) \frac{d\varphi_i}{d\tau} + (1 + \delta_i) \sin\varphi_i = i_a \sin(2\pi\nu\tau) + i_{i,i+1}^R - i_{i-1,i}^R, \quad (2.6)$$

$$i = 2, \dots, n - 1, \quad (2.6)$$

$$i_{i,i+1}^R = \frac{1}{\beta_{L_{i,i+1}}} [2\pi\phi_{i,i+1} - (\varphi_i - \varphi_{i+1})], \quad i = 2, \dots, n - 1, \quad (2.7)$$

$$\beta_C \frac{d^2\varphi_1}{d\tau^2} + (1 + \delta_1) \frac{d\varphi_1}{d\tau} + (1 + \delta_1) \sin\varphi_1 = i_a \sin(2\pi\nu\tau) + i_{1,2}^R, \quad i = 1, \quad (2.8)$$

$$i_{1,2}^R = \frac{1}{\beta_{L_{1,2}}} [2\pi\phi_{1,2} - (\varphi_1 - \varphi_2)], \quad i = 1, \quad (2.9)$$

$$\beta_C \frac{d^2\varphi_n}{d\tau^2} + (1 + \delta_n) \frac{d\varphi_n}{d\tau} + (1 + \delta_n) \sin\varphi_n = i_a \sin(2\pi\nu\tau) + i_{n-1,n}^R, \quad i = n, \quad (2.10)$$

$$i_{n-1,n}^R = \frac{1}{\beta_{L_{n-1,n}}} [2\pi\phi_{n-1,n} - (\varphi_{n-1} - \varphi_n)], \quad i = n, \quad (2.11)$$

де індекси в позначеннях циркулюючих струмів, параметрів індуктивності та магнітних потоків означають струми або магнітні потоки в петлях між контактами, позначеними цими індексами. Зауважимо, що величини δ_i в цій моделі можуть приймати випадкові додатні або від'ємні значення. Напруга на

інтерферометрі розраховується як середнє арифметичне від усередненої напруги на всіх контактах в системі [9]:

$$V = \frac{1}{n} \frac{\Phi_0}{2\pi} \sum_{i=1}^n \overline{\frac{d\varphi_i}{d\tau}}. \quad (2.12)$$

При виконанні розрахунків спершу розраховувалась фрактальна система з конкретними координатами контактів. Довжина інтерферометра дорівнювала 0,5 мм. Для кожного контакту величини δ_i вибирались випадково з використанням генератора випадкових чисел. При моделюванні ефекту випрямленої напруги будувались залежності напруги на інтерферометрі від величини зовнішнього магнітного поля. Необхідно зауважити, що система, яка розраховувалась в цьому дослідженні, принципово не може бути досліджена аналітичними методами. Згідно теорії фрактального інтерферометра, розвинутої в роботах [7 - 9], залежність критичного струму фрактального інтерферометра визначається перетворенням Фур'є від функції розподілу контактів. Однак, в даній моделі використовуються випадкові значення критичних струмів. Перетворення Фур'є не може бути застосованим до такої задачі. Тому вирішення задач динаміки такої системи може бути тільки чисельним. Індуктивності петель розраховувались згідно стандартним виразам для індуктивності прямокутної петлі з заданою шириною і фіксованою висотою 500 нанометрів (це-відстань між надпровідними пластинами, яка існує в тих місцях системи, де немає контактів Джозефсона).

Рішення рівнянь динаміки контактів проводилось методом Рунге-Кутта. Крок по часу вибирався порядку 10^{-15} с і підбирався більш точно в конкретних задачах інтегрування рівнянь для того, щоби забезпечити стабільність рішення. Таким чином, на одному періоді джозефсонівських коливань залежність напруги на контакті від часу мала порядку тридцяти точок. Усереднення напруги по часу проводилось по 10^4 періодів коливань. Значення характеристичної напруги вибиралось 2 мВ, що характерно для низькотемпературних надпровідників. Розрахунок одного значення усередненої напруги проводився протягом 3 хвилин.

3 РЕЗУЛЬТАТИ РОЗРАХУНКІВ ТА ОБГОВОРЕННЯ

3.1 Циркулюючий струм в інтерферометрі при розкіді критичних струмів контактів.

На рисунку 3.1 (а) показані залежності $V = f(I_b)$ для двох автономних (тобто, не зв'язаних ні з якою системою) контактів з розкидом критичних струмів 20%: ($I_{c1} = (1 - \delta) \cdot I_{ca}$; $I_{c2} = (1 + \delta) \cdot I_{ca}$; $\delta = 0,25$). Параметр Мак-камбера для цих контактів дорівнює $\beta_C = 0,1$. Це значить, що для контактів можна застосувати резистивну модель контакту. Розглянемо випадок, коли зовнішнє магнітне поле до інтерферометра не прикладено (тобто, $\phi = 0$). На рисунку 3.1 (б) наведена залежність $V = f(I_b)$ для інтерферометру, в склад якого входять ці два контакти, з'єднані надпровідною петлею. Нормалізована індуктивність петлі (параметр індуктивності) дорівнює $\beta_L = (2\pi I_{ca} L) / \Phi_0 = 3$. З рисунку 3.1 (б) видно, що залежності напруги від струму стали однаковими, тому що ці напруги синхронізує циркулюючий змінний струм в електричному колі петлі інтерферометра. Зауважимо, що у випадку контактів з однаковими критичними струмами ($\delta = 0$) цей синхронізуючий струм не існує ($I^R = 0$).

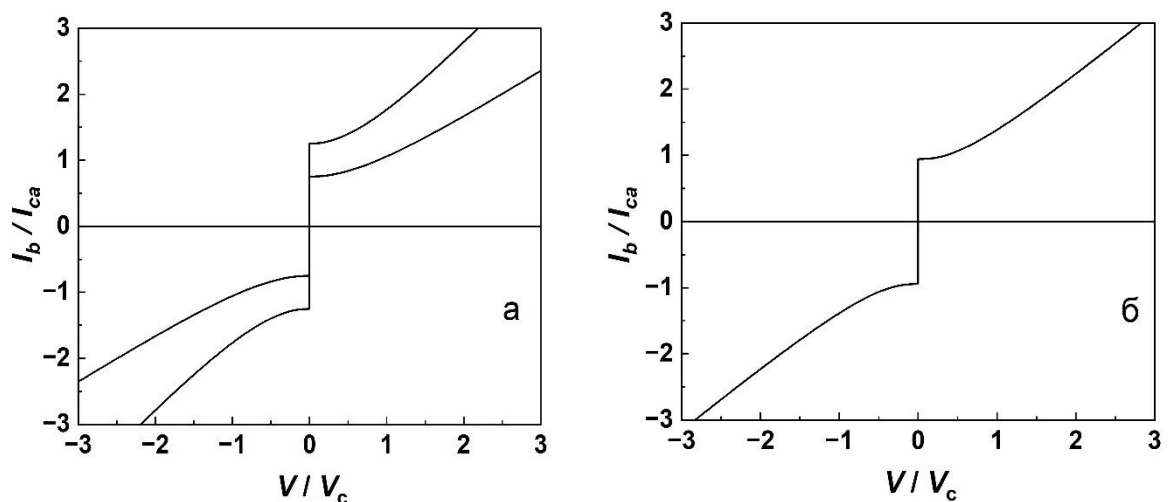


Рисунок 3.1 – залежності $V = f(I_b)$ для двох автономних контактів з розкидом критичних струмів $\delta = 0,25$ (а) та залежність $V = f(I_b)$ для інтерферометра з параметрами $\delta = 0,25$, $\beta_L = 3$ (лінія).

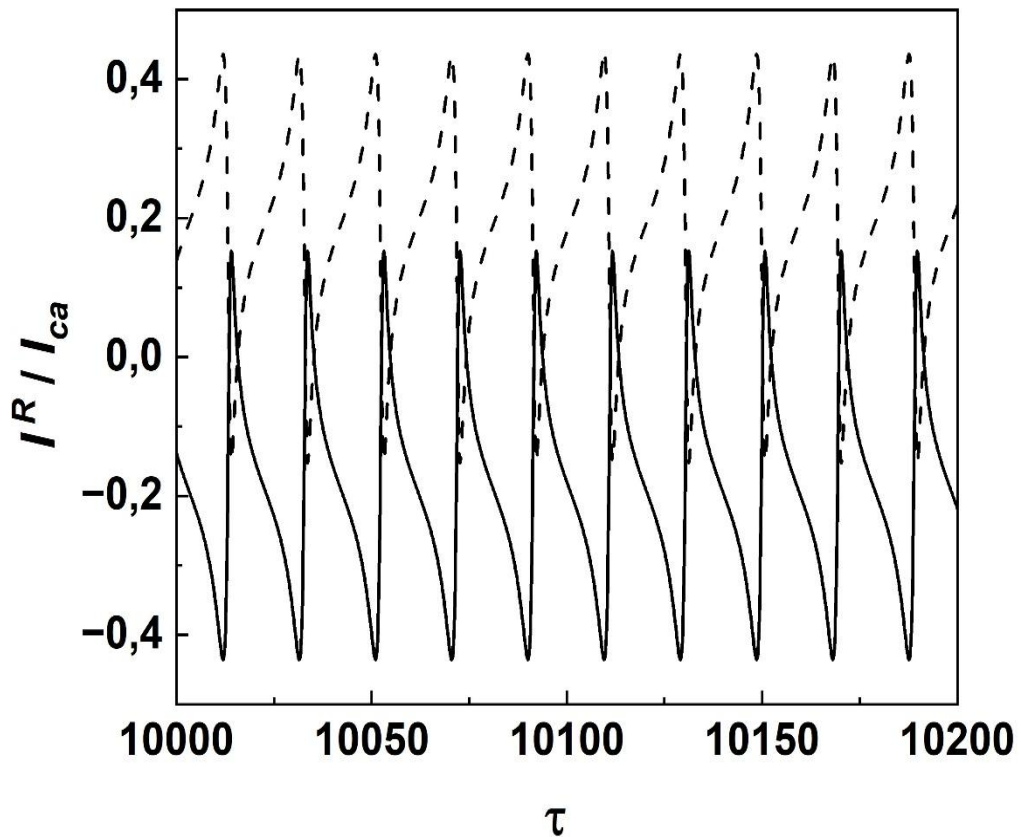


Рисунок 3.2 – залежність $I^R/I_{ca} = f(\tau)$ при $|I_b| = 1,03$ для додатного (жирна лінія) та від’ємного (штрихова лінія) напрямів струму зміщення I_b .

