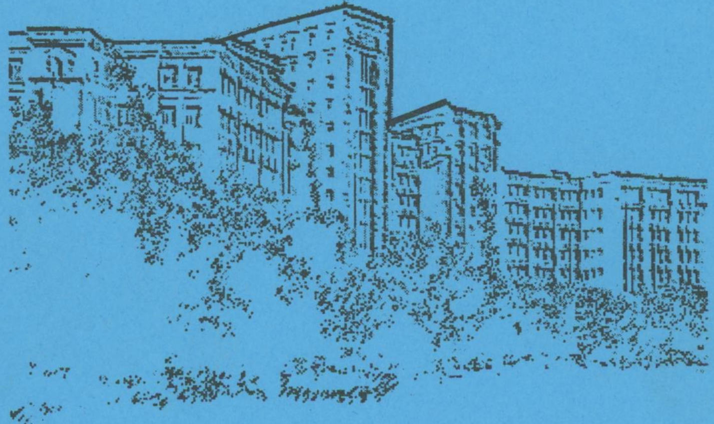
ЦНБ

ISSN 0453–8048

ВІСНИК

Харківського національного університету



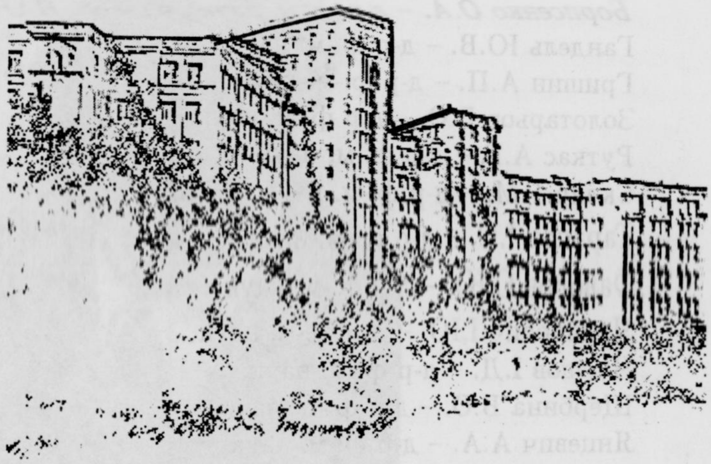
№ 514

Харків
2001

Міністерство освіти та науки України
ISSN 0453–8048

ВІСНИК

Харківського національного університету



№ 514

Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Випуск 50

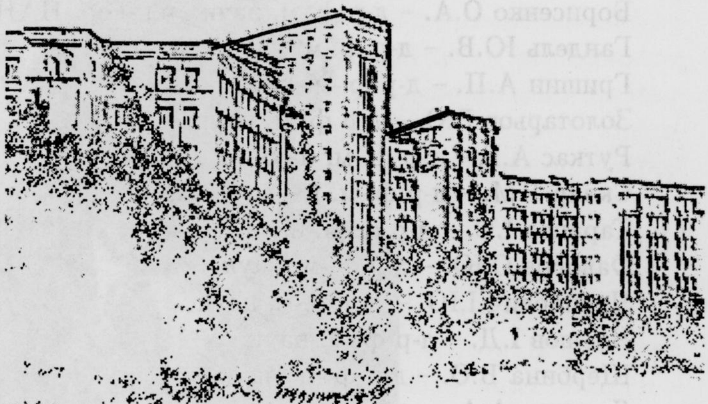
Заснований у 1965 р.

Харків
2001

Міністерство освіти та науки України
ISSN 0453–8048

ВІСНИК

Харківського національного університету



№ 514

Серія «Математика, прикладна математика і механіка»

Випуск 50

Заснований у 1965 р.

Харків
2001

УДК 517.9

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Адреса редакційної колегії: 61077, Харків, м. Свободи, 4,
ХНУ, механіко-математичний факультет, к.7-29.
Тел. 45-75-18, Email: vestnik@univer.kharkov.ua
Интернет:
http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету (протокол № 6 від 27 квітня 2001 р.).

Свідоцтво про державну реєстрацію КВ № 4063 від 02.03.2000 р.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
№ 514, 2001, с. 3–16

К столетию со дня рождения Н. И. Ахиезера

Ю. И. Любич

Прошло сто лет со дня рождения Наума Ильича Ахиезера. Ежегодно Харьковское математическое общество собирается в марте на специальное заседание, приуроченное ко дню рождения Наума Ильича и посвященное его памяти. Было прочитано уже не менее десяти докладов, освещающих различные аспекты творчества Ахиезера, его замечательные результаты в теории аппроксимации и в проблеме моментов, в решении классических экстремальных задач, в математической физике. Однако богатства, заключенные в трудах ученого, далеко не исчерпаны, об его идеях, методах и результатах можно рассказывать еще не в одном десятке докладов. С 1928 по 1936 г. Н. И. Ахиезер опубликовал большую часть своих работ на немецком языке в советских и зарубежных журналах, причем многие из них были опубликованы в малотиражных выпусках "Трудов" и "Записок" Математических обществ Харькова и Казани. По этим причинам ряд фундаментальных исследований Ахиезера практически оставался недоступным современному читателю. Это обстоятельство преодолевается Харьковским математическим обществом, под эгидой которого в Издательстве “Основа” будет печататься собрание трудов Н. И. Ахиезера.

Освещение жизни, творчества и значимости математических результатов Н. И. Ахиезера давалось в юбилейных статьях в УМН 6:2 (1951), 16:4 (1961), 26:6 (1971) и в некрологе (УМН, 36:4 (1981)). Все же мы полагаем уместным, опираясь на эти источники, еще раз коснуться основных моментов математической биографии Н. И. Ахиезера, тем более, что она продолжилась и после его смерти благодаря выходу в свет написанных ученым в последние годы жизни великолепных лекционных курсов “Лекции по вариационному исчислению” и “Лекции об интегральных преобразованиях” и в высшей степени интересной историко-математической статьи о чебышевском направлении в теории функций.

Активная научная деятельность Н. И. Ахиезера началась в аспирантуре у Д. А. Граве, которую он проходил с 1925 по 1928 г. Его диссертация “Аеродинамічні досліди” (1928) носила прикладной характер в соответствии с установками Д. А. Граве. Однако в ней был получен ряд интересных чисто математических результатов, в частности формула для конформного отображения двусвязной многоугольной области на круговое кольцо, впоследствии неоднократно переоткрывавшаяся. Вместе с тем уже в 1927 г. Н. И. Ахиезер начал заниматься теорией роста целых функций. Его основные исследования и в дальнейшем были тесно связаны с комплексным анализом даже при решении вещественных задач. Техника аналитического продолжения и конформных отображений в руках Н. И. Ахиезера нашла неожиданные приложения. Приведем два примера трудных задач, восходящих по постановке к классическим работам П. Л. Чебышева и Е. И. Золотарева и решенных Н. И. Ахиезером.

I. Найти многочлен степени n со старшим коэффициентом единица, наименее уклоняющийся от нуля на объединении двух заданных отрезков (для определенности $[-1, \alpha]$ и $[\beta, 1]$, $-1 < \alpha < \beta < 1$).

II. Найти многочлен $x^n + \sigma x^{n-1} + \rho x^{n-2} + \ldots$
с заданными σ и ρ, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Между прочим, интерес Н. И. Ахиезера к этим задачам возник в переписке с Н. Г. Чеботаревым и, возможно, этим объясняется то, что первый результат Н. И. Ахиезера в указанном направлении был опубликован в Известиях Казанского физико-математического общества (1928 г.). Он относится к задаче 1, которая, как оказалось, решается в терминах автоморфных функций Шоттки. Обобщение этого решения на m отрезков сводится к построению функции Грина плоскости с $2m-1$ вещественными разрезами (m данных отрезков и еще $m-1$ отрезков в лакунах между данными).

Дальнейшее развитие этих идей в 60-тых годах привело Н. И. Ахиезера к решению некоторых обратных задач спектрального анализа путем сведения к проблеме Якоби обращения гиперэллиптических интегралов. Таким образом, Н. И. Ахиезеру удалось предвосхитить важные аспекты спектральной теории, положенные в основу современной теории нелинейных эволюционных уравнений математической физики, бурное развитие которой началось в 70-тых годах. Здесь хочется сказать о поразительных переменах во взглядах математиков на основные ценности их науки. Если в XIX в. наиболее (а, может быть, и единственно) интересными считались явные решения тех или иных задач (решение алгебраических уравнений в радикалах, эффективное построение инвариантов классических групп, интегрирование в элементарных функциях и квадратурах от них, решения экстремальных задач в элементарных или специальных функциях и т. д.), то в первой половине XX в. благодаря прежде всего Гильберту возобладала абстрактная точка зрения, пренебрегающая конструктивными аспектами (и даже "конструктивист" Пуанкаре провозгласил переход от проблем решения дифференциальных уравнений к качественной теории). С абстрактной точки зрения необходимые и достаточные (нетривиальные, конечно) условия на решение важнее, чем возможность явного описания. Например, теорема Чебышева об альтернансе "интереснее" чем полученный даже с ее помощью явный ответ в той или иной задаче наилучшего приближения.

Однако во второй половине XX в. ориентация шкалы ценностей вновь изменилась! Но внутренний мир таких крупных математиков, каким был Н. И. Ахиезер, не подвержен колебаниям моды. Это тем более впечатляет, что в исследованиях ученого широко использовались, например, идеи и методы функционального анализа, что особенно бросается в глаза при чтении его блестящих "Лекций по теории аппроксимации", где Н. И. Ахиезер легко переходит от общих рассмотрений в банаховых пространствах и алгебрах к тонким аналитическим исследованиям вплоть до нахождения точных констант в конструктивной теории функций. Можно предположить, что Н. И. Ахиезеру был внутренне присущ взгляд, аналогичный пушкинскому: "Все жанры хороши, кроме скучного".

Коль скоро мы затронули тему точных констант, упомянем два результата ученого ставших классическими.

1) Рассмотрим класс C^r 2π-периодических функций $F(t)$, имеющих абсолютно непрерывную производную $F^{(r-1)}(t)$, удовлетворяющую условию Липшица с константой 1 (для простоты записи). По теореме Джексона,

$$E_{n-1}^{(tr)}[F] \leq A_r/n^r,$$

где $A_r = \text{const}$; $\mathrm{E}_{n-1}^{(\mathrm{tr})}[\mathrm{F}]$ – наименьшее равномерное уклонение от функции F тригонометрических полиномов степени $\leq n-1$.

Теорема Ахиезера–Крейна–Фавара. *Пусть*

$$\bar{A}_r = n^r \sup_{F \in C^r} E_{n-1}^{(tr)}[F]$$

– точная постоянная в неравенстве Джексона. Тогда

$$A_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

2) Как доказал С. Н. Бернштейн, если аналитическая функция f не превышает по модулю единицы внутри эллипса с фокусами -1,1 и полусуммой осей $1/g$, то ее наилучшее приближение на [-1, 1] алгебраическими полиномами степени $\leq n-1$ удовлетворяет неравенству

$$E_{n-1}^{(alg)}[f] \leq \frac{2q^n}{1-q}.$$

Теорема Н. И. Ахиезера. *Пусть f – аналитическая функция внутри упомянутого эллипса, $|\mathrm{Re}\,f| \leq 1$, f вещественна на вещественной оси. Тогда*

$$E_{n-1}^{(alg)}[f] \leq \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}\cdot\frac{q^{(2k+1)n}}{1+q^{2(2k+1)n}},$$

причем существуют функции, для которых достигается знак равенства.

Очень многое в творчестве Н. И. Ахиезера было связано с исследованиями С. Н. Бернштейна, с которым Ахиезер имел тесные научные и личные связи (Н. И. Ахиезер выполнил также огромную работу по редактированию 4-томного академического Собрания сочинений С. Н. Бернштейна).

Еще в 1924 г. С. Н. Бернштейн поставил следующую фундаментальную проблему.

Пусть на вещественной оси задана функция $\Phi(x) > 0$ такая, что

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{x^n}{\Phi(x)} = 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Рассмотрим клас C_Φ^0 непрерывных функций $g(x)$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{g(x)}{\varphi(x)} = 0$$

Очевидно, все многочлены входят в C_Φ^0. При каких условиях множество многочленов плотно в C_Φ^0 относительно равномерной нормы с весом Φ:

$$\|g\|_\Phi = \sup_{-\infty<x<\infty}\frac{|g(x)|}{\Phi(x)}?$$

Н. И. Ахиезер и С. Н. Бернштейн решили эту проблему в 1953 г. (независимое решение получил С. Н. Мергелян в 1954 г.).

Бернштейновское направление Н. И. Ахиезер развивал также в плане аппроксимации целыми функциями конечной степени (т. е. конечного типа при первом порядке). Здесь ему удалось вновь применить свои аналитические методы для явного решения задач типа Чебышева и Золотарева. Эти методы оказались также адекватными средствами при обобщении знаменитого неравенства С. Н. Бернштейна на функции, аналитические вне некоторого замкнутого подмножества E вещественной оси. Этой важной проблеме посвящена совместная работа Н. И. Ахиезера и Б. Я. Левина (1960 г.), где установлено, что экстремальная функция связана с конформно отображающей верхнюю полуплоскость на область типа “гребенки”. Основание “гребенки” – вещественная ось – образ множества E; зубцы, торчащие вверх, – образы дополнительных интервалов (лакун). Впоследствии “гребенка” появилась в обратных задачах спектрального анализа оператора Шредингера (В. А. Марченко – И. В. Островский, 1975). Здесь роль E играет спектр оператора, а случай конечного числа лакун (“конечнозонный потенциал”) является отправным.

Еще один поток работ Н. И. Ахиезера, тесно связанных с теорией экстремальных задач,– это работы об ортогональных полиномах. В 30-тых годах Н. И. Ахиезер начал изучать ортогональные (с весом) многочлены на системе интервалов (в завершении этих исследований принял участие Ю. Я. Томчук – один из учеников Н. И. Ахиезера (1963)).

В связи с ортогональными многочленами значительное внимание Н. И. Ахиезер уделил проблеме моментов. Перу ученого принадлежит монография “Классическая проблема моментов” (1961), создающая яркое и цельное впечатление об этом предмете. Именно проблемой моментов был обусловлен интерес Н. И. Ахиезера к общей теории линейных операторов, для которой, по словам ученого, проблема моментов была “путеводной звездой”. В теории операторов его наиболее привлекали такие вещи, как спектральные разложения и индексы дефекта. Этот материал – сердцевина книги “Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве” (1950), написанной совместно с И. М. Глазманом. По этой книге, дважды переизданной (1966; 1977–1978 – в двух томах) и переведенной на ряд языков, учились и продолжают учиться математики и физики-теоретики во многих странах мира (в частности, для автора этих строк она была первым введением в серьезную современную математику). Выход второго ее издания был приурочен к Международному конгрессу математиков в Москве (август, 1966 г.), и привезенные на конгресс сотни экземпляров книг были раскуплены со скоростью движения выстроившейся при этом очереди.

Исследования самого Н. И. Ахиезера по проблеме моментов проходили в сотрудничестве с М. Г. Крейном в период 1933–1938 гг. и относились к так называемой L- проблеме моментов А. А. Маркова, где искомый вес ограничивается априори заданной константой $L > 0$. Между прочим, с более поздней точки зрения L-проблема моментов является задачей линейного программирования (в бесконечном пространстве), а полученное в 1938 г. Н. И. Ахиезером и М. Г. Крейном решение в терминах двойственной задачи предвосхитило этот ставший сейчас привычным подход (кстати, наиболее эффективный с прикладной точки зрения).

Свои результаты Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн собрали в книге “О некоторых вопросах теории моментов” (Харьков, 1938 г.). В 1962 г. Американское математическое общество выпустило перевод этой книги на английском языке, сочтя, очевидно, что ее содержание за четверть века не устарело (скорее, наоборот, к этому времени оно стало особенно актуальным).

Перу Н. И. Ахиезера принадлежит более 150 работ. В прилагаемый к настоящей статье список литературы не вошли лишь несколько ранних публикаций, на которые не удалось найти точных ссылок

Как это было принято в 30-х и 40-х годах, Н. И. Ахиезер, цитируя ту или иную работу, часто не давал полной библиографической ссылки. Список печатных работ Н. И. Ахиезера, прилагаемый к настоящей статье, удовлетворяет современным требованиям. Он был тщательно подготовлен М. Л. Содиным, которому я приношу свою благодарность.

СПИСОК ПЕЧАТНЫХ РАБОТ Н. И. АХИЕЗЕРА

1924

1. Про одну властивість методи сумування Weierstrass'а // Науч. зап. К. №. 2 С. 72-77.

2. К теории квадратичных форм // Изв. Политехн. с.-х. ин-та. Вып. 19. С. 116-123. Совм. с И. Я. Штаерманом.

1925

3. Ueber eine Anwendung der Eulerschen Transformation // Зап. физ.-мат. отд. АН УССР. К., 1, № 4. С. 32-33.

1927

4. Ueber die Zusammenhang zwieschen der Stormerishen Integrations methode und Bernullischen Polynomen // Зап. физ.-мат. отд. АН УССР. К. 2, № 2. С. 16-24. Совм. с И. Я. Штаерманом.

5. Новий вивід необхідних умов належності цілої функції цілого порядку до певного типу // Зап. физ.-мат. отд. АН УССР. К. 2, №3. С. 29-33.

6. Про деякі застосування сумаційної формули Poisson'а // Зап. ин-та нар. просв. К., 2. С. 157-162.

7. Sur les fonctions entiéres d'ordere entier // Rend. Circ. Math. Palermo. 51. P. 390-393.

8. К теории роста целых функций внутри некоторого угла // Тр. Всерос. мат. съезда. С. 208-212.

9. О вычислении сил, действующих на аэропланное крыло // Тр. Всерос. мат. съезда. С. 252-254.

1928

10. Ueber einige Funktionen die in gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen // Изв. Казан. физ.-мат. об-ва. 3, № 3. С. 1-69.

11. Аеродинамічні досліди // Тр. физ.-мат. отд. АН УССР. К., 7. С. 1-247.

1929

12. Об одной задаче Е. И. Золотарева // Изв. АН СССР. № 10. С. 919-931.

1930

13. Нова форма остачі в Taylor'овій формулі для функцій багатьох змінних

/ Зап. Нежин. ин-та нар. просв. 10. С. 223-227.
14. Про одне узагальнення теореми E. Landau // Зап. Нежин. ин-та нар. просв. 10. С. 228-234.
15. О полиномах, наименее уклоняющихся от нуля // Тр. 1-го Всесоюз. мат. съезда. С. 284-289.
16. О некоторых полиномах наименьшего уклонения // ДАН СССР. С. 489-494.
17. Об экстремальных свойствах некоторых дробных функций // ДАН СССР. С. 495-499.
18. Asymptotische Lösung einer Aufgabe über Polynome minimaler Abweichung // Зап. Харьк. мат. об-ва. 4. С. 141-144.
19. Ueber ein Tschebyscheffsches Extremumproblem // Math. Ann. 104. S. 739-744.
20. Sur les polynomes de Tschebycheff pour deux segments // C. R. Acad. Sci (Paris). 191. P 754-756.
21. Sur les proprietes asymptotiques des quelques polynomes // C. R. Acad. Sci (Paris).191. P. 916-918.
22. Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation de quelqes fractions par polynomes // C. R. Acad. Sci. (Paris). 191. P. 991-993.

1931

23. Об асимптотических свойствах полиномов на двух интервалах // Изв. АН СССР. № 2. 161-178.
24. Об одной минимум-проблеме теории функций и о числе корней алгебраического уравнения, которые лежат внутри единичного круга // Изв. АН СССР, № 9. С. 1169-1189.

1932

25. Ueber asymptotische Grösse der besten Annäherung einiger rationalen Funktionen durch Polynome // Зап. Харьк. мат. об-ва. 5. С. 37-47.
26. Ueber einige Funktionen welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, I // Изв. АН СССР. № 9. С. 1163-1202.
27. Аеродинаміка, Х., ОНТВУ. 148 с. Совм. с В. И. Путятой.

1933

28. Ueber einige Funktionen welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, II // Изв. АН СССР. № 3. С. 309-344.
29. Ueber einige Funktionen welche in zwei gegebenen Intervallen am wenigsten von Null abweichen, III // Изв. АН СССР. № 4. С. 499-536.
30. Ueber eine extremale Eigenshaft rationaler Funktionen // Зап. Харьк. мат. об-ва. 6. С. 39-45.
31. Курс теорії функцій. Елементи загальної теорії функцій комплексного змінного. Х., ОНТВУ. 290 с.

1934

32. Ueber Jacksonschen Approximationsatz // Зап. Харьк. мат. об-ва. 8. С. 3-12.

33. Ueber eine Eigenschaft der “elliptischen” Polynome // Зап. Харьк. мат. об-ва. 9. С. 3-8.

34. Ueber Fouriersche Reihen beschränkter summeirbaren Funktionen und ein neues Extremumproblem, I // Зап. Харьк. мат. об-ва. 9. С. 9-28. Совм с М. Г. Крейном.

35. Ueber Fouriersche Reihen beschränkter summeirbaren Funktionen und ein neues Extremumproblem, II // Зап. Харьк. мат. об-ва. 10. С. 3-32. Совм с М. Г. Крейном.

36. О рядах Фурье ограниченных суммируемых функций // Тр. II Всесоюз. мат. съезда. 2. С. 151. Совм. с М. Г. Крейном.

1935

37. Sur une formule de quadrature de Tchebycheff // C. R. Acad. Sci. (Paris). 200. P. 890-893. Совм. с М. Г. Крейном.

38. Ueber eine Transformation der reelen Toeplitzschen Formen und das Momenten-problem in einem Intervalle // Зап. Харьк. мат. об-ва. 11. С. 21-26. Совм. с М. Г. Крейном.

39. Bemerkung über extremale Eigenschaftén einiger mit Transformation der elliptischen Funktinen zusammenhängender Brüche // Зап. Харьк. мат. об-ва. 11. С. 27-34.

1936

40. О двух минимум-проблемах, связанных с проблемой моментов // ДАН СССР. 10, № 9. С. 331-334. Совм. с М. Г. Крейном.

41. Das Momentumproblem bei zusätzlichen Bedingung von A. Markoff // Зап. Харьк. мат. об-ва. 12. С. 13-36. Совм. с М. Г. Крейном.

42. Bemerkung zur Arbeit ueber Fouriersche Reichen beschränkter summierbarer Funktionen und eine neues Extremumproblem // Зап. Харьк. мат. об-ва. 12. С. 37-40. Совм. с М. Г. Крейном.

43. Verallgemeinerung einer Korkin-Zolotareffschen Minimum-Aufgabe // Зап. Харьк. мат. об-ва. 13. С. 3-14.

1937

44. Об одном применении неравенства Г. Бора и Ж. Фавара // ДАН СССР. 14, № 7. С. 419-422. Совм. с Б. М. Левитаном.

45. О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // ДАН СССР. 15, № 3. С. 107-112. Совм. с М. Г. Крейном.

46. Проблема моментів на двох інтервалах при додатковій умові А. А. Маркова // Зап. Харьк. мат. об-ва. 14. С. 47-60. Совм. с М. Г. Крейном.

47. О наилучшем приближении одного класса непрерывных периодических функций // ДАН СССР. 17, № 9. С. 451-454.

48. Про теорему акад. С. Н. Бернштейна відносно квадратурної формули П. Л. Чебишева // Журн. ин-та мат. АН УССР. К. 3. С. 75-82.

49. Про одну теорему С. Бохнера // Зап. Харьк. мат. об-ва. 14. С. 75-80.

1938

50. О наилучших приближениях аналитических функций // ДАН СССР. 18. С. 241-244.

51. О некоторых вопросах теории моментов. Х., ОНТВУ. 253 с. Совм. с М. Г. Крейном.

52. Деякі зауваження про коефіцієнти квадратурних формул Гаусовського типу // Тр. Одес, ун-та. 2. С. 29-38. Совм. с М. Г. Крейном.

1940

53. Лекции по теории аппроксимации. Х. 137 с.

54. О построении потока, обтекающего тонкий профиль // Сб. тр. ин-та мат. АН УССР. 4. С. 151-156.

55. О некоторых формулах квадратур П. Л. Чебышева и А. А. Маркова. Сб. памяти акад. Граве. С. 15-28. Совм. с М. Г. Крейном.

56. Some remarks about three papers of Verblunsky // Зап. Харьк. об-ва. 16. С. 129-134. Совм. с М. Г. Крейном.

57. О максимальных симметрических операторах в гильбертовом пространстве // Науч. зап. Авиац. ин-та . Х. 3, № 1. С. 3-8.

1941

58. Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов // Успехи мат. наук. 9. С. 126-156.

1945

59. О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов // Изв. АН СССР. 9. С. 275-290.

60. Об одном предложении А. Н. Колмогорова и одном предложении М. Г. Крейна // ДАН СССР. 50. С. 35-40.

61. Общая теория полиномов П. Л. Чебышева // Научное наследие П. Л. Чебышева. 1. М. С. 5-42.

1946

62. Краткий обзор трудов П. Л. Чебышева // П. Л. Чебышев. Избранные математические труды. М. С. 171-189.

63. О некоторых свойствах целых трансцендентных функций экспоненциального типа // Изв. АН СССР. 10. С. 411-428.

64. О полиномах Б. М. Левитана // ДАН СССР. 54. С. 3-6.

65. Про один клас інтегральних операторів // Сб. тр. ин-та мат. АН УССР. 8. С. 113-130.

1947

66. Лекции по теории аппроксимации. М. 325 с.

67. Конструктивная теория функций в Харьковском университете и Математическом ин-те, 1917-1947 // Успехи мат. наук. 2, вып. 3. С. 158-174.

68. Интегральные операторы с ядрами Карлемана // Успехи мат. наук. 2, вып. 5. С. 93-131.

69. О взвешенном приближении многочленами непрерывных на всей числовой оси функций // ДАН СССР. 57. С. 315-318. Совм. с К. И. Бабенко.

70. Русский математик А. А. Марков (к 25-летию со дня смерти) // Природа. № 8. С. 76-81.

1948

71. Элементы теории эллиптических функций. М. 291 с.

72. О некоторых вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси, I // Зап. Харьк. мат. об-ва. 19. С. 21-25.

73. К теории целых функций конечной степени // ДАН СССР. 63. С. 475-478.

74. Андрей Андреевич Марков. Биографический очерк / А. А. Марков. Избранные труды. М. С. 9-12.

75. Примечания к книге А. А. Марков. Избранные труды. М. С. 377-390.

