

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬ- НЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

48|87



1 р. 40 к.

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

РЕСПУБЛИКАНСКИЙ
МЕЖДУВЕДОМСТВЕННЫЙ
НАУЧНЫЙ
СБОРНИК

Основан в 1965г.

ISSN 0321-4427. Теория функций, функционал. анализ и их прил.
1987. Вып. 48. 1—136.



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

ХАРЬКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
И ОРДЕНА ДРУЖБЫ НАРОДОВ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. А. М. ГОРЬКОГО

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Республиканский
межведомственный
научный сборник

Основан в 1965 г.

ВЫПУСК 48

ХАРЬКОВ

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»

1987

Сборник содержит статьи по теории целых и мероморфных функций, факторизации вероятностных распределений, спектральной теории дифференциальных операторов, динамическим системам.

Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: В. А. Марченко (отв. ред.), В. К. Дзядык (зам. отв. ред.), И. В. Островский (отв. секр.), Ю. М. Березанский, М. С. Бродский, Н. А. Давыдов, Л. Е. Дундученко, М. Г. Крейн, А. В. Кужель, Б. Я. Левин, Н. И. Симонов, И. Г. Соколов

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 45-73-27

Редакция литературы по естественным наукам и филологии

Зав. редакцией *Е. П. Иващенко*

О ФАКТОРИЗАЦИИ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ
КЛАССА L Ю. В. ЛИННИКА. 2

Настоящая работа — продолжение работы [1], и ее цель — доказать теорему 5, из которой, как было показано, следует достаточность условий теоремы 1. Остаются прежними все обозначения работы [1] и нумерация формул, а положительные величины, зависящие только от ф. р. $\Lambda(x)$, $F_j(x)$, $j = 1, 2$, из (6), от параметра r из (2), независимо от их величины, обозначаются одной буквой B .

Пусть выполнено условие а) теоремы 5. Приступим к исследованию функций $F_{jT}(x)$, $j = 1, 2$. Поскольку для функций о. в. $\Lambda_T(x)$, $F_{jT}(x)$, $j = 1, 2$, $Q_T(x)$ выполняется условие (5) с $r_1 = \frac{1}{2}r$ с помощью теорем 2.2.3, 2.2.4 [2, с. 38—41], приходим к заключению, что их х. ф. допускают аналитическое продолжение в полуплоскость $t \in C^1$, $\text{Im } t < \frac{1}{2}r$, при этом аналитическое продолжение осуществляется с помощью интегралов, которыми они задаются для вещественных t .

§ 4. Получение основного теоретико-функционального соотношения для х. ф. $\varphi(t; F_{jT})$. В этом параграфе в параметрах M_T , N_T индекс T будем опускать. Обозначим через $V_T(x)$ функцию о. в.:

$$V_T(x) = (F_{1T} \times F_{2T})(x) - (Q_T \times \Lambda_T)(x).$$

Для комплексных t , $-T < \text{Im } t < \frac{1}{2}r$, справедлива оценка

$$\begin{aligned} |\varphi(t; V_T)| &\leq \int_0^{2M} e^{itx} dV_T(x) + \left| \int_{-\infty}^0 \dots \right| + \left| \int_{2M}^{\infty} \dots \right| = \\ &= S_1(t) + S_2(t) + S_3(t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

Из неравенства (9) приходим к такому соотношению для t , $\text{Im } t \geq -\frac{1}{4}T$,

$$S_1(t) \leq \text{Var } V_T \cdot \{1 + \exp(-2M \text{Im } t)\} \leq 2 \exp\left(-\frac{1}{2}TM\right). \quad (4.2)$$

Для t , $\text{Im } t \leq \frac{1}{4} r$, получаем

$$S_2(t) \leq \text{Var } V_T \cdot e^{\frac{1}{2} TM} + \int_{-\infty}^{-2TM/r} e^{-\frac{1}{4} rx} d(F_{1T} \times F_{2T})(x) + \int_{-\infty}^{-2TM/r} e^{-\frac{1}{4} rx} d(Q_T \times \Lambda_T)(x). \quad (4.3)$$

Для любых неубывающих функций о. в. $V_j(x)$, $j = 1, 2$, для которых выполняется (5) с $r_1 = \frac{1}{2} r$, имеют место простые неравенства:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{-TM/r} e^{-\frac{1}{4} rx} dV_j(x) \leq e^{\frac{1}{4} TM} V_j(-TM/r) + \\ & + \frac{1}{4} r \int_{-\infty}^{-TM/r} e^{-\frac{1}{4} rx} V_j(x) dx \leq 2B(V_j) e^{-\frac{1}{4} TM}, \\ & \int_{-\infty}^{-2TM/r} e^{-\frac{1}{4} rx} d(V_1 \times V_2)(x) \leq \\ & \leq \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^2 \int_{-\infty}^{-TM/r} e^{-\frac{1}{4} rx} dV_j(x) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{4} rx} dV_k(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Применим эти неравенства к интегралам в правой части неравенства (4.3), взяв в качестве $V_j(x)$ функции $F_{jT}(x)$, $j = 1, 2$; $Q_T(x)$, $\Lambda_T(x)$. Для оценки первого слагаемого в правой части (4.3) воспользуемся неравенством (9). Приходим к оценке

$$S_2(t) \leq B \exp\left(-\frac{1}{4} TM\right), \quad \text{Im } t \leq \frac{1}{4} r. \quad (4.5)$$

Аналогично оценке (4.4) устанавливаем следующую оценку величины: $S_3(t)$ для t , $\text{Im } t \geq -\frac{1}{4} T$,

$$\begin{aligned} S_3(t) & \leq \int_{2M}^{\infty} e^{-\text{Im } t \cdot x} d(Q_T \times \Lambda_T)(x) \leq \\ & \leq \varphi\left(-\frac{1}{4} iT; Q_T\right) \int_M^{\infty} e^{\frac{1}{4} Tx} d\Lambda_T(x) + \\ & + \varphi\left(-\frac{1}{4} iT; \Lambda_T\right) \int_M^{\infty} e^{\frac{1}{4} Tx} dQ_T(x). \end{aligned} \quad (4.6)$$

В силу леммы 8 ($F(x) = \Lambda_T(x)$, $b = N$, $T_1 = \frac{6}{7} T$) имеем для $T \geq B$

$$\int_M^\infty e^{\frac{1}{4} T x} d\Lambda_T(x) \leq e^{\frac{1}{4} T M} (1 - \Lambda_T(M)) + \\ + \frac{1}{4} T \int_M^\infty e^{\frac{1}{4} T x} (1 - \Lambda_T(x)) dx \leq e^{-\frac{1}{7} T M}. \quad (4.7)$$

Аналогично получаем с помощью соотношения (7)

$$\int_M^\infty e^{\frac{1}{4} T x} dQ_T(x) \leq 2e^{-\frac{1}{2} T M}. \quad (4.8)$$

В силу того же соотношения и условия (8) для $Q_T(x)$ выполняется неравенство для $T \geq B$:

$$\varphi\left(-\frac{1}{4} iT; Q_T\right) \leq B. \quad (4.9)$$

Из леммы 7 ($\sigma(x) = G_T(x)$, $a = -\infty$, $b = N$) имеем оценку

$$\varphi\left(-\frac{1}{4} iT; \Lambda_T\right) \leq \exp(e^{\frac{1}{2} T N}), \quad T \geq B. \quad (4.10)$$

Применяя полученные неравенства (4.7) — (4.10) к правой части неравенства (4.6), получаем оценку для $S_3(t)$ при t , $\operatorname{Im} t \geq -\frac{1}{4} T$,

$$S_3(t) \leq \exp\left(-\frac{1}{8} T M\right), \quad T \geq B. \quad (4.11)$$

Оценки (4.2), (4.5), (4.11) в применении к (4.1) позволяют для t , $-\frac{1}{4} T \leq \operatorname{Im} t \leq \frac{1}{4} r$ написать соотношение

$$|\varphi(t; V_T)| \leq \exp\left(-\frac{1}{8} T M\right), \quad T \geq B. \quad (4.12)$$

Для тех же t х. ф. $\varphi(t; Q_T)$ допускают оценки

$$|\varphi(t; Q_T) - Q_T(+0) + Q_T(0)| \leq Q_T(0) + \\ + \frac{1}{4} r \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{4} r x} Q_T(x) dx + Q_T(+\infty) - \\ - Q_T(+0) + \frac{1}{4} T \int_0^\infty e^{\frac{1}{4} T x} \{Q_T(+\infty) - Q_T(x)\} dx.$$

Из (5) с $r_1 = \frac{1}{2}r$ и $B(Q_T) \leq B$ следует неравенство для $B \geq 200/r$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}r \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{4}rx} Q_T(x) dx &\leq BQ_T(0) + \\ + \frac{1}{4}Br \int_{-\infty}^{-B} e^{\frac{1}{4}rx} dx &\leq BQ_T(0) + \frac{1}{24}, \end{aligned}$$