Залежності для контакту 1 з більшим критичним струмом показані хрестиками, для контакту 2 – кружками. Циркулюючий струм для додатного напрямку струму $I_b=1,03$ показаний на рисунку 3.2 жирною лінією. Для $I_b=-1,03$ цей струм показаний на рисунку 3.2 штриховою лінією. З рисунку 3.3 видно, що значення струму I^R/I_{ca} для $I_b = 1,03$ протилежні по знаку значенням струму I^R/I_{ca} при $I_b = -1,03$. Це значить, що при зміні напрямку струму I_b струм I^R починає текти в протилежному напрямі. Наприклад, напрям змінюється з руху проти годинникової стрілки на рух по годинниковій стрілці. Оскільки будь-який рух заряду збуджує магнітне поле, циркулюючий струм I^R збуджує власне магнітне поле. Це магнітне поле змінне з часом і змінює напрям при зміні полярності струму I_b . Це магнітне поле додається або віднімається від компоненти зовнішнього магнітного поля, перпендикулярної площині петлі

інтерферометра. Таким чином, при зміні напрямку струму I_b інтерферометр знаходиться в різних магнітних полях. Цей ефект є ключовим при випрямленні напруги при проходженні низькочастотного струму і інтерферометрі.

3.2 Ефект випрямлення напруги при постійному струмі зміщення.

Залежність максимального критичного струму інтерферометра I_{cmax} з однаковими критичними струмами I_c контактів від нормалізованого магнітного потоку $\phi = \Phi_e/\Phi_0$ показана на рисунку 3.3 (кружки) для параметру індуктивності $\beta_L = 4 \cdot 10^{-4}$. Лінією показана залежність, отримана з теорії двохконтактних інтерферометрів:

$$I_{cmax}(\phi) = 2I_c \cdot |\cos \pi\phi|. \quad (3.1)$$

З рисунку 3.3 видно, що розрахунок добре узгоджується з теорією.

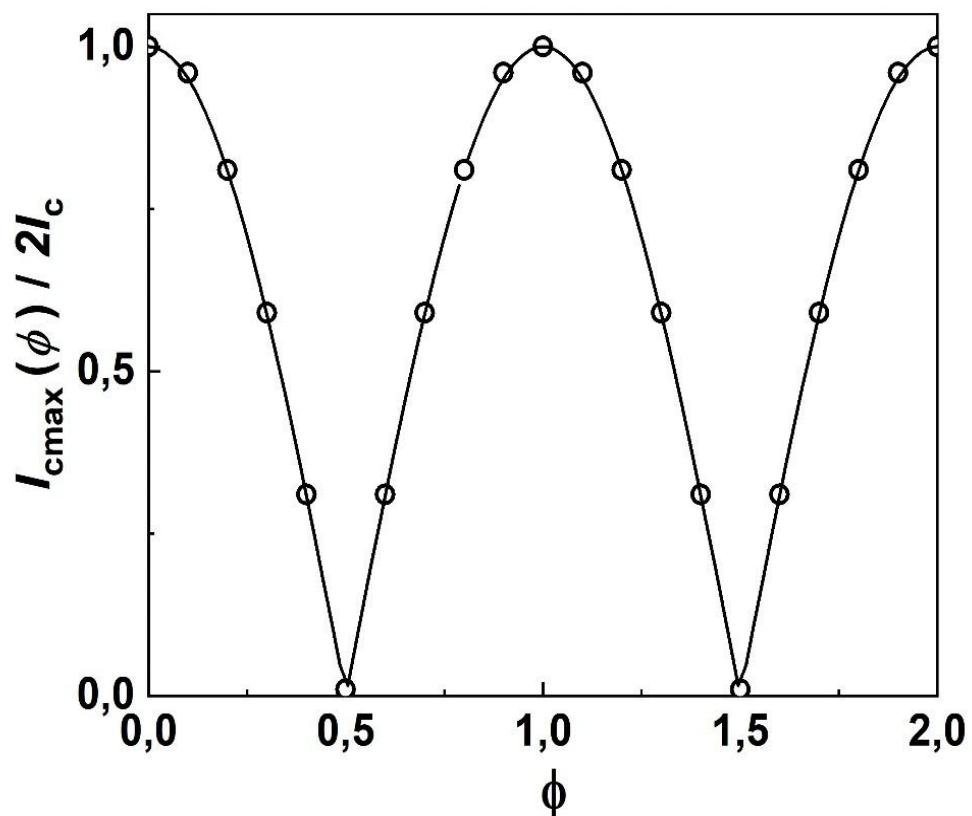


Рисунок 3.3 – розрахована залежність $I_{cmax}(\phi)/2I_c$ (кружки) та її апроксимація згідно виразу (3.1).

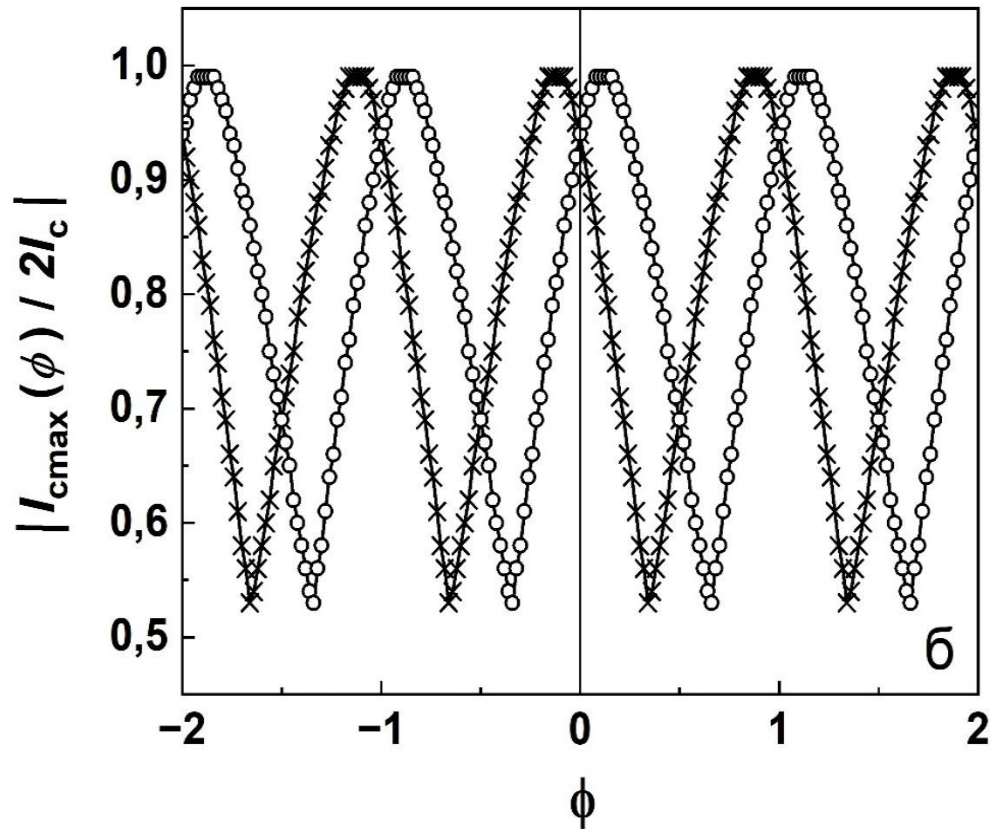


Рисунок 3.4 – залежності $I_{cmax}(\phi_e)/2I_{ca}$ при додатному напрямі струму I_b (кружки) та від'ємному напрямі струму I_b (трикутники).

