ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ХАРЬКОВСКОГО ГОСУНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVII. Серия 4 1961

КВАЗИАНАЛИТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ФУНКЦИЙ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

В. И. Мацаев, Л. И. Ронкин

В этой заметке мы рассматриваем некоторые обобщения известной теоремы Карлемана о квазианалитических классах на случай функций от любого конечного числа n независимых переменных. Для упрощения письма мы всюду полагаем $n=2$. Будем пользоваться символами

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x,\ y)|^2\,dxdy\right)^{\frac{1}{2}}=\|f\|;\qquad \frac{\partial^{p+q}f(x,\ y)}{\partial x^p\partial y^q}=f_{p,\ q}(x,\ y),$$

а также термином ф и н и т н а я ф у н к ц и я для обозначения функции, равной нулю вне некоторой конечной области, зависящей от функции.

Назовем некоторый класс функций к в а з и а н а л и т и ч е с к и м (I), если в нем нет отличной от нуля функции, обращающейся в некоторой точке в нуль вместе со всеми производными.

Назовем некоторый класс функций к в а з и а н а л и т и ч е с к и м (II), если в нем отсутствует финитная функция, не равная тождественно нулю.

Назовем классом $C(m_{p,\ q})$ совокупность всех бесконечно дифференцируемых вещественных функций $f(x,\ y)\left(-\infty<\begin{matrix}x\\y\end{matrix}<\infty\right)$, для которых

$$|f_{p,\ q}(x,\ y)|<Mr^ps^qm_{p,\ q},$$

где последовательность $\{m_{p,\ q}\}$ характеризует класс, а числа M, r, s свои для каждой функции класса.

Для классов $C(m_n)$ функций одной переменной квазианалитичности (I) и (II) эквивалентны (см. [1]). Для функций от нескольких переменных вопрос о квазианалитичности (II) класса $C(m_{p,\ q})$ был полностью решен в работе Лелона [2].

1°. **Теорема Лелона.** *Для квазианалитичности* (II) *класса* $C(m_{p,\ q})$ *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\{l_n=\min\limits_{p+q=n}m_{p,\ q}\}$ *порождала квазианалитический класс функций одной переменной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о*. Пусть последовательность $\{l_n\}$ порождает квазианалитический класс и класс $C(m_{p,\ q})$ содержит финитную функцию $f(x,\ y)$. Рассмотрим преобразование Фурье $\tilde{f}(z,\ w)$ функции $f(x,\ y)$

$$\tilde{f}(z,\ w)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi,\ \eta)\,e^{iz\xi+iw\eta}d\eta d\xi.$$

---

* Мы сочли нужным поместить здесь доказательство теоремы Лелона, поскольку в [2] эта теорема приведена без доказательства.

Вследствие финитности функции $f(x, y)$ функция $\tilde{f}(z, w)$ есть целая функция конечной степени. С помощью интегрирования по частям эта функция оценивается при вещественных значениях переменных

$$|\tilde{f}(x, y)| \leqslant DMr^p s^q |x|^{-p} |y|^{-q} m_{p,q},$$

где D — площадь области, вне которой функция $f(x, y)$ равна нулю. Положим $w = \alpha z$ $(\alpha > 1)$. Функция $\tilde{f}(z, \alpha z)$ как функция одной переменной z есть целая функция конечной степени, удовлетворяющая на вещественной оси неравенству

$$|\tilde{f}(x, \alpha x)| \leqslant M \inf_{p,q} \frac{(r+s)^{p+q} m_{p,q}}{|x|^{p+q}} = M \left(\operatorname{Sup}_n \frac{|x|^n}{(r+s)^n l_n} \right)^{-1}.$$

Так как по предположению последовательность $\{l_n\}$ порождает квазианалитический класс, то

$$\int_1^\infty x^{-2} \ln T(x)\, dx = \infty \quad \left(T(x) = \operatorname{Sup}_n \frac{x^n}{l_n} \right).$$

Отсюда и из приведенных оценок следует, что при $\alpha > 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\tilde{f}(x, \alpha x)|}{1 + x^2}\, dx = -\infty.$$

По известной теореме Карлемана [3] отсюда следует, что при всех $\alpha > 1$ $\tilde{f}(z, \alpha z) \equiv 0$. Таким образом, $\tilde{f}(z, w) \equiv 0$, а значит и $f(x, y) \equiv 0$.