а из (7) следует неравенство для $T > 0$:

$$\frac{1}{4}T \int_0^{\infty} e^{\frac{1}{4}Tx} \{Q_T(+\infty) - Q_T(x)\} dx \leq \frac{1}{3}.$$

Из последних двух соотношений при $T \geq B$ в силу (8) для $Q_T(x)$ получаем оценку для t , $-\frac{1}{4}T \leq \operatorname{Im} t \leq \frac{1}{4}r$,

$$\begin{aligned} |\varphi(t; Q_T) - Q_T(+0) + Q_T(0)| &\leq \frac{9}{24} + \\ + BQ_T(0) + Q_T(+\infty) - Q_T(+0) &\leq \frac{5}{12}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Из леммы 7 ($\sigma(x) = G_T(x)$), примененной к интегралам $I(-\infty, -1, t)$, $I(-1, 1, t)$, $I(1, N, t)$, с учетом оценки (2) легко следует, что функция $\ln \varphi(t; \Lambda_T)$ допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $t \in C^1$, $\operatorname{Im} t < \frac{1}{2}r$. При этом аналитическое продолжение осуществляется с помощью интеграла, которым она задается для вещественных t , и справедлива оценка сверху в прямоугольнике $\Pi(r, T) = \{t \mid |\operatorname{Re} t| \leq \frac{1}{4}T, -\frac{1}{4}T \leq \operatorname{Im} t \leq \frac{1}{4}r\}$

$$|\ln \varphi(t; \Lambda_T)| \leq BN(1 + |t|^2)(1 + e^{-N|\operatorname{Im} t|}) \leq e^{\frac{1}{2}TN}, \quad T \geq B.$$

Отсюда устанавливаем нужное неравенство для $t \in \Pi(r, T)$:

$$|\varphi(t; \Lambda_T)| \geq \exp(-e^{\frac{1}{2}TN}) \geq e^{-\frac{1}{16}TN}.$$

Применяя это неравенство к (4.12), получаем для $t \in \Pi(r, T)$, $T \geq B$,

$$|\varphi(t; V_T)| \leq \frac{1}{4} |\varphi(t; \Lambda_T)|. \quad (4.14)$$

Отсюда с учетом оценки (4.13) легко следует основное соотношение для х. ф. $\varphi(t; F_{jT})$, $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} |\varphi(t; \Lambda_T)| &\leq |\varphi(t; F_{1T})| \cdot |\varphi(t; F_{2T})| \leq \\ &\leq 2 |\varphi(t; \Lambda_T)|, \quad t \in \Pi(r, T), \quad T \geq B. \end{aligned} \quad (4.15)$$

§ 5. Исследование функций $\varphi(t; F_{jT})$, $j = 1, 2$. Из левой части неравенства (4.15) следует, что в прямоугольнике $\Pi(r, T)$ у функций $\varphi(t; F_{jT})$, $j = 1, 2$, отсутствуют нули. Поэтому в указанном прямоугольнике функции $\varphi(t; F_{jT})$, $j = 1, 2$, допускают представление

$$\varphi(t; F_{jT}) = \exp g_j(t), \quad g_j(0) = 0,$$

где $g_j(t)$ — аналитические внутри $\Pi(r, T)$ функции. Через $U_j(t)$, $j = 1, 2$, обозначим гармонические функции $\operatorname{Re} g_j(t)$, $j = 1, 2$. Эти функции, как и функции $g_j(t)$, $j = 1, 2$, конечно, зависят от параметра T . Но там, где это не вызовет недоразумения, его будем опускать. Для функций $U_j(t)$, $t = u + iv$, u, v — вещественные переменные, справедлива

Лемма 9. Пусть вещественные переменные u, v таковы, что $u + iv \in \Pi(r, T)$, тогда для таких u, v выполняется неравенство

$$0 \leq U_j(iv) - U_j(iv + u); \quad (5.1)$$

для $|v| \leq \frac{1}{4}r$ выполняется неравенство

$$U_j(iv) - U_j(iv + u) \leq B(u^2 + 1); \quad (5.2)$$

для $n \in N$ и точек $\mu_{q1} > 0$ таких, что $2\pi n \mu_{q1}^{-1} \leq \frac{1}{4}T$ выполняются неравенства

$$0 \leq U_j(iv) - U_j(iv + 2\pi n / \mu_{q1}) \leq 2c_{q-1,1} \left(\sin \frac{\pi n \mu_{q-1,1}}{\mu_{q1}} \right)^2 \times \\ \times e^{-\mu_{q-1,1}v} + B(1 + n^2 / \mu_{q1}^2) e^{-\mu_{q-2,1}v}, \quad (5.3)$$

где

$$c_{q1} = \frac{1 + \mu_{q1}^2}{\mu_{q1}^2} \{G(\mu_{q1} + 0) - G(\mu_{q1})\}, \quad q = 0, \pm 1, \dots$$

Доказательство леммы 9. Из свойства хребта х. ф. $\varphi(t; F_{jT})$ [2, с. 43] и соотношения (4.15) имеем для $u + iv \in \Pi(r, T)$:

$$1 \leq \left| \frac{\varphi(iv; F_{jT})}{\varphi(iv + u; F_{jT})} \right| \leq 8 \left| \frac{\varphi(iv; \Lambda_T)}{\varphi(iv + u; \Lambda_T)} \right|. \quad (5.4)$$

Так как $U_j(iv) - U_j(iv + u) = \ln \varphi(iv; F_{jT}) - \ln |\varphi(iv + u; F_{jT})|$, то из левой части неравенства (5.4) получаем оценку (5.1). Из правой части неравенства (5.4) имеем для $u + iv \in \Pi(r, T)$

$$U_j(iv) - U_j(iv + u) \leq \ln 8 + \\ + 2 \int_{-\infty}^{N_T} e^{-vx} \sin^2 \frac{ux}{2} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} dG(x). \quad (5.5)$$

Поскольку для $G(x)$ выполнено условие (2), то из него легко

следует для v , $|v| \leq \frac{1}{4}r$, $\int_{-\infty}^{N_T} e^{-vx} \sin^2 \frac{xu}{2} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \leq \frac{1}{4} u^2 \times$
 $\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx} (1+x^2) dG(x) \leq Bu^2$, что в сочетании с (5.5) приводит
 к неравенству (5.2). Применение этой же оценки к неравенству
 (5.5) позволяет для $-\frac{1}{4}T \leq v \leq 0$ написать $U_j(iv) - U_j(iv+u) \leq$
 $\leq Bu^2 + \ln 8 + \int_0^{N_T} e^{-vx} \sin^2 \frac{xu}{2} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} dG(x)$. Полагая здесь $u =$
 $= 2\pi n/\mu_{q1}$, получаем $U_j(iv) - U_j(iv + 2\pi n/\mu_{q1}) \leq 2c_{q-1,1} \sin^2 \times$
 $\times \frac{\pi n \mu_{q-1,1}}{\mu_{q1}} \cdot e^{-\mu_{q-1,1}v} + 2e^{-\mu_{q-2,1}v} \int_0^{\mu_{q-2,1}} \sin^2 \frac{\pi nx}{\mu_{q1}} \cdot \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) + B(1 +$
 $+ n^2/\mu_{q1}^2)$, откуда с очевидностью следует оценка (5.3).

Информацию о поведении функций $g_j(t)$, $j = 1, 2$, в прямоугольнике $\prod(-r, r, T) = \{t: |v| \leq \frac{1}{8}r, |u| \leq \frac{1}{8}T\}$ дает такая лемма.

Лемма 10. В прямоугольнике $\prod(-r, r, T)$ выполняется оценка $|g_j(t)| \leq B(1 + |t|^3)$, $j = 1, 2$.

Доказательство леммы 10. Поскольку функции $F_{jT}(x)$ сходятся по вариации к ф. р. $F_j(x)$ при $T \rightarrow \infty$, то при $T \gg B$ имеем $F_{jT}(B) - F_{jT}(-B) \geq \frac{1}{2}$, $j = 1, 2$. Поэтому при $T \gg B$ вы-

полняются неравенства для $iv \in \prod(r, T)$ $\varphi(iv; F_{jT}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vx} \times$
 $\times dF_{jT}(x) \geq \int_{-B}^B e^{-vx} dF_{jT}(x) \geq \frac{1}{2} e^{-B|v|}$. В силу основного соотно-

шения для х. ф. $\varphi(t; F_{jT})$ (4.15) и условия (2) на $G(x)$ для v ,
 $|v| \leq \frac{1}{4}r$, справедливо неравенство $\varphi(iv; F_{jT}) \leq 2\varphi(iv; \Lambda_T)/\varphi \times$
 $\times (iv; F_{kT}) \leq 4e^{B|v|}\varphi(iv; \Lambda_T) \leq B$, $j, k = 1, 2$, $j \neq k$. Отсюда и из оценок (5.1), (5.2) следует неравенство

$$|U_j(u+iv)| \leq B(1+u^2), \quad (5.6)$$

$u+iv \in \prod(-2r, 2r, 2T)$. По формуле Шварца для $t \in \prod(-r, r, T)$

$$g_j(t+z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g_j\left(t + \frac{1}{8} r e^{i\theta}\right) \frac{\frac{1}{8} r e^{i\theta} + z}{\frac{1}{8} r e^{i\theta} - z} d\theta + i \operatorname{Im} g_j(t), \quad z \in C^1.$$