1949

76. Проблема моментов А. А. Маркова относительно любого числа интервалов // Укр. мат. журн. 3. С. 41-50.

77. Об интерполировании целых трансцендентных функций конечной степени // ДАН СССР. 65, № 6. С. 781-784.

78. О некоторых вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси, II // Зап. Харьк. мат. об-ва. 21. С. 5-9. Совм. с В. А. Марченко.

1950

79. О решениях степенной проблемы моментов в неопределенном случае // Зап. Харьк. мат. об-ва. 22. С. 99-106.

80. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М. 483 с. Совм. с И. М. Глазманом.

1952

81. Об интерполировании целых трансцендентных функций конечной степени // Зап. Харьк. мат. об-ва. 23. С. 5-26. Совм. с Б. Я. Левиным.

82. Доказательство правила множителей изопериметрической задачи // Зап. Харьк. мат. об-ва. 23. С. 91-93.

83. Об одном обобщении лемм Шварца и Левнера // Зап. Харьк. мат. об-ва. 23. С. 95-101. Совм. с М. Г. Крейном.

84. О целых функциях конечной степени, наименее уклоняющихся от нуля // Мат. Сб. 31. С. 415-438.

85. О целых трансцендентных функциях конечной степени, имеющих майоранту на последовательности вещественных точек // Изв. АН СССР. 16, № 4. С. 353-364.

86. Об одном семействе целых функций конечной степени и одной Чебышевской задаче // Изв. АН СССР. 16. № 5. С. 459-468.

1953

87. Обобщение теоремы о весовых функциях и применение к проблеме моментов // ДАН СССР. 92. С. 1109-1112. Совм. с С. Н. Бернштейном.

88. О слабо весовых функциях // ДАН СССР. 93, № 6. С. 949-952.

1954

89. О наилучшем взвешенном приближении на всей числовой оси посредством целых функций конечной степени // ДАН СССР. 94, С. 983-986.

90. Об одном обобщении преобразования Фурье и теоремы Винера-Палей // ДАН СССР. 96. С. 889-892.

91. О некоторых спаренных интегральных уравнениях // ДАН СССР. 98. С. 333-336.

92. Работа Н. Я. Сонина по приближенному вычислению определенных интегралов / Н. Я. Сонин. Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М. С. 219-243.

1955

93. П. Л. Чебышев и его научное наследие / П. Л. Чебышев. Избранные труды. М. С. 843-887.

94. Лекции по вариационному исчислению. М. 248 с.

95. К 90-летию со дня рождения Владимира Андреевича Стеклова // Тр. Харьк. Политехн. ин-та, сер. инж.-физ. 5, № 1, С. 3-14.

96. О теореме единственности для уравнения теплопроводности // Тр. Харьк. Политехн. ин-та, сер. инж.-физ. 5, № 1. С. 51-55.

97. Академик С. Н. Бернштейн и его работы по конструктивной теории функций. Х. 112 с.

1956

98. Харьковское математическое общество // Зап. Харьк. мат. об-ва. 24. С. 31-39.

99. О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси // Успехи мат. наук. 11, вып. 4. С. 3-43.

100. Экстремальные свойства целых трансцендентных функций конечной степени. Тр. III Всесоюз. мат. съезда. 2. М. С. 25.

101. К задаче о дифракции электромагнитных волн у круглого отверстия в плоском экране // ДАН СССР. 109. С. 53-56. Совм. с А. Н. Ахиезером.

102. К теории нормальных рядов С. Н. Бернштейна / С. Н. Бернштейн. Аналитическая природа решений дифференциальных уравнений эллиптического типа. Х. С. 83-94.

1957

103. К теории спаренных интегральных уравнений // Зап. Харьк. мат. об-ва. 25. С. 5-31.

104. Эффективное граничное условие на поверхности раздела мультиплицирующей и замедляющей сред // Журн. техн. физ. 27. С. 822-829. Совм. с А. И. Ахиезером и Г. Я. Любарским.

105. Об обращении некоторых сингулярных интегралов // Зап. Харьк. мат. об-ва. 25. С. 191-198. Совм. с В. А. Щербиной.

106. О некоторых классах непрерывных функций, порождающих эрмитово-положительные ядра // Зап. Харьк. мат. об-ва. 25. С. 205-217. Совм. с И. М. Глазманом.

107. Неравенства для производных, аналогичные неравенству С. Н. Бернштейна // ДАН СССР. 117. С. 735-738. Совм. с Б. Я. Левиным.

108. Борис Яковлевич Левин (к пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 12, вып. 2. С. 237-242. Совм. с Н. В. Ефимовым.

1960

109. О полиномах, ортогональных на дуге окружности // ДАН СССР. 130. № 2. С. 247-250.

110. Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах // ДАН СССР. 134, № 1. С. 9-12.

111. Обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производных от целых функций // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М. С. 111-165. Совм с Б. Я. Левиным.

1961

112. К теории ортогональных многочленов на нескольких интервалах / ДАН СССР. 138, № 4. С. 743-746. Совм. с Ю. Я. Томчуком.

113. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. М. 310 с.

114. Одна экстремум-проблема относительно многочленов // Ann. Univ. Sci. Budapestinensis. 3-4. P. 9-14. Совм. с М. Г. Крейном.

115. Вклад С. Н. Бернштейна в теорию дифференциальных уравнений с частными производными // Успехи мат. наук. 16, вып. 2. С. 5-20. Совм. с И. Г. Петровским.

116. Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов // ДАН СССР. 141, № 2. С. 263-266.

117. Континуальный аналог многочленов, ортогональных на дуге окружности // ДАН СССР. 141. № 4. С. 769-772.

118. О некоторых формулах обращения // Зап. Харьк. мат. об-ва. 27. С. 91-95.

1962

119. Some questions in the theory of moments / Amer. Math. Soc. Providence. Rhode Island. 265 p. Совм. с М. Г. Крейном.

1963

120. Об одном уравнении Штурма-Лиувилля на полуоси // Зап. Харьк. мат. об-ва. 29. С. 44-52.

1964

121. Континуальный аналог некоторых теорем о теплицевых матрицах // Укр. мат. журн. 16. № 4. С. 445-462.

122. Об уравнениях Лямэ // Зап. Харьк. мат. об-ва. 30. С. 5-17.

123. Ортогональные многочлены на системе интервалов и их континуальные аналоги / Тр. IV Всесоюз. мат. съезда. 2. С. 623-628.

1965

124. Лекции по теории аппроксимации. М. 407 с.

125. О максимуме на луче производной от монотонной целой функции нормального типа порядка половина // Теория функций, функцион. анализ и их прил. I. С. 136-140.

126. Экстремальные свойства целых функций экспоненциального типа // Теория функций, функцион. анализ и их прил. 1. С. 111-135.

127. The classical moment prodlem and some related questions in analysis. Edinburgh. Oliwer & Royd. 253 p.

128. Борис Моисеевич Левитан (к пятидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат наук. 20, вып. 3. С. 227-234. Совм. с В. А. Марченко.

1966

129. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Изд. 2-е, перераб. и доп. М. 543 с. Совм. с И. М. Глазманом.

1968

130. О континуальных аналогах многочленов, ортогональных на окружности // Укр. мат. журн. 20, № 1. С. 3-24. Совм. с А. М. Рыбалко.

1969

131. Замечания к статье А. М. Рыбалко "О преобразовании Фурье в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ с весом" // Мат. физика, функцион. анализ. Тр. ФТИНТ АН УССР. 1. С. 165-172.

132. Сергей Натанович Бернштейн, некролог // Успехи мат. наук. 24. вып. 3. С. 211-219. Совм. с П. С. Александровым, Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоровым.

133. Израиль Маркович Глазман, некролог // Успехи мат. наук. 24, вып. 5. С. 215-219. Совм. с Э. М. Жмудем, Ю. И. Любичем, В. А. Марченко.

134. Алексей Васильевич Погорелов (к пятидесятилетию со дня рождения) // Укр. мат. журн. 21. № 3. С. 354-360. Совм. с Я. П. Бланком, В. А. Марченко и Ю. А. Митропольским.

1970

135. Элементы теории эллиптических функций. Изд. 2-е, перераб. М. 304 с.

1971

136. Об одном неопределенном уравнении чебышевского типа в задачах построения ортогональных систем // Мат. физика и функцион. анализ. Тр. ФТИНТ АН УССР. 2. С. 3-14.

1973

137. О сепаратно-аналитических функциях многих переменных и теоремах об "Острие клина" // Успехи мат. наук. 28, вып. 3. С. 27-42. Совм. с Л. И. Ронкиным.

1976

138. О сепаратно-аналитических функциях многих переменных // Вопросы математической физики и функционального анализа. К. С. 3-10. Совм. с Л. И. Ронкиным.

1977

139. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 1. Х. 316 с. Совм. с И. М. Глазманом.

140. Борис Яковлевич Левин (к семидесятилетию со дня рождения) // Успехи мат. наук. 32, вып. 5. С. 211-213. Совм. с Н. В. Ефимовым, М. Г. Крейном, М. А. Лаврентьевым, В. А. Марченко, И. В. Островским, Б. В. Шабатом.

1978

141. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, 2. X 288 с. Совм. с И. М. Глазманом.

142. К спектральной теории уравнения Ляме / Историко-математические исследования, вып. 23. С. 77-86.

1980

143. Theory of linear operators in Hilbert space. Vols. I, II. Pitman Press. 200 p. Совм. с И. М. Глазманом.

1981

144. Вариационное исчисление. X. 168 с.

1984

145. Лекции об интегральных преобразованиях. X. 120 с.

1987

146. Чебышевское направление в теории функций // Математика XIX века. М. С. 9-79.

1988

147. The Calculus of Variations. New York, Harwood Academic Publis hers. 280 p.

148. Lectures on integral transforms American Mathematical Soc. Providence Rhode Island. 108 p.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 533.72 № 514, 2001, с. 17–33

Transitional Regime Between Spiral Equilibrium States of a Gas

V. D. Gordevsky
Kharkov National University, Ukraine

The interaction between two spiral flows of a gas of hard spheres is described by the bimodal distribution which has a form of the linear combination of stationary inhomogeneous Maxwellians. Each of the flows rotates about its axis and can move translationally along it. Sufficient conditions for infinitesimality of the integral norm of a difference between the right- and the left-hand sides of the Boltzmann equation are obtained.
2000 Mathematics Subject Classification 76P05.

I. Introduction

The kinetic Boltzmann equation for the model of hard spheres has a form [1,2]:

$$D(f) = Q(f,f), \tag{1}$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial x}, \tag{2}$$

$$Q(f,f) = \frac{d^2}{2}\int_{R^3} dv_1 \int_{\Sigma} d\alpha\, |(v_1 - v, \alpha)| \Big[f(t, v_1', x) f(t, v', x) - \\ - f(t, v_1, x) f(t, v, x) \Big], \tag{3}$$

where f– the distribution we want to find; $\frac{\partial f}{\partial x}$– its spatial gradient; $t \in R^1$– the time; $x = (x^1, x^2, x^3) \in R^3$– the position; $v = (v^1, v^2, v^3) \in R^3$– the velocity of a molecule; d– its diameter; $\alpha \in \Sigma$; Σ– the unit sphere in R^3; v' and v_1'– the velocities of the particles after the collision, which are defined by the formulae:

$$v' = v - \alpha(v - v_1, \alpha); \quad v_1' = v_1 + \alpha(v - v_1, \alpha). \tag{4}$$

There are well-known exact solutions of (1)-(4) in the form of Maxwellians (global and local) [1,2], and much progress has been made only in the special case of Maxwell molecules and some its generalizations [3-14]. For physically significant interaction models, in particular, for the model of hard (rigid) spheres, up to now, no explicit solutions except Maxwellians is known.

In [15-18] it was approximately described the transitional regime between equilibrium states of a gas of hard spheres, which correspond to global (i.e. independent neither of t nor of x) Maxwellians.

Extension of these results on the case of local Maxwellians of the most general form is not successful yet because of technical difficulties arising here.

The aim of the present paper is studing of the interaction between two spiral flows of a gas. The approximate description of such a process is the bimodal distribution including local Maxwellians of a special form; each of them describes a stationary equilibrium state of a gas (in short– spiral) and is of a form [1]:

$$M(v,x) = \rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta(v-\bar{v}-[\omega\times x])^2} \tag{5}$$

Physically the distribution (5) corresponds to the situation when a gas has an inverse temperature $\beta = \frac{1}{2T}$ and rotates on whole (as a hard body) with the angular velocity $\omega \in R^3$ about the axis, on which the point $x_0 \in R^3$ lies:

$$x_0 = \frac{[\omega \times \bar{v}]}{\omega^2}, \tag{6}$$

the square of the distance from the axis of rotation is:

$$r^2 = \frac{1}{\omega^2}[\omega \times (x - x_0)]^2, \tag{7}$$

and the density of a gas has a form:

$$\rho = \rho_0 e^{\beta\omega^2 r^2} \tag{8}$$

(ρ_0–the density on the axis); $\bar{v} \in R^3$– linear mass velocity for x, such that $x \parallel \omega$. It is easy to see that mass velocity in arbitrary point x is equal to $\bar{v} + [\omega \times x]$ and the formula (5) gives not only rotational movement but a translational one along the axis with the linear velocity $\frac{(\omega,\bar{v})}{\omega^2}\omega$ too, so, it really describes spiral movement of a gas on whole (note, that (5) is stationary, i.e. independent of t, but inhomogeneous).

The statement of the problem can be formulated as follows. Let us consider inhomogeneous, non-stationary linear combination of two Maxwellians of a form (5), i.e. such a distribution:

$$f = \sum_{i=1}^{2} \varphi_i(t,x) M_i(v,x) = \sum_{i=1}^{2} \varphi_i M_i, \tag{9}$$

$$M_i(v,x) = \rho_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}\left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\beta_i(v-\bar{v}_i)^2}, \; i = 1,2, \tag{10}$$

$$\tilde{v}_i = \tilde{v}_i(x) = \bar{v}_i + [\omega_i \times x], i = 1, 2. \tag{11}$$

It is assumed that the coefficient functions $\varphi_i, i = 1, 2$ are non-negative and belong to $C^1(R^4)$. It is required to find $\varphi_i, i = 1, 2$ and a behaviour of all parameters such that the integral remainder becomes vanishingly small with it. This remainder is introduced in [18] as follows:

$$\Delta_1 = \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \int_{R^3} |D(f) - Q(f, f)| \, dv \tag{12}$$

(if all the considered functions are independent of some argument t or $x^k, k = 1, 2, 3$, then in (12) the integral on this argument is absent).

In Section II the low-temperature limits for some upper bounds of Δ_1 are obtained under several suppositions on a behaviour of the vectors ω_i and $\bar{v}_i, i = 1, 2$.

In Section III a number of sufficient conditions for infinitesimality of the remainder Δ_1 are found.

The discussion on the results of the paper is presented in Section IV.

In Appendix A, B we will place some fragments of the proofs.

II. Main results

In this section the behaviour of the remainder (12) in the limit of low temperatures (if $\beta_i \to +\infty, i = 1, 2$) is studied. For this reason it is necessary to transform the right-hand side of (12).

First of all let us calculate and estimate from above the internal integral on the variable v (the proof one can find in the Appendix A):

$$\int_{R^3} |D(f) - Q(f, f)| \, dv \leq \sum_{i,j=1, i \neq j}^{2} \left[\int_{R^3} \left| \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i + [\omega_i \times x] \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \cdot \right. \right.$$

$$\cdot e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} + \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \omega_1^2 r_1^2} e^{\beta_2 \omega_2^2 r_2^2} \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw e^{-w^2} \cdot$$

$$\cdot \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} - \bar{v}_j - [\omega_j \times x] + \bar{v}_i + [\omega_i \times x] - \frac{w}{\sqrt{\beta_i}} \right| \left| \rho_i \pi^{-\frac{3}{2}} e^{-u^2} \, du + \right.$$

$$+ \varphi_1 \varphi_2 \rho_1 \rho_2 e^{\beta_1 \omega_1^2 r_1^2} e^{\beta_2 \omega_2^2 r_2^2} \frac{d^2}{\pi^2} \int_{R^3} e^{-u^2} \, du \int_{R^3} dw e^{-w^2} \cdot$$

$$\left. \cdot \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} - \bar{v}_j - [\omega_j \times x] + \bar{v}_i + [\omega_i \times x] - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right| \right]. \tag{13}$$

From (13) we can see, that for the correctness of the definition (12) we must impose the new conditions on the coefficient functions $\varphi_i, i = 1, 2$ such as finitness or the fast decrease in the spatial variable x. So let us suppose that

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x) e^{-\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, i = 1, 2, \tag{14}$$

where the functions $\psi_i, i = 1,2$ are smooth, non-negative and independent of $\beta_i, i = 1,2$. Then (13) yields (see Appendix B):

$$\int_{R^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv \le \sum_{i=1}^{2} \int_{R^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + B_i(u,t,x) + A_i(u,t,x) \right| + \right.$$

$$\left. + A_i(u,t,x) \right] \frac{\rho_i}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-u^2}\, du, \tag{15}$$

where

$$A_i(u,t,x) = \psi_1 \psi_2 \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw e^{-w^2} \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + (\bar{v}_i - \bar{v}_j) + [(\omega_i - \omega_j) \times x] - \frac{w}{\sqrt{\beta_i}} \right|, \tag{16}$$

$$B_i(u,t,x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i + [\omega_i \times x] \right) + 2\psi_i \sqrt{\beta_i} \{ (u, [\omega_i \times \bar{v}_i]) - [\omega_i \times u] \cdot [\omega_i \times x] \}. \tag{17}$$

Now, with the help of (15)–(17), we can obtain some conditions on the functions $\varphi_i, i = 1,2$ and the parameters of the distribution (9)–(11), which will be sufficient to the correctness of the definition of the remainder Δ_1 and for the existence of its low-temperature limit.

Theorem 1. *Let:*

$$\omega_i = \frac{\omega_{0i} s_i}{\beta_i},\ i = 1,2, \tag{18}$$

where $s_i > 0$– any constants; ω_{0i}– arbitrary fixed vectors (the other parameters are also arbitrary and fixed). Let the following functions are belong to $L_1(R^4)$ (in stationary situation - $L_1(R^3)$):

$$\psi_i;\ \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right|;\ \frac{\partial \psi_i}{\partial t};\ \psi_i \left| [\omega_{0i} \times x] \right|;\ \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x}, [\omega_{0i} \times x] \right),\ i = 1,2. \tag{19}$$

Then the integral Δ_1 from (12) converges and there exists a value Δ_1' such, that

$$\Delta_1 \le \Delta_1', \tag{20}$$

where:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \Delta_1' = \sum_{i,j=1, i \ne j}^{2} \rho_i \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \pi d^2 \rho_j \psi_1 \psi_2 |\bar{v}_1 - \bar{v}_2| \right| +$$

$$+ 2\pi d^2 \rho_1 \rho_2 |\bar{v}_1 - \bar{v}_2| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx (\psi_1 \psi_2). \tag{21}$$

Proof. The existence of the remainder Δ_1 is a trivial consequence of (12), (15)–(17) and (19), besides:

$$\Delta_1 \le \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \cdot$$

$$\cdot \int_{R^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + B_i(u,t,x) + A_i(u,t,x) \right| + A_i(u,t,x) \right] e^{-u^2}\, du. \tag{22}$$

Let us substitute (18) into (16),(17) and introduce the new denotation:

$$\gamma = (\gamma_1; \gamma_2) = (\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}; \frac{1}{\sqrt{\beta_2}}). \tag{23}$$

Then:

$$A_i(u,t,x) = \psi_1 \psi_2 \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw e^{-w^2}.$$

$$\cdot \left| \gamma_i u + (\bar{v}_i - \bar{v}_j) + s_i \gamma_i^2 [\omega_{0i} \times x] - s_j \gamma_j^2 [\omega_{0j} \times x] - \gamma_j w \right|, \tag{24}$$

$$B_i(u,t,x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} (\gamma_i u + \bar{v}_i + \gamma_i^2 s_i [\omega_{0i} \times x]) +$$

$$+ 2\psi_i \gamma_i s_i \{ (u, [\omega_{0i} \times \bar{v}_i]) - s_i \gamma_i^2 [\omega_{0i} \times u] \cdot [\omega_{0i} \times x] \}. \tag{25}$$

From (24),(25) and (19) one can see, that the function under the integral sign in (22) is continuous in the variables t, x, u, γ. Next, the integral (22) converges uniformly with respect to the variable γ at any compact because of (19) once more and the presence of the factor e^{-u^2}. Hence, the value Δ_1' is continuous in γ, and we can in (22) pass to the limit with $\gamma \to 0$ (i.e. $\beta_i \to +\infty, i = 1, 2$). As a result we obtain an integral which is the same as (22) but in the values (24),(25) we must put $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. After the trivial integration on the variables w and u we will have (21). ■

Theorem 2. *Let all the conditions of the Theorem 1 are valid except (18), but now it is assumed that*

$$\omega_i = \frac{\omega_{0i} s_i}{\sqrt{\beta_i}}, i = 1, 2. \tag{26}$$

Then such the analogue of (21) holds true:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \Delta_1' = \sum_{i,j=1, i \neq j}^{2} \rho_i \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \pi d^2 \rho_j \psi_1 \psi_2 \left| v_i - v_j \right| \right| +$$

$$+ 2\pi d^2 \rho_1 \rho_2 \left| \bar{v}_1 - \bar{v}_2 \right| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx (\psi_1 \psi_2) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \rho_i s_i \left| [\omega_{0i} \times \bar{v}_i] \right| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \psi_i. \tag{27}$$

Proof. Let us utilize once more the estimation (22) (but the denotation Δ_1' for its rihgt-hand side we will not introduce temporarily), and into (16),(17) substitute (26) and (23). Then instead of (24),(25) we will obtain:

$$A_i(u,t,x) = \psi_1 \psi_2 \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw e^{-w^2} \cdot$$

$$\cdot \left| \gamma_i u + (\bar{v}_i - \bar{v}_j) + s_i \gamma_i [\omega_{0i} \times x] - s_j \gamma_j [\omega_{0j} \times x] - \gamma_j w \right|. \tag{28}$$

$$B_i(u,t,x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x}(\gamma_i u + \bar{v}_i + s_i\gamma_i[\omega_{0i} \times x]) +$$
$$+ 2\psi_i s_i\{(u, [\omega_{0i} \times \bar{v}_i]) - s_i\gamma_i[\omega_{0i} \times u] \cdot [\omega_{0i} \times x]\}. \tag{29}$$

After the substitution of (28),(29) into the right-hand side of (22) we can estimate the obtained expression in such a way:

$$\Delta_1 \leq \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2} \frac{\rho_i}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \cdot$$

$$\cdot \int_{R^3} \left[\left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + A_i(u,t,x) + \frac{\partial \psi_i}{\partial x}(\gamma_i u + \bar{v}_i + s_i\gamma_i[\omega_{0i} \times x]) - 2\psi_i s_i^2 \gamma_i [\omega_{0i} \times u] \cdot [\omega_{0i} \times x] \right| + \right.$$
$$\left. + A_i(u,t,x) + 2\psi_i s_i \, |u| \cdot |[\omega_{0i} \times \bar{v}_i]| \right] e^{-u^2} \, du. \tag{30}$$

Now, passing to the limit in (30) with $\gamma \to 0$ (the possibility of such a passage is the same as in the proof of the Theorem 1), evidently, we will have (27) instead of (21) because of the third summand in (30), independent of γ. The integral of this summand can be easily calculated. ■

The next two theorems deal with the special case, when $x_{0i} = 0, i = 1,2$, i.e. the axes of rotation of both spirals pass through the origin.

Theorem 3. *Let*

$$\omega_i = \frac{\omega_{0i} s_i}{\sqrt[4]{\beta_i}}, i = 1,2, \tag{31}$$

and

$$[\omega_{0i} \times \bar{v}_i] = 0, i = 1,2. \tag{32}$$

Then, if the condition (19) is valid, the inequality (20) holds true, where

$$\lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \Delta_1' = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \rho_i \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \pi d^2 \rho_j \psi_1 \psi_2 \, |\bar{v}_i - \bar{v}_j| \right| +$$
$$+ 2\pi d^2 \rho_1 \rho_2 \, |\bar{v}_1 - \bar{v}_2| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx (\psi_1 \psi_2) +$$
$$+ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \rho_i s_i^2 \, |\omega_{0i}| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx (|[\omega_{0i} \times x]| \, \psi_i). \tag{33}$$

Proof can be done by the scheme of the proof of the Theorem 2, but now because of (31),(32) instead of (28),(29) from (16),(17) we will have:

$$A_i(u,t,x) = \psi_1 \psi_2 \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw e^{-w^2} \cdot$$
$$\cdot \left| \gamma_i u + (\bar{v}_i - \bar{v}_j) + \sqrt{\gamma_i} s_i [\omega_{0i} \times x] - \sqrt{\gamma_j} s_j [\omega_{0j} \times x] - \gamma_j w \right|, \tag{34}$$

$$B_i(u,t,x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x}(\gamma_i u + \bar{v}_i + \sqrt{\gamma_i} s_i [\omega_{0i} \times x]) - 2\psi_i s_i^2 [\omega_{0i} \times u] \cdot [\omega_{0i} \times x]. \tag{35}$$

From (34),(35) we can see that the limit with $\gamma \to 0$ of the value $A_i(u,t,x)$ will be the same as in the Theorems 1,2, and an estimation from above for the modulus entering into (15) and including $B_i(u,t,x)$, similar to (30), leads now to the "separation" of a summand independent of γ (i.e. of $\beta_i, i = 1,2$), in which the expressions appear:

$$2s_i^2 \int_{R^3} |\psi_i[\omega_{0i} \times u] \cdot [\omega_{0i} \times x]| \, \rho_i \pi^{-\frac{3}{2}} e^{-u^2} du, i = 1,2. \tag{36}$$

Further the evident estimation from above for (36) in consequence of (19) yields (33). ■

In the formulation of the following Theorem the functions $\psi_i, i = 1,2$ do not take place at all, i.e. the supposition (14) is not used.