Доказательство необходимости условий теоремы опирается на следующую теорему * (см. [4]).

Если функция $\alpha(x, y)$ является монотонно растущей функцией от $|x|$, $|y|$ и удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |\alpha(x, x)|}{1 + x^2}\, dx < \infty,$$

то существует целая функция конечной степени $f(z, u)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{x^2 + y^2 \to \infty} \alpha(x, y) f(x, y) = 0.$$

Пусть последовательность $\{l_n\}$ порождает неквазианалитический класс функций одного переменного $C(m_n)$. Тогда функция

$$T(x) = \operatorname{Sup}_n \frac{x^n}{l_n}$$

удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty x^{-2} \ln T(x)\, dx < \infty.$$

* Цитируемая теорема приведена здесь в форме несколько более слабой, чем в [4]. Близкие теоремы для случая функций одной переменной были получены Мандельбройтом [5], В. А. Марченко [6] и Агмоном [7].

Отсюда следует, что функция $T(x, y)(1+x^2+y^2)$, где

$$T(x, y) = \operatorname*{Sup}_{p, q} \frac{|x|^p |y|^q}{m_{p,q}}$$

удовлетворяет условиям цитированной теоремы. Значит существует целая функция конечной степени $\varphi(z, u)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{x^2+y^2\to\infty} \{\varphi(x, y)(1+x^2+y^2)T(x, y)\} = 0.$$

Преобразование Фурье $\tilde{\varphi}(x, y)$ быстро убывающей целой функции конечной степени $\varphi(x, y)$ является функцией финитной и бесконечно дифференцируемой. Покажем, что $\tilde{\varphi}(x, y) \in C(m_{p,q})$. Действительно

$$\left|\tilde{\varphi}_{p,q}(x, y)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} t^p s^q \varphi(s, t) e^{ixt+iys} dt ds\right| \leqslant$$

$$\leqslant D\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|^p |s|^q}{(1+t^2+s^2)T(t, s)} dt ds \leqslant$$

$$\leqslant D_1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{|t|^p|s|^q}{1+t^2+s^2}\inf_{i,j}\frac{m_{i,j}}{|t|^i|s|^j}\right) dt ds \leqslant D_2 m_{p,q},$$

где D, D_1, D_2 — некоторые положительные константы. Теорема доказана.

2°. Рассмотрим теперь вопрос о квазианалитичности (I) класса $C(m_{p,q})$.

Лемма. *Пусть функция $f(x, y)$ такова, что $f_{p,q}(x_0, y_0) = 0$ при всех p, q и при любом k*

$$\|f_{k,0}\| \leqslant M_{k,0}; \quad \|f_{0,k}\| \leqslant M_{0,k},$$

причём каждая из последовательностей $\{M_{k,0}\}$ и $\{M_{0,k}\}$ порождает квазианалитический класс функций одной переменной. Тогда $f(x, y) \equiv 0$.

Доказательство. С помощью чисел $M_{p,0}$ и $M_{0,q}$ оценим интегралы $\int_{-\infty}^{\infty}[f_{p,q}(x, y)]^2 dx$ и $\int_{-\infty}^{\infty}[f_{p,q}(x, y)]^2 dy$. Для этого заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f_{p,q}(x, y)]^2 dx = 2\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{\infty} f_{p,q}(x, y) f_{p,q+1}(x, y) dx dy \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f_{p,q}(x, y) f_{p,q+1}(x, y)| dx dy.$$

Применяя к последнему интегралу неравенство Буняковского, получаем далее, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f_{p,q}(x, y)]^2 dx \leqslant 2\sqrt{\|f_{p,q}\|\cdot\|f_{p,q+1}\|}.$$

Отсюда интегрированием по частям интегралов

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[f_{p,q}(x, y)]^2 dx dy \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[f_{p,q+1}(x, y)]^2 dx dy$$

находим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_{p,q}(x, y)]^2\, dx \leqslant 2\, \| f_{2p,0} \| \sqrt{\| f_{0,2q} \| \cdot \| f_{0,2q+2} \|}.$$