$|z| \leq \frac{1}{8} r$. Продифференцировав эту формулу по переменной z , а затем положив в ней $z = 0$, приходим к выражению $g'_j(t) =$

$$= \frac{8}{\pi r} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} g_j\left(t + \frac{1}{8} r e^{i\theta}\right) e^{-i\theta} d\theta. \text{ Отсюда, используя оценку (5.6),}$$

получаем $|g'_j(t)| \leq B(1 + |t|^2)$, $t \in \Pi(-r, r, T)$. Поскольку $g_j(t) =$

$$= t \int_0^1 g'_j(tu) du, \text{ то для } t \in \Pi(-r, r, T) \quad |g_j(t)| \leq |t| \max_{0 \leq u \leq 1} |g'_j| \times \\ \times (tu) \leq B|t|(1 + |t|^2), \text{ что дает утверждение леммы 10.}$$

Пусть $n \in N$ и точка μ_{q1} такие, что $2\pi n/\mu_{q1} \leq 2^{-3}T$. Рассмотрим функции $g_{jqn}(t) = g_j(t) \exp(-i\mu_{q1}t/n)$. Функции $g_{jqn}(t)$, как и функции $g_j(t)$, — вещественные на мнимой оси. Введем функции

$$\chi_{jqn}(t), \quad j = 1, 2, \text{ следующим образом: } \chi_{jqn}(t) = g_{jqn}(t) - \frac{1}{2} \{g_{jqn} \times$$

$$\times (t + 2\pi n/\mu_{q1}) + g_{jqn}(t - 2\pi n/\mu_{q1})\}. \text{ Аналогично определим функ-$$

ции $\hat{\chi}_{jqn}(t)$, которые отличаются от $\chi_{jqn}(t)$ только тем, что в правой части предыдущего равенства стоят функции $g_j(t)$. Для этих функций выполняются простые соотношения: $\hat{\chi}_{jqn}(iv) = U_j(iv) -$

$$- U_j(iv + 2\pi n/\mu_{q1}), \quad -\frac{1}{4}T \leq v \leq 0, \quad \chi_{jqn}(t) = \hat{\chi}_{jqn}(t) \exp(-i\mu_{q1}t/n),$$

$t \in \Pi(r, T/2)$. Из второго из этих соотношений следует неравенство для $t \in \Pi(r, T/2)$:

$$|\chi_{jqn}(t)| \leq |\hat{\chi}_{jqn}(t)| \exp(\mu_{q1} \operatorname{Im} t/n). \quad (5.7)$$

Теперь сформулируем лемму о поведении функций $g_{jqn}(t)$.

Лемма 11. Функции $g_{jqn}(t)$, $j = 1, 2$, в прямоугольнике

$$\Pi\left(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}T\right) \text{ допускают представление } g_{jqn}(t) = g_{jqn}^+(t) + H_j(t),$$

где $g_{jqn}^+(t)$ — аналитические в квадрате $\left\{t: |\operatorname{Im} t| \leq \frac{1}{16}T, |\operatorname{Re} t| \leq$

$\leq \frac{1}{16}\right\}$ вещественные на мнимой оси, причем в этом квадрате

выполняются оценки

$$|g_{jqn}^+(t)| \leq B \cdot |t|^5, \quad 0 \leq \operatorname{Im} t \leq \frac{1}{16}T, \quad (5.8)$$

$$|H_j(t)| \leq B \cdot |t|^5, \quad -\frac{1}{16}T \leq \operatorname{Im} t \leq 0. \quad (5.9)$$

Доказательство леммы 11. Определим функции $g_{jqn}^+(t)$, $q = 1, 2$, для $\text{Im } t > \frac{1}{8}r$ формулами $g_{jqn}^+(t) = \frac{t^5}{2\pi i} \int_{\Gamma_r} \frac{g_{jqn}(z)}{z^5(z-t)} dz$, где $\Gamma_r = \{z: z = u + ir/8, -\frac{1}{8}T \leq u \leq \frac{1}{8}T\}$. Проинтегрируем функцию $f(z, t) = \frac{g_{jqn}(z)}{z^5(z-t)}$ вдоль контура прямоугольника с вершинами $\frac{1}{8}(T + ir)$, $\frac{1}{8}(-T + ir)$, $-\frac{1}{8}T + iH$, $\frac{1}{8}T + iH$, $-\frac{1}{8}T \leq H \leq 0$. По теореме Коши для $t \in \prod\left(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}T\right)$

$$-\frac{t^5}{2\pi i} \int_{-T/8}^{T/8} f\left(u + \frac{1}{8}ir, t\right) du + \frac{t^5}{2\pi i} \int_{-T/8}^{T/8} f(u + iH, t) du + \\ + F_H(t, r, T) = \begin{cases} 0, & \text{Im } t > \frac{1}{8}r, \text{ Im } t < H, \\ g_{jqn}(t), & H < \text{Im } t < \frac{1}{8}r, \end{cases} \quad (5.10)$$

где функция $F_H(t, r, T)$ определяется формулой $F_H(t, r, T) = \frac{t^5}{2\pi i} \int_H^{r/8} \left\{ f\left(\frac{1}{8}T + iv, t\right) - f\left(-\frac{1}{8}T + iv, t\right) \right\} dv$ и, значит, является аналитической для t , $|\text{Re } t| < \frac{1}{8}T$. Для t , $\text{Im } t > \frac{1}{8}r$, и любого H , $-\frac{1}{8}T \leq H \leq 0$ справедливо

$$g_{jqn}^+(t) = \frac{t^5}{2\pi i} \int_{-T/8}^{T/8} f(u + iH, t) du + F_H(t, r, T), \quad (5.11)$$

поэтому функция $g_{jqn}^+(t)$ аналитически продолжается в прямоугольник $\prod\left(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}T\right)$, причем представление (5.11) сохраняется и для $t \in \prod\left(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}T\right)$, $\text{Im } t > H$. Для этих t функцию $g_{jqn}^+(t)$ в силу соотношений (5.10), (5.11) представим в виде

$$g_{jqn}^+(t) = g_{jqn}(t) + \frac{t^5}{2\pi i} \int_{-T/8}^{T/8} f\left(u + \frac{1}{8}ir, t\right) du. \quad (5.12)$$

Из леммы 10 следуют такие оценки: $|F_H(t, r, T)| \leq B \cdot |t|^6$, $|H| \leq \frac{1}{8}r$, $|\text{Re } t| \leq \frac{1}{16}T$, $\left| \int_{-T/8}^{T/8} f(u + iH, t) du \right| \leq B$, $|H| \leq \frac{1}{8}r$,

$|\operatorname{Im} t - H| \geq \frac{1}{16} r$. С учетом этих оценок положим в представлении (5.11) $H = -\frac{1}{8} r$, тогда получаем для $\operatorname{Im} t \geq -\frac{1}{16} r$, $|\operatorname{Re} t| \leq \frac{1}{16} T$, $|g_{jqn}^+(t)| \leq B \cdot |t|^5$. Для интеграла в правой части равенства (5.12) для t , $\operatorname{Im} t \leq \frac{1}{16} r$, справедлива такая же оценка. Вещественность функций $g_{jqn}^+(t)$ на мнимой оси, очевидно, следует из вещественности на мнимой оси функций $g_j(t)$. Взяв в качестве функции $H_j(t)$ интеграл в правой части равенства (5.12), приходим к утверждению леммы 11.