Theorem 4. *Let the distribution f be of the form (9)-(11), where the functions $\psi_i, i = 1,2$ do not depend on $\beta_i, i = 1,2$. Let one of the conditions (18) or (26) holds true and the restriction (32) is fulfilled. Put:*

$$\mu_i(x) = \left[\begin{array}{ll} 1, & if \quad (18) \quad is\, true, \\ e^{s_i^2[\omega_{0i} \times x]^2}, & if \quad (26) \quad is\, true. \end{array} \right. \tag{37}$$

Let the following functions belong to L_1 when $\beta_i \to +\infty, i = 1,2$:

$$\varphi_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}; \; \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}; \; \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right| e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2};$$

$$\varphi_i \left| [\omega_{0i} \times x] \right| e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}; \; \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} [\omega_{0i} \times x] \right| e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2}, \; i = 1,2. \tag{38}$$

Then the inequality (20) is valid, where

$$\lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \Delta_1' = \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \rho_i \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \cdot$$

$$\cdot \left| \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) \mu_i(x) + \varphi_1 \varphi_2 \mu_1(x) \mu_2(x) \pi d^2 \rho_j \left| \bar{v}_i - \bar{v}_j \right| \right| +$$

$$+ 2\rho_1 \rho_2 \pi d^2 \left| \bar{v}_1 - \bar{v}_2 \right| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx [\mu_1(x) \mu_2(x) \varphi_1 \varphi_2]. \tag{39}$$

Proof. The condition (38) ensures the existence of the remainder Δ_1, as it can be seen from (13). By (6),(7) and (37) if it is remembered (32) we obtain that if (18) or (26) is true then the exponential factors in (13) have such a behaviour:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} = \mu_i(x), i = 1,2. \tag{40}$$

Thus, if we estimate from above the value Δ_1 in the same way, as it was done in the proof of the Theorem 1, and denote this upper bound as Δ_1', then after the low-temperature passage we will, evidently, obtain (39). ■

Remark 1. In each of Theorems 1–4 is assumed, that both angular velocities of the spirals ω_1 and ω_2 tend to zero when $\beta_1, \beta_2 \to +\infty$ with the common order of infinitesimality (this order itself may be different according to (18),(26) or (31)). Of course, we can consider other variants too, when $\omega_i, i = 1,2$ have different behaviour for $i = 1$ and $i = 2$. Moreover, the condition (32) can be true or not for different i, too. This fact leads, as we can see from the proofs of the Theorems 1–4, to the appearance of some "mixed" variants of the limit expression for Δ_1' (it may consists for $i = 1$ and $i = 2$ of various summands which we can meet in each of the formulae (21),(27),(33),(39)).

Still we assumed that the values $\bar{v}_i, i = 1,2$ are fixed. Let us now give a result deals with the case when ω_i and $\bar{v}_i, i = 1,2$ tend to zero both and in an agreement to each other, i.e. by a some "trajectory" in the space of parameters.

Theorem 5. *Let the conditions (31) and (19) are valid, and, in addition to that,*

$$\bar{v}_i = \frac{\sigma_i \bar{v_{0i}}}{\sqrt[4]{\beta_i}}, i = 1,2, \tag{41}$$

where $\sigma_i > 0$ are arbitrary constants and $\bar{v_{0i}}$– any fixed vectors. Then the inequality (20) holds true, where

$$\lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2} \rho_i \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \left| \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right| +$$

$$\frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \rho_i s_i^2 \, |\omega_{0i}| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx (|[\omega_{0i} \times x]| \, \psi_i) +$$

$$+ \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{2} \rho_i s_i \sigma_i \, |[\omega_{0i} \times \bar{v_{0i}}]| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \psi_i. \tag{42}$$

Proof is analogous to the proof of the Theorem 3, but because of absence of the condition (32) and the appearance of the new condition (41), instead of (34),(35) now from (16),(17) we will have:

$$A_i(u,t,x) = \psi_1 \psi_2 \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw e^{-w^2} \cdot$$

$$\cdot \left| \gamma_i u + \sigma_i \sqrt{\gamma_i} \bar{v_{0i}} - \sigma_j \sqrt{\gamma_j} \bar{v_{0j}} + \sqrt{\gamma_i} s_i [\omega_{0i} \times x] - \sqrt{\gamma_j} s_j [\omega_{0j} \times x] - \gamma_j w \right|, \tag{43}$$

$$B_i(u,t,x) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x} (\gamma_i u + \sigma_i \sqrt{\gamma_i} \bar{v_{0i}} + \sqrt{\gamma_i} s_i [\omega_{0i} \times x]) -$$

$$- 2\psi_i s_i^2 [\omega_{0i} \times u] \cdot [\omega_{0i} \times x] + 2\psi_i s_i \sigma_i (u, [\omega_{0i} \times \bar{v_{0i}}]). \tag{44}$$

Obviously, the contribution of (43) will vanish when $\gamma_i \to 0, i = 1,2$, and the estimation from above of the values which include (44), leads to the separation of two independent of γ_i summands, which are accordingly analogous to (36) and the last term in (30) (with the change of $\bar{v}_i$ for $\sigma_i \bar{v_{0i}}$), after that we will obtain (42). ■

Remark 2. It is possible instead of (41) to consider some other variants of a behaviour of $\bar{v}_i, i = 1,2$, analogous to (18) or (26). In a combination with three variants of a behaviour of $\omega_i, i = 1,2$, considered in the Theorems 1–3, it yields many different situations. But the analysis of them shows, that the low-temperature limit of the value Δ_1' will be everytime described by one of the formulae (21),(27),(33),(39),(42). In such a way one can obtain some analogies of the Theorem 4 too, but in this case as $\mu_i(x), i = 1,2$ some other expressions, than (37), will take place, and in (39) it is necessary to put $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$. Let us also remark , that in the situations, when the degrees of infinitesimality of ω_i and $\bar{v}_i$ are different, the vector x_{0i}, defined by (6), tends to either 0 or ∞, but if these degrees are equal, then the vector x_{0i} is "stabilized", i.e. it tends to the finite value:

$$\frac{\sigma_i}{s_i} \cdot \frac{[\omega_{0i} \times \bar{v}_{0i}]}{\omega_{0i}^2}. \tag{45}$$

It can be easily seen, that such a behaviour of the vector x_{0i} is impossible if $\bar{v}_i$ is fixed, as in the Theorems 1–4 (there x_{0i} tends to ∞ or it simply equals to 0 in the case, when $\bar{v}_i \parallel \omega_i$, i.e. (32) is fulfilled).

Remark 3. In the Theorems 1–5 and the Remark 2 we considered only such the situations, when the vectors $\omega_i, \bar{v}_i, i = 1,2$ tend to zero in the inverse proportionality to some selected degrees of $\beta_i, i = 1,2$, namely: 1, $\frac{1}{2}$ or $\frac{1}{4}$. The choice of these concrete values is connected, first of all, with the structure of the expression (17). It is not so difficult to see, that for any other degrees of the tending of these vectors to zero nothing new does not appear in a behaviour of the remainder Δ_1 and the vector x_{0i} in comparison with the situations considered above.

Remark 4. More "exotic" variants of a behaviour of the vectors $\omega_i, \bar{v}_i, i = 1,2$ are possible too, leading to some curious effects. For example, if we put:

$$\omega_i = \frac{s_i \omega_{0i}}{\beta_i}; \; \bar{v}_i = \frac{\sigma_i \bar{v}_{0i}}{\beta_i} \sin \beta_i, \; i = 1,2, \tag{46}$$

then the remainder Δ_1' will have, as before, the finite limit, namely:

$$\lim_{\beta_i \to +\infty, i=1,2} \Delta_1' = \sum_{i=1}^{2} \rho_i \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right|, \tag{47}$$

but the vectors x_{0i} will have not neither finite, nor infinite limit, and will "oscillate" by the following law:

$$x_{0i}(\beta_i) = \frac{\sigma_i}{s_i} \cdot \frac{[\omega_{0i} \times \bar{v}_{0i}]}{\omega_{0i}^2} \sin \beta_i. \tag{48}$$

Remark 5. At last, it is possible, as in the Remark 1, to alter a behaviour not only of vectors $\omega_i, i = 1,2$, but $\bar{v}_i, i = 1,2$ too, in dependence on the index i. It increases very much a formally possible number of the variants of a behaviour of the remainder, yielding the appearance of the mixed expressions, but gives nothing new on principle, because for each i separately no effects, besides described above, can be found.

III. Minimization of the remainder

Now, with the help of the expressions for the low-temperature limits obtained in the Section II, we can find some sufficient conditions for the infinitesimality of the remainder Δ_1, which it is convenient to formulate in the form of Corollaries of the Theorems 1–5 (in all further formulations it is assumed, that the limiting passage when $\beta_i \to +\infty, i = 1,2$ is already done). The detailed proofs of the Corollaries, as a rule, we will not give, because some of them are evident, and the others only repeat the analogous considerations of the paper [18].

Corollary 1. *Let all the assumptions of the Theorem 1 are valid. Then the statement*

$$\Delta_1 \to 0 \tag{49}$$

holds true, if it is fulfilled at least one of the conditions:

1). $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$;

$$\psi_i = \psi_i(x), i = 1,2, \tag{50}$$

where ψ_i are any functions, which satisfy the requirement (19).

2). The functions $\psi_i, i = 1,2$ are of the form of finite "plateaus" [18], such that the measure of projections of the sets $supp\psi_i$, $i = 1,2$ on the hyperplane $t = 0$ (i.e. configurational space R^3) tends to zero (in the case, when $\psi_i, i = 1,2$ are independent of t, i.e. the distribution f is a stationary one, this requirement is absent), and

$$\bar{v}_i^k \cdot mes(supp\psi_i)_k \to 0, \ i = 1,2; \ k = 1,2,3, \tag{51}$$

where G_k is a denotation of the projection of any set $G \subset R^4$ on the hyperplane $x^k = 0$, and, in addition to that, one of the following conditions is valid:

$$a).d \to 0, \tag{52}$$

$$b).\bar{v}_1 = \bar{v}_2 \neq 0, \tag{53}$$

$$c).mes(supp\psi_1 \cap supp\psi_2) \to 0; \tag{54}$$

in particular, may be

$$supp\psi_1 \cap supp\psi_2 = \emptyset. \tag{55}$$

Proof leans on (21) and the results of the paper [18]; it reduces to the verification of the fact, that the functions $\psi_i, i = 1,2$, for which the conditions of Corollary 1 are fulfilled, sutisfy the requirement (19). ■

Corollary 2. *Let all the assumptions of the Theorem 2 are valid. Then the statement (49) holds true, if one of the conditions 1), 2) of the Corollary 1 takes* *place and, in addition to that, it is fulfilled at least one of the requirements: the equality (32), or*

$$s_i \to 0, i = 1,2, \tag{56}$$

or

$$s_i \to 0,\ \omega_{0j} \parallel \bar{v}_j,\ i \neq j,\ i,j = 1,2. \tag{57}$$

Proof is evident and leans on (27). ■

Corollary 3. *Let all the assumptions of the Theorem 3 are valid. Then (49) holds true, if at least one of the conditions of the Corollary 1 takes place, and, in addition to that, the requirement (56) is satisfied.*

Proof can be easily done because of (33). ■

Corollary 4. *Let all the assumptions of the Theorem 4 are valid, and, in addition to that, the functions $\varphi_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} |[\omega_{0i} \times x]|^2$ belong to L_1 for sufficiently large $\beta_i, i = 1,2$. Let the functions $\varphi_i, i = 1,2$ are such that the functions ξ_i, defined as follows:*

$$\xi_i = \mu_i \varphi_i, i = 1,2, \tag{58}$$

where μ_i are as in (37), satisfy one of those conditions 1), 2), which are imposed on the functions ψ_i in the Corollary 1. Then the statement (49) holds true.

Proof. From (37) we can see, that if (18) is true, then the statement of the Corollary 4 is trivial, and if (26) is true, then from (58) we will have:

$$\varphi_i = \xi_i e^{-s_i^2 [\omega_{0i} \times x]^2}, i = 1,2. \tag{59}$$

This implies that (see (B.1)):

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial \xi_i}{\partial t} e^{-s_i^2 [\omega_{0i} \times x]^2}, i = 1,2, \tag{60}$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = e^{-s_i^2 [\omega_{0i} \times x]^2} \left\{ \frac{\partial \xi_i}{\partial x} - 2\xi_i s_i^2 \Big[[\omega_{0i} \times x] \times \omega_{0i} \Big] \right\}. \tag{61}$$

Substitution of (59)–(61) into (39) gives:

$$\sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} \rho_i \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \xi_i}{\partial x} - 2\xi_i s_i^2 (\bar{v}_i, [\omega_{0i} \times x], \omega_{0i}) + \xi_1 \xi_2 \pi d^2 \rho_j |\bar{v}_i - \bar{v}_j| \right| +$$

$$+ 2\rho_1 \rho_2 \pi d^2 |\bar{v}_1 - \bar{v}_2| \int_{R^1} dt \int_{R^3} dx (\xi_1 \xi_2). \tag{62}$$

But because of (32) the mixed product in the third summand in (62) is equal to zero, hence, (62) formally coincides with (21) if we make the substitution of ξ_i for $\psi_i, i = 1,2$ (it is easy to see that the result will be the same if for $i = 1$ (18) is true and for $i = 2$ (26) is true or conversely). So, in order to, with utilizing of the Corollary 1, have (49), it is sufficient only to check that the validity of the conditions of the Corollary 4 for the functions φ_i leads to the fulfillment of the requirement (19) for the functions $\xi_i, i=1,2$. For this purpose let us differentiate (58) with respect to t and x:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\mu_i, i=1,2, \tag{63}$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\mu_i + \varphi_i \frac{\partial \mu_i}{\partial x}, i=1,2, \tag{64}$$

where, as it can be easily seen from (37),

$$\frac{\partial \mu_i}{\partial x} = \left[\begin{array}{ll} 0 & if \quad (18), \\ e^{s_i^2[\omega_{0i}\times x]^2} 2s_i^2 \left[[\omega_{0i}\times x]\times \omega_{0i} \right] & if \quad (26). \end{array} \right. \tag{65}$$

Next, approaching the limit as $\beta_i \to +\infty, i=1,2$ in each of the expressions (38) and in the expression $\varphi_i e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} \|[\omega_{0i}\times x]\|^2$, taking into account (40) and the condition of the Corollary 4, we see, that the values $\varphi_i\mu_i$; $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}\mu_i$; $\left|\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right|\mu_i$; $\|[\omega_{0i}\times x]\|\varphi_i\mu_i$; $\left|[\omega_{0i}\times x]\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}\right|\mu_i$; $\|[\omega_{0i}\times x]\|^2\varphi_i\mu_i$ belong to L_1. Then from (63)-(65) it follows, that for the functions $\xi_i, i=1,2$ the requirement (19) holds true. ■

Corollary 5. *Let all the assumptions of the Theorem 5 are valid. Then (49) holds true, if takes place (50) or the functions ψ_i, $i=1,2$ are the finite "plateaus" [18], such that the measures of the projections of the sets $supp\psi_i, i=1,2$ on the hyperplane $t=0$ tend to zero, and, in addition to that, the requirement (56) is satisfied.*

Proof. The validity of (49) is the straight consequence of (42),(56),(50) and the results of [18]. ■

IV. Discussion

In this section we will analyse the results obtained above from the point of view of their physical sence. First of all, it must be noted that the exact solutions of the Boltzmann equation which have the well-known physical sence, are the spiral Maxwell's distributions (10),(11) themselves, but the bimodal distribution (9) gives only an approximate description of interaction of such spirals, in the sence of minimization of the remainder Δ_1. Nevertheless, they can be reasonably interpreted physically.

The common property of all the obtained distributions is the fact that they describe the non-uniformly cooling down gas ($\beta_i \to +\infty, i=1,2$), besides the rotation of both spirals decelerates ($\omega_i \to 0, i=1,2$), althought in a different degree, in accordance with (18),(26) or (31) (in some cases, in addition to that, (56) is assumed). At the same time the distribution f itself does not tend to any of Maxwellians, i.e. to the known exact solution of the Boltzmann equation, because yet on the first stage, when $\beta_i \to +\infty, i=1,2$, expressions (10) have not a limit in the sence of the space L_1 on the variable v, but the internal integral in (12) endures this low-temperature limiting passage. Let us remind that the condition (52) corresponds to the near free molecular flow of a gas (i.e. to the case of a gas close to a Knudsen one [1]), and the equality $x_{0i} = 0$, which is equivalent to (32), means, that $\bar{v}_i \parallel \omega_{0i}$ and the axis of the spiral pass through the origin; the condition $x_{0i} \to \infty$ shows that spirals unlimitedly go away from each other; and the case, when x_{0i} tends to a non-zero constant or has not a limit at all (see Remarks 2,4), corresponds to such a situation, when the spirals axes do not intersect each other and are stabilized on a finite distance or oscillate.

Next, the conditions (51) describe objects (flows of a gas) of an incomplete dimensionality (their detailed classification carried out in [18]; in that paper the terminology used below was introduced too), and the fulfillment of (54) or (55) corresponds to a partial or a full stratification of the objects in R^4 (in the stationary case – in R^3). Finally, the conditions $\bar{v}_i = 0$ or $\bar{v}_i \to 0, i = 1,2$ mean that the i-th spiral rotates about its axis but does not move translationally along it (or slows this movement down).

Taking into account all these facts, it is possible to pick out the following situations which ensure the validity of the statement (49).

1. Large Knudsen number ($d \to 0$).

Two stationary or non-stationary spirals with the axes, which intersect at origin or diverge on infinite distance; their densities distribute in accordance to (51), i.e. they have the incomplete dimensionality and are represent: or resting bunches or shells (in the non-stationary case bunches are impossible), or cylindrical (in particular – planar) pancakes, flying along the axes of their cylinders (along their planes accordingly), or fibres, flying in any way. As an example of such distribution one can take a sufficiently small neighbourhood of a rotating cylindrical surface.

2. Arbitrary Knudsen number ($d > 0$ – fixed).

a). Two spirals which decelerate their rotation and translational movement in the same degree; the axes are stabilized on a finite distance or oscillate; the densities are stationary or have an incomplete spatial dimensionality (i.e. bunches are impossible). This case is described in Corollary 5 and Remarks 2,4.

b). Two stationary spirals, which are the objects of an incomplete dimensionality, flying almost in parallel to each other (because of (53)), the axes diverge on infinity.

c). Statinary or non-stationary spirals, satisfying (51), with arbitrary axes and velocities which are partially or fully stratificated (i.e. the requirement (54) or (55) is satisfied).

d). Two resting spirals with axes which intersect at the origin; their densities correspond to (50).

Remark 6. In all the situations considered above except described in the Theorem 4 and the Corollary 4, the densities of the spirals are independent of their temperatures (i.e. of $\beta_i, i = 1,2$) at all, and in the Theorem 4 and the Corollary 4 the mentioned above dependence is, but it is such that when

$\beta_i \to +\infty, i = 1,2$, the densities have finite limits (namely, $\rho_i \xi_i, i = 1,2$). As we can see from (18),(26),(32), it is possible only in the cases when the axes of both spirals pass through the origin, and their rotation decelerates sufficiently quickly.

Remark 7. Finally, there are possible some "mixed" variants of the behaviour of the objects for different $i = 1,2$ too. For example, we can consider the interaction between the shell and the pancake, or the pancake and the fibre and so on.

Thus, in the present paper a number of bimodal distributions of a form (9)–(11) was constructed, which approximately satisfy the Boltzmann equation (1)–(4) in the sence of minimization of the remainder (12). Possibly, not all such distributions was found here (it is connected with the non-uniqueness of upper bounds as (A.6) and so on). However, it is not a success yet to find the low-temperature limit of the expression Δ_1 itself for the distributions (9)–(11) like it was made in [16] for functions f of a rather simplier form. Besides, it can be of interest to consider the case when the local Maxwellians themselves are non-stationary, i.e. to generalize the results obtained here on the distributions of the more complex form than (5).

Appendix A.

To prove (13), let us substitute the distribution (9)–(11) into(1)–(3). Since

$$D(M_i) = Q(M_i, M_i) = 0, i = 1,2, \tag{A.1}$$

we have:

$$D(f) = D(\varphi_1)M_1 + D(\varphi_2)M_2 = \sum_{i=1}^{2} D(\varphi_i) e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} \tilde{M}_i, \tag{A.2}$$

$$Q(f,f) = \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \omega_1^2 r_1^2} e^{\beta_2 \omega_2^2 r_2^2} \left[Q(\tilde{M}_1, \tilde{M}_2) + Q(\tilde{M}_2, \tilde{M}_1) \right], \tag{A.3}$$

where is introduced the denotation:

$$\tilde{M}_i = \tilde{M}_i(v,x) = \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_i (v - \bar{v}_i)^2}. \tag{A.4}$$

Then:

$$\int_{R^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv = \int_{R^3} \left| \sum_{i=1}^{2} D(\varphi_i) e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} M_i - \right.$$

$$\left. -\varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \omega_1^2 r_1^2} e^{\beta_2 \omega_2^2 r_2^2} \sum_{i,j=1, i\neq j}^{2} Q(\tilde{M}_i, \tilde{M}_j) \right| dv. \tag{A.5}$$

If we do, as usual, the partition of the collision integral Q into the "gain" and the "loss" terms (G and L), and take into account that $G \geq 0$, for expression (A.5) we will get such an estimation:

$$\int_{R^3} |D(f) - Q(f,f)|\, dv \leq$$

$$\leq \sum_{i,j=1,i\neq j}^{2} \left[\int_{R^3} \left| D(\varphi_i) e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} + \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \omega_1^2 r_1^2} e^{\beta_2 \omega_2^2 r_2^2} L(\tilde{M}_j) \right| \tilde{M}_i \, dv + \right.$$

$$\left. + \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \omega_1^2 r_1^2} e^{\beta_2 \omega_2^2 r_2^2} \int_{R^3} G(\tilde{M}_i, \tilde{M}_j) \, dv \right]. \qquad (A.6)$$

But, as it is well-known [1]:

$$\int_{R^3} G(\tilde{M}_i, \tilde{M}_j) \, dv = \int_{R^3} L(\tilde{M}_j) \tilde{M}_i \, dv, \; i = 1, 2, \; i \neq j. \qquad (A.7)$$

and [15]

$$L(\tilde{M}_j) = \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw \left| v - \tilde{v}_j - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right| e^{-w^2}. \qquad (A.8)$$

Thus, we can the first integral from the i-th ($i = 1, 2$) summand in (A.6), if it is remembered (2) and (A.4), give in the form:

$$\int_{R^3} \left| \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + v \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) e^{\beta_i \omega_i^2 r_i^2} + \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \omega_1^2 r_1^2} e^{\beta_2 \omega_2^2 r_2^2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \int_{R^3} dw e^{-w^2} \left| v - \tilde{v}_j - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right| \right| \rho_i \left(\frac{\beta_i}{\pi} \right)^{3/2} e^{-\beta_i (v - \tilde{v}_i)^2} \, dv. \qquad (A.9)$$

After the change of a variable:

$$u = \sqrt{\beta_i} (v - \tilde{v}_i) \qquad (A.10)$$

and the substitution of (11) for $\tilde{v}_i, \tilde{v}_j$, the expression (A.9) yields:

$$\int_{R^3} \left| \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i + [\omega_i \times x] \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) e^{\beta_i \omega_i^2 r^2} + \varphi_1 \varphi_2 e^{\beta_1 \omega_1^2 r_1^2} e^{\beta_2 \omega_2^2 r_2^2} \rho_j \frac{d^2}{\sqrt{\pi}} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \int_{R^3} dw e^{-w^2} \left| \frac{u}{\sqrt{\beta_i}} - \bar{v}_j - [\omega_j \times x] + \bar{v}_i + [\omega_i \times x] - \frac{w}{\sqrt{\beta_j}} \right| \right| \rho_i \pi^{-\frac{3}{2}} e^{-u^2} \, du. \qquad (A.11)$$

The second integral in (A.6) can be transformed in absolutely analogous manner, thus, we will obtain (13). ■

Appendix B.

To prove (15)–(17) let us substitute (14) into (13) with use of (7) and the fact that for any constant vector $a \in R^3$

$$\frac{\partial}{\partial x}([a \times x]^2) = 2 \Big[[a \times x] \times a \Big] \qquad (B.1)$$

Then we will have (15), where $A_i(u,t,x)$ is of the form (16) and $B_i(u,t,x)$ is of the following form:

$$B_i(u,t,x) = \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i + [\omega_i \times x]\right)\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\beta_i\psi_i\Big[\omega_i \times [\omega_i \times (x - x_{0i})]\Big]\right),$$

$$(i,j = 1,2;\ i \neq j). \tag{B.2}$$

But the expression (B.2) can be easily transformed to the form (17), if one takes into account (6) and such the formulae from the vector algebra ($a, b, c \in R^3$ are the arbitrary vectors):

$$[a \times [b \times c]] = b(a,c) - c(a,b). \tag{B.3}$$

$$[a \times b] \cdot [a \times c] = a^2(b,c) - (a,b)(a,c). \tag{B.4}$$

Really,

$$B_i(u,t,x) =$$

$$= \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i + [\omega_i \times x]\right)\left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\beta_i\psi_i\left(\omega_i(\omega_i, x - x_{0i}) - \omega_i^2\left(x - \frac{[\omega_i \times \bar{v}_i]}{\omega_i^2}\right)\right)\right\} =$$

$$= \left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i + [\omega_i \times x]\right)\left\{\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + 2\beta_i\psi_i\Big(\omega_i(\omega_i, x) - x\omega_i^2 + [\omega_i \times \bar{v}_i]\Big)\right\} =$$

$$= \frac{\partial \psi_i}{\partial x}\left(\frac{u}{\sqrt{\beta_i}} + \bar{v}_i + [\omega_i \times x]\right) + 2\psi_i\sqrt{\beta_i}\{(\omega_i, u)(\omega_i, x) - \omega_i^2(x,u) + (u, [\omega_i \times \bar{v}_i])\}. \tag{B.5}$$

Evidently, (B.5) is equivalent to (17) because of (B.4). ■

REFERENCES

1. Cercignani C. The Boltzmann Equation and its Applications. – New York: Springer, – 1988. – 495 p.

2. Carleman T. Problemes Mathematiques dans la Theorie Cinetique des Gas.– Uppsala: Almqvist & Wiksells, – 1957. – 118 p.

3. Krupp R.S. Magister Sciences Thesis. – Cambridge, MIT, – 1967.

4. Bobylev A.V. On exact solutions of the Boltzmann Equation. // Dokl.Akad.Nauk SSSR., – 1975. – V. 225, **6**. – P. 1296-1299. (Russian).

5. Bobylev A.V. One class of invariant solutions of the Boltzmann Equation. // Dokl.Akad.Nauk SSSR., – 1976. – V. 231, **3**. – P.571-574. (Russian).