Аналогично получается неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_{p,q}(x, y)]^2\, dx \leqslant 2\, \| f_{2p-1,0} \| \sqrt{\| f_{1,2q} \| \cdot \| f_{1,2q+2} \|}.$$

Из этих неравенств и условия леммы следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_{p,q}(x, y)]^2\, dx \leqslant C_1(q) \min \{M_{2p,0};\ M_{2p-1,0}\}.$$

Точно также получаем неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f_{p,q}(x, y)]^2\, dy \leqslant C_2(p) \min \{M_{0,2q};\ M_{0,2q-1}\}.$$

Обозначим

$$n_p^{(1)} = \min \{\sqrt{M_{2p,0}};\quad \sqrt{M_{2p-1,0}}\}; \qquad T_1(x) = \sup_p \frac{x^p}{M_{p,0}} \quad \hat{T}_1(x) = \sup_p \frac{x^p}{n_p^{(1)}}.$$

Аналогично определяются $n_q^{(2)}$, $T_2(x)$ и $\hat{T}_2(x)$. Так как $\hat{T}_i(x) > T_i(x)$, $i = 1, 2$, а по условию леммы последовательности $\{M_{p,0}\}$ и $\{M_{0,q}\}$ порождают квазианалитические классы, то

$$\int_1^{\infty} x^{-2} \ln \hat{T}_i(x)\, dx \geqslant \int_1^{\infty} x^{-2} \ln T_i(x)\, dx = \infty \quad i = 1,2$$

и значит последовательности $\{n_p^{(1)}\}$, $\{n_p^{(2)}\}$ порождают квазианалитические классы.

Критерий Карлемана — Островского квазианалитичности класса $C(m_p)$ пригоден для класса $L^2(m_p)$ функций, удовлетворяющих неравенствам $\left(\int_{-\infty}^{\infty} (f^{(p)}(x))^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant Ar^p m_p$*. В силу того, что $f_{0,k}(x, 0) \in L^2(n_p^{(1)})$, имеем $f_{0,k}(x, 0) \equiv 0$. Так как при любом фиксированном x функция $f(x,y) \in L^2(n_q^{(2)})$, то отсюда следует, что $f(x, y) \equiv 0$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Для квазианалитичности (I) класса $C(m_{p,q})$ необходимо и достаточно, чтобы каждая из последовательностей $\{m_{0,q}\}$ и $\{m_{p,0}\}$ порождала квазианалитический класс функций от одной переменной.*

Доказательство. Докажем сначала достаточность условий теоремы. Пусть $f(x, y) \in C(m_{p,q})$, $f_{p,q}(0, 0) = 0$ $(p, q = 0, 1, 2, \ldots)$ и пусть последовательности $\{m_{p,0}\}$, $\{m_{0,q}\}$ порождают квазианалитические классы функций от одной переменной. Рассмотрим функцию

$$\hat{f}(x, y) = f(x, y) \frac{\sin x}{x} \frac{\sin y}{y}.$$

* Доказательство этого утверждения мы опускаем, поскольку оно в существенном не отличается от классического доказательства теоремы Карлемана, сводящего эту теорему к проблеме Ватсона (см. [I]).

Оценим $\|\hat{f}_{p,0}\|$ через $m_{p,0}$. Для этого мы воспользуемся неравенством

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(k)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(l)}\right|dx \leqslant \pi \quad (k, l = 0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

которое легко доказывается переходом от функции $\frac{\sin x}{x}$ и ее производных к их преобразованиям Фурье. Действительно, преобразование Фурье функции $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(k)}$ есть функция, равная нулю вне интервала $(-1, 1)$ и равная $\sqrt{\frac{\pi}{2}}(-i\lambda)^k$ при $\lambda \in (-1, 1)$. Отсюда, применяя неравенство Буняковского и равенство Парсеваля, получим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(k)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(l)}\right|dx \leqslant \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(k)}\right|^2 dx}\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{(l)}\right]^2 dx} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\sqrt{\int_{-1}^{1}\lambda^{2k}\,d\lambda}\sqrt{\int_{-1}^{1}\lambda^{2l}\,d\lambda} \leqslant \pi.$$

Из неравенства (1) непосредственно следует оценка

$$\|\hat{f}_{p,0}\|^2 \leqslant \pi^2\left(\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\max_{x,y}|f_{j,0}(x, y)|\right)^2.$$