При значеннях параметру індуктивності інтерферометра $\beta_L \geq 1$ глибина осциляцій залежності $I_{cmax} = f(\phi)$ зменшується [12], і ця залежність не описується виразом (3.1). Однак, головні ознаки залежності $I_{cmax} = f(\phi)$, показаної на рисунку 3.3, залишаються без змін для інтерферометрів з однаковими значеннями критичних струмів контактів: крива симетрична відносно цілих значень ϕ і має мінімуми при напівцілих значеннях ϕ . Якщо критичні струми контактів не однакові, обидві умови не виконуються. При додатному значенні I_b залежність $I_{cmax} = f(\phi)$ зсунута відносно симетричної кривої на величину $(-L|I_{c1} - I_{c2}|)/2\Phi_0$, а при від'ємному значенні I_b – на таку саму відстань в сторону додатних значень ϕ , так що загальний зсув кривих дорівнює $(L|I_{c1} - I_{c2}|)/\Phi_0$ (рисунок 3.4). Вивчимо вплив розкиду критичних струмів на напругу на контактах для інтерферометра, який знаходиться в

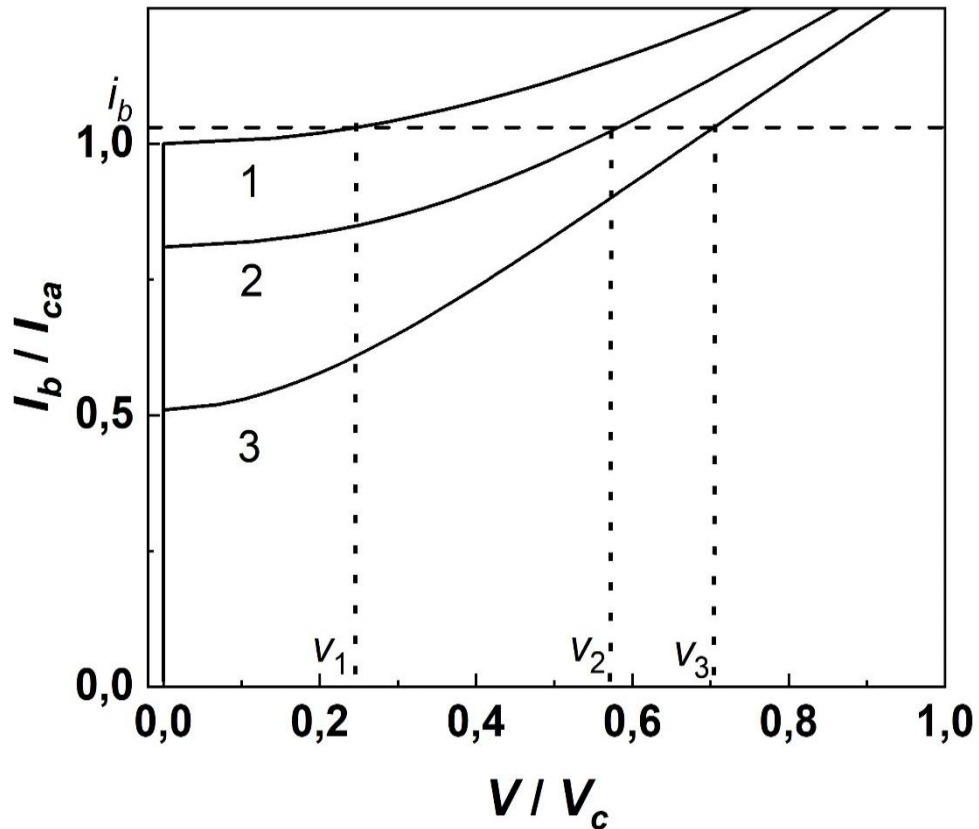


Рисунок 3.5 – залежності $V/V_c = f(I_b/I_{ca})$ при $\phi = n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (крива 1), $\phi = n + 1/4$ (крива 2), $\phi = n + 1/2$ (крива 3).

зовнішньому магнітному полі. Залежності $V = f(I_b)$ для інтерферометра з $\delta=0$, який знаходиться в магнітних полях, які утворюють магнітний потік $\phi = n$ (де $n = 0, 1, 2, \dots$, крива 1), $\phi = n + 1/4$ (крива 2), $\phi = n + 1/2$ (крива 3), при заданому постійному струмі I_b , показані на рисунку 3.5. Показані значення напруги V_1, V_2, V_3 , які відповідають заданому струму I_b , при названих значеннях магнітного потоку. Залежності $|V/V_c| = f(\phi)$ показана на рисунку 3.6. Хрестиками показана залежність $|V/V_c| = f(\phi)$ для $I_b = 1,03$, кружками – для $I_b = -1,03$. Значення $|V/V_c|$ для обох кривих повністю співпадають. Це значить, що різниця $|V/V_c|$ для цих кривих дорівнює нулю. Однак, якщо критичні струми різні, функції $|V/V_c| = f(\phi)$ для струмів зміщення різних напрямів не співпадають. З рисунку 3.7 видно, що різниця між двома

значеннями $|V/V_c|$, отриманими при різних напрямках I_b , є нулем при $\varphi = n$, та при $\varphi = n/2$, і змінює знак у проміжках між цими значеннями. Таким чином,

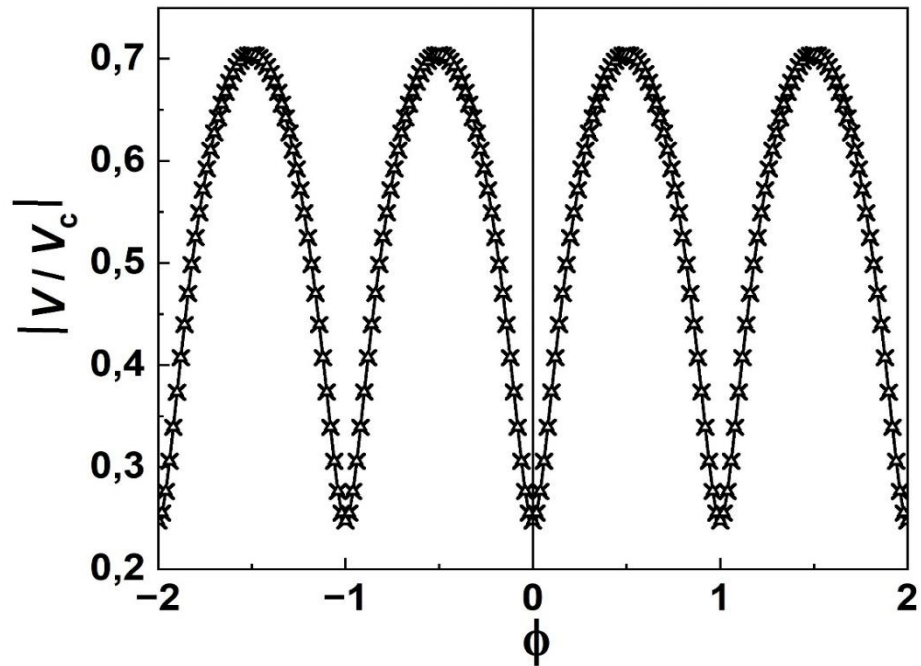


Рисунок 3.6 – залежності $|V/V_c| = f(\phi)$ для $I_b = 1,03$ (хрестики) та $I_b = -1,03$ (кружки).

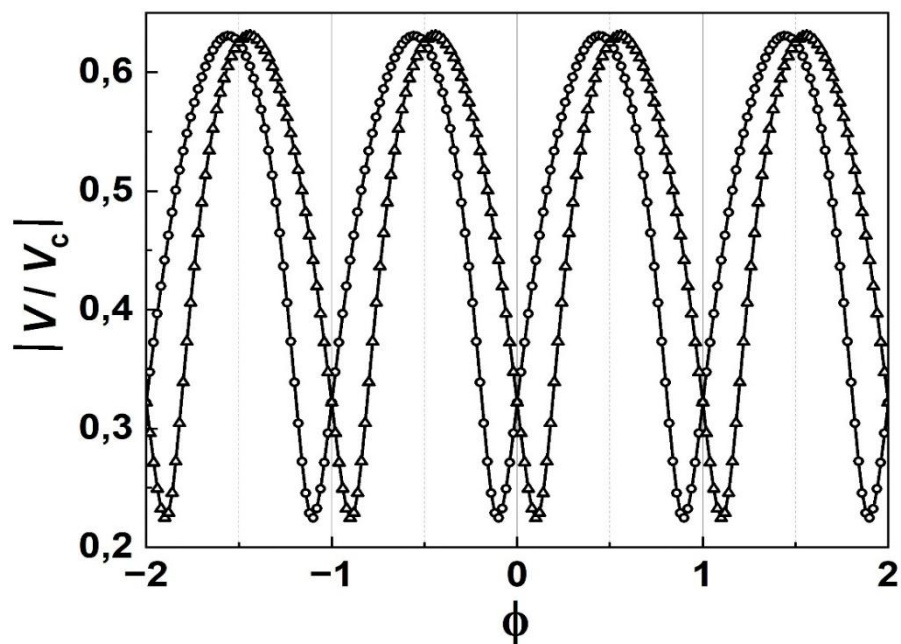


Рисунок 3.7 – залежності $|V/V_c| = f(\phi)$ для напрямку $I_b = 1,03$ (кружки) та для $I_b = -1,03$ (трикутники).