6. Krook M.,Wu T. Exact Solution of the Boltzmann Equation. // Phys.Fluids.– 1977. – V. 20, **10**(1). – P. 1589-1595.

7. Nikol'skii A.A. The simplest exact solutions of the Boltzmann equation for movements of a rarefied gas. // Dokl.Akad.Nauk SSSR, - 1963. - V.151, **2**, - P. 299-302. (Russian).

8. Ikenberry E., Truesdall C. On the pressure and the flux of energy in a gas according to Maxwell's kinetic theory,I,II // J.Ration.Mech.and Anal. - 1956. - V. 5, **1**. - P. 1-129.

9. Galkin V. S. One of the solutions of the kinetic Boltzmann equation. // Prikl.Mat.Mekh. - 1956. - V.20,**3**. - P. 445. (Russian).

10. Ernst H. M. Exact Solutions of the Nonlinear Boltzmann Equation. // J.Stat.Phys. - 1984. - V. 34, **5/6**. - P. 1001-1017.

11. Bobylev A. V. On a structure and the classification of solutions of the nonlinear Boltzmann equation for Maxwell's molecules. // Dokl.Akad.Nauk SSSR. - 1980. - V. 251,**5**. - P. 1361-1365. (Russian).

12. Vedenyapin V. V. Anysotropic solutions of the nonlinear Boltzmann Equation for Maxwell's molecules. // Dokl.Akad.Nauk SSSR. - 1981. - V. 256,**2**. - P. 338-342. (Russian).

13. Petrina D. Ya., Mishchenko A. V. On exact solutions of a class of Boltzmann equations. // Dokl.Akad.Nauk SSSR. - 1988.-V. 298,**2**. - P. 338-342. (Russian).

14. Mishchenko A. V., Petrina D. Ya. On linearization and exact solutions of a class of the Boltzmann equations. // Theor.Math.Phys.. - 1988. -V. 77, **1**.- P. 1096-1109.

15. Gordevsky V. D. An approximate bimodal solution of the nonlinear Boltzmann equation for hard spheres. // Math.Phys.,Anal., Geometry. - 1995. - V.2,**2**. - P. 168-176, (Russian).

16. Gordevsky V. D. A criterium of smallnest of the difference for bimodal solution of the Boltzmann equation. // Math.Phys.,Anal.,Geometry. - 1997. - V. 4,**1/2**.- P. 46-58. (Russian).

17. Gordevskii V. D. An approximate two-flow solution to the Boltzmann equation. // Theor.Math.Phys.. - 1998. - V. 114,**1**. - P. 99-108.

18. Gordevsky V. D. Trimodal Approximate Solutions of the Non-linear Boltzmann Equation. // Math.Meth.Appl.Sci.. - 1998. - V. 21. - P. 1479-1494.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.5 № 514, 2001, с. 34–40

Континуальная интерполяционная задача в классе Стилтьеса

Ю. М. Дюкарев

Харьковский национальный университет, Украина

Рассмотрена задача о представлении одного класса эрмитово положительных функций в виде интеграла Хинчина-Бохнера по полуоси. Мы показываем, что ее можно исследовать общими методами решения интерполяционных задач в классе Стилтьеса. *2000 Mathematics Subject Classification* 47A57, 42A82.

1. Введение

В этой статье приводится подробное изложение результата, анонсированного в [1]. Мы рассмотрим задачу об интегральном представлении некоторых эрмитово положительных функций. Впервые такого типа задача была изучена в статье [2]. С точки зрения метода В.П. Потапова решения интерполяционных задач анализа (см. [3]) проблема продолжения эрмитово положительных функций была рассмотрена в [4-6].

В отличие от процитированных работ в этой статье изучена задача о представлении эрмитово положительных функций с помощью интеграла Хинчина-Бохнера по положительной полуоси. Она сводится к интерполяционой задаче для стилтьесовских функций, что позволяет исследовать ее методами, развитыми для интерполяционных задач в классе Стилтьеса [7-9].

2. Постановка задачи

Пусть непрерывно дифференцируемая оператор-функция (сокращенно о.ф.) $k_1(x)$ определена на компактном интервале $[-l, l] \subset \mathbb{R}$ и принимает значения во множестве линейных операторов, действующих в $\mathbb{C}^n$. И пусть обе о.ф. $k_1(x)$ и $k_2(x) = ik_1'(x)$ являются эрмитово положительными, т.е. $k_r(-x) = k_r^*(x)$, $r = 1, 2$ и неотрицательны интегральные операторы $K_1 \geq 0$ и $K_2 \geq 0$, задаваемые формулами

$$(K_r f)(x) = \int_0^l k_r(x-\xi) f(\xi) d\xi, \ K_r : L^2[0,l] \to L^2[0,l], \ r = 1, 2. \qquad (2.1)$$

Здесь $L^2[0,l]$ – гильбертово пространство квадратично интегрируемых вектор-функций $f:[0,l]\to\mathbb{C}^n$.

Введем операторы $T : L^2[0,l] \to L^2[0,l]$, $v, u_2 : \mathbb{C}^n \to L^2[0,l]$, которые задаются формулами

$$(Tf)(x) = -i\int_0^x f(t)dt,\ (vg)(x) \equiv g,\ (u_2 g)(x) = -k_1(x)g. \qquad (2.2)$$

Символом $\langle,\rangle$ обозначим скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, а символом $(f_1, f_2) = \int_0^l \langle f_1(x), f_2(x)\rangle dx$ – скалярное произведение в $L^2[0,l]$. Считаем, что скалярные произведения линейны по второму сомножителю. Сопряженные операторы $T^* : L^2[0,l] \to L^2[0,l]$, $v^*, u_2^* : L^2[0,l] \to \mathbb{C}^n$ имеют вид

$$(T^*f)(x) = i\int_x^l f(t)dt,\ v^*f = \int_0^l f(t)dt,\ u_2^* f = -\int_0^l k_1^*(t)f(t)dt. \qquad (2.3)$$

Непосредственным вычислением убеждаемся в том, что имеет место *Основное Тождество* (ОТ)

$$TK_2 - K_1 = vu_2^*. \qquad (2.4)$$

Из этого тождества легко следуют еще два тождества

$$TK_r - K_rT^* = vu_r^* - u_rv^*,\ r = 1,2. \qquad (2.5)$$

Здесь $(u_1g)(x) = (Tu_2g)(x) = i\int_0^x k_1(t)gdt$, $u_1 : \mathbb{C}^n \to L^2[0,l]$.

Введем о.ф. $R(z) = (I - zT)^{-1}$. Ясно, что $R(z)$ – целая о.ф. При каждом фиксированном z о.ф. $R(z)$ является ограниченным оператором в $L^2[0,l]$ и действует по формуле

$$(R(z)f)(x) = f(x) - iz\int_0^x e^{-iz(x-\xi)}f(\xi)d\xi. \qquad (2.6)$$

Легко видеть, что для $h \in C^1[0,l]$ эта формула может быть записана в виде

$$(R(z)h)(x) = h(0)e^{-izx} + \int_0^x e^{-iz(x-\xi)}h'(\xi)d\xi. \qquad (2.7)$$

В частности $\forall g \in \mathbb{C}^n$ $R(z)vg = e^{-izx}g$. Далее

$$(R^*(z)f)(x) = f(x) + i\bar{z}\int_x^l e^{-i\bar{z}(x-\xi)}f(\xi)d\xi. \qquad (2.8)$$

Символом $\mathcal{E}_+$ обозначим множество всех о.ф. $\sigma(t)$, определенных на полуоси $[0,+\infty)$ и принимающих значения во множестве эрмитовых операторов, действующих в $\mathbb{C}^n$, таких, что $\sigma(t)$ монотонно возрастают и $\|\int_0^\infty td\sigma(t)\| < \infty$.

Лемма 2.1 *Если $\sigma(t) \in \mathcal{E}_+$, то в слабом смысле существуют интегралы*

$$K_r^\sigma = \int_0^\infty R(t)vt^{r-1}d\sigma(t)v^*R^*(t),\ r = 1,2,\ u_2^\sigma = -\int_0^\infty R(t)vd\sigma(t). \qquad (2.9)$$

Здесь K_1^σ, K_2^σ – ограниченные и неотрицательные операторы в $L^2[0,l]$, а u_2^σ – оператор из $\mathbb{C}^n$ в $L^2[0,l]$.

Доказательство. Из определений v^* и $R^*(t)$ следует, что

$$(v^* R^*(t) f)(t) = \int_0^l e^{it\xi} f(\xi) d\xi = F(t), \forall f \in L^2[0, l].$$

Поэтому $F(t)$ непрерывна и $F(t) \to 0$, $t \to \infty$. Пусть $B_r(f_1, f_2) = \int_0^\infty \langle F_1(t), t^{r-1} d\sigma(t) F_2(t) \rangle$, $r = 1, 2$. Ясно, что $B_r : L^2[0, l] \times L^2[0, l] \to \mathbb{C}$ и являются ограниченными, неотрицательными, полуторалинейными формами. Поэтому существуют ограниченные и неотрицательные операторы $K_r^\sigma : L^2[0, l] \to L^2[0, l]$ такие, что $B_r(f_1, f_2) = (f_1, K_r^\sigma f_2)$. Для любых $f_1, f_2 \in L^2[0, l]$ имеем

$$(f_1, K_r^\sigma f_2) = B_r(f_1, f_2) = \left(f_1, \int_0^\infty R(t) v t^{r-1} d\sigma(t) v^* R^*(t) f_2 \right).$$

Отсюда следуют все утверждения леммы относительно операторов K_1^σ и K_2^σ. Утверждение леммы об операторе u_2^σ получается аналогичным образом. Лемма 2.1 доказана.

О.ф. $\sigma(t) \in \mathcal{E}_+$ назовем *решением задачи о согласованном интегральном представлении о.ф.* $k_1(x)$ и $k_2(x)$, если

$$k_1(x) = \int_0^\infty e^{-ixt} d\sigma(t), \; k_2(x) = \int_0^\infty e^{-ixt} t d\sigma(t). \tag{2.10}$$

О.ф. $\sigma(t) \in \mathcal{E}_+$ назовем *решением задачи о согласованном интегральном представлении операторов* K_1, K_2, u_2, если

$$K_r = K_r^\sigma, \; r = 1, 2, \; u_2 = u_2^\sigma. \tag{2.11}$$

Нетрудно показать, что (2.10) и (2.11) эквивалентны.

3. Система основных матричных неравенств

С решением $\sigma(t) \in \mathcal{E}_+$ задачи (2.11) мы свяжем *ассоциированную* о.ф.

$$s(z) = \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t - z}, \quad \sigma(t) \in \mathcal{E}_+. \tag{3.1}$$

Как известно (см. [10]), класс о.ф., допускающих интегральное представление (3.1), совпадает с классом голоморфных в $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$ о.ф., удовлетворяющих условиям

$$\frac{z^r s(z) - \bar{z}^r s^*(z)}{z - \bar{z}} \geq 0, \; \operatorname{Im} z \neq 0, \; r = 0, 1, \; \|y^2 s(iy)\| = O(1), \; y \geq 1. \tag{3.2}$$

Класс всех таких о.ф. обозначим $\mathbf{S}_1$.

Теорема 3.1 *Если о.ф. $s(z)$ ассоциирована с решением $\sigma(t)$ задачи (2.11), то при $\operatorname{Im} z \neq 0$ она удовлетворяет системе Основных Матричных Неравенств (ОМН) В.П. Потапова*

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & R(z) \left[v z^{r-1} s(z) - u_r \right] \\ \hline * & \{ z^{r-1} s(z) - \bar{z}^{r-1} s^*(z) \} / \{ z - \bar{z} \} \end{array} \right] \geq 0, \quad r = 1, 2. \tag{3.3}$$

Доказательство. Подставляя в ОМН соответствующие интегральные представления, получим равенства ($r = 1, 2$)

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & R(z)\left[vz^{r-1}s(z)-u_r\right] \\ \hline * & \dfrac{z^{r-1}s(z)-\bar{z}^{r-1}s^*(z)}{z-\bar{z}} \end{array}\right] = \int_0^\infty \left[\begin{array}{c} R(t)v \\ \dfrac{I}{t-\bar{z}} \end{array}\right] t^{r-1}d\sigma(t)\left[v^*R^*(z) \ \ \dfrac{I}{t-z}\right]$$

из которых следуют неравенства (3.3), т.к. $\sigma(t) \nearrow$. Теорема 3.1 доказана.

Теорема 3.2 *Если о.ф. $s(z)$ удовлетворяет системе ОМН (3.1), то построенные по $s(z)$ о.ф.*

$$S_r(z) = K_rT^*R^*(\bar{z}) + R(z)[vz^{r-1}s(z)-u_r]v^*R^*(\bar{z}), \quad r = 1, 2 \tag{3.4}$$

удовлетворяют при $\operatorname{Im} z \neq 0$ системе Преобразованных Основных Матричных Неравенств (ПОМН)

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & S_r(z) \\ \hline S_r^*(z) & \{S_r(z)-S_r^*(z)\}/\{z-\bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0, \quad r = 1, 2. \tag{3.5}$$

Доказательство. Умножим ОМН (3.3) слева и справа соответственно на операторы

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline R(\bar{z})T & R(\bar{z})v \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|c} I & T^*R^*(\bar{z}) \\ \hline 0 & v^*R^*(\bar{z}) \end{array}\right].$$

После преобразований получим неравенства (3.5). Теорема 3.2 доказана.

Лемма 3.1 *Если голоморфная в $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$ о.ф. $s(z)$ удовлетворяет системе ОМН (3.3), то $s(z) \in \mathbf{S}_1$.*

Доказательство. Из неотрицательности 22-блоков системы ОМН следует, что $(z^rs(z)-\bar{z}^rs^*(z))/(z-\bar{z}) \geq 0$, $r = 0, 1$. Отсюда следует(см. [10]), что о.ф. $s(z)$ допускает интегральное представление

$$s(z) = \gamma + \int_0^\infty \frac{d\sigma(t)}{t-z}, \ \sigma(t) \nearrow, \ \int_0^\infty (1+t)^{-1}d\sigma(t) - \text{сходится}, \ \gamma \geq 0. \tag{3.6}$$

Из системы ОМН (3.3) следует, что $\forall f \in L^2[0,l]$ и $\forall g \in \mathbb{C}^n$

$$\left[\begin{array}{c|c} (f, K_2f) & (f, R(z)\left[vzs(z)-u_2\right]g) \\ \hline * & \langle g, \{zs(z)-\bar{z}s^*(z)\}/\{z-\bar{z}\}g\rangle \end{array}\right] \geq 0. \tag{3.7}$$

Пусть $\varphi_n(t)$ дельта-образная последовательность скалярных положительных функций, носитель которых сосредоточен в точке $x_0 \in (0,l)$. Рассматривая последнее неравенство на последовательности $f_n = \varphi_n \cdot g$, получим

$$\left[\begin{array}{c|c} k_2^g(0) & e^{-izx_0}\{zs^g(z)+k_1^g(0)-i\int_0^{x_0}e^{iz\xi}k_2^g(\xi)d\xi\} \\ \hline * & \dfrac{zs^g(z)-\bar{z}s^{g^*}(z)}{z-\bar{z}} \end{array}\right] \geq 0,$$

Здесь $k_r^g(x) = (g, k_r(x)g)$, $r = 1, 2$, $s^g(z) = \langle g, s(z)g\rangle$. Пусть в этом неравенстве $z = iy$, $y > 0$. Тогда

$$\left| e^{yx_0} \left\{ iys^g(iy) - k_1^g(0) - i\int_0^{x_0} e^{-y\xi} k_2^g(\xi)d\xi \right\} \right|^2 \leq k_2^g(0)\frac{s^g(iy) + s^{g^*}(iy)}{2}.$$

Существует $y_0 > 0$ такое, что $e^{yx_0} > y$ при $y > y_0$. Для таких y получим

$$\left| y^2 s^g(iy) - y\int_0^{x_0} e^{-y\xi} k_2^g(\xi)d\xi \right|^2 \leq k_2^g(0)\frac{ys^g(iy) + ys^{g^*}(iy)}{2}.$$

Следовательно,

$$\left| y^2 s^g(iy) - \left(y\int_0^{x_0} e^{-y\xi} k_2^g(\xi)d\xi + \frac{k_2^g(0)}{2} \right) \right|^2 \leq \left| y\int_0^{x_0} e^{-y\xi} k_2^g(\xi)d\xi + \frac{k_2^g(0)}{2} \right|^2.$$

Поэтому

$$|y^2 s^g(iy)| \leq 2\left| y\int_0^{x_0} e^{-y\xi} k_2^g(\xi)d\xi + \frac{k_2^g(0)}{2} \right| \leq 2k_2^g(0)y\int_0^{x_0} e^{-y\xi}d\xi + k_2^g(0) \leq$$

$$\leq 3k_2^g(0).$$

Таким образом, $|\langle g, y^2 s(iy)g\rangle| \leq |\langle g, 3k_2(0))g\rangle|$. Отсюда следует, что $\|y^2 s(iy)\| = O(1)$, $y > y_0$. Поэтому (см. [10])

$$s(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\tau(t)}{t - z},\ \tau(t) \nearrow,\ \left\| \int_{-\infty}^{\infty} t d\tau(t) \right\| < \infty. \tag{3.8}$$

В представлениях (3.6) и (3.8) γ, $\sigma(t)$, $\tau(t)$ определены единственным образом, при одинаковой нормировке $\sigma(t)$ и $\tau(t)$ в точках разрыва. Поэтому $s(z)$ допускает представление (3.1), т.е. $s(z) \in \mathbf{S}_1$. Лемма 3.1 доказана.

Лемма 3.2 *Из асимптотики* $|(f, R(iy)h)| = o(1)$, $y \to +\infty$, *справедливой* $\forall f \in C^1[0, l]$, $\|f\| \leq 1$ *и для фиксированной* $h \in C^1[0, l]$ *следует, что* $h \equiv 0$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\eta(z) = (f, R(z)h)$. Ясно, что $\eta(z)$ является целой функцией экспоненциального типа. Из (2.7) получаем асимптотики $\eta(t) = O(1)$, $t \in \mathbb{R}$, $\eta(iy) = O(1)$, $y \leq -1$. Из этих асимптотик и условий леммы следует, что $\eta(z)$ ограничена на вещественной и мнимой осях. По теореме Фрагмена-Линделефа $\eta(z) \equiv \text{const}$. Так как $\eta(z)$ стремится к нулю вдоль положительного направления мнимой оси, то $\eta(z) \equiv 0$. Поэтому $(R(z)h)(x) \equiv 0$. При $z = 0$ получим $h(x) \equiv 0$. Лемма 3.2 доказана.

Теорема 3.3 *Пусть* $s(z)$ *является решением системы ОМН (3.3) и* $\sigma(t)$ *– о.ф. из представления* $s(z)$ *в виде (3.1). Тогда* $u_2 = u_2^\sigma$, *где оператор* u_2^σ *определен в (2.9).*

Доказательство. Пусть в неравенстве (3.7) $\|f\| \le 1$ и $\|g\| \le 1$. Тогда при $z = iy$, $y \ge 1$ имеем

$$|(f, R(iy)\,[\,viys(iy) - u_2\,]g)|^2 \le \|K_2\| \cdot \|s(iy)\|.$$

Далее $\|y^2 s(iy)\| = O(1)$, $y \ge 1$ (см. доказательство леммы 3.1). Поэтому

$$|(f, R(iy)\,[\,viys(iy) - u_2\,]g)| = o(1),\ y \to +\infty.$$

Из доказательства теоремы 3.1 видно, что второе из ОМН остается в силе, если в нем заменить K_2 на K_2^σ, а u_2 на u_2^σ. Поэтому, повторяя приведенные выше рассуждения, получим

$$|(f, R(iy)\,[\,viys(iy) - u_2^\sigma\,]g)| = o(1),\ y \to +\infty.$$

Из двух последних асимптотик имеем

$$|(f, R(iy)\,[\,u_2 - u_2^\sigma\,]g)| = o(1),\ y \to +\infty.$$

По лемме 3.2 имеем $[\,u_2 - u_2^\sigma\,]g \equiv 0$. Отсюда следует, что $u_2 = u_2^\sigma$. Теорема 3.3 доказана.

Лемма 3.3 *Если $S_r(z)$ удовлетворяет (3.5), то $y\|S_r(iy)\| = O(1)$, $y \ge 1$.*

Доказательство. Пусть $f \in L^2[0,l]$ и $\|f\| \le 1$. Тогда из (3.5) следует, что $s(iy)\bar{s}(iy) \le \|K_r\| \cdot \{s(iy) - \bar{s}(iy)\}/(2iy)$, $s(iy) = (f, S_r(iy)f)$, $y \ge 1$. Отсюда $(ys(iy) + \|K_r\|/(2i)) \cdot (y\bar{s}(iy) - \|K_r\|/(2i)) \le \|K_r\|^2/4$. Поэтому $|ys(iy)| \le \|K_r\|$. Следовательно $y\|S_r(iy)\| \le \|K_r\|$. Лемма 3.3 доказана.

Теорема 3.4 *Пусть $s(z)$ является решением системы ОМН (3.3) и $\sigma(t)$ – о.ф. из представления $s(z)$ в виде (3.1). Тогда $K_r = K_r^\sigma$, $r = 1, 2$, где операторы K_r^σ определены в (2.9).*

Доказательство. По решению системы ОМН $s(z)$ построим по формуле (3.4) о.ф. $S_1(z)$, которая удовлетворяет первому из неравенств (3.5). Пусть $f \in C^1[0,l]$, $\|f\| \le 1$ – произвольная, а $h \in C^1[0,l]$ – фиксированная функция. По лемме 3.3 и неравенству Шварца $|(h, S_1(iy)f)| = o(1)$, $y \to +\infty$.

Неравенства (3.5) остаются в силе, если в них заменить K_1 на K_1^σ, а $S_1(z)$ на $S_1^\sigma(z) = K_1^\sigma T^* R^*(\bar{z}) + R(z)[vz^{r-1}s(z) - u_2^\sigma]v^* R^*(\bar{z})$. Отсюда, как и выше, получим асимптотику $|(h, S_1^\sigma(iy)f)| = o(1)$, $y \to +\infty$. Из двух последних асимптотик имеем $|(h, (S_1^\sigma(iy) - S_1(iy))f)| = o(1)$, $y \to +\infty$. По предыдущей теореме $u_2 = u_2^\sigma$. Поэтому $S_1^\sigma(z) - S_1(z) = (K_1^\sigma - K_1)T^* R^*(\bar{z})$. Теперь последнюю асимптотику можно записать в виде $|(h, (K_1^\sigma - K_1)T^* R^*(\bar{z})f)| = o(1)$, $y \to +\infty$. Отсюда, по лемме 3.2, имеем $T(K_1^\sigma - K_1)h \equiv 0$. В силу непрерывности функции, на которую действует оператор T, имеем $(K_1^\sigma - K_1)h \equiv 0$. Таким образом, операторы K_1^{σ} и K_1 совпадают на $C^1[a,b]$. Они ограничены на $L^2[a,b]$ и, следовательно, $K_1 = K_1^{\sigma}$ на $L^2[a,b]$. Аналогичным образом доказывается, что $K_2 = K_2^{\sigma}$. Теорема 3.4 доказана.

Таким образом, задача об интегральном представлении эрмитово положительных функций в виде интеграла Хинчина-Бохнера по полуоси сведена к континуальной интерполяционной задаче для стилтьесовских функций (см. [8-9]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюкарев Ю.М. Континуальный аналог интерполяционных задач в классе Стилтьеса. // Тр. 7 Междунар. Конф. им. акад. М. Кравчука. - Киев. - 1998. - С. 161.

2. Крейн М.Г. К проблеме продолжения эрмитово положительных непрерывных функций. // Докл. АН СССР. – 1940. – Т.26,**1**. – С. 17-21.

3. Ковалишина И.В. Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач. // Изв. АН СССР. Сер. матем., – 1983. – Т.47,**3**. – С. 455-497.

4. Ковалишина И.В., Потапов В.П. Интегральное представление эрмитово положительных функций. // Деп. ВИНИТИ. – 1981. – **2984-81**. – 140 с.

5. Кацнельсон В.Э. Методы J-теории в континуальных интерполяционных задачах анализа, ч. 1. // Деп. ВИНИТИ. – 1983. – **171-83**. – 364 с.

6. Сахнович Л.А. Метод операторных тождеств. // Алгебра и анализ. – 1993. – Т.5,**1**. – С. 3-80.

7. Дюкарев Ю.М., Кацнельсон В.Э. Мультипликативные и аддитивные классы Стилтьеса аналитических матриц-функций и связанные с ними интерполяционные задачи. // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1981. – **36**. – С. 13-27.

8. Dyukarev Yu. M. Integral representations of a pair of nonnegative operators and interpolations problems on the Stieltjes class. // Operator Theory: Advances and Apllications. – 1997. – Vol. 95. – P. 165-184.

9. Дюкарев Ю.М. Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. 1 // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т. 6,**1/2**. – С. 30-54.

10. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.:Наука, – 1973. – 552 с.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.958 № 514, 2001, с. 41–52

Специальные решения уравнений Максвелла в многосвязной области

Е. В. Попова

Харьковский национальный университет, Украина

Строится счетная система базисных решений уравнений Максвелла, включая конечную подсистему, характерную для многосвязной области.
2000 Mathematics Subject Classification 35Q60.

Введение

Разложения немонохроматических полей в неоднородной нестационарной среде, заполняющей цилиндрический волновод с идеально проводящей поверхностью, по системе специальных модовых полей были рассмотрены в [2, 3] для случая односвязного поперечного сечения волновода. В [3] исследуются свойства проекций решений уравнений Максвелла на подпространства Вейля [6], а также приводятся условия существования и единственности базисных решений - модовых Е-полей и Н-полей. В данной статье для волновода с многосвязным поперечным сечением S строится разложение поля по счетной системе модовых состояний, включающей конечную подсистему модовых Т-полей ([4, 5]). Доказываются условия существования и единственности специальных решений, характерных для многосвязной области. Разложение получено на основании ортогонального разбиения пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по плоской многосвязной области $S \subset R^2$, которое построено в соответствии с разбиением Вейля [6] для случая многосвязной трехмерной области ([7]).