Изучим поведение функций $\hat{\chi}_{jqn}(t)$ с $n \in N$, μ_{q1} такими, что $2\pi n/\mu_{q1} \leq \frac{1}{8} T$. Для них в силу неравенств (5.3) имеем

$$e^{\mu_{q-1,1}v} |\hat{\chi}_{jqn}(iv)| \leq B(1 + n^2/\mu_{q1}^2), \quad -\frac{1}{4} T \leq v \leq 0. \quad (5.13)$$

Пусть $h = 2\pi l/\mu_{s1}$, $s \geq q$, $l \in \mathbb{Z}$, тогда запишем следующую формулу: $\operatorname{Re} \hat{\chi}_{jqn}(iv + h) = \operatorname{Re} g_j(iv + h) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} g_j(iv + h + 2\pi n/\mu_{q1}) - \frac{1}{2} \operatorname{Re} g_j(iv + h - 2\pi n/\mu_{q1}) = \{-g_j(iv) + \operatorname{Re} g_j(iv + h)\} + \frac{1}{2} \times \times \{g_j(iv) - \operatorname{Re} g_j(iv + h + 2\pi n/\mu_{q1})\} + \frac{1}{2} \{g_j(iv) - \operatorname{Re} g_j(iv + h - 2\pi n/\mu_{q1})\}$. Из этой формулы с помощью неравенства (5.3) получаем

$$|\operatorname{Re} \hat{\chi}_{jqn}(iv + h)| \leq B(1 + n/\mu_{q1} + |l|/\mu_{s1})^2 \exp(-\mu_{s-1,1}v), \quad (5.14) \\ -\frac{1}{8} T \leq v \leq 0, \quad s \geq q, \quad l \in \mathbb{Z}, \quad 2\pi |l|/\mu_{s1} \leq \frac{1}{8} T.$$

Покажем, что для функций $\hat{\chi}_{jqn}(-t)$ выполняются условия теоремы 6 в квадрате K_R , $R = \frac{1}{16} T$. В силу неравенства (5.13) выполняется условие 1 теоремы 6 с $d = 3$, $B_1 = B(1 + n/\mu_{q1})^2 \times \times \exp(\mu_{q-1,1}R)$. Из леммы 10 следует выполнение условия 2 теоремы 6 с теми же d , B_1 и $a = \frac{1}{8} r$. Чтобы проверить условие 3 теоремы 6 для ρ , где $M(\rho, \hat{\chi}_{jqn}(-t)) \geq \exp(B(\rho + 1))$ выберем точку $\tilde{\mu}_{s1}$, определяемую следующим образом. Точка $\tilde{\mu}_{s1}$ совпадает с точкой μ_{s1} , $s \geq q$, если выполняется неравенство

$$\frac{1}{4} \leq \mu_{s1} ((\ln M(\rho, \hat{\chi}_{jqn}(-t)))/(1 + \rho))^{-1} \leq \frac{1}{2}. \quad (5.15)$$

Если для точек μ_{s1} , $s \geq q$, (5.15) не выполняется, то полагаем $\tilde{\mu}_{s1} = \frac{1}{\rho} \mu_{s1}$, где μ_{s1} — минимальная из точек μ_{l1} , $l \geq q$, для которых не выполняется правая часть неравенства (5.15), натураль-

ное число p выбирается так, чтобы для точки $\tilde{\mu}_{s1} \geq B$ уже выполнялось неравенство (5.15). Легко видеть, что такое p всегда найдется. Рассмотрим в квадрате K_p , $p \leq \frac{1}{16}T$, вертикальные отрезки с вещественными частями $h = 2\pi l / \tilde{\mu}_{s1}$, $l \in \mathbb{Z}$. Из неравенств (5.14) на этих отрезках имеем для v , $0 \leq v \leq p$, $|\operatorname{Re} \hat{\chi}_{jqn} \times \times (-iv - h)| \leq B(1 + n/\mu_{q1})^2 \rho^2 e^{\mu_s - 1.1v} \leq B(1 + n/\mu_{q1})^2 e^{\mu_{q-1,1}R} \{M(\rho, \hat{\chi}_{jqn}(-t))\}^{1/3}$. Таким образом, для функции $\hat{\chi}_{jqn}(-t)$ выполняется условие 3 теоремы 6 с $B_1 = B(1 + n/\mu_{q1})^2 \exp(\mu_{q-1,1}R)$, $\delta = \frac{1}{3}$. В силу этой теоремы в квадрате K_{R_1} , $R_1 = \frac{1}{48}T$, выполняется оценка

$$|\hat{\chi}_{jqn}(-t)| \leq B(1 + n/\mu_{q1})^6 \exp(3\mu_{q-1,1}R)(1 + |t|)^9 + \exp(B|t|). \quad (5.16)$$

Применим к функции

$$\tilde{\chi}_{jqn}(t) = \hat{\chi}_{jqn}(t) / \exp(i\mu_{q-1,1}t)B(1 + n/\mu_{q1})^2(t+1)^3$$

теорему о двух константах [3, с. 296] в секторе

$$S\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi, 2^{-6}T\right) = \left\{t : \frac{3}{2}\pi \leq \arg t \leq 2\pi, |t| \leq 2^{-6}T\right\}.$$

Поскольку на радиусах рассматриваемого сектора $|\tilde{\chi}_{jqn}(t)| \leq 1$, то выполняется оценка для t из этого сектора:

$$\ln |\tilde{\chi}_{jqn}(t)| \leq \omega_4(t) \max_{t_1 \in \tilde{E}} \ln |\tilde{\chi}_{jqn}(t_1)|, \quad (5.17)$$

где $\tilde{E}$ — дуга сектора $S\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi, 2^{-6}T\right)$, а $\omega_4(t)$ — гармоническая мера дуги $\tilde{E}$ относительно всего сектора. Для $\omega_4(t)$ легко доказать оценку для $t \in S\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi, 2^{-7}T\right)$ $\omega_4(t) \leq c|\operatorname{Im} t| |\operatorname{Re} t| / T^2$, вытекающую из явного вида гармонической меры $\omega_4(t)$ [3, с. 294]. Применяя последнюю оценку и оценку (5.16) к неравенству (5.17), получаем для t , $-2^{-7}T \leq \operatorname{Im} t \leq 0$, $0 \leq \operatorname{Re} t \leq 4\pi a/\mu_{q1}$,

$$|\tilde{\chi}_{jqn}(t)| \leq B \exp\{-B\{(\mu_{q-1,1} + 1)a/(T\mu_{q1})\} \operatorname{Im} t\}. \quad (5.18)$$

Для функций $\hat{\chi}_{jqn}(t)$ имеют место легко проверяемые формулы для $l \in \mathbb{N}$, $2\pi nl/\mu_{q1} \leq 2^{-7}T$, $\operatorname{Re} \hat{\chi}_{jqn}(iv + 2\pi nl/\mu_{q1}) = -\operatorname{Re} \hat{\chi}_{jq,nl} \times \times (iv) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \hat{\chi}_{jq,n(l-1)}(iv) + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \hat{\chi}_{jq,n(l+1)}(iv)$; $\operatorname{Im} \hat{\chi}_{jqn}(iv + 2\pi nl/\mu_{q1}) = \operatorname{Im} \hat{\chi}_{jq,nl}(iv + 2\pi n/\mu_{q1}) + 2(-1)^{l-1} \sum_{m=1}^{l-1} (-1)^{m-1} \operatorname{Im} \times \times \hat{\chi}_{jq,nm}(iv + 2\pi n/\mu_{q1})$. Из этих формул и оценки (5.18) следуют

такие неравенства для $l \geq 0$, $n \leq \mu_{q1}/\mu_{q-1,1}$, $2\pi n l/\mu_{q1} \leq 2^{-7}T$, $-2^{-7}T \leq v \leq 0$, $|\tilde{\chi}_{jqn}(iv + 2\pi n l/\mu_{q1})| \leq B(1 + n/\mu_{q1})^3(1 + |v| + n l/\mu_{q1})^6 \exp\{-(\mu_{q-1,1} + Bn/(T\mu_{q1}))v\}$. В каждом прямоугольнике $\tilde{\Pi}(l, T) = \{t: -2^{-7}T \leq \operatorname{Im} t \leq 0, |\operatorname{Re} t - \pi n(2l + 1)/\mu_{q1}| \leq \pi n/\mu_{q1}\}$, $0 \leq \pi n(2l + 1)/\mu_{q1} \leq 2^{-8}T$, применим теорему о двух константах к функции ($n \leq \mu_{q1}/\mu_{q-1,1}$) $\tilde{\tilde{\chi}}_{jqn}(t) = \tilde{\chi}_{jqn}(t)/\left\{B\left(1 + \frac{n}{\mu_{q1}}\right)(1 + t)^3 \times \right.$
 $\times e^{iBnt/(T\mu_{q1})}\}$, которая на вертикальных стенках указанных прямоугольников и на вещественной оси не превосходит по модулю единицы. По этой теореме имеем оценку для $t \in \tilde{\Pi}(l, T)$:

$$\ln |\tilde{\tilde{\chi}}_{jqn}(t)| \leq \omega_5(t) \max_{t \in \tilde{H}} \ln |\tilde{\tilde{\chi}}_{jqn}(t)|, \quad (5.19)$$

где $\tilde{H}$ — нижняя вертикальная стенка $\tilde{\Pi}(l, T)$; $\omega_5(t)$ — гармоническая мера $\tilde{H}$ относительно всего $\tilde{\Pi}(l, T)$. Поскольку $\omega_5(t) \leq \omega_6(t)$, где $\omega_6(t)$ — гармоническая мера полуполосы $\{t: \operatorname{Im} t \geq -2^{-7}T, |\operatorname{Re} t - \pi n(2l + 1)/\mu_{q1}| \leq \pi n/\mu_{q1}\}$, то в силу леммы 5 ($\beta = \pi n/\mu_{q1}$, $b = 2^{-7}T$), примененной к функции $\omega_6(-t + \pi n(2l + 1)/\mu_{q1})$, получаем оценку для t из этой полуполосы: $\omega_6(t) \leq c \exp(-2^{-8}\mu_{q1}T/n)$, $\operatorname{Im} t \geq -2^{-8}T$. Применяя эту оценку и оценку (5.16) к неравенству (5.19), окончательно получаем в каждом

$\tilde{\Pi}(l, \frac{1}{2}T)$ при условии, что $n \leq \mu_{q1}/\mu_{q-1,1}$

$$|\tilde{\chi}_{jqn}(t)| \leq B\left(1 + \frac{n}{\mu_{q1}}\right)^3(1 + |t|)^6 \exp\left\{-\left(\mu_{q-1,1} + \frac{Bn}{T\mu_{q1}}\right)\operatorname{Im} t\right\}. \quad (5.20)$$

Аналогично доказывается эта же оценка для $t \in \Pi(r, 2^{-9}T)$, $\operatorname{Re} t \leq 0$.