при вибраному значенні ϕ існує два значення $|V/V_c|$, які відповідають додатному знаку I_b та від'ємному знаку I_b , а саме V_1/V_c та $-V_2/V_c$. Якщо тепер швидко змінювати полярність I_b , то напруга буде швидко змінюватись між цими двома значеннями. Важливо те, що середнє значення такої залежності напруги від часу не дорівнює нулю, оскільки $|V_1/V_c| \neq |V_2/V_c|$. Саме ця різниця і є тою випрямленою напругою, яка реєструється в експериментах. Наведений механізм утворення випрямленої напруги досить грубо, але фізично правильно описує суть ефекту.

3.3 Ефект випрямлення напруги при змінному струмі.

При прикладенні змінного струму до інтерферометру відбувається не раптова зміна напруги між двома значеннями, а поступова зміна через ряд перехідних значень. Тому в цьому випадку випрямлена напруга не дорівнює різниці між $|V_1/V_c|$ та $|V_2/V_c|$. Залежності $V/V_c = f(\phi)$ при прикладеному змінному струмі з різними значеннями нормалізованої амплітуди I_a/I_{ca} показані на рисунку 3.8 (а) - (г). Зауважимо зміни величини ефекту при зміні I_a/I_{ca} . Найбільша абсолютна величина максимумів досягнута на рисунку 3.8 (б) при $I_a/I_{ca} = 1,03$. При зменшенні амплітуди величина максимумів зменшується. Дослідження поведінки максимумів $V/V_c = f(I_a/I_{ca})$ показали, що при значенні $I_a/I_{ca} = 1,03$ досягаються найбільші значення максимумів, а при збільшенні величини I_a/I_{ca} вище цього значення величина максимумів зменшується. Така поведінка залежності $V/V_c = f(I_a/I_{ca})$ пов'язана з зменшенням амплітуди джозефсонівської генерації при збільшенні напруги, яка відповідає амплітуді змінного струму. Зауважимо також, що сам характер залежності $V/V_c = f(\phi)$ змінюється при малих значеннях нормалізованої амплітуди I_a/I_{ca} (див. рисунок 3.8 (в), (г)). На залежності $V/V_c = f(\phi)$ виникають великі ділянки, на яких $V/V_c = 0$, так що випрямлена напруга відмінна від нуля тільки поблизу значення $\phi = n \pm 1/2$ (але не в самих цих точках). А при значенні $I_a/I_{ca} \leq 0,5$ від'ємна частина залежностей $V/V_c = f(\phi)$ повністю зникає. Залежності випрямленої напруги від магнітного поля,

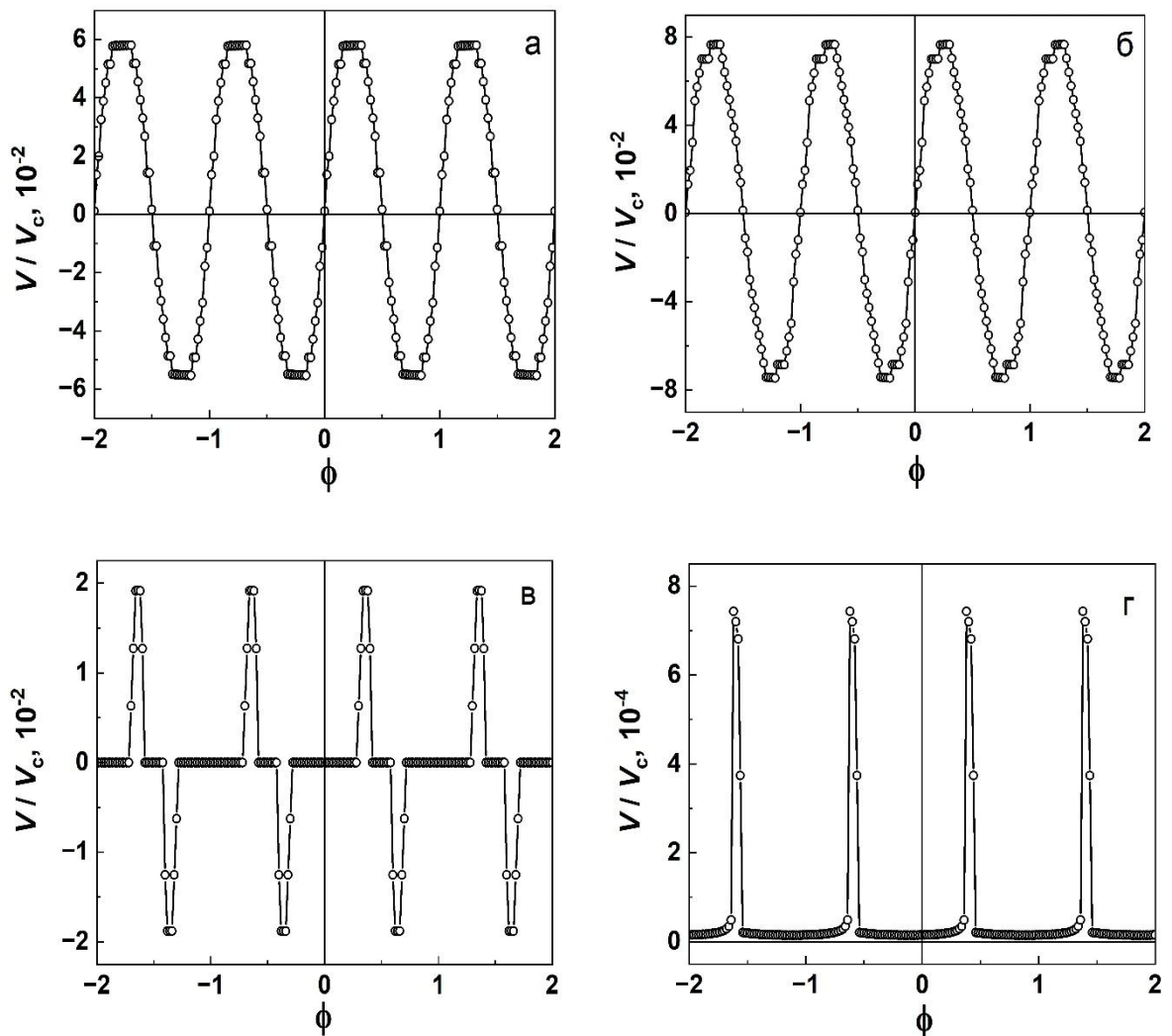


Рисунок 3.8 – залежності $V/V_c = f(\phi)$ при $I_a/I_{ca} = 1,28$ (а), $I_a/I_{ca} = 1,03$ (б), $I_a/I_{ca} = 0,6$ (в), $I_a/I_{ca} = 0,5$ (г).

подібні тим, що показані на рисунку 3.8, неодноразово спостерігались в експериментах [1, 2]. Ми визначили оптимальні параметри, при яких ефект випрямлення напруги найбільш сильно виражений: $\beta_C = 0,1$, $\beta_L = 4$, $i_a = 1,3$, $\nu = 10^{-3}$, $\delta = 0,3$. Залежність висоти максимумів від ν досить слабка, поки частота коливань змінного струму менша, ніж джозефсонівська частота коливань напруги на контактах.

3.4 Вплив шуму на контакт та на ефект випрямлення напруги.

Розглянемо автономний (тобто, не взаємодіючий ні з якою системою) контакт і вивчимо вплив шуму на залежність $V/V_c = f(I_b/I_c)$ цього контакту

Струм $I_f(t)$, який протікає в контакті завдяки шуму Найквіста (білий шум), має таку кореляційну функцію:

$$\langle I_f(t)I_f(t + \tau) \rangle = \gamma\delta(\tau), \quad (3.2)$$

$\delta(\tau)$ – дельта-функція, γ – коефіцієнт, який не залежить від частоти. Параметр γ дорівнює $\frac{2k_B T}{R}$ [13]. Значення електричного опору R контакту звичайно порядку 0,01-1 Ом, так що середньоквадратичне значення флуктуаційного струму, зумовленого цим опором, не перевищує 10^{-9} В при температурах порядку 10 К. Однак, при проходженні височастотного струму через надпровідники, які формують контакт, виникає електричний опір порядку $10^{-7} - 10^{-6}$ Ом, який зумовлений нормальною компонентою електронної підсистеми надпровідника [12]. Згідно виразу (3.2), цей опір може суттєво підвищити значення флуктуаційного струму. Оскільки джерела флуктуаційного струму конкретизувати в даному випадку важко, при опису флуктуаційних струмів звичайно розглядають параметр γ без конкретних розрахунків температури або електричного опору. В роботі [16] аналітично розрахований вплив білого шуму на залежність напруги на контакті від струму для контакту з малою ємністю, великих значень γ та малих значень $x = I_b/I_c < 1$:

$$\frac{V}{V_c} = 2\sqrt{(1-x^2)}e^{-\gamma[\sqrt{(1-x^2)}+x\cdot\arcsin x]}\sinh\left(\frac{1}{2}\pi\gamma x\right). \quad (3.3)$$