1. Исходные предположения и постановка задачи

Цилиндрический волновод с идеально проводящей поверхностью Σ заполнен нестационарной средой, неоднородной вдоль оси Z волновода. Поперечное сечение $S = \{(x, y)\}$ есть многосвязная область с границей $\partial S = \bigcup_{k=0}^{N} L_k$, образованной внешним L_0 и внутренними $L_1, \ldots, L_N$ кусочно гладкими контурами. Свободные заряды и свободные источники отсутствуют. Поле внутри волновода удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D} + \mathcal{J}, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B}, \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \mathcal{D} = \rho, \quad \operatorname{div} \mathcal{B} = 0, \tag{1.2}$$

где $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ - векторы напряженностей электрического и магнитного полей, $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$ - векторы электрической и магнитной индукций. Плотности тока $\mathcal{J}$ и заряда ρ сторонних источников есть заданные функции, связанные уравнением непрерывности $\operatorname{div}\mathcal{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0$. Граничные условия имеют вид :

$$[\mathcal{E}, \mathbf{n}]|_{\Sigma} = 0, \quad (\mathcal{H}, \mathbf{n})|_{\Sigma} = 0, \tag{1.3}$$

где в векторном и скалярном произведениях $\mathbf{n}$ - орт внешней нормали к поверхности Σ. Материальные уравнения в абстрактной форме

$$\mathcal{D} = \mathbf{D}\mathcal{E}, \quad \mathcal{B} = \mathbf{B}\mathcal{H} \tag{1.4}$$

содержат линейные преобразования $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ (индукционные операторы [2]), которые имеют вид диагональных матриц

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D_{||} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B_{||} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

так что $\mathbf{D}\mathcal{E} = (DE_x, DE_y, D_{||}E_z)^T$, $\mathbf{B}\mathcal{H} = (BH_x, BH_y, B_{||}H_z)^T$. Здесь D, $D_{||}$, B, $B_{||}$ - линейные интегро-дифференциальные преобразования над скалярными функциями от переменных z, t, позволяющие учитывать временную и пространственную вдоль оси Z дисперсию среды ([1]-[4]). Естественные области определения линейных индукционных операторов $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ уточняются в каждом конкретном случае.

Выделив поперечные и продольные составляющие векторов поля $\mathcal{E} = \mathbf{E} + E_z\mathbf{z}$, $\mathcal{H} = \mathbf{H} + H_z\mathbf{z}$, перепишем граничные условия (1.3) в виде :

$$[\mathbf{E}, \mathbf{n}]|_{\partial S} = 0, \quad E_z|_{\partial S} = 0, \quad (\mathbf{H}, \mathbf{n})|_{\partial S} = 0,$$

где $\mathbf{z}$ - орт оси Z ($[\mathbf{n}, \mathbf{z}] = \mathbf{l}$ - орт касательной к ∂S). Энергия поля предполагается ограниченной в поперечном сечении S волновода, что соответствует требованию $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2^2(S) \oplus 0$ и $E_z, H_z \in L_2(S)$ при фиксированных z, t.

На основании ортогонального разбиения пространства $L_2^2(S)$ для многосвязной области S выделим специальные базисы в пространстве $\mathbf{L}_2^3(S) = \mathbf{L}_2^2(S) \oplus L_2(S)$ трехмерных вектор-функций $\mathbf{F}(x, y)$, компоненты которых суммируемы с квадратом в сечении S волновода. Разложим по этим базисам непрерывно дифференцируемое (гладкое) решение $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ задачи (1.1)-(1.4). Покажем, что полученное разложение решения соответствует разложению поля по счетной системе модовых состояний, включающей конечную подсистему специальных полей, которые могут существовать только в волноводе с многосвязным поперечным сечением.

где $\mathcal{E}, \mathcal{H}$ - векторы напряженностей электрического и магнитного полей, $\mathcal{D}$, $\mathcal{B}$ - векторы электрической и магнитной индукций. Плотности тока $\mathcal{J}$ и заряда ρ сторонних источников есть заданные функции, связанные уравнением непрерывности $\operatorname{div}\mathcal{J} + \frac{\partial}{\partial t}\rho = 0$. Граничные условия имеют вид :

$$[\,\mathcal{E}, \mathbf{n}]|_{\Sigma} = 0, \quad (\mathcal{H}, \mathbf{n})|_{\Sigma} = 0, \tag{1.3}$$

где в векторном и скалярном произведениях $\mathbf{n}$ - орт внешней нормали к поверхности Σ. Материальные уравнения в абстрактной форме

$$\mathcal{D} = \mathbf{D}\mathcal{E}, \quad \mathcal{B} = \mathbf{B}\mathcal{H} \tag{1.4}$$

содержат линейные преобразования $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ (индукционные операторы [2]), которые имеют вид диагональных матриц

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & D_{\|} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} B & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B_{\|} \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

так что $\mathbf{D}\mathcal{E} = (DE_x, DE_y, D_{\|}E_z)^T$, $\mathbf{B}\mathcal{H} = (BH_x, BH_y, B_{\|}H_z)^T$. Здесь D, $D_{\|}$, B, $B_{\|}$ - линейные интегро-дифференциальные преобразования над скалярными функциями от переменных z, t, позволяющие учитывать временную и пространственную вдоль оси Z дисперсию среды ([1]-[4]). Естественные области определения линейных индукционных операторов $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ уточняются в каждом конкретном случае.

Выделив поперечные и продольные составляющие векторов поля $\mathcal{E} = \mathbf{E} + E_z\mathbf{z}$, $\mathcal{H} = \mathbf{H} + H_z\mathbf{z}$, перепишем граничные условия (1.3) в виде :

$$[\,\mathbf{E}, \mathbf{n}]|_{\partial S} = 0, \quad E_z|_{\partial S} = 0, \quad (\mathbf{H}, \mathbf{n})|_{\partial S} = 0,$$

где $\mathbf{z}$ - орт оси Z ($[\mathbf{n}, \mathbf{z}] = \mathbf{l}$ - орт касательной к ∂S). Энергия поля предполагается ограниченной в поперечном сечении S волновода, что соответствует требованию $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in L_2^2(S) \oplus 0$ и $E_z, H_z \in L_2(S)$ при фиксированных z, t.

На основании ортогонального разбиения пространства $L_2^2(S)$ для многосвязной области S выделим специальные базисы в пространстве $L_2^3(S) = L_2^2(S) \oplus L_2(S)$ трехмерных вектор-функций $\mathbf{F}(x, y)$, компоненты которых суммируемы с квадратом в сечении S волновода. Разложим по этим базисам непрерывно дифференцируемое (гладкое) решение $\mathcal{E}$, $\mathcal{H}$ задачи (1.1)-(1.4). Покажем, что полученное разложение решения соответствует разложению поля по счетной системе модовых состояний, включающей конечную подсистему специальных полей, которые могут существовать только в волноводе с многосвязным поперечным сечением.

2. Ортогональное разложение и базис пространства $L_2^2(S)$

Пространство вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, Г. Вейль разбил на три взаимно ортогональные подпространства ([6]). В работе [7] исследована структура одного из подпространств Вейля и приведены разложения $L_2^3(\Omega)$ в случае многосвязной области $\Omega \subset R^3$. Построим ортогональное разбиение пространства $L_2^2(S)$ для плоской ограниченной многосвязной области $S \subset R^2$, соответствующее разложению [7]. Для сохранения терминологии и обозначений трехмерного случая будем вкладывать пространство $L_2^2(S)$ в пространство $\mathcal{L} = L_2^2(S) \oplus 0$ со скалярным произведением $(\mathbf{F}, \mathbf{G})_{\mathcal{L}} = \int_S (\mathbf{F}, \mathbf{G}) ds = \int_S (F_x \overline{G}_x + F_y \overline{G}_y) ds.$

Рассмотрим двусвязную область S, заключенную между внешним L_0 и внутренним L_1 кусочно гладкими контурами. Пусть l_1 - несамопересекающийся замкнутый контур в S, содержащий внутри себя контур L_1. Ориентация L_0, l_1 - против, а L_1 - по часовой стрелке. В пространстве $\mathcal{L}$ выделим гладкие потенциальные векторы $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ ($\mathrm{rot}\mathbf{F} = \mathrm{div}[\mathbf{F}, \mathbf{z}]\,\mathbf{z} = 0$) и соленоидальные векторы $\mathbf{G}(x, y) = [\mathbf{z}, \nabla g(x, y)]$ ($\mathrm{div}\mathbf{G} = 0$). Скалярные функции f и g в общем случае являются многозначными в S функциями, изменяющимися на постоянную при обходе контура типа l_1. При этом $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ есть однозначные вектор-функции. Циркуляция потенциальных векторов $\mathbf{F}$, $[\mathbf{G}, \mathbf{z}]$ по контуру типа l_1 не зависит от выбора l_1 и задает периоды ([7]) : $\mathrm{C}[\mathbf{F}] = \int_{l_1} (\mathbf{F}, \mathbf{l})\, dl$ и $\mathrm{C}\Big[[\mathbf{G}, \mathbf{z}]\Big] = \int_{l_1} (\mathbf{G}, \mathbf{n}) dl$. Циклическую постоянную скалярного потенциала $f(x, y)$ при обходе контура l_1 обозначим через $\mathrm{C}[f]$: $\mathrm{C}[f] = \mathrm{C}[\nabla f] = \int_{l_1} \frac{\partial f}{\partial l}\, dl$.

Градиенты гармонических в S функций $u(x, y)$ являются и потенциальными, и соленоидальными векторами $\mathbf{U}(x, y)$ ($\mathrm{rot}\mathbf{U} = \mathrm{div}\mathbf{U} = 0$). Будем обозначать сопряженную к u гармоническую функцию через u^*. В соответствии с условиями Коши-Римана : $\nabla u^*(x, y) = [\mathbf{z}, \nabla u(x, y)]$. Тогда $\mathbf{U}(x, y) = \nabla u(x, y) = [\nabla u^*(x, y), \mathbf{z}]$.

Выделим в S сопряженные гармонические функции, каждая из которых породит одномерное подпространство в ортогональном разложении $\mathcal{L}$.

Лемма 2.1. *Пусть гармоническая в S функция $u_1(x, y)$ удовлетворяет краевой задаче :*

$$\triangle u_1 = 0, \quad u_1\big|_{L_0} = 0, \quad u_1\big|_{L_1} = \nu, \quad \nu \in R^1, \ \nu \neq 0. \qquad (2.1)$$

Тогда сопряженная гармоническая функция $u_1^*(x, y)$ есть многозначная функция, удовлетворяющая краевой задаче

$$\triangle u_1^* = 0, \quad \tfrac{\partial}{\partial n} u_1^*|_{\partial S} = 0,$$

причем $\mathrm{C}[u_1^*] = \nu^{-1} \|\nabla u_1\|^2_{\mathcal{L}}$.

Доказательство. Сопряженную к u_1 гармоническую функцию u_1^* находим с точностью до аддитивной постоянной, интегрируя векторное равенство

$\nabla u_1^*(x,y) = [\mathbf{z}, \nabla u_1(x,y)]$. Функция u_1^* является многозначной функцией, изменяющейся при обходе контура типа l_1 на циклическую постоянную $\mathrm{C}[u_1^*]$. Покажем, что $\mathrm{C}[u_1^*] \neq 0$: $\mathrm{C}[u_1^*] = \int_{l_1} \frac{\partial u_1^*}{\partial l}\,dl = \int_{l_1} ([\mathbf{z}, \nabla u_1], \mathbf{l})\,dl = -\int_{l_1} \frac{\partial u_1}{\partial n}\,dl$ (существование $\frac{\partial}{\partial n} u_1$ на ∂S можем утверждать, усилив, н-р, требования на гладкость границы). В силу соленоидальности ∇u_1 в кольце, ограниченном контурами l_1 и L_1, имеем : $\int_{l_1} \frac{\partial u_1}{\partial n}\,dl = -\int_{L_1} \frac{\partial u_1}{\partial n}\,dl$.

Функция $u_1(x,y)$ в S отлична от постоянной, следовательно, $\|\nabla u_1\|^2_{\mathcal{L}} = \int_{\partial S} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}\,dl - \int_S u_1 \triangle u_1\,ds = \int_{L_1} u_1 \frac{\partial u_1}{\partial n}\,dl = \nu \int_{L_1} \frac{\partial u_1}{\partial n}\,dl = \nu \mathrm{C}[u_1^*] \neq 0.$ Отсюда $\mathrm{C}[u_1^*] = \nu^{-1}\|\nabla u_1\|^2_{\mathcal{L}} = \nu^{-1}\|\nabla u_1^*\|^2_{\mathcal{L}} \neq 0$. Лемма доказана. Выберем постоянную ν так, чтобы $\|\nabla u_1\|_{\mathcal{L}} = \|\nabla u_1^*\|_{\mathcal{L}} = 1$. В силу леммы $\mathrm{C}[u_1^*] = \nu^{-1}$. Зададим в $\mathcal{L}$ одномерные подпространства U_1 и U_2 как линейные оболочки вектор-функций ∇u_1 и ∇u_1^* : $U_1 = \mathrm{Lin}\{\nabla u_1\}$, $U_2 = \mathrm{Lin}\{\nabla u_1^*\}$.

Определим последовательно линеалы гладких в области S взаимно ортогональных векторов, используя обозначения соответствующих линеалов для случая трехмерной области [7]. Выделим в пространстве $\mathcal{L}$ ортогональные линеалы : $\overset{\circ}{J}$ - гладкие соленоидальные векторы вида $[\mathbf{z}, \nabla\varphi(x,y)]$, где $\varphi|_{\partial S} = 0$, и $\tilde{G}$ - гладкие потенциальные векторы вида $\nabla\psi(x,y)$. Их ортогональность легко проверяется : $([\mathbf{z}, \nabla\varphi], \nabla\psi)_{\mathcal{L}} = \int_S \mathrm{div}(\varphi[\nabla\overline{\psi}, \mathbf{z}])ds - \int_S \varphi\,\mathrm{div}[\nabla\overline{\psi}, \mathbf{z}]ds = -\int_{\partial S} \varphi \frac{\partial\overline{\psi}}{\partial l} dl = 0.$ В $\tilde{G}$ выделим линеалы : U_2 и $\tilde{G}'$ - гладкие потенциальные векторы вида $\nabla\psi'(x,y)$, у которых $\mathrm{C}[\psi'] = 0$. Проверим их ортогональность : $(\nabla u_1^*, \nabla\psi')_{\mathcal{L}} = ([\mathbf{z}, \nabla u_1], \nabla\psi')_{\mathcal{L}} = -\int_{\partial S} u_1 \frac{\partial\overline{\psi'}}{\partial l}\,dl = -\nu \int_{L_1} \frac{\partial\overline{\psi'}}{\partial l}\,dl = \nu \int_{l_1} \frac{\partial\overline{\psi'}}{\partial l}\,dl = \nu \mathrm{C}[\psi'] = 0.$ Далее в $\tilde{G}'$ можно выделить линеалы : $\tilde{U}'$ - градиенты $\nabla u(x,y)$ гладких в $\overline{S}$ однозначных гармонических функций $u(x,y)$, для которых $\mathrm{C}[u^*] = \mathrm{C}[u] = 0$, и $\overset{\circ}{G}{}'$ - гладкие потенциальные векторы вида $\nabla\varphi'(x,y)$, где φ' принимают постоянные значения $c_k \in C^1$ на связных компонентах L_k границы ∂S ($\varphi'|_{L_k} = c_k$, $k = 0, 1$). Покажем ортогональность линеалов :

$$(\nabla u, \nabla\varphi')_{\mathcal{L}} = \int_{\partial S} \overline{\varphi'} \frac{\partial u}{\partial n}\,dl = -\int_{\partial S} \overline{\varphi'} \frac{\partial u^*}{\partial l}\,dl = -\bar{c}_0 \int_{L_0} \frac{\partial u^*}{\partial l}\,dl - \bar{c}_1 \int_{L_1} \frac{\partial u^*}{\partial l}\,dl =$$

$$= (\bar{c}_1 - \bar{c}_0) \int_{l_1} \frac{\partial u^*}{\partial l}\,dl = (\bar{c}_1 - \bar{c}_0)\mathrm{C}[u^*] = 0.$$

Наконец, в $\overset{\circ}{G}{}'$ зададим линеалы U_1 и $\overset{\circ}{G}$ - гладкие потенциальные векторы вида $\nabla\varphi(x,y)$, где $\varphi|_{\partial S} = 0$. Их ортогональность очевидна.

Заметим, что линеалы U_2 и $\overset{\circ}{J}$ можно было определить, как множества векторов вида $[\mathbf{z}, \mathbf{F}]$, где соответственно $\mathbf{F} \in U_1$ или $\mathbf{F} \in \overset{\circ}{G}$. Введем аналогичным образом линеалы $\tilde{J}$, $\tilde{J}'$, $\overset{\circ}{J}{}'$ гладких соленоидальных векторов :

$$\tilde{J} = \{ [\mathbf{z}.\mathbf{F}] : \mathbf{F} \in \tilde{G} \}, \quad \tilde{J}' = \{ [\mathbf{z}, \mathbf{F}'] : \mathbf{F}' \in \tilde{G}' \}, \quad \overset{\circ}{J}{}' = \{ [\mathbf{z}, \mathbf{F}''] : \mathbf{F}'' \in \overset{\circ}{G}{}' \}.$$

Подпространства, образованные замыканиями всех введенных выше линеалов, будем обозначать теми же символами без тильды.

Теорема 2.1. *Имеет место следующее ортогональное разложение пространства* $\mathcal{L}$: $\mathcal{L} = \overset{\circ}{G} + U_1 + U' + U_2 + \overset{\circ}{J}$.

Соответственно $\mathcal{L} = \overset{\circ}{G} + J$, $J = U_1 + J'$, $J' = U' + \overset{\circ}{J'}$, $\overset{\circ}{J'} = U_2 + \overset{\circ}{J}$

и $\mathcal{L} = G + \overset{\circ}{J}$, $G = G' + U_2$, $G' = \overset{\circ}{G'} + U'$, $\overset{\circ}{G'} = \overset{\circ}{G} + U_1$.

Доказательство. Достаточно показать, что любой гладкий вектор $\mathbf{F} \in \mathcal{L}$ представим в виде суммы проекций на введенные линеалы, а затем перейти к замыканию. Докажем, что

$$\mathbf{F}(x,y) = [\mathbf{z}, \nabla\varphi_1(x,y)] + \alpha\nabla u_1^*(x,y) + \nabla u(x,y) + \beta\nabla u_1(x,y) + \nabla\varphi_2(x,y),$$

где $\alpha, \beta \in C^1$, $\varphi_1|_{\partial S} = \varphi_2|_{\partial S} = 0$ и $u(x,y)$ есть однозначная гармоническая функция, для которой $\mathrm{C}[u^*] = \mathrm{C}[u] = 0$. Гармоническая функция $u_1(x,y)$ удовлетворяет краевой задаче (2.1), причем $\|\nabla u_1\|_{\mathcal{L}} = 1$ и $\mathrm{C}[u_1^*] = \nu^{-1}$.

Функции $\varphi_1(x,y)$ и $\varphi_2(x,y)$ найдем как решения краевых задач :

$$\triangle\varphi_1 = \operatorname{div}[\mathbf{F},\mathbf{z}],\ \ \varphi_1|_{\partial S} = 0 \quad \text{и} \quad \triangle\varphi_2 = \operatorname{div}\mathbf{F},\ \ \varphi_2|_{\partial S} = 0.$$

Рассмотрим вектор $\mathbf{F}' = \mathbf{F} - [\mathbf{z}, \nabla\varphi_1] - \nabla\varphi_2$. Очевидно, $\operatorname{div}\mathbf{F}' = 0$, $\operatorname{rot}\mathbf{F}' = \operatorname{div}[\mathbf{F}',\mathbf{z}]\,\mathbf{z} = 0$ и $\mathbf{F}' = \nabla h(x,y)$, где $h(x,y)$ - гармоническая в S функция. Найдем величину периодов $\mathrm{C}[\mathbf{F}']$ и $\mathrm{C}\Big[[\mathbf{z},\mathbf{F}']\Big]$:

$$\mathrm{C}[\mathbf{F}'] = \mathrm{C}[h] = \int_{l_1} (\mathbf{F}',\mathbf{l})\,dl = -\int_{L_1} (\mathbf{F}',\mathbf{l})\,dl = -\int_{L_1} (\mathbf{F},\mathbf{l})\,dl +$$

$$+\int_{L_1} ([\mathbf{z},\nabla\varphi_1],[\mathbf{n},\mathbf{z}])\,dl = -\int_{L_1} (\mathbf{F},\mathbf{l})\,dl - \int_{L_1} \frac{\partial\varphi_1}{\partial n}\,dl,$$

$$\mathrm{C}\Big[[\mathbf{z},\mathbf{F}']\Big] = \mathrm{C}[h^*] = -\int_{l_1} (\mathbf{F}',\mathbf{n})\,dl = \int_{L_1} (\mathbf{F},\mathbf{n})\,dl - \int_{L_1} \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}\,dl.$$

Покажем, что $\mathbf{F}'$ представим в виде : $\nabla h = \alpha\nabla u_1^* + \nabla u + \beta\nabla u_1$. Здесь достаточно положить $\alpha = \nu\mathrm{C}[h]$ и $\beta = \nu\mathrm{C}[h^*]$. Тогда вектор $\nabla u = \mathbf{F}' - \alpha\nabla u_1^* - \beta\nabla u_1$ принадлежит линеалу $\tilde{U}'$. Действительно, с учетом $(u_1^*)^* = -u_1$, находим : $\mathrm{C}[u] = \mathrm{C}[h] - \alpha\mathrm{C}[u_1^*] - \beta\mathrm{C}[u_1] = \mathrm{C}[h] - \alpha\nu^{-1} = 0$ и $\mathrm{C}[u^*] = \mathrm{C}[h^*] + \alpha\mathrm{C}[u_1] - \beta\mathrm{C}[u_1^*] = \mathrm{C}[h^*] - \beta\nu^{-1} = 0$. Теорема доказана.

Рассмотрим область S общего вида. Пусть L_0 - внешний контур, $L_1, \ldots, L_N$ - внутренние контуры, ограничивающие область S, а l_k - несамопересекающийся замкнутый контур в S, содержащий внутри себя контур L_k, $k = 1, \ldots, N$. Циклическую постоянную скалярного потенциала $f(x,y)$ при обходе контура l_k будем обозначать через $\mathrm{C}^k[f]$.

Выделим в $\mathcal{L}$ системы вектор-функций $\{\nabla\vartheta_k(x,y)\}_1^N$ и $\{\nabla\vartheta_k^*(x,y)\}_1^N$, где ϑ_k - гармонические в S функции, удовлетворяющие краевым задачам :

$$\triangle\vartheta_k = 0,\ \ \vartheta_k\big|_{L_m} = \delta_{km},\ \ k = 1, \ldots, N,\ m = 0, \ldots, N, \tag{2.2}$$

а ϑ_k^* - сопряженные к ϑ_k многозначные гармонические функции, у которых $\frac{\partial}{\partial n}\vartheta_k^*|_{\partial S} = 0$ и $\mathrm{C}^k[\vartheta_k^*] \neq 0$. Система вектор-функций $\{\nabla\vartheta_k\}_1^N$ линейно независима в S. Методом ортогонализации Гильберта-Шмидта в $\mathcal{L}$ преобразуем систему $\{\nabla\vartheta_k\}_1^N$ ($\{[\mathrm{z},\nabla\vartheta_k]\}_1^N$) в ортонормированную систему $\{\nabla u_k\}_1^N$ ($\{[\mathrm{z},\nabla u_k]\}_1^N$).

Разложение пространства $\mathcal{L}$ получается аналогичным образом. В определениях линеалов $\tilde{G}'$ и $\tilde{U}'$ требование обращения в нуль накладывается на циклические постоянные скалярных потенциалов при обходе по всем контурам l_k, $k=1,\ldots,N$. Теорема 2.1 справедлива для $(N+1)$-связной области S, но только U_1, U_2 есть N-мерные подпространства вида :

$$U_1=\mathrm{Lin}\{\nabla u_1,\ldots,\nabla u_N\},\quad U_2=\mathrm{Lin}\{\nabla u_1^*,\ldots,\nabla u_N^*\}.$$

На основании теоремы 2.1 выделим в пространстве $\mathcal{L}$ два ортонормированных базиса. Пусть $\{æ_i^2\}_1^\infty$, $\{\gamma_j^2\}_0^\infty$ - множества собственных значений, а

$$\{\varphi_i(x,y)\}_1^\infty,\qquad \{\psi_j(x,y)\}_0^\infty \tag{2.3}$$

- полные в $L_2(S)$, ортонормированные системы вещественных собственных функций операторов, порожденных в S лапласианом $-\triangle$ и граничными условиями I, II рода соответственно :

$$\triangle\varphi_i+æ_i^2\varphi_i=0,\ \varphi_i|_{\partial S}=0,\qquad \triangle\psi_j+\gamma_j^2\psi_j=0,\ \tfrac{\partial}{\partial n}\psi_j|_{\partial S}=0.$$

Здесь $æ_i^2>0$, $\gamma_j^2\geq 0$ и собственному значению $\gamma_0=0$ отвечает собственная функция $\psi_0\equiv\mathrm{const}$.

Лемма 2.2. *Каждая из систем вектор-функций*

$$\{\tfrac{1}{æ_i}\nabla\varphi_i\}_1^\infty\cup\{\nabla u_k\}_1^N\cup\{\tfrac{1}{\gamma_j}[\nabla\psi_j,\mathrm{z}]\}_1^\infty \quad \text{и}$$

$$\{\tfrac{1}{\gamma_j}\nabla\psi_j\}_1^\infty\cup\{[\mathrm{z},\nabla u_k]\}_1^N\cup\{\tfrac{1}{æ_i}[\mathrm{z},\nabla\varphi_i]\}_1^\infty$$

образует ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{L}$.

Доказательство. Выделяя базисы в подпространствах, отвечающих разложению $\mathcal{L}=G'+U_2+\overset{\circ}{J}$, докажем полноту второй системы (первая соответствует разложению $\mathcal{L}=\overset{\circ}{G}+U_1+J'$). В G плотно множество гладких потенциальных векторов вида $\nabla\psi(x,y)$, где $\frac{\partial}{\partial n}\psi|_{\partial S}=0$ ([3]). Если на их потенциалы $\psi(x,y)$ дополнительно наложить требование $\mathrm{C}^k[\psi]=0$, $k=1,\ldots,N$, то множество таких векторов $\nabla\psi$ будет плотным в подпространстве G'. Так как в (2.3) функции $\psi_j(x,y)$, $j=1,2,\ldots$, являются однозначными дважды непрерывно дифференцируемыми в S функциями, у которых $\frac{\partial}{\partial n}\psi_j|_{\partial S}=0$ и $\mathrm{C}^k[\psi_j]=\frac{1}{\gamma_j^2}\mathrm{C}^k[\triangle\psi_j]=0$, $k=1,\ldots,N$, то $\nabla\psi_j(x,y)\in G'$. Система $\{\frac{1}{\gamma_j}\nabla\psi_j\}_1^\infty$ образует ортонормированный базис в подпространстве G', а система $\{\frac{1}{æ_i}[\mathrm{z},\nabla\varphi_i]\}_1^\infty$ - в подпространстве $\overset{\circ}{J}$ ([3]). Лемма доказана.