Применяя к правой части этого неравенства оценки Колмогорова для производных [8], получаем, что

$$\|\hat{f}_{p,0}\| \leqslant A\left(m_{0,0}^{\frac{1}{p}} + r m_{p,0}^{\frac{1}{p}}\right)^p,$$

где A некоторая положительная константа, а r — константа, фигурирующая в определении класса $C(m_{p,q})$. Легко видеть, что вместе с последовательностью $\{m_{p,0}\}$ квазианалитический класс функций одной переменной порождает последовательность $\left\{\left(m_{0,0}^{\frac{1}{p}} + r m_{p,0}^{\frac{1}{p}}\right)^p\right\}$. Действительно, предположим, что $m_{p,0} \to \infty$ при $p \to \infty$. Тогда существует такая константа a, что при всех p будет выполняться неравенство

$$\left(m_{0,0}^{\frac{1}{p}} + r m_{p,0}^{\frac{1}{p}}\right)^p = m_{p,0}\left(r + \sqrt[p]{\frac{m_{0,0}}{m_{p,0}}}\right)^p \leqslant a^p m_{p,0},$$

из которого следует наше утверждение. Если же предположение о стремлении к бесконечности чисел $m_{p,0}$ неверно, то тогда из последовательности $\{n_{p,0}\}$ можно выделить бесконечную ограниченную подпоследовательность. В этом случае непосредственно проверяется, что функция Островского

$$T(x) = \sup_p \frac{x^p}{\left(m_{0,0}^{\frac{1}{p}} + r m_{p,0}^{\frac{1}{p}}\right)^p},$$

начиная с некоторого $x = x_0$ обращается в бесконечность. Следовательно и в этом случае последовательность $\left\{\left(m_{0,0}^{\frac{1}{p}} + rm_{p,0}^{\frac{1}{p}}\right)^p\right\}$ порождает квазианалитический класс функций одной переменной. Точно так же доказывается, что

$$\|\hat{f}_{0,q}\| \leq \left(m_{0,0}^{\frac{1}{q}} + rm_{0,q}^{\frac{1}{q}}\right)^q$$

и что последовательность $\left\{\left(m_{0,0}^{\frac{1}{q}} + rm_{0,q}^{\frac{1}{q}}\right)^q\right\}$ порождает квазианалитический класс функций одной переменной. Вместе с тем очевидно, что $\hat{f}_{p,q}(0, 0) = 0$ при любых p и q. Отсюда на основании леммы заключаем, что $\hat{f}(x, y) \equiv 0$, а значит и $f(x, y) \equiv 0$.

Чтобы доказать необходимость, допустим, что последовательность $\{m_{p,0}\}$ порождает неквазианалитический класс функций одной переменной. Тогда в нем существует финитная функция $\varphi(x) \not\equiv 0$, которая как функция двух переменных x и y, очевидно, принадлежит классу $C(m_{p,q})$ и в некоторых точках обращается в нуль вместе со всеми производными.

Из теоремы Лелона и теоремы 1 вытекает, что для классов $C(m_{p,q})$ функций от нескольких переменных квазианалитичность (I) не эквивалентна квазианалитичности (II).

3°. Рассмотрим вопрос о квазианалитичности некоторых других классов функций. Обозначим через A линейный дифференциальный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами

$$A = \sum_{l=0}^{k} \sum_{i+j=l} a_{i,j}^{(l)} \frac{\partial^l}{\partial x^i \, \partial y^j}.$$

Обозначим также через $L_A^2(m_n)$ класс функций $f(x, y)$, для которых

$$\|A^n f\| < Mr^n m_n,$$

а через $C_A(m_n)$ класс функций, для которых

$$\sup_{x, y} |A^n f(x, y)| < M\, r^n m_n.$$

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 2. *Если A — эллиптический* оператор порядка k, то для квазианалитичности (I) класса $L_A^2(m_n)$ необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\left\{\sqrt[k]{m_n}\right\}$ порождала квазианалитический класс $C\left(\sqrt[k]{m_n}\right)$ функций одной переменной.*

Доказательство. Пусть $f(x, y) \in L_A^2(m_n)$, $f_{p,q}(x_0, y_0) = 0$ при любых p, q и последовательность $\left\{\sqrt[k]{m_n}\right\}$ порождает квазианалитический класс $C\left(\sqrt[k]{m_n}\right)$. Обозначим

$$P(x, y) = \sum_{l=0}^{k} \sum_{i+j=l} a_{i,j}^{(l)} x^i y^j.$$

Обозначим также через $\widetilde{A^n f}$ преобразование Фурье функции $A^n f$. Из равенства Парсеваля и правил дифференцирования преобразования Фурье получаем

$$\|A^n f\| = \|\widetilde{A^n f}\| = \|P^n \cdot \tilde{f}\|.$$

* Условие эллиптичности оператора A существенно.