В даній роботі білий шум моделювався за допомогою генератора випадкових чисел з рівномірним розподілом. Ці випадкові числа добавлялись до струму зміщення при розрахунку динаміки контактів. Залежність (3.3) показана на рисунку 3.9 (а) лініями для значень $\gamma = 0,05$ (крива 1), $\gamma = 0,1$ (крива 2), $\gamma = 0,2$ (крива 3), $\gamma = 4$ (крива 4), $\gamma = 1$ (крива 5), $\gamma = 2$ (крива 6). Кружками показані результати чисельного моделювання динаміки контактів згідно рівнянню:

$$\beta_C \frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + \frac{d\varphi}{d\tau} + (1 \pm \delta)\sin\varphi = i_b + i_f, \quad (3.4)$$

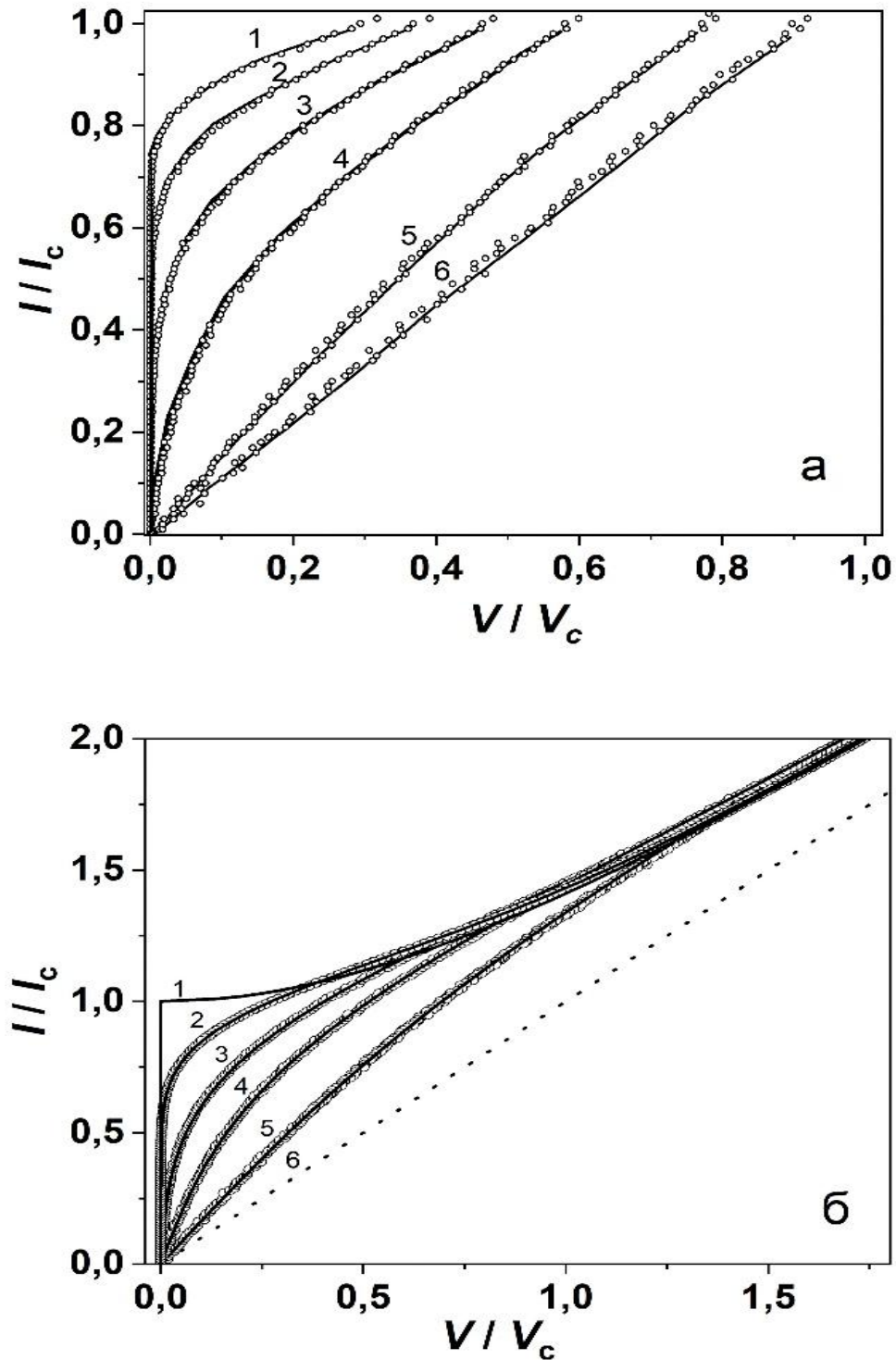


Рисунок 3.9 – (а) - залежності $V/V_c = f(I_b/I_c)$ для білого шуму. Лінії - залежність (3.2) для $\gamma = 0,05$ (крива 1), $\gamma = 0,1$ (крива 2), $\gamma = 0,2$ (крива 3), $\gamma = 4$ (крива 4), $\gamma = 1$ (крива 5), $\gamma = 2$ (крива 6). Кружки - результати чисельного моделювання. (б) - залежності $V/V_c = f(I_b/I_c)$ для гаусового шуму при $I_n/I_c=0$ (крива 1), $I_n/I_c=0,2$ (крива 2), $I_n/I_c=0,4$ (крива 3), $I_n/I_c=0,6$ (крива 4), $I_n/I_c=1$ (крива 5), $V/V_c = I_b/I_c$ (крива 6).

де i_f – випадкове число з кореляційною функцією (3.2). З рисунку 3.9 (а) видно, що результати чисельного моделювання добре описують теоретичну залежність (3.2).

Як було зазначено вище, визначити джерело флуктуаційного струму в системі досить важко, тому як білий шум, так і розглянутий нижче гаусовий шум можна розглядати, як зовнішній вплив на контакт.

Дія зовнішнього шуму з гаусовим розподілом випадкових значень струму на залежності $V(I_b)$ має такий вигляд [17-19]:

$$\frac{V}{V_c} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{I_n} \left\{ \int_{I_c}^{\infty} \left[\left(\frac{I}{I_c} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(I-I_b)^2}{2I_n^2}} dI - \int_{-\infty}^{-I_c} \left[\left(\frac{I}{I_c} \right)^2 - 1 \right]^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{(I-I_b)^2}{2I_n^2}} dI \right\}, \quad (3.5)$$

де I_n – середньоквадратична амплітуда шуму струму. На рисунку 3.9 (б) показані залежності $V/V_c = f(I_b/I_c)$, розраховані згідно виразу (3.5) для гаусового шуму при $I_n/I_c=0$ (крива 1), $I_n/I_c=0,2$ (крива 2), $I_n/I_c=0,4$ (крива 3), $I_n/I_c=0,6$ (крива 4), $I_n/I_c=1$ (крива 5), $V/V_c = I_b/I_c$ (крива 6). Для того, щоби розрахувати вплив гаусового розподілу випадкових значень струму на залежність $V/V_c = f(I_b/I_c)$, ми задавали випадкове число i_f з гаусовим розподілом значень і заданою середньоквадратичною амплітудою, і вирішували рівняння динаміки (3.4) для автономного контакту. Порівняння змін, які вносять білий шум і гаусовий шум в залежності $V/V_c = f(I_b/I_c)$, показаних на рисунках 3.9 (а) та 3.9 (б), дає можливість стверджувати, що головний внесок шумів в цю залежність полягає в появі напруги в інтервалі струму $0 \leq i \leq 1$. В обох випадках значення напруги збільшується з збільшенням амплітуди шуму. Важливо те, що при появі шуму напруга на контакті існує в усьому інтервалі $0 \leq i \leq 1$.

В подальшому розгляді використаємо розроблену чисельну модель впливу шуму на залежність $V/V_c = f(I_b/I_c)$ для дослідження впливу шуму на ефект випрямлення напруги. Розглянемо випадок, коли на інтерферометр подається періодичний сигнал разом з «зовнішнім» шумом. Рівняння

збереження струму та рівняння квантування магнітного потоку для інтерферометра тоді виглядає так:

$$\beta_C \frac{d^2 \varphi_j}{d\tau^2} + (1 \pm \delta) \frac{d\varphi_j}{d\tau} + (1 \pm \delta) \sin \varphi_j = i_a \sin \omega \tau + i_f \pm i^R, j = 1, 2, \quad (3.6)$$

$$i^R = \frac{1}{\beta_L} (2\pi\phi - (\varphi_1 - \varphi_2)), \quad (3.7)$$

де i_f – випадкове значення струму, яке моделює білий «зовнішній» шум. В нашій моделі вважається, що цей шум пов'язаний з випадковими значеннями струму нормальних електронів, який подається на інтерферометр. Як було показано вище, такий шум було змодельований за допомогою генератора