Пусть n , μ_{q1} таковы, что $\mu_{q-1,1} + 2^8T^{-1/2} \leq \frac{1}{n}\mu_{q1} \leq B$. Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} \chi_{jqn}^+(t) &= g_{jqn}^+(t) - \frac{1}{2}\{g_{jqn}^+(t - 2\pi n/\mu_{q1}) + \\ &+ g_{jqn}^+(t + 2\pi n/\mu_{q1})\}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

В силу леммы 11 и неравенств (5.7), (5.20) для этих функций выполняется оценка в круге $|t| \leq 2^{-5}T^{1/2} = T_1$:

$$|\chi_{jqn}^+(t)| \leq B(1 + n/\mu_{q1})^5(1 + |t|)^6.$$

Наша ближайшая цель — решить разностное уравнение (5.21) в этом круге.

§ 6. Решение разностного уравнения (5.21). Для этой цели служат следующие теоретико-функциональные леммы.

Лемма 12. *Разностное уравнение*

$$f(t + 2\pi/\omega) - 2f(t) + f(t - 2\pi/\omega) = D(t), \quad (6.1)$$

$0 < 2\pi/\omega \leq \frac{1}{4}R$, в котором $D(t)$ — функция аналитическая в круге $|t| \leq R$, $R \geq 10$, и удовлетворяет условию для некоторых постоянных $B_1 > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $|D(t)| \leq B_1(1 + |t|^k)$, имеет в круге $|t| \leq \frac{1}{4}R$ аналитическое решение $f_1(t)$, для которого справедлива оценка $|f_1(t)| \leq c(k) B_1 \omega^2 (1 + \omega^{-2k}) (1 + |t|^{k+2})$, где $c(k) > 0$ — постоянная, зависящая лишь от k .

Эта лемма является уточнением леммы 3 из [4] и доказывается аналогично. Поэтому доказательство ее не приводим.

Лемма 13. Пусть функция $f(t)$, аналитическая в квадрате $K_{0R} = \{t: |\operatorname{Im} t| \leq R, |\operatorname{Re} t| \leq R\}$, вещественная на мнимой оси, удовлетворяет соотношению

$$f(t + 2\pi/\omega) - 2f(t) + f(t - 2\pi/\omega) = 0, \quad \omega > 8\pi/R, \quad (6.2)$$

и допускает в квадрате K_{0R} для некоторых постоянных $B_1 > 0$, $k \in \mathbb{N}$, оценку

$$|f(t)| \leq B_1(1 + |t|^k), \quad \operatorname{Im} t \geq 0. \quad (6.3)$$

Тогда в квадрате $K_{0, R/2}$ $f(t)$ допускает представление $f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (b_p + id_p t) \exp(i\omega p t) + H(t)$, в котором ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте в квадрате $K_{0, R/2}$ и, следовательно, является в этом квадрате аналитической функцией; коэффициенты $b_p, d_p \in \mathbb{R}^1$, $p = 0, 1, \dots$, и

$$|b_p| \leq c B_1 \omega (1 + \omega^{-k-1}), \quad |d_p| \leq c B_1 (1 + \omega^{-k}), \quad (6.4)$$

а для функции $H(t)$ выполняется оценка при $t \in K_{0, R/8} \cap \{\operatorname{Im} t \leq 0\}$:

$$|H(t)| \leq c B_1 R^{k+1} \exp\left(-\frac{1}{8} \omega R\right). \quad (6.5)$$

Лемма 13 близка к лемме 3 из работы [5] и доказывается аналогичным образом. Поэтому ее доказательство не приводим.

Лемма 14. Пусть функция $f(t)$ аналитична в прямоугольнике $K_{0R} \cap \{\operatorname{Im} t \leq 0\}$ и пусть для некоторых постоянных $B_1 > 0$, $\sigma > 0$, $a > 0$ в этом прямоугольнике выполняется неравенство

$$|f(t)| \leq B_1 \exp(-\sigma \operatorname{Im} t + a \ln R). \quad (6.6)$$

Пусть $f(t)$ представима в виде ряда $f(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (b_p + id_p t) \times \exp(i\omega p t)$, $\omega \geq 4\pi/R$, который сходится абсолютно и равно-

мерно на любом компакте в $K_{0R} \cap \{\operatorname{Im} t \leq 0\}$. Тогда для $p > [\sigma/\omega]$ выполняются неравенства

$$|d_p| \leq c B_1 \omega R^a \exp \left\{ \frac{1}{2} R (\sigma - p\omega) \right\}, \quad (6.7)$$

$$|b_p| \leq c \left\{ B_1 \omega + \sum_{p=0}^{[\sigma/\omega]} (|b_p| + |d_p|) \right\} R^{a+1} \exp \left\{ \frac{1}{4} R (\sigma - p\omega) \right\}. \quad (6.8)$$

Лемма 14 является небольшим уточнением леммы 5 из [5], доказывается точно так же, поэтому ее доказательство не приводим.

Заметим, что в силу леммы 12 ($R = T_1$, $D(t) = 2\chi_{jqn}^+(t)$, $\omega = \mu_{q1}/n$, $B_1 = B(1 + n/\mu_{q1})^6$, $k = 6$) разностное уравнение $f(t + 2\pi n/\mu_{q1}) - 2f(t) + f(t - 2\pi n/\mu_{q1}) = 2\chi_{jqn}^+(t)$ имеет в круге $|t| \leq \frac{1}{4} T_1$ аналитическое решение $f_{1j}(t)$, допускающее оценку $|f_{1j}(t)| \leq B(1 + n/\mu_{q1})^{10} (1 + |t|^8)$. Рассмотрим функции $\tilde{g}_{jqn}(t) = g_{jqn}^+(t) - \frac{1}{2} f_{1j}(t)$. Для этих функций в круге $|t| \leq \frac{1}{4} T_1$ выполняется соотношение $\tilde{g}_{jqn}(t + 2\pi n/\mu_{q1}) - 2\tilde{g}_{jqn}(t) + \tilde{g}_{jqn}(t - 2\pi n/\mu_{q1}) = 0$. Таким образом, для функций $\tilde{g}_{jqn}(t)$ выполняются условия леммы 13 ($R = \frac{1}{8} T_1$, $\omega = \mu_{q1}/n$, $B_1 = B(1 + n/\mu_{q1})^{10}$, $k = 8$). В силу этой леммы в квадрате $K_0, T_1/16$ функции $\tilde{g}_{jqn}(t)$ допускают представления

$$\tilde{g}_{jqn}(t) = \sum_{p=0}^{\infty} (b_{pj} + id_{pj}t) e^{i\mu_{q1}pt/n} + \tilde{H}_j(t), \quad (6.9)$$

где коэффициенты b_{pj} , d_{pj} — вещественные и такие, что

$$|b_{pj}| \leq B(1 + n/\mu_{q1})^{18}, \quad |d_{pj}| \leq B(1 + n/\mu_{q1})^{18}, \quad (6.10)$$

для функций $\tilde{H}_j(t)$ в прямоугольнике $K_0, T_1/64 \cap \{\operatorname{Im} t \leq 0\}$ выполняются оценки

$$|\tilde{H}_j(t)| \leq B(1 + n/\mu_{q1})^{10} T_1^9 \exp(-\mu_{q1} T_1/(64n)), \quad (6.11)$$

ряды в правых частях соотношений (6.9) сходятся абсолютно и равномерно на любом компакте в $K_0, T_1/16$. Отметим, что коэффициенты b_{pj} , d_{pj} в представлении (6.9) зависят, конечно, от параметров q и n . Зададимся числом $T_1^{-1/2}$ и укажем $n \in N$, μ_{q1} такие, что $\frac{\mu_{q1}}{n+1} \leq T_1^{-1/2} \leq \frac{\mu_{q1}}{n}$, $n \leq \mu_{q1}/\mu_{q-1,1}$. В дальнейшем считаем, что n и μ_{q1} выбраны таким образом.