В силу эллиптичности оператора

$$\min_{x^2+y^2=1} \sum_{i+j=k} a_{i,j}^{(k)} x^i y^j = C_1 > 0.$$

Следовательно, начиная с некоторого $R = R_0$

$$\sup_{x^2+y^2=R^2} |P(x, y)| > C_1 R^k - C_2 R^{k-1} > C_3 R^k,$$

где C_2 и C_3 — некоторые положительные константы. Отсюда следует, что

$$\|A^n f\| \geqslant C_3 \left(\iint_{x^2+y^2>R^2} x^{2nk} |\tilde{f}(x, y)|^2 \, dx dy\right)^{\frac{1}{2}}$$

и поэтому

$$C_3 \| x^{nk} \cdot \tilde{f} \| \leqslant \| A^n f \| + C_4 R_0^{nk} \leqslant M r^n m_n + C_4 R_0^{nk}. \tag{2}$$

Аналогично получается неравенство

$$C_3 \| y^{nk} \cdot \tilde{f} \| \leqslant M r^n m_n + C_4 R_0^{nk}. \tag{3}$$

Применяя равенство Парсеваля, эти неравенства можно записать в следующем виде:

$$\| f_{nk, 0} \| \leqslant \frac{1}{C_3} (M r^n m_n + C_4 R_0^{nk}) \tag{2'}$$

$$\| f_{0, nk} \| \leqslant \frac{1}{C_3} (M r^n m_n + C_4 R_0^{nk}). \tag{3'}$$

Из неравенств (2′) и (3′), используя неравенство Буняковского, получаем также, что $\|f_{p,0}\| < \infty$ и $\|f_{0,q}\| < \infty$ при любых p и q.

Обозначим

$$T(x) = \sup_n \frac{x^n}{\sqrt[k]{\frac{1}{C_3}(M r^n m_n + C_4 R_0^{nk})}} \quad \text{и} \quad T^*(x) = \sup_n \frac{x^n}{\|f_{n,0}\|}.$$

Вместе с последовательностью $\sqrt[k]{m_n}$ квазианалитический класс функций одной переменной порождает и последовательность $\left\{\sqrt[k]{\frac{1}{C_3}(M r^n m_n + C_4 R_0^{nk})}\right\}$. Доказательство этого факта мы опускаем, поскольку оно почти дословно повторяет доказательство аналогичного утверждения относительно последовательности $\left\{\left(m_{0,0}^{\frac{1}{p}} + r m_{p,0}^{\frac{1}{p}}\right)^p\right\}$ (см. теорему 1). Покажем, что последовательность $\|f_{p,0}\|$ также порождает квазианалитический класс функций одной переменной. Действительно

$$\sup_n \frac{x^n}{\|f_{n,0}\|} \geqslant \sup_n \frac{x^{nk}}{\|f_{nk,0}\|}.$$

Далее, используя неравенство (2′), получаем, что

$$\sup_n \frac{x^{nk}}{\|f_{nk,0}\|} \geqslant \sup_n \frac{x^{nk}}{\frac{1}{C_3}(M r^n m_n + R_0^{nk} C_4)} = \sup_n \left(\frac{x^n}{\sqrt[k]{\frac{1}{C_3}(M r^n m_n + C_4 R_0^{nk})}}\right)^k.$$

Откуда

$$T^*(x) \geqslant T^k(x).$$

Так как последовательность $\left\{\sqrt[k]{\frac{1}{C_3}(Mr^n m_n + C_4 R_0^{nk})}\right\}$ порождает квазианалитический класс функций одной переменной, то

$$\int_1^\infty x^{-2} \ln T(x)\, dx = \infty.$$

Следовательно и

$$\int_1^\infty x^{-2} \ln T^*(x)\, dx = \infty.$$

Точно так же доказывается, что последовательность $\|f_{0,q}\|$ порождает квазианалитический класс функций одной переменной. Отсюда, в силу леммы, заключаем, что $f(x, y) \equiv 0$.