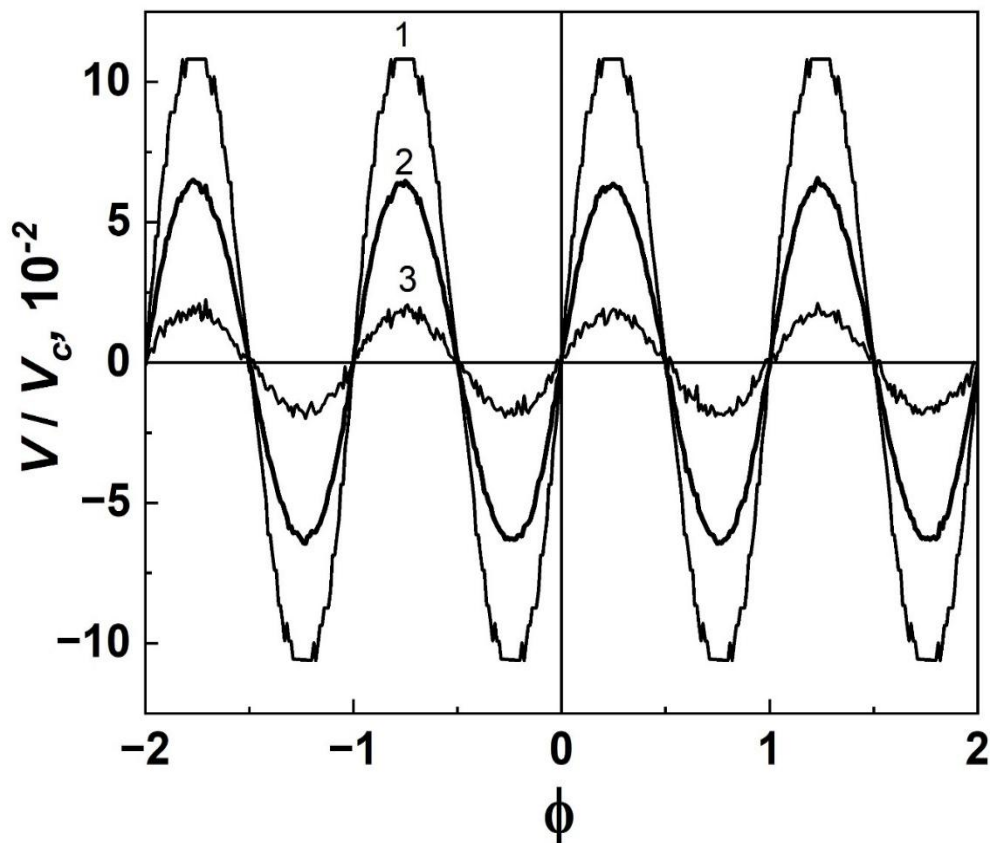


Рисунок 3.10 – залежності $V/V_C = f(\phi)$ при значеннях параметрів $\beta_C = 0,1$, $\beta_L = 3$, $i_a = 1,03$. Параметр $\gamma_1 = 0$ (крива 1), $\gamma_1 = 5$ (крива 2), $\gamma_1 = 10$ (крива 3).

випадкових чисел, розподілених рівномірно на інтервалі $[-i_{f1}, i_{f1}]$. Випадкове число i_f вводилось в чисельне рішення рівняння (3.2) на кожному кроці τ по

часу. Приклади рішення системи рівнянь (3.6), (3.7) для значень параметрів $\beta_C = 0,1$, $\beta_L = 3$, $i_a = 1,03$ показані на рисунку 3.10 для $i_{f1} = 0$ (крива 1), $i_{f1} = 2$ (крива 2), $i_{f1} = 5$ (крива 3), $i_{f1} = 10$ (крива 4). З поведінки залежностей, показаних на рисунку 3.10 слідує, що при збільшенні амплітуди шуму висота максимумів залежностей $V/V_c = f(\phi)$ зменшується. В той же час, положення максимумів і нулів залежностей $V/V_c = f(\phi)$ не змінюється і залишається постійним при будь-яких амплітудах шуму. Такий висновок не є несподіваним. Ефект випрямлення напруги має квантовомеханічну природу і базується на трьох квантовомеханічних ефектах, а саме на першому і другому

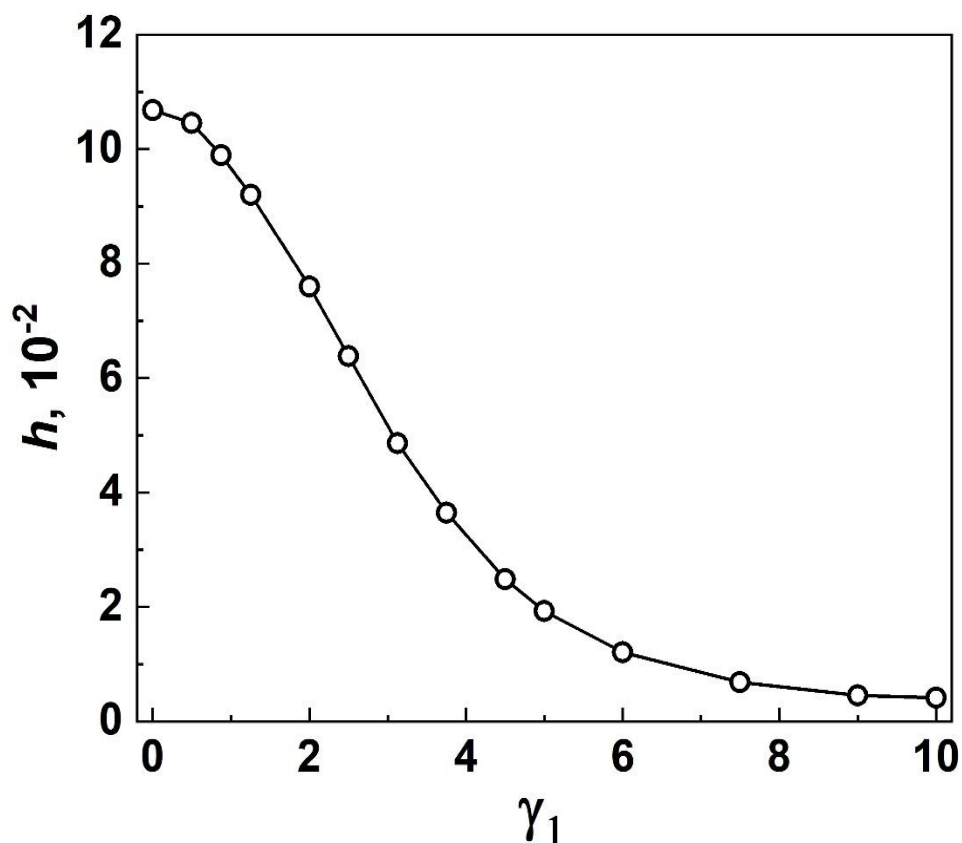


Рисунок 3.11 – залежність висоти максимуму функції $V/V_c = f(\phi)$ при $\phi = 1,75$ від параметра $\gamma_1 = I_{fm}/2I_{ca}$.

співвідношеннях Джозефсона, а також на квантовій інтерференції надструмів, які протікають у контакті (залежність критичних струмів контактів в інтерферометрі від магнітного поля). Важливо те, що всі три

квантовомеханічних ефекти притаманні струму куперівських пар, тоді як в «зовнішньому» струмовому шумі приймають участь квазічастинки. Зрозуміло, що посилення долі квазічастинкового струму в ефекті приводить до послаблення долі надструму куперівських пар, тому величина ефекту стане меншою. Водночас, всі характерні риси ефекту випрямлення напруги зберігаються. На рисунку 3.11 показана залежність висоти максимуму випрямленої напруги $h \equiv V/V_c$ при $\phi = 1,75$ від відношення $\gamma_1 = I_{fm}/2I_{ca}$, де I_{fm} – максимальна амплітуда шуму. Видно, що при великих амплітудах шуму максимум випрямленої напруги зменшується до нуля. Це значить, що при великих амплітудах шуму ефект випрямлення напруги зникає. Якісно цей ефект пояснюється так. При дії шуму на струм в якийсь момент часу виникає добавка до напруги, спричинена струмом. Дія добавки до напруги приводить до зміни циркулюючого струму. В наступний момент часу виникає нова добавка до струму, яка знову приводить до зміни циркулюючого струму і т. д. Якщо такі добавки до струму порівняльні по величині з самим струмом і мають різні знаки, то циркулюючий струм сильно зменшується. Це зменшення приводить до зменшення випрямленої напруги.

3.5 Ефект випрямлення напруги у фрактальному інтерферометрі.

Оскільки петлі між контактами в інтерферометрі з фрактальним просторовим розподілом контактів мають різні розміри, то неможливо визначити те значення магнітного потоку, функцією якого є випрямлена напруга. Однак, особливістю регулярного фрактала є приблизно періодична залежність випрямленої напруги від магнітного потоку, який відповідає потоку в петлі найменшого розміру в системі [9]. Кількість таких петель в системі найбільша. Будемо використовувати цю особливість і вивчати залежність $V(\varphi_{1,2})$.