3. Система модовых состояний

В свободном волноводе ($\mathcal{J}=0$, $\rho=0$) выделим счетные системы поперечных магнитных ($H_z=0$) и поперечных электрических ($E_z=0$) полей, удовлетворяющих однородным уравнениям Максвелла :

$$\mathrm{rot}\,\mathcal{H}=\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D},\quad \mathrm{rot}\,\mathcal{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{B},\quad \mathrm{div}\,\mathcal{D}=0,\quad \mathrm{div}\,\mathcal{B}=0. \tag{3.1}$$

Назовем *модовыми E-полями* $\boldsymbol{\mathcal{E}}_E^i$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_E^i$, *модовыми H-полями* $\boldsymbol{\mathcal{E}}_H^j$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_H^j$ $(i,\, j = 1,2,\ldots)$ и *нуль-модовым полем* $\boldsymbol{\mathcal{E}}_0$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_0$ специальные решения задачи (3.1), (1.3), (1.4) вида :

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\mathcal{E}}_E^i = a_i(z,t)\nabla\varphi_i(x,y) + g_i(z,t)\varphi_i(x,y)\,\mathbf{z}, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_E^i = b_i(z,t)[\mathbf{z},\nabla\varphi_i(x,y)],\\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_H^j = e_j(z,t)[\nabla\psi_j(x,y),\mathbf{z}], \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_H^j = h_j(z,t)\nabla\psi_j(x,y) + f_j(z,t)\psi_j(x,y)\,\mathbf{z}, \qquad (3.2)\\ \boldsymbol{\mathcal{E}}_0 \equiv 0, \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_0 = f_0(z,t)\psi_0\,\mathbf{z},\end{gathered}$$

где функции $\varphi_i(x,y)$, $\psi_j(x,y)$ - элементы базисов (2.3), а функции $a_i, b_i, g_i, e_j, h_j, f_j$ и f_0 переменных z,t удовлетворяют системам :

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}D_{\|}g_i + æ_i^2 b_i = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}Da_i + \frac{\partial b_i}{\partial z} = 0,\\ \frac{\partial}{\partial t}Bb_i + \frac{\partial a_i}{\partial z} = g_i, \quad \frac{\partial}{\partial z}D_{\|}g_i - æ_i^2 Da_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots,\\ \frac{\partial}{\partial t}B_{\|}f_j + \gamma_j^2 e_j = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}Bh_j + \frac{\partial e_j}{\partial z} = 0, \qquad (3.3)\\ \frac{\partial}{\partial t}De_j + \frac{\partial h_j}{\partial z} = f_j, \quad \frac{\partial}{\partial z}B_{\|}f_j - \gamma_j^2 Bh_j = 0, \quad j = 1,2,\ldots,\\ \frac{\partial}{\partial t}B_{\|}f_0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z}B_{\|}f_0 = 0.\end{gathered}$$

Модовые поля (3.2) получены методом разделения переменных (x,y) и (z,t) в работах [1, 2]. Начальные многообразия, условия существования и единственности для специальных решений (3.2) рассмотрены в [3].

В случае многосвязного сечения S методом разделения переменных получаем чисто поперечные поля ($H_z = E_z = 0$) ([4, 5]) вида

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_T^k = v_k(z,t)\nabla u_k(x,y), \quad \boldsymbol{\mathcal{H}}_T^k = w_k(z,t)[\,\mathbf{z},\nabla u_k(x,y)\,], \qquad (3.4)$$

$k = 1,2,\ldots,N$, которые назовем *модовыми T-полями.* Функции u_k в (3.4) должны быть гармоническими в области S функциями, принимающими на контурах L_m границы $\partial S = \bigcup_{m=0}^{N} L_m$ постоянные значения c_{km}. В односвязной области ($\partial S = L_0$) такие функции тождественно равны константе, и их градиенты не порождают модовых T-полей. В (N+1)-связной области S функции u_k представимы в виде $u_k(x,y) = \sum_{m=0}^{N} c_{km}\vartheta_m(x,y)$. Здесь гармонические функции системы $\{\vartheta_k\}_1^N$ удовлетворяют краевым задачам (2.2), а $\vartheta_0(x,y) = 1 - \sum_{k=1}^{N}\vartheta_k(x,y)$. Системы скалярных функций $\{\vartheta_k\}_0^N$ и вектор-функций $\{\nabla\vartheta_k\}_1^N$ линейно независимы в S. Определим в (3.4) систему $\{\nabla u_k\}_1^N$ как ортонормированную систему вектор-функций, полученную из системы $\{\nabla\vartheta_k\}_1^N$ методом ортогонализации Гильберта-Шмидта в пространстве $\mathcal{L}$.

Функции $v_k(z,t), w_k(z,t)$ T-поля (3.4) удовлетворяют системе уравнений :

$$\frac{\partial}{\partial t}Dv_k + \frac{\partial w_k}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}Bw_k + \frac{\partial v_k}{\partial z} = 0, \quad k = 1,2,\ldots,N. \qquad (3.5)$$

Гладкость функций v_k, w_k уточним ниже.

Пространство $L_2^3(S)$ представим в виде ортогональной суммы подпространств : $L_2^3(S) = \mathcal{L} + \mathcal{M}$, где через $\mathcal{L} = L_2^2(S) \oplus 0$, $\mathcal{M} = 0 \oplus 0 \oplus L_2(S)$ обозначены подпространства поперечных и продольных вектор-функций. Выбрав на основании леммы 2.2 две базисные системы в подпространстве $\mathcal{L}$ и в соответствии с (2.3) - два базиса в подпространстве $\mathcal{M}$, выделим во всем пространстве $L_2^3(S)$ вещественные ортогональные базисы (3.6) и (3.7) :

$$\{\,\nabla\varphi_i,\ \ \varphi_i\,\mathbf{z}\}_1^\infty \,\cup\, \{\,[\nabla\psi_j, \mathbf{z}]\,\}_1^\infty \,\cup\, \{\,\nabla u_k\,\}_1^N, \tag{3.6}$$

$$\psi_0\,\mathbf{z} \,\cup\, \{\,[\mathbf{z}, \nabla\varphi_i]\,\}_1^\infty \,\cup\, \{\nabla\psi_j,\ \ \psi_j\,\mathbf{z}\}_1^\infty \,\cup\, \{\,[\mathbf{z}, \nabla u_k]\,\}_1^N. \tag{3.7}$$

Рассмотрим гладкие решения исходной задачи (1.1)-(1.4). При каждом (z,t) разложим $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ в ряд Фурье по базису (3.6), $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ - по базису (3.7) в пространстве $L_2^3(S)$, сохранив для коэффициентов Фурье обозначения соответствующих функций от z,t в модовых полях (3.2), (3.4) :

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{E}} &= \sum_{i=1}^\infty \begin{pmatrix} a_i \nabla_\perp \varphi_i \\ g_i\, \varphi_i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^\infty \begin{pmatrix} e_j [\,\nabla\psi_j, \mathbf{z}\,]_\perp \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} v_k \nabla_\perp u_k \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{\mathcal{H}} &= \sum_{i=1}^\infty \begin{pmatrix} b_i [\,\mathbf{z}, \nabla\varphi_i\,]_\perp \\ 0 \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^\infty \begin{pmatrix} h_j \nabla_\perp \psi_j \\ f_j\, \psi_j \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} w_k [\mathbf{z}, \nabla u_k]_\perp \\ 0 \end{pmatrix} + f_0\,\psi_0\,\mathbf{z},
\end{aligned} \tag{3.8}$$

где $v_k(z,t) = (\mathbf{E}, \nabla u_k)_{\mathcal{L}}$, $w_k(z,t) = (\mathbf{H}, [\mathbf{z}, \nabla u_k])_{\mathcal{L}}$, $a_i(z,t) = \frac{1}{æ_i^2}(\mathbf{E}, \nabla\varphi_i)_{\mathcal{L}}$, $b_i(z,t) = \frac{1}{æ_i^2}(\mathbf{H}, [\mathbf{z}, \nabla\varphi_i])_{\mathcal{L}}$, $g_i(z,t) = (E_z, \varphi_i)_{L_2}$, $e_j(z,t) = \frac{1}{\gamma_j^2}(\mathbf{E}, [\nabla\psi_j, \mathbf{z}])_{\mathcal{L}}$, $h_j(z,t) = \frac{1}{\gamma_j^2}(\mathbf{H}, \nabla\psi_j)_{\mathcal{L}}$, $f_j(z,t) = (H_z, \psi_j)_{L_2}$ и $f_0(z,t) = (H_z, \psi_0)_{L_2}$ (символ "$\perp$" означает вложение вектора из $R^2 \oplus 0$ в R^2).

Введем для коэффициентов Фурье функций сторонних источников $\mathcal{J} = \mathbf{J} + J_z\mathbf{z}$ и ρ обозначения : $j_i^E = \frac{1}{æ_i^2}(\mathbf{J}, \nabla\varphi_i)_{\mathcal{L}}$, $j_j^H = \frac{1}{\gamma_j^2}(\mathbf{J}, [\nabla\psi_j, \mathbf{z}])_{\mathcal{L}}$, $j_k^T = (\mathbf{J}, \nabla u_k)_{\mathcal{L}}$, $j_i = (J_z, \varphi_i)_{L_2}$, $\rho_i = (\rho, \varphi_i)_{L_2}$. Спроектируем левые и правые части первого из векторных равенств (1.1) на элементы базиса (3.6), второго векторного уравнения - на элементы базиса (3.7), скалярные равенства (1.2) - на функции базисов (2.3) соответственно и получим системы эволюционных уравнений ([3, 4]) :

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} D_{\|} g_i + æ_i^2 b_i = -j_i, \quad \frac{\partial}{\partial t} D a_i + \frac{\partial b_i}{\partial z} = -j_i^E, \\
&\frac{\partial}{\partial t} B b_i + \frac{\partial a_i}{\partial z} = g_i, \quad \frac{\partial}{\partial z} D_{\|} g_i - æ_i^2 D a_i = \rho_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, \\
&\frac{\partial}{\partial t} B_{\|} f_j + \gamma_j^2 e_j = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} B h_j + \frac{\partial e_j}{\partial z} = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t} D e_j + \frac{\partial h_j}{\partial z} = f_j - j_j^H, \quad \frac{\partial}{\partial z} B_{\|} f_j - \gamma_j^2 B h_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \\
&\frac{\partial}{\partial t} B_{\|} f_0 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} B_{\|} f_0 = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t} D v_k + \frac{\partial w_k}{\partial z} = -j_k^T, \quad \frac{\partial}{\partial t} B w_k + \frac{\partial v_k}{\partial z} = 0, \qquad k = 1, \ldots, N.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

При $\mathcal{J} = 0$, $\rho = 0$ системы в (3.9) становятся однородными и совпадают с системами (3.3), (3.5) для одноименных функций модовых полей. Таким образом, *разложение (3.8) гладкого решения $\boldsymbol{\mathcal{E}}, \boldsymbol{\mathcal{H}}$ задачи (3.1), (1.3), (1.4) по базисам (3.6), (3.7) соответственно есть разложение решения*

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E} \\ \mathcal{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_0 \\ \mathcal{H}_0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_E^i \\ \mathcal{H}_E^i \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{\infty} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_H^j \\ \mathcal{H}_H^j \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^{N} \begin{pmatrix} \mathcal{E}_T^k \\ \mathcal{H}_T^k \end{pmatrix}$$

по системе модовых полей (3.2), (3.4) в пространстве $L_2^6(S) = L_2^3(S) \oplus L_2^3(S)$ при фиксированных значениях переменных z, t. Отметим, что в разложении гладкого решения суммы модовых Е-полей $\boldsymbol{\mathcal{E}}_E, \boldsymbol{\mathcal{H}}_E$, Н-полей $\boldsymbol{\mathcal{E}}_H, \boldsymbol{\mathcal{H}}_H$ и Т-полей $\boldsymbol{\mathcal{E}}_T, \boldsymbol{\mathcal{H}}_T$ также являются гладкими решениями задачи (3.1), (1.3), (1.4) ([3]). При каждом (z, t) они взаимно ортогональны в $L_2^6(S)$ и принадлежат подпространствам : $\boldsymbol{\mathcal{E}}_E \in \overset{\circ}{G} + \mathcal{M}$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_E \in \overset{\circ}{J}$; $\boldsymbol{\mathcal{E}}_H \in J'$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_H \in G' + \mathcal{M}$; $\boldsymbol{\mathcal{E}}_T \in U_1$, $\boldsymbol{\mathcal{H}}_T \in U_2$.

В общем случае, когда $\mathcal{J} \neq 0$, $\rho \neq 0$, решение начальной задачи для каждой неоднородной системы из (3.9) представляется в виде суммы решения начальной задачи для соответствующей однородной системы и специального решения неоднородной системы с нулевыми начальными условиями. Таким образом, поле в волноводе раскладывается в ряд по системе модовых состояний, где каждая мода является суммой модового поля фиксированного типа и некоторого вынужденного состояния такой же модовой структуры.

4. Условия существования и единственности модовых Т-полей

Пусть индукционный оператор $\mathbf{B}$ (1.5) имеет диагональный блок B вида

$$B = B_0 + B_1 \frac{d}{dz}, \tag{4.1}$$

где B_0 - обратимый оператор. Например, B_0 есть оператор умножения на функцию $\mu(z,t) > 0$, а интегро-дифференциальное преобразование B_1 учитывает временную и пространственную дисперсию нестационарной среды, неоднородной вдоль оси Z волновода ([1]-[4]).

Поставим начальные условия для Т-поля (3.4)

$$v_k(z, t_0) = v_k^0(z), \quad w_k(z, t_0) = w_k^0(z). \tag{4.2}$$

Используя представление (4.1), выразим $w_k(z,t)$ через $v_k(z,t)$, $w_k^0(z)$:

$$w_k(z,t) = B_0^{-1}\Big\{ B_1 \left[\frac{\partial}{\partial t} D v_k(z,t) + \frac{d}{dz} w_k^0(z)\right] - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial z} v_k(z,\tau) d\tau \Big\} + w_k^0(z) \tag{4.3}$$

и сведем систему (3.5) к уравнению для функции $v_k(z,t)$:

$$\left(I + \frac{\partial}{\partial z} B_0^{-1} B_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} D v_k + \frac{d}{dz} w_k^0\right) - \frac{\partial}{\partial z} B_0^{-1} \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial z} v_k(z,\tau) d\tau = 0. \tag{4.4}$$

При этом предполагаем, учитывая (3.5), что в начальный момент времени выполнено условие :

$$\frac{\partial}{\partial t} D v_k(z,t)|_{t=t_0} + \frac{d}{dz} w_k^0(z) = 0. \tag{4.5}$$

Далее предположим, что среда является стационарной, т.е. индукционные операторы $\mathbf{D}, \mathbf{B}$ (1.5) инвариантны во времени и действуют на функции от переменной z. Дифференцируем по t уравнение (4.4), выполняя формальную перестановку интегро-дифференциальной операции $\frac{d}{dz}B_0^{-1}$ по переменной z и операции интегрирования по переменной t, оправданную для класса функций $v_k(z,t)$ соответствующей гладкости :

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(I + \frac{\partial}{\partial z} B_0^{-1} B_1\Big)\frac{\partial}{\partial t} D v_k - \frac{\partial}{\partial z} B_0^{-1}\frac{\partial}{\partial z} v_k = 0. \tag{4.6}$$

Для того, чтобы решение v_k уравнения (4.6) было решением уравнения (4.4), необходимо и достаточно выполнения условия (4.5).

Введем обозначения преобразований в уравнении (4.6) :

$$Q = I + \frac{d}{dz} B_0^{-1} B_1, \quad A = QD, \quad C = -\frac{d}{dz} B_0^{-1} \frac{d}{dz} \quad \text{и} \quad M = Q\frac{d}{dz}. \tag{4.7}$$

Будем считать, что преобразования D, B и Q, M, A, C задают линейные операторы в некотором банаховом пространстве скалярных функций $\{q(z)\} = X$. В соответствии с исходной электродинамической задачей подчиним функции из областей определения операторов условиям на бесконечности (излучения, ограниченности или обращения в 0 при $|z| \to \infty$) в случае неограниченного волновода, либо однородным граничным условиям на концах отрезка $z_1 \le z \le z_2$ в случае конечного волновода (I - единичный оператор на X).

Уточним гладкость функций v_k, w_k в определении модовых Т-полей (3.4). Под решением задачи (4.6),(4.2),(4.5) будем понимать решение $v_k(z,t) = \mathbf{v}_k(t)(z)$ абстрактной начальной задачи :

$$\frac{d^2}{dt^2} A\mathbf{v}_k + C\mathbf{v}_k = 0, \ \ \mathbf{v}_k(t_0) = v_k^0, \ \ \frac{d}{dt} D\mathbf{v}_k(t_0) = -\frac{d}{dz} w_k^0, \tag{4.8}$$

где функция $\mathbf{v}_k : [t_0, +\infty) \to X$ дважды непрерывно дифференцируема в норме пространства X вместе с $A\mathbf{v}_k(t)$ и $D\mathbf{v}_k(t)$, причем в каждой точке $t > t_0$ значения $\mathbf{v}_k(t)$ принадлежат области определения $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(C)$ операторного пучка $\lambda A + C$ и $\mathbf{v}_k$ удовлетворяет абстрактному уравнению задачи (4.8) в банаховом пространстве X (теоремы существования и единственности решений этого абстрактного уравнения приведены в работах [2, 3, 8], в том числе с вырожденным оператором A [8]). В определении модового Т-поля считаем w_k соответственно функцией $w_k(z,t) = \mathbf{w}_k(t)(z) : [t_0, +\infty) \to X$, непрерывно дифференцируемой вместе с $B\mathbf{w}_k(t)$ в норме пространства X. Применив формулу (4.3) к решению $\mathbf{v}_k(t)(z)$ задачи (4.8), находим функцию $\mathbf{w}_k(t)(z)$.

Теорема 4.1. *Пусть для стационарных индукционных операторов (1.5) и операторов (4.7) выполнены условия :*

D замкнут и имеет тривиальный аннулятор, B представим в виде (4.1); Q, C замкнуты и Q имеет тривиальный аннулятор;

область значений A совпадает со всем пространством X, а область определения подчинена включению $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{D}(C)$.

Тогда для любых функций $v_k^0(z) \in \mathcal{D}(A)$, $w_k^0(z) \in \mathcal{D}(M)$, $k = 1, \ldots, N$, из начальных условий (4.2) существует единственная система модовых Т-полей (3.4).

Доказательство. Операторы Q, A имеют ограниченные обратные Q^{-1}, $A^{-1} = D^{-1}Q^{-1}$, как замкнутые операторы, определенные на всем пространстве X. Каждое решение задачи (4.8) $\mathbf{v}_k(t)$ со значениями в $\mathcal{D}(A)$ порождает решение $\mathbf{q}_k(t) = A\mathbf{v}_k(t)$, $t \geq t_0$, начальной задачи

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{q}_k + CA^{-1}\mathbf{q}_k = 0, \quad \mathbf{q}_k(t_0) = Av_k^0, \quad \frac{d}{dt}\mathbf{q}_k(t_0) = -Q\frac{d}{dz}w_k^0, \tag{4.9}$$

и обратно, $\mathbf{q}_k(t)$ порождает решение $\mathbf{v}_k(t) = A^{-1}\mathbf{q}_k(t)$ задачи (4.8), для которого существуют непрерывные производные $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{v}_k$, $\frac{d^2}{dt^2}A\mathbf{v}_k$ и $\frac{d^2}{dt^2}D\mathbf{v}_k = Q^{-1}\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{q}_k$. Далее, CA^{-1} есть ограниченный оператор, определенный на всем X. Для $\forall \mathbf{q}_k(t_0), \frac{d}{dt}\mathbf{q}_k(t_0) \in X$ начальная задача (4.9) имеет единственное решение экспоненциального типа и для $\forall v_k^0(z) \in \mathcal{D}(A)$, $w_k^0(z) \in \mathcal{D}(M)$ существует единственное решение $\mathbf{v}_k(t)$ задачи (4.8) ([3]). Теорема доказана.

Замечание. В случае, когда индукционный оператор $\mathbf{D}$ (1.5) имеет диагональный блок D вида (4.1), система (3.5) может быть сведена к одному уравнению относительно функции $w_k(z,t)$, и существование модовых Т-полей доказывается аналогично.

Проиллюстрируем теорему, рассмотрев конечный отрезок волновода между сечениями $z_1 = 0$ и $z_2 = l$, в которых стоят металлические заглушки. Выберем в качестве X пространство $C[0,l]$.

В первом примере зададим в X поперечные блоки D, B стационарных индукционных операторов в виде : $D = \varepsilon(z)\,I - \frac{d}{dz}\alpha(z)\frac{d}{dz}$, $B = \mu(z)\,I$, не накладывая ограничений на блоки $D_{\|}, B_{\|}$. Здесь функции $\varepsilon(z) \in C[0,l]$, $\alpha(z), \mu(z) \in C^1[0,l]$ и $\alpha(z) > 0$, $\mu(z) > 0$, $\varepsilon(z) \geq 0$ или $\varepsilon \equiv 0$. Из граничных условий (1.3) на заглушках волновода следует, что $v_k(0,t) = v_k(l,t) = 0$. Области определения $\mathcal{D}(D) = \{q(z) \in C^2[0,l] : q(0) = q(l) = 0\}$, $\mathcal{D}(B) = X$. Оператор B имеет вид (4.1), где $B_0 = B$, $B_1 = 0$. Тогда $Q = I$, $M = \frac{d}{dz}$, $A = D$ и $C = -\frac{d}{dz}\frac{1}{\mu}\frac{d}{dz}$, причем $\mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(D) = \mathcal{D}(A)$ и $\mathcal{D}(M) = \{\vartheta(z) \in C^1[0,l]\}$. Операторы Штурма-Лиувилля D и C имеют ограниченные обратные, определенные на всем X. Условия теоремы выполнены.

Во втором примере рассмотрим в пространстве X операторы : $D = \varepsilon(z)\,I - \frac{d}{dz}\alpha(z)\frac{d}{dz}$, $B = \mu(z)\,I - \frac{d}{dz}\beta(z)\frac{d}{dz}$. Гладкость функций $\alpha(z) > 0, \beta(z) > 0, \mu(z) > 0$ и $\varepsilon(z) \geq 0$ (или $\varepsilon \equiv 0$) уточним ниже. Зададим области определения $\mathcal{D}(D) = \{q(z) \in C^2[0,l] : q(0) = q(l) = 0\}$, $\mathcal{D}(B) = \{p(z) \in C^2[0,l] : p'(0) = p'(l) = 0\}$, считая, что физические условия для Т-полей обеспечивают функциям $w_k(z,t)$ выполнение граничных условий : $\frac{\partial}{\partial z}w_k|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial z}w_k|_{z=l}$. Оператор B имеет вид (4.1), где $B_0 = \mu(z)I$, $\mathcal{D}(B_0) = X$ и $B_1 = -\frac{d}{dz}\beta(z)I$, $\mathcal{D}(B_1) = \{r(z) \in C^1[0,l] : r(0) = r(l) = 0\}$. Получаем $Q = (\frac{1}{\beta}I - \frac{d}{dz}\frac{1}{\mu}\frac{d}{dz})\beta I$, $C = -\frac{d}{dz}\frac{1}{\mu}\frac{d}{dz}$, $A = QD$, $M = Q\frac{d}{dz}$, полагая здесь и в определении операторов D, B функции $\mu(z) \in C^1[0,l]$, $\varepsilon(z), \beta(z) \in C^2[0,l]$, $\alpha(z) \in C^3[0,l]$. Области определения $\mathcal{D}(Q) = \mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(D)$, $\mathcal{D}(A) = \{\theta(z) \in C^4[0,l] : \theta(0) = \theta(l) = 0\}$, $\mathcal{D}(M) = \{\vartheta(z) \in C^3[0,l] : \vartheta'(0) = \vartheta'(l) = 0\}$ и $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C)$. Операторы D, Q, C имеют ограниченные обратные, определенные на всем X.

В первом и втором примерах согласно теореме 4.1 для любых функций $v_k^0(z) \in \mathcal{D}(A)$, $w_k^0(z) \in \mathcal{D}(M)$, $k = 1,\ldots,N$, из начальных условий (4.2) существует единственная система модовых Т-полей (3.4).

Автор благодарит А.Г.Руткаса за внимание и замечания к статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Руткас А.Г. Модовые поля в волноводе со слоистой диспергирующей средой. – Харьков, – 1987. – 34 с. - (Препринт / ИРЭ АН УССР: **360**).

2. Попова Е.В., Руткас А.Г. Модовые разложения полей в волноводе с неоднородной средой. // Праці УНДІРТ. – 1997. – **2** (10). – С. 54-59.

3. Попова Е.В. Существование и единственность базисных решений электродинамической системы. // Вестн. Харьк. ун-та. Сер. математика, прикладная математика и механика, – 1999. - **458**. – С. 165-176.

4. Попова Е.В. Метод дискретного разложения решения одной электродинамической задачи. // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – 1999. – С. 198-202.

5. Третьяков О.А. Эволюционные волноводные уравнения. // Радиотехника и электроника. – 1989. – Т. 34,**5**. – С. 917-926.

6. Вейль Г. Избранные труды. Математика. Теоретическая физика. – М.: Наука, – 1984. – 511 с.

7. Быховский Э.Б., Смирнов Н.В. Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа. // Тр. Матем. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1960. – Т. 59. – С. 5-36.