§ 7. Исследование коэффициентов b_{pj} , d_{pj} из представления (6.9) функций $\tilde{g}_{jqn}(t)$. Положим

$$f_{jqn}(t) = \left\{ g_{jqn}^+(t) - \frac{1}{2} f_{1j}(t) - \tilde{H}_j(t) \right\} e^{i\mu_{q1}t/n}, \quad j = 1, 2.$$

Зададимся $m \in N$, точкой μ_{s1} , $s \geq q$, такими, что $\frac{1}{m} \mu_{s1} \geq \mu_{s-1,1} + 2^7 \pi T_1^{-1}$, и введем функции $f_{ism}(t) = f_{iqn}(t) - \frac{1}{2} \{f_{iqn}(t + 2\pi \times m/\mu_{s1}) + f_{iqn}(t - 2\pi m/\mu_{s1})\}$, $j = 1, 2$. Из леммы 11 получаем формулу

$$f_{ism}(t) = g_j(t) - \frac{1}{2} \{g_j(t + 2\pi m/\mu_{s1}) + g_j(t - 2\pi m/\mu_{s1})\} - H_j(t) \exp(i\mu_{q1}t/n) + \frac{1}{2} \hat{H}_j(t + 2\pi m/\mu_{s1}) \exp(i\mu_{q1}t/n + i2\pi m\mu_{q1}/(n\mu_{s1})) + \frac{1}{2} \hat{H}_j(t - 2\pi m/\mu_{s1}) \exp(i\mu_{q1}t/n - i2\pi m\mu_{q1}/(n\mu_{s1})),$$

где $\hat{H}_j(t) = \frac{1}{2} f_{1j}(t) + \tilde{H}_j(t) + H_j(t)$.

Из этой формулы в силу оценок (5.20), (5.9), (6.11) и оценки функций $f_{1j}(t)$ получаем для $t \in \{K_{0,2^{-7}T_1} \cap (\operatorname{Im} t \leq 0)\}$

$$|\hat{f}_{ism}(t)| \leq BT_1^{19} \{e^{-\mu_{q1} \operatorname{Im} t/n} + e^{-\mu_{s-1,1} \operatorname{Im} t}\}. \quad (7.1)$$

С другой стороны, функции $\hat{f}_{ism}(t)$ с помощью (6.9) допускают представление $\hat{f}_{ism}(t) = \sum_{p=1}^{\infty} (\hat{b}_{p-1,j} + i\hat{d}_{p-1,j}t) \exp(ip\mu_{q1}t/n)$,

где

$$\hat{b}_{p-1,j} = 2b_{p-1,j} \left(\sin \frac{\pi p m \mu_{q1}}{n \mu_{s1}} \right)^2 + d_{p-1,j} \frac{2\pi m}{\mu_{s1}} \sin \frac{2\pi p m \mu_{q1}}{n \mu_{s1}}; \quad (7.2)$$

$$\hat{d}_{p-1,j} = 2d_{p-1,j} \left(\sin \frac{\pi p m \mu_{q1}}{n \mu_{s1}} \right)^2. \quad (7.3)$$

Конечно, коэффициенты $\hat{b}_{pj}$, $\hat{d}_{pj}$ зависят от q, n, s, m , но, чтобы не перегружать формулы индексами, эти параметры в обозначениях опускают там, где это не вызовет недоразумений.

Оценки (7.1) позволяют к функциям $\hat{f}_{ism}(t)$ применить лемму 14 ($R = 2^{-7}T_1$, $B_1 = B$, $\omega = \mu_{q1}/n$, $\sigma = \mu_{q1}/n$, $s = q$, $\sigma = \mu_{s-1,1}$, $s \geq q + 1$, $\alpha = 19$). Поскольку для коэффициентов $\hat{b}_{pj}$, $\hat{d}_{pj}$ в силу (6.10) выполняются оценки для $s \geq q$, $2\pi m/\mu_{s1} \leq 2^{-8}T_1$,

$$\sum_{p=0}^{[n\mu_{s-1,1}/\mu_{q1}]} (|\hat{b}_{pj}| + |\hat{d}_{pj}|) \leq BT_1^{20} (1 + \mu_{s-1,1}),$$

то из леммы 14 следует: найдется такое $B > 0$, что для всех $m \in N$ и точек μ_{s1} , $s \geq q$, удовлетворяющих условию $m \leq \frac{\mu_{s1}}{\mu_{s-1,1}}$, $2\pi m/\mu_{s1} \leq 2^{-8}T_1$, имеет место для $p > \tilde{\mu}_{s1}n/\mu_{q1}$, где $\tilde{\mu}_{s1} = \max\{\mu_{s-1,1}, \mu_{q1}/n\}$,

$$|b_{p-1,j}| + |d_{p-1,j}| \leq T_1^{40} (1 + \mu_{s-1,1}) \exp\{2^{-10}(\tilde{\mu}_{s1} - p\mu_{q1}/n)T_1\}. \quad (7.4)$$

Используя последнее неравенство, проведем оценку коэффициентов $b_{p-1,j}$, $d_{p-1,j}$ для p , $n\tilde{\mu}_{s1}\mu_{q1}^{-1} < p < n\mu_{s1}\mu_{q1}^{-1}$, $s \geq q$. Обозначим

через N_{qs1} множество целых чисел p из интервала $(n\bar{\mu}_{s1}/\mu_{q1}, n\mu_{s1}/\mu_{q1})$, представимых в виде $p = n_p n \bar{\mu}_{s1}/\mu_{q1}$, где n_p — натуральное число, а через $N_{qs2} = \{N \cap (n\bar{\mu}_{s1}/\mu_{q1}, n\mu_{s1}/\mu_{q1})\} \setminus N_{qs1}$. Пусть $p \in N_{qs1}$, тогда из неравенства (7.4) с $m = [\mu_{s1}/(4n_p \bar{\mu}_{s1})] + 1$ и соотношения (7.3) следует

$$|d_{p-1, j}| \leq T_1^{40} \left(\sin \frac{\pi m \bar{\mu}_{s1} n_p}{\mu_{s1}} \right)^{-2} (1 + \mu_{s-1,1}) \times \\ \times \exp \{ -2^{-11} T_1 (n_p - 1) \bar{\mu}_{s1} \} \leq T_1^{40} \exp \{ -2^{-12} T_1 (n_p - 1) \bar{\mu}_{s1} \}. \quad (7.5)$$

Пусть $p \in N_{qs2}$. Воспользуемся неравенством (7.4) для коэффициентов $\hat{b}_{p-1, j}$, $\hat{d}_{p-1, j}$ с параметром не s , а $s-1$ и $m=1$. Приходим к оценке для $s \geq q+1$:

$$|d_{p-1, j}| \leq T_1^{40} \left(\sin \frac{\pi \mu_{q1} p}{n \mu_{s-1,1}} \right)^{-2} (1 + \mu_{s-2,1}) \times \\ \times \exp \{ 2^{-11} T_1 (\bar{\mu}_{s-1,1} - p \mu_{q1}/n) \} \leq T_1^{40} (\mu_{s-1,1} n / \mu_{q1})^3 \times \\ \times \exp \left\{ 2^{-11} T_1 \left(\frac{1}{2} \bar{\mu}_{s1} - p \mu_{q1}/n \right) \right\} \leq T_1^{43} \exp \{ -2^{-13} T_1 p \mu_{q1}/n \}. \quad (7.6)$$

На интервале $(1, n)$ оценка (7.6) получается аналогично из неравенства (7.4) с $s=q$ и $m=1$. Используя неравенства (7.4) — (7.6), а также соотношение (7.2) по той же схеме, что и для $d_{p-1, j}$, приходим для коэффициентов $b_{p-1, j}$ к оценке для

$$p \in (n \bar{\mu}_{s1}/\mu_{q1}, n \mu_{s1}/\mu_{q1}), \quad s \geq q, \\ |b_{p-1, j}| \leq T_1^{40} \exp \{ -2^{-14} T_1 (n_p - 1) \bar{\mu}_{s1} \}, \quad p \in N_{qs1}, \\ |b_{p-1, j}| \leq T_1^{43} \exp \{ -2^{-14} T_1 p \mu_{q1}/n \}, \quad p \in N_{qs2}. \quad (7.7)$$

Оценки (7.5) — (7.7), очевидно, имеют место и для коэффициентов $\hat{b}_{p-1, j}$, $\hat{d}_{p-1, j}$. Составим суммы

$$S_{qj}(t) = \sum_{s=q}^{\infty} \sum_{p \in N_{qs1} \cup N_{qs2}} (\hat{b}_{p-1, j} - i \hat{d}_{p-1, j} t) \exp \{ -i p \mu_{q1} t / n \}.$$

В силу оценок (7.5) — (7.7) для коэффициентов $\hat{b}_{p-1, j}$, $\hat{d}_{p-1, j}$ в квадрате $K_{2^{-15}T}$ имеем неравенство

$$|S_{qj}(t)| \leq B T_1^{45}. \quad (7.8)$$

Обозначим через N_q множество целых чисел:

$$N_q = \{n, n \mu_{q+1,1}/\mu_{q1}, n \mu_{q+2,1}/\mu_{q1}, \dots\}.$$

Тогда в квадрате $K_{2^{-15}T}$, функция $\hat{f}_{ism}(-t)$ перепишется в виде $\hat{f}_{ism}(-t) = \sum_{p \in N_q, p < \mu_{s-1,1} n / \mu_{q1}} (\hat{b}_{p-1, j} - i \hat{d}_{p-1, j} t) \exp(-i p \mu_{q1} t / n) + \tilde{H}_{qj}(t)$,