Залежності $V(\varphi_{1,2})$ зручно вивчати на прикладах фрактальної системи низької розмірності. На рисунку 3.12 показана залежність $V(\varphi_{1,2})$ для

фрактального інтерферометра третього порядку ($N = 3$, вісім контактів, див. рисунок 2.1). Відмітимо характерні особливості цієї залежності. Першою особливістю цієї залежності є її антисиметрія відносно значення $\varphi_{1,2} = 0$,

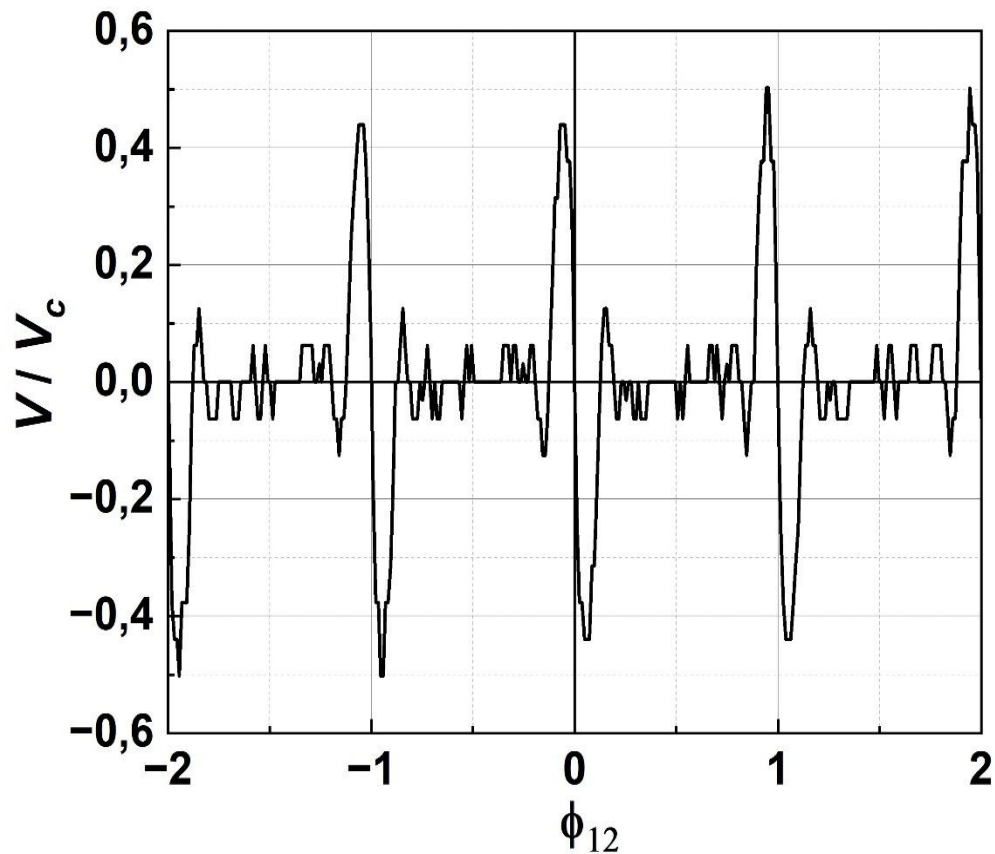


Рисунок 3.12 –залежність $V/V_c = f(\phi_{1,2})$ для фрактального інтерферометра третього порядку.

тобто $-V(\varphi_{1,2}) = V(-\varphi_{1,2})$. Ця сама антисиметрія існує у випрямленій напруги в звичайному двохконтактному інтерферометрі (див. рисунок 3.8). Другою особливістю залежності $V(\varphi_{1,2})$ є антисиметрія цієї залежності в межах $\varphi_{1,2} \in [r, r + 1]$, де r – ціле число, відносно точки $r + 1/2$. Наприклад, крива $V(\varphi_{1,2})$ антисиметрична відносно значення $\varphi_{1,2} = 1/2$ в межах значень $\varphi_{1,2}$ від $\varphi_{1,2} = 0$ до $\varphi_{1,2} = 1$. Така сама антисиметрія має місце для значень $\varphi_{1,2}$ від $\varphi_{1,2} = 1$ до $\varphi_{1,2} = 2$ відносно значення $\varphi_{1,2} = 3/2$. Перша з цих особливостей неодноразово спостерігалась в експериментах [3, 4]. Друга з цих особливостей характерна для регулярних самоподібних структур. Це значить,

що сама крива $V(\phi_{1,2})$ має самоподібні властивості. В роботах [7-9, 20] показано, що з залежностей критичних струмів і напруги на фрактальному інтерферометру в магнітному полі можна розрахувати фрактальну розмірність самоподібної структури. Оскільки залежність критичних струмів від магнітного поля ϵ , по суті, модулем Фур'є-перетворенням функції розподілу контактів вздовж системи, а перетворення Фур'є фрактала також має фрактальні властивості, то це можливо. Однак, залежність випрямленої напруги від магнітного потоку не є ніяким перетворенням Фур'є, оскільки само отримання ефекту випрямлення напруги неможливе без достатньо великих значень індуктивності петель.

3.6 Вплив шуму на ефект випрямлення струму у фрактальному інтерферометрі.

Вплив шуму на залежності $V/V_c = f(\phi_{1,2})$ для фрактального інтерферометра був розрахований тим самим методом, який було описано в підрозділі 5.4 для двохконтактного інтерферометра. Для генератора випадкових чисел з рівномірним законом розподілу задавався інтервал випадкових чисел $[-y, y]$, границі якого співпадали з заданим розмахом випадкового числа $\gamma_1 = 2y/2I_{ca}$. Випадкове число з цього інтервалу добавлялося у праву сторону рівнянь (2.6), (2.8), (2.10). Результати розрахунку залежності $V/V_c = f(\phi_{1,2})$ при значенні $\gamma_1 = 0,05$ показані на рисунку 3.13 червоною лінією. Для порівняння на цьому ж рисунку показані результати розрахунку для $\gamma_1 = 0$ (чорна лінія). Видно, що вплив шуму на осциляції напруги при $|\phi_{1,2}| \geq 0,2$ приводить до повного знищення цих осциляцій, тоді як при $|\phi_{1,2}| < 0,2$ шум приводить до зменшення амплітуди осциляцій. Розглянемо відмінності впливу шуму на інтерферометр з фрактальним просторовим розподілом критичних струмів від розглянутого раніше випадку впливу шуму на двохконтактний інтерферометр. Головна відмінність полягає в тому, що залежність $V/V_c = f(\phi_{1,2})$ має один характерний масштаб значень

V/V_c , тоді як ці залежності для фрактального інтерферометру мають осциляції випрямленої напруги кількох характерних масштабів. Залежності $V/V_c = f(\phi_{1,2})$ повністю перестають існувати, коли амплітуда шумів зрівнюється з характерним масштабом ефекту. При малих значеннях γ_1 розмах амплітуди шумів зрівнюється з розміром найменших осциляцій на залежності

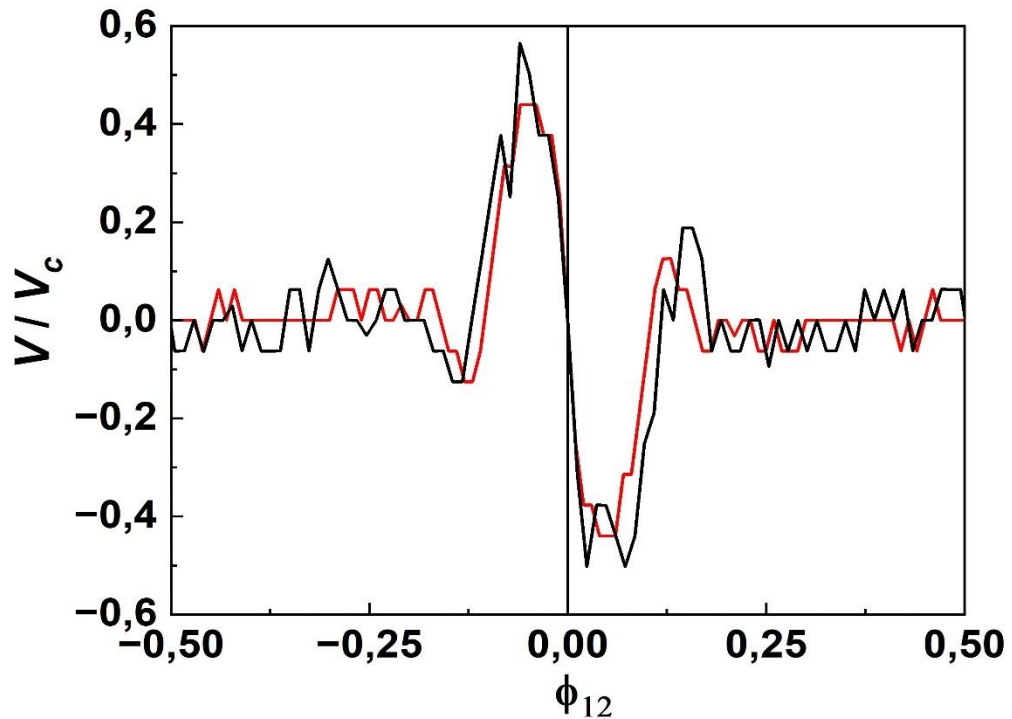


Рисунок 3.13 – залежність $V/V_c = f(\phi_{1,2})$ для фрактального інтерферометра третього порядку без шуму (чорна лінія) та з шумом при $\gamma_1 = 0,05$ (червона лінія).

$V/V_c = f(\phi_{1,2})$ (рисунок 3.13, $|\phi_{1,2}| \geq 0,2$), однак, на осциляції V/V_c з великою амплітудою шум діє слабо (рисунок 3.13, $|\phi_{1,2}| < 0,2$), і амплітуда осциляцій V/V_c тільки зменшується на незначну величину під впливом шуму. При зростанні величини γ_1 амплітуда осциляцій V/V_c сильно зменшується.