8. Rutkas A., Vlasenko L. Implicit operator differential eduations and applications to electrodynamics. // Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2000. – V. 23,**1**. – P. 1-15.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.977.1 № 514, 2001, с. 53–62

On state space representation for linear discrete-time systems in Hilbert spaces

R. Rabah, B. Bergeon
IRCCyN, École des Mines de Nantes, France
LAP-ARIA, Université de Bordeaux, France

For a linear continuous-time control system in Hilbert space with state $x(t)$ is associated a discrete-time system where the state variable is $z_k = (x((k+1)h) + x(kh))/2$, with small h. This allows to introduce a discrete derivative $\Delta z_k = (x((k+1)h) - x(kh))/h$. The obtained discrete-time system has structural properties with a similar formulation as continuous system. Stability is equivalent to the fact that the spectrum of the state operator of discrete-time system is in the left half plane, Lyapunov and Riccati equation are similar. *2000 Mathematics Subject Classification* 93C25, 93C55

1. Introduction

We are concerned with systems described by equations

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) & = & Cx(t), \end{array}\right. \tag{1}$$

where x, u and y take values in Hilbert spaces X, U and Y respectively. A, B and C are linear operators. B is bounded and A is the infinitesimal generator of a C_0-semi-group of bounded operators $S(t)$, $t \geq 0$. The mild solution of the system (1) is given by:

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau)Bu(\tau)d\tau.$$

A direct discretization of the mild solution gives a discrete system with bounded operators

$$F = S(h), \quad G = \int_0^h S(\tau)Bd\tau, \quad H = C,$$

respectively for the state, input and output:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{k+1} & = & Fx_k + Gu_k, \\ y_k & = & Hx_k, \end{array}\right. \tag{2}$$

where $x_k = x(kh), y_k = y(kh)$ and $u_k = u(kh)$.
Another way to obtain a discrete-time system from (1) is to use the transfer function, say $T(s) = C(sI - A)^{-1}B$. One can introduce (see for example [6, 3] for the case of infinite dimensional systems) a new transfer function $T_d(w)$. Let

$$T_d(w) = T\left(\frac{w-1}{w+1}\right). \tag{3}$$

Under the assumption that $T(s)$ is exponentially stable, T_d is holomorphic and stable outside the unit disc. It is well known (see for example [3]) that $T_d(w)$ is the transfer function of a discrete-time system (A_d, B_d, C_d, D_d):

$$T_d(w) = C_d(wI - A_d)^{-1}B_d + D_d,$$

where

$$A_d = (I-A)^{-1}(I+A), \quad B_d = \sqrt{2}(I-A)^{-1}B$$

and

$$C_d = \sqrt{2}C(I-A)^{-1}, \quad D_d = C(I-A)^{-1}B.$$

Some properties of this discrete system are given in [6] (see also [3], pp. 212-213). In particular, the relation of this system and the original one (1) are discussed. In [4, 6] are investigated the problems of realization, exponential and asymptotic stability for the discrete system obtained from $T_d(s)$ which is not rational function. The corresponding state space is obtained by realization techniques. However it is not clear which connection exists between the continuous-time and the discrete-time states.

The relation (3) introduced earlier for the case of finite dimensional systems allows to obtain properties for discrete-time system from continuous-time systems. Since the early fifties, several developments of continuous-time and discrete-time systems were done in parallel ways. This is the consequence of the different formulation of generic control problems and results. However, as both forms of solutions are computable (Lyapunov and Riccati equations, linear quadratic problems, etc.), the difference between formulations does not induce difficulties. The problem induced by these difference appeared in the late 80s up to now, especially through the robust control problems. In fact, the main idea for unification of continuous and discrete time theories used in some specialized problems is the Tustin transform (3).

A recent contribution has been brought by Bergeon [2] in order to extend this idea and to formalize the relation between the continuous and the discrete systems. The author shaw that every problem formulation and every design available in continuous-time domain can be translated, without loss of generality and simplicity, in the discrete-time domain.
Our purpose is to extend this approach to infinite dimensional systems and to study the specificity, if any, of this case. This approach amounts to putting:

$$z_k = \frac{x_{k+1} + x_k}{2} \tag{4}$$

and

$$\Delta z_k = \frac{x_{k+1} - x_k}{h}. \tag{5}$$

where $x_k = x(kh)$ as for the system (2). In this paper the following assumption is made: $h > 0$ is chosen such that the operator $I + S(h) = I + F$ is bounded invertible. The following discrete-time state space system can be associated to (1):

$$\begin{cases} \Delta z_k &= F_d z_k + G_d u_k, \\ y_k &= H_d z_k + E_d u_k, \end{cases} \tag{6}$$

where the operators F_d, G_d, H_d, E_d are defined later (7). In this system, z_k is the "state" and Δz_k is the "derivative". The new term $E_d u_k$ is the consequence of the discretization: strictly proper system become proper. For this system several control problems are discussed. The main results are that this system is a pseudo-continuous version of the continuous-time system (1). It is shown also that several formulations are similar to those of continuous-time system: Lyapunov and Riccati equations, stability and stabilizability conditions.

2. State representation of discrete-time system

In this section, we show how the system (6) is obtained and how this system converge, in some sense, to the system (1).

Theorem 1. *Let $x(t)$ be the mild solution of the system (1) and $x_k = x(kh)$ and $u_k = u(kh)$ for $h > 0$ and $k \in N$ and let z_k and Δz_k be given by (4) and (5). Then z_k is the solution of the equation*

$$\Delta z_k = F_d z_k + G_d u_k$$

and the output y_k is given by

$$y_k = H_d z_k + E_d u_k,$$

where the operators F_d, G_d, H_d and E_d are bounded and expressed by the relations:

$$\begin{aligned} F_d &= \tfrac{2}{h}(F - I)(F + I)^{-1}, & G_d &= \tfrac{2}{h}(F + I)^{-1}G, \\ H_d &= 2H(F + I)^{-1}, & E_d &= -H(F + I)^{-1}G. \end{aligned} \tag{7}$$

The operator $F + I = S(h) + I$ being bounded invertible by the choice of h.

Proof. Let us choose first h such that $S(h) + I$ is bounded invertible. If $\rho(S(h))$ denote the resolvent set and $\sigma(S(h))$ the spectrum of $S(h)$. Then it is well known [7] that $e^{h\sigma(A)} \subset \sigma(S(h))$, where $\sigma(.)$ is the spectrum of the corresponding operator A. This means that if $\lambda \in \sigma(A)$, and if $h\lambda \neq 2k\pi i$, then $-1 \in \rho(S(h))$ and $S(h) + I$ is bounded invertible. These values of h are said admissible. It is easy to see that h may be chosen arbitrary small. From the definition of z_k and the relation (2) between x_{k+1} and x_k, we get

$$2z_k = Fx_k + Gu_k + x_k = (F + I)x_k + Gu_k,$$

which gives

$$x_k = 2(F+I)^{-1}z_k - (F+I)^{-1}Gu_k. \tag{8}$$

In the same way, we get for Δz_k the relations:

$$\Delta z_k = \frac{1}{h}(x_{k+1} - x_k) = \frac{1}{h}[(F-I)x_k + Gu_k].$$

From (8), we obtain

$$\Delta z_k = \frac{2}{h}(F-I)(F+I)^{-1}z_k - \frac{1}{h}(F-I)(F+I)^{-1}Gu_k + \frac{1}{h}Gu_k.$$

As

$$(F-I)(F+I)^{-1}G = (F+I-2I)(F+I)^{-1}G = G - 2(F+I)^{-1}G,$$

this gives

$$\Delta z_k = \frac{2}{h}(F-I)(F+I)^{-1}z_k + \frac{2}{h}(F+I)^{-1}Gu_k.$$

and then

$$\Delta z_k = F_d z_k + G_d u_k$$

with F_d and G_d given by (7).
For the output relation, from (8), we have

$$y_k = Hx_k = 2H(F+I)^{-1}z_k - H(F+I)^{-1}Gu_k,$$

which gives

$$y_k = H_d z_k + E_d u_k,$$

with the needed operators H_d and E_d.

Remark 1. *The original continuous-time system is strictly proper:*

$$\lim_{\Re(s)\to\infty} T(s) = 0.$$

The discrete-time system is only proper. If the continuous-time system is proper, i.e. given by

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t). \end{cases} \tag{9}$$

then, in the corresponding discrete-time system, the operator E_d will be given by

$$E_d = D - H(F+I)^{-1}G.$$

This is the case when the output is not modified. One can also consider a new output $\overline{y}_k = Hz_k$, but this means that we observe in fact Hx_{k+1} also and this system is not causal.

The above discrete-time representation may be called pseudo-continuous representation and converge, when $h \to 0$, to the continuous-time system in the sense given by the Theorem 2 and related results of the following section.

The above mentioned properties show that this approach is quite different from that of the construction of pseudo-continuous system from discrete system via the Tustin transformation (see [3] for the infinite dimensional case).

Theorem 2. *For all $x_0 \in \mathcal{D}(A)$, $x \in X$ and $u \in U$, we have*

$$\lim_{h\to 0} F_d x_0 = Ax_0, \quad \lim_{h\to 0} G_d u = Bu, \quad \lim_{h\to 0} H_d x = Hx, \quad \lim_{h\to 0} E_d u = 0,$$

the value of h being admissible. If the operator A is bounded, then the limits exist in the uniform operator topology.

Proof. Note that

$$F_d = \frac{2}{h}(F-I)(F+I)^{-1} = 2(F+I)^{-1}\frac{F-I}{h}.$$

As A is the infinitesimal generator of the semigroup $S(t)$, we have

$$\lim_{h\to 0} \frac{F-I}{h} x_0 = \lim_{h\to 0} \frac{S(h)-I}{h} x_0 = Ax_0, \tag{10}$$

for all $x_0 \in \mathcal{D}(A)$. On the other hand,

$$\lim_{h\to 0} (F+I)x = \lim_{h\to 0} (S(h)+I)x = 2x \tag{11}$$

for all $x \in X$ because of strong continuity of the semigroup. Then, for sufficiently small h,

$$\|(S(h)+I)x\| \geq \|x\|.$$

This gives

$$\|x\| = \|(S(h)+I)(S(h)+I)^{-1}x\| \geq \|(S(h)+I)^{-1}x\|,$$

which implies $\|(S(h)+I)^{-1}\| \leq 1$. Then

$$\begin{aligned} -2(S(h)+I)^{-1}x - x\| &\leq -(S(h)+I)^{-1}\|\|2x - (S(h)+I)x\| \\ &\leq -2x - (S(h)+I)x\| \end{aligned}$$

and by (11), this gives

$$\lim_{h\to 0} 2(F+I)^{-1}x = \lim_{h\to 0} 2(S(h)+I)^{-1}x = x,$$

Then, by a simple calculation and using (10), we get, for $x_0 \in \mathcal{D}(A)$,

$$\lim_{h\to 0} F_d x_0 = \lim_{h\to 0} 2(S(h)+I)^{-1}\frac{S(h)-I}{h}x_0 = Ax_0.$$

Consider now the operator $G_d = \frac{2}{h}(F+I)^{-1}G$. For all $u \in U$, we have (see for example [7]):

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} G = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)Bud\tau = Bu,$$

and then

$$\lim_{h\to 0} \frac{2}{h}(F+I)^{-1}Gu = Bu.$$

The other limits may be calculated in the same way.
If A is bounded, then $S(t) = e^{At}$ is uniformly continuous, and all the limits are in the uniform operator topology.

This means that the system (F_d, G_d, H_d, E_d) asymptotically closed to the original continuous-time system. This may be also seen by remarking that if $t = kh$, then for an initial condition $x_0 \in \mathcal{D}(A)$ and a control function $u \in C^1$ we have

$$\lim_{h\to 0} z_k = x(t), \quad \lim_{h\to 0} \Delta z_k = \dot{x}(t).$$

If the initial condition is not in $\mathcal{D}(A)$ and $u \in L_p$, $p \geq 1$, the derivative must be understood in the weak sense (see [3, 7]).

3. Stability and stabilizability

3.1. Stability

The first problem under investigation is that of stability. We consider here only exponential stability for continuous-time system and power stability for discrete-time system. Other concepts of stability mat be considered in a similar way.

Definition 1. *The system (1) is said exponentially stable if there exists constants $M \geq 1$ and $\alpha > 0$ such that*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\alpha t}, \quad t \geq 0.$$

The discrete-time system (2) is said power stable if there exists constants $N \geq 1$ and $0 < \gamma < 1$ such that

$$\|F^n\| \leq N\gamma^n, \quad n \in N.$$

This means that for $u(t) = 0$, $t \geq 0$ (respectively $u_k = 0, k \in N$) the solution of both systems verify

$$\int_0^\infty \|S(t)x_0\|^2 dt < \infty, \quad \sum_{i=0}^\infty \|x_i\|^2 < \infty.$$

As in this case $z_k = \frac{F+I}{2}x_k$, power stability of systems (2) and (6) are equivalent.

Theorem 3. *The system (6) is power stable if and only if the spectrum of F_d, noted $\sigma(F_d)$ is in the interior of the left half plane:*

$$\sigma(F_d) \subset C_{-\beta} = \{s : \Re(s) < -\beta\}.$$

The corresponding Lyapunov equation is

$$F_d^* P + P F_d = -Q,$$

for positive definite linear bounded operator Q.

Proof. It is well known (cf. for example [3, 5, 8]) that the discrete-time system (2) is power stable if and only if $r(F) < 1$, where $r(F)$ is the spectral radius:

$$r(F) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(F)\}.$$

The transformation

$$F \mapsto F_d = \frac{2}{h}(F - I)(F + I)^{-1}$$

maps in the same way the spectrum of F:

$$\varphi : \lambda \mapsto \mu = \frac{2}{h}(\lambda - 1)(\lambda + 1)^{-1}, \quad \lambda \neq -1.$$

The spectrum of F is in the interior of the unit ball if and only if $\sigma(F_d) \subset C_{-\beta}$, because the application φ maps the open unit ball into the open left half plane. On the other hand the condition $\sigma(F_d) \subset C_{-\beta}$ is equivalent to the existence of positive solution of the Lyapunov equation [3]: $F_d^* P + P F_d = -Q$, with self-adjoint, positive definite operator Q.

3.2. Stabilizability

The above result on stability induce similar criterion on stabilizability.

Definition 2. *The system (1) is said stabilizable iff there exists a linear bounded operator K such that the semigroup generated by $A+BK$ is exponentially stable. The system (6) is power stable iff there exists a linear bounded operator K_d such that $F_d + G_d K_d$ is power stable.*

There are several conditions of exponential and power stabilizability. All the known conditions may be extended to the pseudo-continuous system (6) provided that $F_d + G_d K_d$ is power stable iff $\sigma(F_d + G_d K_d) \subset C_{-\beta}$ for some positive β. In particular, the stabilizability condition may be formulated via the solution of a Riccati equation.

Theorem 4. *The system (6) is stabilizable if and only if there exist a positive operator P_d such that:*

$$F_d^* P_d + P_d F_d - P_d G_d G_d^* P_d + Q = 0,$$

and the stabilizing feedback is given by $K_d = -G_d^* P_d$. The relation between the feedback K_d and the feedback stabilizing the discrete-time system (2), say K, is *given by* $K_d = 2K(F+GK+I)^{-1}$, *and* $K = (2I - K_dG)^{-1}K_d(F+I)$, *under the condition that* $2 \in \rho(K_dG)$, *where* $\rho(.)$ *is the resolvent set of the given operator.*

Proof. The condition of power stability implies the condition of stabilizability using the Riccati equation (cf. [9]).
Suppose that K is the stabilizing feedback for the system (2), then $u_k = Kx_k$ is the stabilizing control and $x_{k+1} = (F + GK)x_k$ is the closed loop state. Then

$$2z_k = (F + GK)x_k + x_k,$$

which gives

$$x_k = 2(F + GK + I)^{-1}z_k,$$

the bounded invertibility of the operator $F + GK + I$ is garanted by the stability condition of $F + GK$. Hence,

$$u_k = 2(F + GK + I)^{-1}z_k,$$

is the stabilizing feedback for the pseudo-continuous system (6). In an analogous way, under the assumption that $2 \in \rho(K_dG)$, one obtains

$$K = (2I - K_dG)^{-1}K_d(F + I),$$

which ends the proof.

Hence, the Riccati equation for the system (6) is of the same form as for the continuous-time system. Note that as A and A^* are not defined on all the space X, the corresponding Lyapunov and Riccati equations are given on $\mathcal{D}(A)$ (see [3, 9]).

4. Further control problems

The approach developed in Section 2 and 3 may be also extended to other control problems: linear quadratic optimal control problem, detectability, asymptotic observers, etc.

For the problem of detectability and asymptotic observers, the results can be obtained from Section 3 by duality. All the calculation are the same.

For the linear quadratic optimal control problem one can follow the example considered in [3]. A continuous-time system (A, B, C, D) is induced from a discrete-time system (A_d, B_d, C_d, D_d) by the relations:

$$\begin{aligned} A &= (A_d - I)(A_d + I)^{-1}, \quad & B &= \sqrt{2}(A_d + I)^{-1}B_d, \\ C &= \sqrt{2}C_d(A_d + I)^{-1}, \quad & C &= D_d - C_d(A_d + I)^{-1}B_d, \end{aligned} \tag{12}$$

and the linear quadratic optimal problem is considered for the continuous-time system (A, B, C, D). It is shown that the optimal solution is obtained via a continuous type Riccati equation.

The same calculation may be made for our pseudo-continuous system (6), and as in the finite dimensional case [2], one can obtains similar formulation for the LQ problem.

5. The input-output relation

In this section we show that the transfer function may be calculated in the same way as for the continuous-time system using the state-space expression of the pseudo-continuous system.

Let $\mathcal{L}$ denote the discrete Laplace transform (in fact the so called z-transform). By $\mathcal{L}(x_k)$ we mean the Laplace transform of the sequence $\{x_0, x_1, \ldots\}$. Assume that the initial condition $x_0 = 0$. Then we have $\mathcal{L}(x_{k+1}) = \zeta\mathcal{L}(x_k)$, where ζ is the discrete Laplace variable, and

$$\mathcal{L}(z_k) = \frac{\zeta+1}{2}\mathcal{L}(x_k), \quad \mathcal{L}(\Delta z_k) = \frac{\zeta-1}{h}\mathcal{L}(x_k).$$

From both relations, we obtain

$$\mathcal{L}(\Delta z_k) = \frac{2}{h}\frac{\zeta-1}{\zeta+1}\mathcal{L}(z_k).$$

Putting

$$\omega = \frac{2}{h}\frac{\zeta-1}{\zeta+1}, \tag{13}$$

we get

$$\mathcal{L}(\Delta z_k) = \omega\mathcal{L}(z_k),$$

which gives the Laplace transform of the pseudo-derivative. Applying this calculus to the pseudo-continuous system (6), leads to

$$\mathcal{L}(y_k) = \left[H_d(\omega I - F_d)^{-1}G_d + E_d\right]\mathcal{L}(u_k).$$

This means that the input-output relation is given by the transfer function

$$\Theta(\omega) = H_d(\omega I - F_d)^{-1}G_d + E_d.$$

The relation (13) between the Laplace variables of the discrete-time system (2) and the pseudo-continuous system (6) is also a Tustin transform like the transform (3), but is applied to the exact discrete system (2) in order to obtain a (pseudo) continuous-time system which is also exact, closed to the continuous-time system (1) and with similar properties. Hence, this approach is quite different from the classical one.

6. Conclusion

From a continuous-time system and its direct discretized system was obtained a pseudo-continuous time system with properties similar to continuous system. Several control problems have the same formulation and characterization for the pseudo-continuous and continuous-time systems. This allows to have the same framework for continuous-time and this kind of discrete-time system. Then, results obtained for continuous system may be extended in an analogous way to the pseudo-continuous systems where the state remains discrete.

REFERENCES

1. Curtain R. F., Pritchard A. J. Infinite dimensional linear systems theory. Berlin: Springer-Verlag, – 1978. – 297 p.
2. Bergeon B. Une autre représentation d'état pour la commande a temps discret. //Séminaire du Groupe de Travail en Commande Robuste, IRCCyN, Nantes, 25 mai 1999.
3. Curtain R. F., Zwart H. J. An Introduction to infinite-dimensional linear systems theory. – New York: Springer-Verlag, – 1995. – 698 p.
4. Ober R. J., Montgomery-Smith S. Bilinear transformation of infinite dimensional state space systems and balanced realizations of non-rational transfer functions. // SIAM J. Control and Optimization, – 1990. – **28**. – P. 439–465.
5. Logemann H. Stability and stabilizability of linear infinite-dimensional discrete-time systems. // IMA J. of Mathematical Control & Information, – 1992. – **9**. – P. 255–263.
6. Ober R. J., Wu Y. Infinite dimensional continuous-time linear systems: stability and structure analysis. // SIAM J. Control and Optimization, – 1996. – **34**. – P. 757–812.
7. Pazy A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. – New York: Springer-Verlag, – 1983. – 279 p.
8. Przyłuski K. M.Stability of linear infinite-dimensional systems revisited. // Int. J. Control, – 1988. – **48**. – P. 513–523.
9. Zabczyk J. Mathematical control theory. – Boston: Birkhäuser, – 1992. – 260 p.

Вісник Харківського національного університету
Серія "Математика, прикладна математика і механіка"
УДК 517.958+536.71 № 514, 2001, с. 63–72

Идентификация математической модели линейной одномерной управляемой системы

А. С. Сохин

Харьковский национальный университет, Украина

В статье ставится и решается задача идентификации математической модели системы управления, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением произвольного порядка по наблюдаемым финальным состояниям системы при импульсных управлениях. *2000 Mathematics Subject Classification* 93B30.

При исследовании систем автоматического управления типичным является случай, когда наперед известна структура математической модели системы и неизвестны некоторые ее параметры. Задачей идентификации называется задача определения этих параметров по некоторым экспериментально наблюдаемым значениям состояния системы при ее функционировании.

Пусть имеется равновесная линейная нестационарная система управления, состояние которой определяется скалярной функцией $y(t)$, удовлетворяющей обыкновенному дифференциальному уравнению произвольного порядка

$$y^{(n+1)} = A(t)y + B(t)u, \quad t \in (0, \infty), \tag{1}$$

и начальным условиям

$$y^{(i)}\Big|_{i=0,\ldots,n} = 0, \quad t = 0. \tag{1'}$$

Здесь A и B – нестационарные дифференциальные операторы вида

$$A(y) = A(t)y = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)y^{(i)}, \quad B(u) = B(t)u = \sum_{j=0}^{m} b_j(t)u^{(j)}, \ 0 \le m \le n, \ \ b_m \neq 0$$

с неизвестными достаточно гладкими быстро убывающими при $t \to \infty$ коэффициентами. Систему (1) – (1′) обозначим $\{A, B\}$. Функция $u(t)$, называемая управлением или входом системы, принадлежит семейству функций, зависящих от скалярного параметра. Оператор A описывает влияние среды на функционирование системы, оператор B описывает структуру управляющего устройства.

Коэффициенты сопряженного оператора

$$A^*(z) \equiv A^*(t)z = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(a_i z)^i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\widetilde{a}_i(t)z)^{(i)}$$

выражаются через коэффициенты исходного оператора по формулам

$$(-1)^i\widetilde{a}_i(t) = \sum_{\alpha=i}^{n}(-1)^\alpha c^i_\alpha a^{(\alpha-i)}_\alpha(t), \quad i=0,\ldots,n, \quad c^i_\alpha = \frac{i!}{i!(\alpha-i)!}. \tag{2}$$

Аналогично находим коэффициенты

$$(-1)^i\widetilde{b}_i(t) = \sum_{\alpha=i}^{m}(-1)^\alpha c^i_\alpha b^{(\alpha-i)}_\alpha(t), \quad i=0,\ldots,m, \tag{2'}$$

сопряженного оператора B^*.

Уравнения $y^{(n+1)} = A(t)(y)$, $(-1)^{n+1}z^{(n+1)} = A^*(t)(z)$ при $0 < t < \infty$ называются, соответственно, однородным уравнением и однородным сопряженным уравнением, отвечающими уравнению (1). Систему $\{A, I\}$, где I – тождественный оператор, назовем простейшей. Состояние системы $\{A, B\}$ определяется равенством

$$y(t) = \int_0^t g(t,s)B(u)ds, \tag{3}$$

где $g(t,s)$ – функция Коши, то есть функция, удовлетворяющая однородному уравнению

$$\frac{d^{n+1}g}{dt^{n+1}} = A(t)g(t,s), \quad t\in(s,\infty), \tag{4}$$

и начальным условиям

$$\left.\frac{d^i g}{dt^i}\right|_{i=0,\ldots,n-1} = 0, \quad \frac{d^n g}{dt^n} = 1, \quad t = s. \tag{4'}$$

Подставляя в равенство (3) вместо $B(u)$ его значение из уравнения (1) и интегрируя по частям, получим, что функция $g(t,s)$ по переменной s удовлетворяет сопряженному однородному уравнению

$$(-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}g}{ds^{n+1}} = A^*(s)g(t,s), \quad s\in(0,t), \tag{5}$$

и финальным условиям

$$\left.\frac{d^i g}{ds^i}\right|_{i=0,\ldots,n-1} = 0, \quad \frac{d^n g}{ds^n} = (-1)^n, \quad t = s. \tag{5'}$$

Появляющиеся при интегрировании по частям внеинтегральные слагаемые равны нулю в силу начальных условий $(1')$ и $(4')$.

В качестве выхода системы будем рассматривать наблюдаемое экспериментально состояние системы при $t \to \infty$. Подавая управления, зависящие от параметра, будем иметь коэффициенты асимптотики, зависящие от параметра. Задача идентификации состоит в определении неизвестных параметров-функций $a_i(t)$, $i = 0, \ldots, n$, $b_j(t)$, $j = 0, \ldots, m$, по наблюдаемым коэффициентам асимптотики. Функция $g(t,s)$, продолженная нулем для $t < s$, называется весовой функцией простейшей системы. Она является реакцией системы на импульсное управление $\delta_s(t)$, сосредоточенное при $t = s$ ($\delta_s(t)$ – функция Дирака). В качестве выхода простейшей системы будем рассматривать асимптотику весовой функции

$$g(t,s) = \sum_{\alpha=0}^{n} \frac{t^\alpha}{\alpha!} c_n(s) + o(1), \quad t \to \infty. \tag{6}$$

Коэффициенты асимптотики находятся предельным переходом по формулам

$$c_n(s) = \lim_{t\to\infty} \frac{g(t,s)}{t^n/n!}, \quad c_{n-1}(s) = \lim_{t\to\infty} \frac{g(t,s) - c_n t^n/n!}{t^{n-1}/(n-1)!}, \quad \ldots,$$

$$c_0(s) = \lim_{t\to\infty} \left(g(t,s) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \frac{t^k}{k!} \right). \tag{6'}$$

В [1] рассматривается задача идентификации системы $\{A, B\}$ по известной весовой функции. Другие задачи идентификации в простейших постановках рассматриваются в [2], [3]. В данной работе решается задача идентификации по технически естественным минимально необходимым экспериментально наблюдаемым финальным состояниям системы.