$s \geq q+1$, где функция $\tilde{H}_{qj}(t)$ допускает оценку (7.8). В последнем соотношении положим $t = i \alpha 2^{-15} T_1$, $0 < \alpha \leq 1$, и разделим

обе части равенства на $\exp(\alpha 2^{-15} \mu_{s-1,1} T_1)$. Поскольку в силу оценок (6.10) имеет место неравенство при $\alpha \geq BT_1^{-1}$

$$\sum_{p \in N_q, p < \mu_{s-1,1} n / \mu_{q1}} \times$$

$\times |(\hat{b}_{p-1,j} + |\hat{d}_{p-1,j}| \alpha T_1) \exp(-\alpha 2^{-16} \mu_{s-1,1} T_1) \leq T_1^{20} (1 + \mu_{s-1,1}) \times$
 $\times \exp(-\alpha 2^{-16} \mu_{s-1,1} T_1) \leq T_1^{20} \exp(-\alpha 2^{-17} \mu_{s-1,1} T_1)$, то из определения функций $\hat{f}_{jsm}(t)$, оценок (7.1), (5.3), (7.8) видим, что выполняются неравенства при $p = n \mu_{s-1,1} / \mu_{q1}$ и α , $BT_1^{-1} \leq \alpha \leq 1$,

$$\begin{aligned} -T_1^{45} \exp(-\alpha 2^{-17} \mu_{s-1,1} T_1) &\leq \hat{b}_{p-1,j} + 2^{-15} \alpha \hat{d}_{p-1,j} T_1 \leq \\ &\leq 2c_{s-1,1} \left(\sin \frac{\pi m \mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} \right)^2 + T_1^{45} \exp(-\alpha 2^{-17} \mu_{s-1,1} T_1). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Чтобы извлечь отсюда информацию о коэффициентах $b_{p-1,j}$, $d_{p-1,j}$, запишем

$$\begin{aligned} \hat{b}_{p-1,j} + 2^{-15} \alpha \hat{d}_{p-1,j} T_1 &= 2b_{p-1,j} \left(\sin \frac{\pi m \mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} \right)^2 + \\ + d_{p-1,j} \left\{ \frac{2\pi m}{\mu_{s1}} \sin \frac{2\pi m \mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} + 2^{-14} \alpha T_1 \left(\sin \frac{\pi m \mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (7.10)$$

и разберем различные возможности.

Пусть $b_{p-1,j} \leq 0$, $d_{p-1,j} \leq 0$. В этом случае из левой части неравенства (7.9) следует при $m = [\mu_{s1}/(4\mu_{s-1,1})] + 1$, $\alpha = 1$, $-b_{p-1,j} \leq BT_1^{45} \exp(-2^{-17} \mu_{s-1,1} T_1)$, $-d_{p-1,j} \leq BT_1^{44} \exp(-2^{-17} \times \mu_{s-1,1} T_1)$.

Пусть $b_{p-1,j} \leq 0$, $d_{p-1,j} \geq 0$. Если в этом случае $\mu_{s1}/\mu_{s-1,1} = 2$, то, полагая в (7.10) $m = 1$, получаем из правой части неравенства (7.9) при $\alpha = 1$

$$\begin{aligned} d_{p-1,j} &\leq cc_{s-1,1}/T_1 + BT_1^{44} \exp(-2^{-17} \mu_{s-1,1} T_1) + \\ &+ c|b_{p-1,j}|/T_1. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Если $\mu_{s1}/\mu_{s-1,1} > 2$, то $m \in N$ можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$\sin \frac{2\pi m \mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} \geq \frac{1}{4}, \quad \sin \frac{\pi m \mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} \geq \frac{1}{4}. \quad (7.12)$$

Подставляя такое m в (7.10), снова из правой части неравенства (7.9) получаем оценку (7.11). Чтобы получить оценку коэффициента $b_{p-1,j}$, возьмем в (7.10) m таким, что

$$\sin \frac{2\pi m \mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} \leq 0, \quad \sin \frac{\pi m \mu_{s-1,1}}{\mu_{s1}} \geq \frac{1}{4}, \quad (7.13)$$

а $\alpha = 2^{17}/T_1^{1/2}$. Тогда из левой части неравенства (7.9) с указанными m и α с учетом оценки (7.11) получаем

$$-b_{p-1,j} \leq c \cdot c_{s-1,1} \cdot T_1^{-1/2} + BT_1^{45} \exp(-\mu_{s-1,1} T_1^{1/2}) \quad (7.14)$$

и, значит, в силу (7.11) такая же оценка справедлива и для $d_{p-1,j}$.

Пусть $b_{p-1,j} \geq 0$, $d_{p-1,j} \leq 0$. Выберем в (7.10) $m \in N$ так, чтобы выполнялись неравенства (7.12), что всегда возможно, и воспользуемся левой частью неравенства (7.9) с $\alpha = 1$. Имеем

$$-d_{p-1,j} \leq 2^{15} b_{p-1,j} T_1^{-1} + B T_1^{45} \exp(-2^{-17} \mu_{s-1,1} T_1). \quad (7.15)$$

Теперь выберем в (7.10) $m \in N$ так, чтобы выполнялись неравенства (7.13), что тоже всегда возможно, а $\alpha = 1/4$. Тогда из правой части неравенства (7.9) получаем оценку

$$b_{p-1,j} \leq c_{s-1,1} + 2^{-17} |d_{p-1,j}| T_1 + B T_1^{45} \exp(-2^{-19} \mu_{s-1,1} T_1). \quad (7.16)$$

Из (7.15) тогда следует неравенство

$$-d_{p-1,j} \leq c c_{s-1,1} T_1^{-1} + B T_1^{45} \exp(-2^{-19} \mu_{s-1,1} T_1). \quad (7.17)$$

Пусть $b_{p-1,j} \geq 0$, $d_{p-1,j} \geq 0$. В этом случае, выбирая в (7.10) $m \in N$ так, чтобы имело место (7.12), получаем из правой части неравенства (7.9) при $\alpha = 1$ оценки (7.16), (7.17).

В итоге заключаем, что для всех $s = q+1, q+2, \dots$ найдутся такие величины $c > 0$, $B > 0$, что имеют место оценки для $p =$
 $= \mu_{s-1,1} n / \mu_{q1}$

$$|d_{p-1,j}| \leq c c_{s-1,1} T_1^{-\frac{1}{2}} + T_1^{46} \exp(-\mu_{s-1,1} T_1^{\frac{1}{2}}), \quad (7.18)$$

$$-\frac{c c_{s-1,1}}{T_1^{1/2}} - T_1^{46} e^{-\mu_{s-1,1} T_1^{1/2}} \leq b_{p-1,j} \leq c_{s-1,1} + T_1^{46} e^{-\mu_{s-1,1} T_1^{1/2}}. \quad (7.19)$$

§ 8. Завершение доказательства теоремы 5. В силу оценок (7.5) — (7.7), (7.18), (7.19), (6.11) в прямоугольнике $K_{0T_2} \cap \{\operatorname{Im} t \leq 0\}$, $T_2 = 2^{-18} T_1^{1/2}$, функции $g_{jqn}^+(t)$ допускают представления

$$g_{jqn}^+(t) = \sum_{p \in N_q} (\beta_{pj} + i \delta_{pj} t) \exp(i(p-1) \mu_{q1} t / n) + \hat{H}_{jq}(t), \quad (8.1)$$

где функции $\hat{H}_{jq}(t)$ — аналитичны и допускают оценки в $K_{0T_2} \cap \{\operatorname{Im} t \leq 0\}$: $|\hat{H}_{jq}(t)| \leq B T_1^{46}$, а коэффициенты $\beta_{pj} \in \mathbf{R}^1$, $\delta_{pj} \in \mathbf{R}^1$, удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} -c c_{s-1,1} T_1^{-1/2} &\leq \beta_{pj} \leq c_{s-1,1}, \\ |\delta_{pj}| &\leq c c_{s-1,1} T_1^{-1/2}, \quad p = n \mu_{s-1,1} / \mu_{q1}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Вернемся к лемме 11. В силу этой леммы и формулы (8.1) функции $g_j(t)$ имеют вид

$$g_j(t) = \sum_{s=q}^{\infty} (\hat{\beta}_{sj} + i \hat{\delta}_{sj} t) e^{i \mu_{s1} t} + H_{jq}^0(t), \quad (8.3)$$

$\hat{\beta}_{sj} = \beta_{pj}$, $\hat{\delta}_{sj} = \delta_{pj}$, $p = n \mu_{s1} / \mu_{q1}$, $s \geq q$, функции $H_{jq}^0(t)$ — аналити-

ческие в прямоугольнике $\prod \left(\frac{1}{4} r, \frac{1}{2} T_2 \right)$ и в нем допускают оценку

$$|H_{jq}^0(t)| \leq T_2^{100}. \quad (8.4)$$

Введем функции $\psi_{jq}(t)$, $j = 1, 2$,

$$\psi_{jq}(t) = \sum_{s=q}^{\infty} \left(\beta_{sj} + i\delta_{sj}t \right) (e^{i\mu_{s1}t} - 1 - \frac{it\mu_{s1}}{1 + \mu_{s1}^2}).$$

В силу оценок (8.2) и выбора точки μ_{q1} в прямоугольнике $\prod \left(\frac{1}{4} r, \frac{1}{2} T_2 \right)$ выполняется неравенство

$$|g_j(t) - \psi_{jq}(t)| \leq cT_2^{100}. \quad (8.5)$$

Теперь, чтобы подчеркнуть зависимость функций $g_j(t)$ от параметра T , будем обозначать их через $g_{jT}(t)$.