Підсумуємо результати проведеного дослідження. В підрозділі 3.1 було вивчено механізм утворення циркулюючого струму в двохконтактному інтерферометрі з різними критичними струмами контактів. Було виявлено, що

надпровідні петлі двохконтактного інтерферометра утворюють сильний синхронізуючий зв'язок, так що додаткова напруга, яка виникає на «слабкому» контакті за рахунок «більш сильного» контакту, вирівнює значення напруги на обох контактах. Синхронізація осциляцій напруги приводить до дуже сильного електричного зв'язку між контактами так само, як петля з індуктивністю в експериментах по синхронізації випромінювання контактів [13, 21]. Зауважимо, що синхронізація напруги на контактах, яка приводить до сильного циркулюючого струму в петлі зв'язку між контактами, не обов'язково повинна бути синфазною. Ми перевірили, що в деяких інтервалах магнітних полів ця синхронізація може бути антифазною. Ця синхронізація коливань напруги приводить до надзвичайно сильного циркулюючого струму і є додатковим фактором в утворенні випрямленої напруги на інтерферометрі. Зокрема, при вивченні впливу шумів на ефект випрямлення напруги, ми виявили, що для руйнування випрямленої напруги необхідно ввести в інтерферометр шум з дуже великою амплітудою. Виявлений нами вплив синхронізації контактів є новим фактором, який треба детально вивчити в подальших дослідженнях. В підрозділі 3.2 було вивчено формування випрямленої напруги при пропусканні постійного струму через двохконтактний інтерферометр, який знаходиться в зовнішньому магнітному полі. Було показано, що цей ефект проявляється при періодичному перемиканні напруги постійного струму через інтерферометр. Якісно таке пояснення ефекту випрямлення напруги за допомогою цього методу було показано в роботі [2], однак в даній роботі ми отримали цей ефект безпосередньо з чисельної моделі динаміки процесу. В розділі 3.3 ми дослідили ефект випрямлення напруги в його «класичному» варіанті, тобто, при пропусканні лише змінного струму низької частоти через двохконтактний інтерферометр. Було отримано фактично всі типи залежностей випрямленої напруги від магнітного поля при різних амплітудах змінного струму. Який пропускався через інтерферометр. В цьому підрозділі ми також навели результати наших досліджень оптимальних параметрів інтерферометра і змінного струму, які необхідні для отримання найбільшої амплітуди

випрямленої напруги. В підрозділі 3.4 ми докладно дослідили вплив білого шуму і шуму з гаусовим розподілом на автономний (тобто, не приєднаний до якої-небудь системи) контакт. За допомогою розроблених моделей ми виявили зменшення амплітуди випрямленої напруги при збільшенні амплітуди шуму. В підрозділі 3.5 ефект випрямлення напруги було отримано для інтерферометра з фрактальним просторовим розподілом критичних струмів. Формування цього фрактального розподілу було аналогічно до формуванню тріадного канторівської множини відрізків. В підрозділі 3.6 було досліджено вплив шумів на величину випрямленої напруги, отриманої за допомогою фрактального інтерферометра. Слід зауважити, що на відміну від випадку двохконтактного інтерферометра, напруги на контактах фрактального інтерферометра не синхронізовані. Тому подавлення ефекту шумом потребує відносно невеликих значень амплітуд шумів.

Подальші дослідження ефекту випрямлення напруги, на наш погляд, слід проводити для докладного вивчення впливу синхронізації напруги на контактах на величину випрямленої напруги, а також для моделювання цього ефекту в багатоконтактних надпровідних петлях. Таке вивчення необхідно для вирішення задачі про формування випрямленої напруги у перколяційних кластерах.

ВИСНОВКИ

1. За допомогою чисельних методів доведено, що циркулюючий струм, який забезпечує появу ефекту випрямлення напруги в двохконтактному надпровідному інтерферометрі, виникає завдяки синхронізації коливань напруги на джозефсонівських контактах інтерферометра.
2. При дослідженнях ефекту випрямленої напруги доведено, що білий шум зменшує амплітуду випрямленої напруги як в двохконтактному інтерферометрі, так і в багатоконтактному інтерферометрі з фрактальним просторовим розподілом контактів.
3. Показано, що існують параметри надпровідних інтерферометрів, які забезпечують максимальне значення випрямленої напруги в заданому магнітному полі. Ці параметри знайдені для двохконтактного інтерферометра.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. De Waele A. On the dc voltage across a double point contact between two superconductors at zero applied dc current in situations in which the junction is in the resistive region due to the circulating current of flux quantization. // A. Th. A. M. De Waele, W. H. Kraan, R. De Bruyn Ouboter, K. W. Taconis // Physica.- 1967.- V. 137.- P. 114-124.
2. De Waele A. Quantum-interference phenomena in point contacts between two superconductors. /A. T. A. M. De Waele and R. De Bruyn Ouboter // Physica.- 1969.- V. 41 (2).- P. 225–254.
3. Gerber A. ac-to-dc conversion and Aharonov-Bohm effect in percolating superconducting films / A. Gerber, G. Deutscher // Phys. Rev. Lett.- 1990.- V.- 64.- P. 1585-1588.
4. Glukhov A. Superconducting quantum interfeerention in percolating Sn-Ge films. Fractal approach // A. M. Glukhov and A.S. Pokhila // Low Temp. Phys.- 1993.- V. 19.- P. 1149-1151 [Fiz. Nizk. Temp.- 1993.- V. 19.- P. 1149-1151].
5. Glukhov A. Fractal properties of superconducting percolated Sn-Ge films / A. M. Glukhov, A. N. Grib, A. S. Pokhila // Physics in Ukraine: International conference, Kiev 22-27 June 1993, Proceedings and contributed papers.-P.111-114.
6. Glukhov A. M. Superconducting quantum interference in fractal percolation films. Problem of 1/f noise / A. M. Glukhov, A. S. Pokhila, I. M. Dmitrenko, A. E. Kolinko, A. P. Panchekha // Physica B. - 1997. - V. 240, P. 242 - 253.
7. Grib A. Critical current of a self-similar chain of Josephson junctions / Alexander N. Grib // Physica C. - 1994. - V.235-240. - P. 3313-3314.
8. Grib A. N. Fractal properties of critical current of a self-similar system of Josephson junctions connected in parallel / A. N. Grib // Low Temp. Phys.- 1996.- V. 22.- P. 491-493 [Fiz. Nizk. Temp.- 1996.- V. 22.- P. 642-644].
9. Гриб О. Ефект випрямлення напруги та квантова інтерференція у фрактальних структурах з джозефсонівськими контактами / Олександр

- Гриб // Вісник Харківського національного університету № 1075, серія "Фізика". - 2013. - вип. 18. - С. 8-13.
10. Gordon J. M. Superconducting-normal phase boundary of a fractal network in a magnetic field / J. M. Gordon, A. M. Goldman, J. Maps, D. Costello, R. Tiberio, B. Whitehead // *Phys. Rev. Lett.* - 1986. - V.56. - P. 2280-2283.
 11. Sidorenko A. Upper critical field of periodic and fractal Nb/Cu multilayers // A. Sidorenko, C. Sürgers, T. Trappmann, J. Wosnitza, and H. V. Löhneysen // *Czechoslovak Journal of Physics.*- 1996.- V. 48, Suppl. S2.- P. 737-738.
 12. Barone A. *Physics and Applications of the Josephson Effect* / A. Barone and G. Paterno // New York: John Wiley and Sons.- 1982.- 529 P.
 13. Likharev K. *Dynamics of Josephson junctions and circuits* / K. K. Likharev // New York: McGraw-Hill Book Company.- 1984.- 614 P.
 14. Feder J. *Fractals* / J. Feder // New York: Plenum Press.-1988.- 310 P.
 15. Allain C. Optical diffraction on fractals / C. Allain and M. Cloitre // *Physical Review B.* - 1986. - V. 33. - № 3. - P. 3566-3569.
 16. Ambegaokar V. Voltage due to thermal noise in the dc Josephson current / Vinay Ambegaokar and B. I. Halperin // *Phys. Rev. Lett.*- 1969.- V. 22.- P 11364-1366.
 17. Kanter H. Response of highly damped Josephson junctions to external, low-Frequency noise currents / H. Kanter and F. L. Vernon, Jr. // *Phys. Rev. B.*-1970, V.2.- P. 4694-4696.
 18. Kanter H. Current Noise in Josephson Point Contacts / H. Kanter and F. L. Vernon, Jr. // *Phys. Rev. Lett.*-1970.- V. 25.- P 588-590.
 19. Kose V. Influence of External Noise on Microwave-Induced Josephson Steps / V. E. Kose and D. B. Sullivan // *J. Appl. Phys.*- 1970.- V. 41.- P. 169-174.
 20. Alexander S. Superconductivity of networks. A percolation approach to the effects of disorder / S. Alexander // *Phys. Rev. B.* - 1983. - V. 27. - P. 1541-1557.
 21. Гриб О. Асиметрія вольт - амперних характеристик гібридних джозефсонівських контактів з пніктидами / О. Гриб // Вісник Харківського національного університету № 1113, серія "Фізика". - 2014. - вип. 20. - С. 78-82.