Рассмотрим пространства функций, в нормах которых будем оценивать решение исследуемых уравнений. В работе используется октаэдрическая норма вектора и отвечающая ей норма матрицы. Норму вектора a будем обозначать $|a|$, определитель матрицы, составленной из столбцов A^1, A^2, …, A^n, как $|A^1, A^2, \ldots, A^n|$.

Лемма 1. *Пусть* $(1+t^{2n})a_i^{(i)} \in L_1(0,\infty)$, $i = 0, \ldots, n$. *Тогда*

$$(1+t^{2n-i})a_i, \ (1+t^{2n})\widetilde{a}_i^{(i)}, \ (1+t^{2n-i})\widetilde{a}_i^{(i)} \in L_1(0,\infty), \quad i = 0, \ldots, n.$$

В справедливости леммы можно убедится непосредственной проверкой.

Обозначим $p(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$, $m(t) = \max\limits_{k=0,\ldots,n} \frac{t^k}{k!}$, $t \ge 0$, $\rho(t) = m(t)p(t)$, $\bar{\rho}(t) = 1 + t^{2n}$, $t \ge 0$, $\alpha(t) = \rho(t)|a(t)|$, $\check{\alpha}(t) = \int\limits_t^\infty \alpha(s)ds$, $\beta(t) = \rho(t)|\widetilde{a}(t)|$, $\check{\beta}(t) = \int\limits_t^\infty \beta(s)ds$, $L_{1,\rho}(0,\infty)$ – множество вектор-функций с компонентами $a_i(t)$, $i = 0, \ldots, n$, подчиненных условию $\rho(t)a_i(t) \in L_1(0,\infty)$.

Лемма 2. *Пространства* $L_{1,\rho}(0,\infty)$ *и* $L_{1,\tilde{\rho}}(0,\infty)$ *эквивалентны.*

В справедливости леммы можно легко убедится при помощи оценок степенных функций t^i, $i=1,\ldots,n-1$, через функцию $1+t^n$.

Пусть $L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty)$ – множество вектор-функций с компонентами $a_i(t)$, $i=0,\ldots,n$, удовлетворяющими условию $\rho^{(t)}a_i^{(\alpha)}\in L_1(0,\infty)$, $\alpha=0,\ldots,i$.

Лемма 3. *Пусть* a, b, $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ *– вектор-функции коэффициентов операторов* A, B, A^*, B^* *соответственно.*

Тогда из $a,b\in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty)$ *следует* $\tilde{a},\tilde{b}\in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty)$, *и обратно, из* $\tilde{a},\tilde{b}\in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty)$ *следует* $a,b\in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty)$.

Доказательство нетрудно получить из представления $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ по формулам (2) и (2′) через a и b и таких же обратных представлений.

Теорема 1. *При* $a\in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty)$ *существуют линейно независимые решения* $\varphi_i(t)$, $i=0,\ldots,n$ *однородного уравнения и линейно независимые решения* $\psi_i(t)$, $i=0,\ldots,n$, *сопряженного однородного уравнения, имеющие асимптотику* $\varphi_i(t)=t^i/i!+\mathrm{o}(1)$, $\psi_i(t)=(-t)^i/i!+\mathrm{o}(1)$, $t\to\infty$.

Доказательство. Введем обозначения

$$e(t)=(1,t,\ldots,t^n/n!)^*,\quad E(t)=\left(e(t),e'(t),\ldots,e^{(n)}(t)\right),\quad \varphi=(\varphi_0,\ldots,\varphi_n)^*,$$

$$\Phi(t)=\left(\varphi,\varphi',\ldots,\varphi^{(n)}\right),\quad e_-(t)=(1,-t,\ldots,(-t)^n/n!)^*,$$

$$E^-(t)=\left(e_-,-e_-',\ldots,(-1)^n e_-^{(n)}\right),\quad \Psi(t)=\left(\psi,-\psi',\ldots,(-1)^n\psi^{(n)}\right).$$

Тогда вектор-функция $\varphi(t)$ и матрица-функция $\Phi(t)$ удовлетворяют интегральным уравнениям Вольтерра

$$\varphi(t)=e(t)+(-1)^{n+1}\int\limits_t^\infty\frac{(s-t)^n}{n!}A(s)\varphi(s)ds=e(t)+(-1)^{n+1}\int\limits_t^\infty\frac{(s-t)^n}{n!}\Phi(s)a(s)ds.$$

$$\Phi(t)=E(t)+\int\limits_t^\infty\Phi(s)\left((-1)^{n+1}\frac{(s-t)^n}{n!}a(s),(-1)^n\frac{(s-t)^{n-1}}{(n-1)!}a(s),\ldots,-a(s)\right)ds.$$

Для доказательства существования и единственности решения интегральных уравнений достаточно исследовать сходимость соответствующих рядов Неймана, суммы которых являются решением интегральных уравнений. Обозначим $I_n(z)=(-1)^{n+1}\int\limits_t^\infty\frac{(s-t)^n}{n!}z(s)ds$, тогда интегральные уравнения приобретают вид

$$\varphi=\varphi_{(0)}+I_n(A\varphi)=\varphi_{(0)}+I_n(\Phi a),\quad \varphi_{(0)}=e(t),$$

$$\Phi=\Phi_{(0)}+\left(I_n(\Phi a),I_{n-1}(\Phi a),\ldots,I_0(\Phi a)\right),\quad \Phi_{(0)}=E(t),$$

а члены рядов Неймана $\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{(k)}$, $\Phi = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_{(k)}$, имеют следующий вид

$$\varphi_{(0)} = e(t), \quad \varphi_{(k+1)} = I_n(A\varphi_{(k)}) = I_n(\Phi_{(k)}a), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

$$\Phi_{(0)} = E(t), \quad \Phi_{(k+1)} = \Big(I_n(\Phi_{(k)}a), I_{n-1}(\Phi_{(k)}a), \ldots, I_0(\Phi_{(k)}a)\Big), \quad k = 0, 1, \ldots$$

Принимая во внимание, что $p(t) \geq 0$ при $t \geq 0$, находим следующие оценки членов рядов Неймана:

$$\|\Phi_{(0)}(t)\| = p(t), \quad \|\Phi_{(1)}(t)\| \leq \int_t^{\infty} m(s)|a(s)|\|\Phi_{(0)}(s)\|ds \leq \check{\alpha}(t),$$

$$\|\Phi_{(k+1)}(t)\| \leq \int_t^{\infty} m(s)|a(s)|\,\|\Phi_{(k)}(s)\|ds \leq \int_t^{\infty} \alpha(s)\|\Phi_{(k)}(s)\|ds, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Из последнего неравенства следует, что $\|\Phi_{(k)}(t)\| \leq [\check{\alpha}(t)]^k/k!$, $k = 1, 2, \ldots$. Аналогично, учитывая неравенство $s^n/n! \leq m(s)$, находим

$$|\varphi_{(0)}(t)| \leq p(t), \ |\varphi_{(1)}(t)| \leq \check{\alpha}(t), \ |\varphi_{(k+1)}(t)| \leq \int_t^{\infty} \alpha(s)\|\Phi_{(k)}(s)\|ds, \ k = 1, 2, \ldots,$$

и, следовательно, $|\varphi_{(k)}(t)| \leq [\check{\alpha}(t)]^k/k!$, $k = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, ряды Неймана сходятся и справедливы оценки

$$|\varphi(t) - e(t)| \leq \exp(\check{\alpha}(t)) - 1, \quad \|\Phi(t) - E(t)\| \leq \exp(\check{\alpha}(t)) - 1. \tag{7}$$

Для решений сопряженного уравнения аналогично получаем

$$|\psi(t) - e_-(t)| \leq \exp\Big(\check{\beta}(t)\Big) - 1, \quad \|\Psi(t) - E_-(t)\| \leq \exp\Big(\check{\beta}(t)\Big) - 1. \tag{7'}$$

Замечая, что $E_-(t) = E^{-1}(t)$, $E(t)E_-(s) = E(t-s)$, нетрудно получить также такую оценку:

$$\|E\Psi(t) - I\| \leq \exp\Big(\check{\beta}(t)\Big) - 1. \tag{7''}$$

Заметим, что $\exp\Big(\check{\beta}(t)\Big) - 1 \to 0$ при $t \to \infty$.

Нетрудно проверить непосредственно, что весовую функцию можно представить в виде

$$g(t,s) = \frac{|\varphi(s), \varphi'(s), \ldots, \varphi^{(n-1)}(s), \varphi(t)|}{|\varphi(s), \varphi'(s), \ldots, \varphi^{(n)}(s)|}, \quad t > s. \tag{8}$$

Разлагая определитель в числителе формулы (8) по элементам последнего столбца, получим

$$g(t,s) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(t) d_i(s), \quad t > s, \tag{8'}$$

где $d_i(s) = \Delta_{in}(s)/\Delta(s)$, $\Delta_{in}(s)$ – алгебраическое дополнение i-го элемента n-го столбца, $\Delta(s)$ – определитель, записанный в знаменателе формулы (8). В силу асимптотики для функций $\varphi(t)$ заключаем, что $d_i(s) = c_i(s)$, $i = 0, \dots, n$. Аналогично рассуждая, на основании того, что функция $g(t,s)$ является по s решением сопряженной задачи (5)–(5′), получаем равенство

$$g(t,s) = (-1)^n \frac{|\psi(t), \psi'(t), \dots, \psi^{(n-1)}(t), \psi(s)|}{|\psi(t), \psi'(t), \dots, \psi^{(n)}(t)|}, \quad t > s. \tag{9}$$

Аналогично равенству (8′), равенство (9) можно записать в виде

$$g(t,s) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i(s) r_i(t), \quad t > s, \tag{9′}$$

где $r_i(t) = \widetilde{\Delta}_{in}/\widetilde{\Delta}(t)$, $\widetilde{\Delta}_{in}(t)$ – алгебраическое дополнение i-го элемента n-го столбца, $\widetilde{\Delta}(t)$ – определитель, записанный в знаменателе формулы (9). Так как функция $g(t,s)$ по переменной t удовлетворяет однородному уравнению, а по переменной s удовлетворяет однородному сопряженному уравнению, то из равенств (8′) и (9′) заключаем, что $d_i(s)$, $i = 0, \dots, n$, являются решениями однородного сопряженного уравнения, а функции $r_i(t)$, $i = 0, \dots, n$, являются решениями однородного уравнения.

Теорема 2. *Функция $g(t,s)$ при $t > s$ является решением интегрального уравнения*

$$g(t,s) = \frac{(t-s)^n}{n!} + \int_s^t \frac{(t-\sigma)^n}{n!} A(\sigma) g(\sigma,s) d\sigma \tag{10}$$

и для нее справедливы следующие оценки

$$|A(t)g(t,s)| \le \delta(t) \exp\left(\int_s^t \delta(\sigma) d\sigma\right), \quad 0 \le s \le t, \tag{11}$$

$$|g(t,s)| \le \frac{(t-s)^n}{n!} \exp\left(\int_s^t \delta(\sigma) d\sigma\right), \quad 0 \le s \le t, \tag{11′}$$

где $\delta(\sigma) = \sum_{k=0}^{n} \sigma^{n-k} |a_k(\sigma)|/(n-k)!$.

Доказательство. Очевидно, интегральное уравнение (10) эквивалентно дифференциальной задаче (4)–(4′). Существование и единственность решения уравнения (10) легко доказать исследованием сходимости ряда Неймана $g(t,s) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k$, где $g_0 = (t-s)^n/n!$, $g_k = \int_s^t \frac{(t-\sigma)^n}{n!} A(\sigma) g_{k-1}(\sigma,s) d\sigma$, $k = 1, 2 \dots$ Сумма ряда Неймана является искомым решением. Заметим, что $A(\sigma)g(\sigma,s) = G(\sigma,s)a(\sigma)$, где $G(\sigma,s) = (g(\sigma,s), dg(\sigma,s)/d\sigma, \dots, d^n g(\sigma,s)/d\sigma^n)^*$.

Тогда для функции $g(t,s)$ и вектор-функции $G(t,s)$ получить оценки $(11')$ и (11) можно непосредственно. Из интегрального равенства (10) находим асимптотику функции

$$g(t,s)=\sum_{i=0}^{n}\frac{t^i}{i!}\left[\frac{(-s)^{n-i}}{(n-i)!}+\int_s^\infty\frac{(-\sigma)^{n-i}}{(n-i)!}G(\sigma,s)\cdot a(\sigma)d\sigma+\varepsilon_i(t,s)\right],\quad t\to\infty.$$

Остаток $\varepsilon_i(t,s)=-\int\limits_t^\infty\frac{(-\sigma)^{n-i}}{(n-i)!}G(\sigma,s)a(\sigma)d\sigma\to 0$ при $t\to\infty$ в силу оценки (1) и условия $a\in L_{1,\rho}(0,\infty)$. Сопоставляя последнее равенство с равенством $(8')$ и учитывая асимптотику $\varphi_i(t)$ при $t\to\infty$, находим асимптотику

$$d_i(s)=\frac{(-s)^{n-1}}{(n-i)!}+\int_\delta^\infty\frac{(-\sigma)^{n-i}}{(n-i)!}G(\sigma,s)a(\sigma)d\sigma=\frac{(-s)^{n-i}}{(n-i)!}+\mathrm{o}(1),\quad s\to\infty.$$

Таким образом, $d_i(s)=\psi_{n-i}(s)$, $i=0,\ldots,n$, т.е. коэффициенты асимптотики являются решениями сопряженного уравнения, имеющими указанную асимптотику.

Окончательно имеем представление весовой функции через решения однородного и однородного сопряженного уравнения

$$g(t,s)=\sum_{i=0}^{n}\varphi_i(t)\psi_{n-i}(s),\quad t>s.\tag{12}$$

Сравнивая равенства $(8')$ и $(9')$, заключаем, что $r_i(t)=\varphi_{n-i}(t)$, $i=0,\ldots,n$.

Определим теперь коэффициенты однородного сопряженного уравнения через наблюдаемые экспериментально линейно независимые решения этого уравнения с указанной асимптотикой. Подставляя их в однородное сопряженное уравнение, получим систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов $\widetilde{a}_i(s)$ в векторной форме

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\psi^{(i)}\widetilde{a}_i(s)=(-1)^{n+1}\psi^{(n+1)}(s),\quad s\in(0,\infty),\tag{13}$$

или в матричной форме

$$\Psi(s)\widetilde{a}(s)=(-1)^{n+1}\psi^{(n+1)}(s).\tag{13'}$$

Решение определяется по формуле

$$\widetilde{a}(s)=(-1)^{n+1}\Psi^{-1}(s)\psi^{(n+1)}(s)\tag{13''}$$

или по формулам Крамера $\widetilde{a}_i(s)=\widetilde{\Delta}_i(s)/\widetilde{\Delta}(s)$, $i=0,\ldots,n$, в которых определитель $\widetilde{\Delta}_i(s)$ получаем из определителя $\widetilde{\Delta}(s)=|\psi(s),-\psi'(s),\ldots,(-1)^n\psi^{(n)}(s)|$ заменой i-го столбца $(-1)^i\psi^{(i)}$, $i=0,\ldots,n$, на столбец $(-1)^{n+1}\psi^{(n+1)}(s)$.

Определитель $\widetilde{\Delta}(s) \neq 0$ в силу линейной независимости столбцов ψ, ψ', ..., $\psi^{(n)}$. Так как $A^{**}(s) = A(s)$, то коэффициенты $a_i(s)$ выражаются через коэффициенты $(-1)^i \widetilde{a}_i(s)$ по таким же как (2) формулам

$$a_i(s) = \sum_{\alpha=i}^{n} (-1)^{\alpha} c_{\alpha}^{i} (-1)^{\alpha} \widetilde{a}_{\alpha}^{(\alpha-1)}(s), \quad i = 0, \ldots, n.$$

Вектор-функцию $f(s)=\psi(s)-e_{-}(s)$ назовем вектором наблюдений системы $\{A, I\}$, матрицу $F(s)=(f, -f', \ldots, (-1)^n f^{(n)}(s))$ – матрицей наблюдений.

Приведем некоторые важные в дальнейшем свойства наблюдаемых величин, вытекающие из предыдущих рассуждений.

1. $\|E(s)F(s)\| < \infty$ для всех $s \in [0, \infty]$ и $\lim\limits_{s\to\infty} \|E(s)F(s)\| = 0$.

2. $Ef^{(n+1)} \in L_{1,\rho}(0, \infty)$, что следует из формулы (13) на основании равенства $f^{(n+1)} = \psi^{(n+1)}$.

Так как $\det(E) = 1$, то $\det(E\Psi) = \det(\Psi)$. Матрица $\Psi(s)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\Psi' = \Psi(I^2, \ldots, I^n, \widetilde{a})$, $0 < s < \infty$, где I^k есть k-й столбец единичной матрицы размерности $(n+1)\times(n+1)$.

По теореме Лиувилля определитель $\widetilde{\Delta}(s) = \det(\Psi)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\widetilde{\Delta}' = \mathrm{spur}(I^2, \ldots, I^n, \widetilde{a})\widetilde{\Delta}$, $0 < s < \infty$. Очевидно $\mathrm{spur}(I^2, \ldots, I^n, \widetilde{a}) = \widetilde{a}_n(s)$, так что $\widetilde{\Delta}' = a_n(s)\widetilde{\Delta}(s)$, $0 < s < \infty$. В силу равенства $\lim\limits_{s\to\infty} \|E(s)F(s)\| = 0$ имеем $\widetilde{\Delta}(\infty) = 1$. Следовательно, $\widetilde{\Delta}(s) = \exp\left(-\int\limits_s^{\infty} \widetilde{a}_n(s)ds\right)$ и $|\widetilde{\Delta}(s)| \geq \exp(-\check{\beta}(0)) = d > 0$.

Таким образом, имеем

3. $\det(I + E(s)F(s)) \geq d > 0$ равномерно по $s \in [0, \infty]$.

Так как $a \in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0, \infty)$, то по лемме 3 $\widetilde{a} \in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0, \infty)$. В силу равенства $\widetilde{a} = (-1)^{n+1}(I + EF)^{-1}Ef^{(n+1)}$ получаем, что

4. $(I + EF)^{-1}Ef^{(n+1)} \in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0, \infty)$.

Определим теперь коэффициенты оператора B. Пусть последовательность управлений $u_k(s, \zeta)$, $k=1, 2, \ldots$ является δ-образующей последовательностью функций. Тогда в равенстве (3) после интегрирования по частям получим $y_k(t, \zeta) = \int\limits_0^t w(t, s)u_k(s, \zeta)ds$, где функция $w(t, s) = B^*(s)g(t, s)$, продолженная нулем для $t < s$, называется весовой функцией системы $\{A, B\}$.

Внеинтегральные слагаемые равны нулю в силу сосредоточенности функций $u_k(s, \zeta)$ в окрестности точки ζ для всех $k = 1, 2, \ldots$. Подставляя вместо $g(t, s)$ ее выражение из формулы (12), получим

$$y_k(t, \zeta) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(t) \int\limits_0^{\infty} B^*(s)[\psi_i(s)]u_k(s, \zeta)ds + o(1), \quad t \to \infty.$$

Так что наблюдаемые величины при конечных $k = 1, 2\ldots$ есть

$$c_{i,k}(\zeta) = \int\limits_0^\infty B^*(s)[\psi_i(s)]u_k(s,\zeta)ds + \mathrm{o}(1), \quad i = 0,\ldots,n,$$

при управлениях $u_k(s,\zeta)$. В пределе при $k \to \infty$, так как в слабом смысле $u_k(s,\zeta) \to \delta_\zeta(s)$, можем считать известными предельные значения $c_{i,k}$:

$$\lim_{k\to\infty} c_{i,k}(s) = q_i(s) = B^*(s)\psi_i(s), \quad i = 0,\ldots,n.$$

В векторной форме последнее равенство имеет вид

$$B^*(s)\psi_i(s) = q(s) = (q_0,\ldots,q_n)^*. \tag{14}$$

Если $m < n$, то введем вектор $\tilde{\tilde{b}} = (\tilde{b}_0,\ldots,\tilde{b}_m, 0,\ldots 0)$ размерности $n{+}1$. Тогда равенство (14) является системой линейных алгебраических уравнений относительно вектор-столбца $\tilde{\tilde{b}}$ вида

$$\Psi(s)\tilde{\tilde{b}}(s) = q(s), \tag{14$'$}$$

из которого находим $\tilde{\tilde{b}} = (E\Psi)^{-1}Eq$. Решение можно найти также по формулам Крамера $\tilde{\tilde{b}}_j = \frac{\tilde{\Delta}_j(q)}{\tilde{\Delta}}$, $i = 0,\ldots,n$, где $\tilde{\Delta} = \det(I + EF)$, а определитель $\tilde{\Delta}_i(q)$ получаем заменой j-го столбца $I^{j+1} + Ef^{(j)}$ на столбец Eq, $j = 0,\ldots,n$. Если $m < n$, то $\tilde{b}_j = 0$, $i > m$, и имеем связи между наблюдаемыми q_0, q_1, $\ldots$, q_n следующего вида

$$\tilde{\Delta}_j(q) = 0, \quad i = m{+}1,\ldots,n. \tag{15}$$

По найденным $\tilde{b}_j(s)$, $j = 0,\ldots,m$, находим коэффициенты $b_j(s)$, $j = 0,\ldots,m$, оператора B по формулам $b_j(s) = \sum\limits_{\alpha=j}^{m}(-1)^\alpha c_\alpha^j(-1)^\alpha b_\alpha^{(\alpha-j)}(s)$.

Вектор-функции $\{f(s), q(s),\ 0{<}s{<}\infty\}$ назовем данными наблюдений для системы $\{A, B\}$ для искомых $a, b \in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty) \bigcap L_{1,\rho}(0,\infty)$. Как и раньше устанавливаем, что наблюдение $q(s)$, $0{<}s{<}\infty$, обладает свойствами:

5. $Eq{\in}L_{1,\rho}(0,\infty)$.
6. $(I + EF)^{-1}Eq{\in}L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty)$.

Покажем теперь, что приведенные свойства достаточны для решения задачи идентификации в классе искомых функций из $L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty) \bigcap L_{1,\rho}(0,\infty)$. Из свойств 1, 2 и 3 вытекает, что $\|(I{+}EF)^{-1}\| < \infty$ равномерно по $s \in [0,\infty]$ и, значит, $\tilde{a} = (-1)^{n+1}(I{+}EF)^{-1}Ef^{(n+1)} \in L_{1,\rho}(0,\infty)$. Свойство 4 утверждает, что $\tilde{a} \in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty)$. По лемме 3 имеем, что $a \in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty) \bigcap L_{1,\rho}(0,\infty)$. Из свойств 5 и 1 аналогично следует, что $\tilde{b} \in L_{1,\rho}(0,\infty)$, из свойства 6 следует, что $\tilde{b} \in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty)$, и, следовательно, $b \in L_{1,\rho}^{(0,\ldots,n)}(0,\infty) \bigcap L_{1,\rho}(0,\infty)$.

Теорема 3. *При условии* $a, b \in L_{1,\rho}^{(0,\dots,n)}(0,\infty)\bigcap L_{1,\rho}(0,\infty)$ *задача идентификации имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть $\{f(s), q(s)\}$ – наблюдаемые, обладающие свойствами 1 – 6. Пусть $\{a^0(s), b^0(s),\ 0<s<\infty\}$ – решение задачи идентификации, тогда

$$(E_- + F)\widetilde{a}^0 = (-1)^{(n+1)} f^{(n+1)}, \tag{16}$$

$$(E_- + F)\widetilde{b}^0 = q. \tag{16'}$$

Пусть $\{f^0(s), q^0(s),\ 0<s<\infty\}$ – наблюдаемые, найденные по $\{a^0(s), b^0(s),$ $0<s<\infty\}$, тогда справедливы равенства

$$(E_- + EF)\widetilde{a}^0 = (-1)^{n+1}\frac{d^{n+1}f^0}{ds^{n+1}}, \tag{17}$$

$$(E^- + F^0)\widetilde{b}^0 = q^0. \tag{17'}$$

Из (14), (15) следует, что вектор-функция $r(s) = f - f^0$, $s \in (0,\infty)$, удовлетворяет уравнению $(-1)^{n+1} r^{(n+1)} = \sum\limits_{i=0}^{n} \widetilde{a}_i^0 r^{(i)}$ и финальным условия $\lim\limits_{s\to\infty} r^{(\alpha)}|_{\alpha=0,\dots,n} = 0$. В силу единственности решения этой задачи имеем $r(s) \equiv 0$. В силу доказанного равенства $F = F^0$ из равенств (16′) и (17′) следует, что $q = q^0$.

Из приведенных рассуждений вытекает окончательная формулировка условий на данные наблюдения.

Теорема 4. *Для того чтобы вектор-функции* $\{f(s), q(s),\ 0<s<\infty\}$ *являлись данными наблюдения системы* $\{A, B\}$ *при* $a, b \in L_{1,\rho}^{(0,\dots,n)}(0,\infty)\bigcap$ $L_{1,\rho}(0,\infty)$, *необходимо и достаточно:*

1) $Ef^{(n+1)}, Eq \in L_{1,\rho}(0,\infty)$;

2) $\|E(s)F(s)\| < \infty$ *равномерно по* $s \in [0,\infty]$ *и* $\lim\limits_{s\to\infty} E(s)F(s) = 0$;

3) $\det(I + E(s)F(s)) \ge d > 0$ *равномерно на* $[0,\infty]$;

4) $(I + EF)^{-1}Ef^{(n+1)},\ (I+EF)^{-1}Eq \in L_{1,\rho}^{(0,\dots,n)}(0,\infty)$;

5) $\widetilde{\Delta}_j(q) = 0$, $j = (m+1),\dots,n$, *где* $E(s) = (e(s), e'(s), \dots, e^{(n)}(s))$, $e(s) = (1, s, \dots, s^n/n!)^*$ $F = \left(f, -f', \dots, (-1)^n f^{(n)}\right)$, *определитель* $\widetilde{\Delta}_j(q)$ *получается из определителя* $|I + EF|$ *заменой j-го столбца на столбец* Eq.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бублик Б.М., Кириченко Н.Ф. Основы теории управления. – Киев: Выща школа, – 1975. – 326 с.

2. Ройтенберг Я.Н. Автоматическое управление. – М.: Наука, – 1978. – 551 с.

3. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. – М.: Мир, – 1975. – 680 с.