Пусть теперь последовательность $\{\sqrt[k]{m_n}\}$ порождает неквазианалитический класс $C(\sqrt[k]{m_n})$. Тогда функция

$$T(x) = \sup \frac{x^n}{\sqrt[k]{m_n}}$$

удовлетворяет условию

$$\int_1^\infty x^{-2} \ln T(x)\, dx < \infty.$$

Следовательно, при любых положительных константах a и b функция $T^k(a + b|x| + b|y|)(1 + x^2 + y^2)$ удовлетворяет условиям теоремы, цитированной в пункте 1°. Поэтому существует целая функция конечной степени $f(z, u)$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{x^2+y^2 \to \infty} \{f(x, y)(1 + x^2 + y^2)\, T^k(a + b|x| + b|y|])\} = 0.$$

Выберем константы a и b так, чтобы при любых x и y выполнялось неравенство

$$T(\sqrt[k]{|P(x, y)|}) \leqslant T(a + b|x| + b|y|),$$

и покажем, что при таком выборе чисел a и b функция $\tilde{f}(x, y) \in L_A^2(m_n)$. Действительно

$$\|A^n \tilde{f}\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |P^n(x, y) f(x, y)|^2\, dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant D\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|P^{2n}(x, y)|}{T^{2k}(\sqrt[k]{|P(x, y)|})(1 + x^2 + y^2)}\, dxdy\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant D_1 \max_{x,\, y} \frac{|P^n(x, y)|}{T^k(\sqrt[k]{|P(x, y)|})} \leqslant D_1 \max_{x,\, y}\left\{|P^n(x, y)| \cdot \inf_l \frac{m_l}{|P(x, y)|^l}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant D_1 |P^n(x, y)| \frac{m_n}{|P^n(x, y)|} = D_1 m_n$$

(здесь D и D_1 — некоторые положительные константы). В то же время функция $\tilde{f}(x, y)$ есть финитная функция, и, значит, в некоторых точках обращается в ноль вместе со всеми производными. Теорема доказана.

Теорема * **3.** *Для квазианалитичности II класса $C_A(m_n)$, где A — произвольный оператор порядка k, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\sqrt[k]{m_n}\}$ порождала квазианалитический класс $C(\sqrt[k]{m_n})$ функций одной переменной.*

Доказательство достаточности в существенном повторяет доказательство достаточности в теореме Лелона, а доказательство необходимости фактически уже было проведено при доказательстве теоремы 2.

Авторы глубоко признательны Б. Я. Левину, обратившему их внимание на рассматриваемый круг вопросов и сделавшему ряд замечаний при выполнении этой работы.

ЛИТЕРАТУРА

[1]. С. Мандельбройт. Квазианалитические классы функций. ОНТИ, 1937, стр. 24.

[2]. P. Lelong. Sur une propriété de quasianalyticité des fonctions de plusieurs variables. C. R. Acad. Sci. Paris, 232, p. 1178, (1951).

[3]. T. Carleman. Über die Approximation analytischer Funktionen... Arkiv för Math. Astr. och Fysik, 17, № 9, (1922).

[4]. Л. И. Ронкин. Об аппроксимации целых функций тригонометрическими полиномами. «ДАН СССР», 92, № 5, (1953), 887—890.

[5]. S. Mandelbrojt. Fonctions analytiques et analyse harmonique. Ann. Ec. Norm. Sup. t. 74. (1957). № 3, p. 16.

[6]. В. А. Марченко. О некоторых вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси, «Зап. математ. отдел. физ.-мат. факультета ХГУ и Харьковского математ. об-ва», сер. 4, т. XXII, 1950.

[7]. S. Agmon. A composition theorem for Dirichlet Series. J. d'Analyse Math., t. 1, (1951).

[8]. А. Н. Колмогоров. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных произвольной функции на бесконечном интервале. «Уч. зап МГУ», 30, Математика, 1939.

* Близкая к этой теорема имеется в цитированной ранее работе Лелона.