В полосе $|\operatorname{Im} t| \leq \frac{1}{16} r$ функции $\psi_{jq}(t)$ в силу леммы 8 и оценок (8.2) допускают неравенство $|\psi_{jq}(t)| \leq B(1 + |t|^3)$. Таким образом, для функций $g_{jT}(t)$ справедлива формула

$$g_{jT}(t) = \psi_{jq}(t) + \tilde{H}_{jq}(t), \quad (8.6)$$

в которой функции $\tilde{H}_{jq}(t)$ удовлетворяют условиям (8.4) и в силу предыдущего неравенства и леммы 10 удовлетворяют дополнительно неравенству

$$|\tilde{H}_{jq}(t)| \leq B(1 + |t|^3), \quad t \in \prod \left(\frac{1}{4} r, \frac{1}{4} r, T_2 \right). \quad (8.7)$$

Применим к функции $F_{jq}(t) = \tilde{H}_{jq}(t)/(1 + it)^3$ теорему о двух константах. По этой теореме для $t \in D$ $\ln |F_{jq}(t)| \leq \omega_5(t) \max_{\zeta \in E} \times \times \ln |F_{jq}(\zeta)| + (1 - \omega_5(t)) \max_{\zeta \in [-T_2/2, T_2/2]} \ln |F_{jq}(\zeta)|$, где $\omega_5(t)$ — гармоническая мера полуокружности $E = \{\zeta: |\zeta| = T_2/2, \operatorname{Im} \zeta < 0\}$ относительно полукруга $D = \{\zeta: |\zeta| < T_2/2, \operatorname{Im} \zeta < 0\}$. По лемме 1 ($R = T_2/2$, $\beta_1 = \pi$, $\beta_2 = 2\pi$) для $t \in D$ и $|t| \leq \frac{1}{4} T_2$ имеем $\omega_5(t) \leq c|\operatorname{Im} t|/T_2$. Тогда с учетом оценок (8.7), (8.4) получаем в $D \cap \{t: |t| \leq 4T_3\}$, $T_3 = \frac{1}{16} T_2/\ln T_2$, $|F_{jq}(t)| \leq B$, что дает в указанном полукруге оценку

$$|\tilde{H}_{jq}(t)| \leq B(1 + |t|^3). \quad (8.8)$$

Положим теперь $\tilde{H}_{jq1}(t) = \tilde{H}_{jq}(t) - \tilde{H}_{jq}(0) - \tilde{H}_{jq}^{(1)}(0)t - \tilde{H}_{jq}^{(2)}(0) \times \times \frac{t^2}{2} - \tilde{H}_{jq}^{(3)}(0) \frac{t^3}{6} = \tilde{H}_{jq}(t) - P_{jq}(t)$. В силу (8.7) в прямоугольнике $\prod \left(-\frac{1}{4} r, \frac{1}{4} r, T_3 \right)$ имеем неравенство

$$|t^{-4} \tilde{H}_{jq1}(t)| \leq B(1 + |t|)^{-1}. \quad (8.9)$$

Поэтому функции $W_{jT}(t)$, $j=1,2$, $W_{jT}(t) = t^{-4} \tilde{H}_{jq1}(t) I_{T_3}(t)$, где $I_{T_3}(t)$ — индикаторная функция отрезка $[-T_3, T_3]$, т. е. функция, равная 1 на этом отрезке и 0 — вне его, принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$ и нормы их не превосходят величины B . К функциям $W_{jT}(t)$ применима теорема М. Планшереля о преобразовании Фурье в пространстве функций $L_2(-\infty, \infty)$. Согласно этой теореме,

если положить $v_{jT}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T_3}^{T_3} W_{jT}(t) e^{-ixt} dt$, то имеет место равенство для $t \in R^1$

$$W_{jT}(t) = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{itx} v_{jT}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} v_{jT}(x) dx, \quad (8.10)$$

при этом в силу (8.9) $\int_{-\infty}^{\infty} |v_{jT}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |W_{jT}(t)|^2 dt \leq B$.

Пусть $x \geq 0$. По теореме Коши $v_{jT}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T_3}^{T_3} (t - iT_3)^{-4} \tilde{H}_{jq1} \times$
 $\times (t - iT_3) e^{-ix(t - iT_3)} dt + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T_3}^0 (T_3 + iu)^{-4} \tilde{H}_{jq1}(T_3 + iu) e^{-ix(T_3 + iu)} du -$
 $-\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T_3}^0 (-T_3 + iu)^{-4} \tilde{H}_{jq1}(-T_3 + iu) e^{-ix(-T_3 + iu)} du$. С помощью оценки (8.8) легко оценим интегралы в правой части этой формулы. Получаем для $x \geq 0$ $|v_{jT}(x)| \leq B e^{-T_3 x} + B \frac{1 - e^{-T_3 x}}{T_3 x}$. Последняя оценка позволяет написать неравенство

$$\int_0^{\infty} |v_{jT}(x)|^2 dx \leq B \int_0^{T_3^{-1/2}} dx + B \int_{T_3^{-1/2}}^{\infty} (T_3 x)^{-2} dx \leq B T_3^{-1/2}. \quad (8.11)$$

Рассмотрим функции $v_{jT}^{\pm}(x)$, $j=1,2$, $v_{jT}^{\pm}(x) = \begin{cases} v_{jT}(x), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$

Для их преобразований Фурье $W_{jT}^{\pm}(t)$ в силу (8.11) и равенства Парсеваля имеем

$$\|W_{jT}^{\pm}(t)\|_2^2 = \|v_{jT}(x)\|_2^2 \leq B T_3^{-1/2}. \quad (8.12)$$

Перепишем функции $\psi_{jq}(t)$ в виде

$$\begin{aligned}\psi_{jq}(t) = & \int_0^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG_{jq}(x) + \\ & + it \int_0^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dV_{jq}(x),\end{aligned}$$

где $G_{jq}(x)$ — функции о. в. со скачками во множестве $\{\mu_{n1}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и такая, что

$$\begin{aligned}-BT_3^{-1} \{G(\mu_{n1} + 0) - G(\mu_{n1})\} & \leq G_{jq}(\mu_{n1} + 0) - G_{jq}(\mu_{n1}) \leq \\ & \leq G(\mu_{n1} + 0) - G(\mu_{n1}),\end{aligned}\quad (8.13)$$

а $V_{jq}(x)$ — функции о. в., для которых выполняется $\varlimsup_a^b V_{jq}(x) \leq \leq BT_3^{-1} \{G(b) - G(a)\}$, $a < b$. Поскольку имеет место (8.13), то в силу теоремы о выборе найдется неубывающая функция о. в. $G_j^+(x)$ со скачками во множестве $\{\mu_{n1}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ такая, что

$$G_j^+(\mu_{n1} + 0) - G_j^+(\mu_{n1}) \leq G(\mu_{n1} + 0) - G(\mu_{n1}), \quad (8.14)$$

к которой сходится слабо некоторая подпоследовательность функций $G_{jq}(x)$. Эту подпоследовательность будем обозначать по-прежнему через $G_{jq}(x)$. Для функции $\psi_j(t) = \int_0^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \times \times \frac{1+x^2}{x^2} dG_j^+(x)$ в силу (8.14) выполняется оценка (8.7), кроме того,

$$\psi_{jq}(t) \rightrightarrows \psi_j(t), \quad T \rightarrow \infty \quad (8.15)$$

на любом конечном отрезке. Положим для $T \geq B$

$$\begin{aligned}\psi_{jq1}(t) &= \psi_{jq}(t) - \psi_{jq}^{(1)}(0)t - \psi_{jq}^{(2)}(0)\frac{t^2}{2} - \psi_{jq}^{(3)}(0)\frac{t^3}{6} = \\ &= \psi_{jq}(t) - \tilde{P}_{jq}(t), \\ g_{jT1}(t) &= g_{jT}(t) - g_{jT}^{(1)}(0)t - g_{jT}^{(2)}(0)\frac{t^2}{2} - \\ &- g_{jT}^{(3)}(0)\frac{t^3}{6} = g_{jT}(t) - \tilde{P}_{jT}(t).\end{aligned}$$

Из определения функции $g_{jT}(t)$ следует, что $g_{jT}(t) \rightrightarrows \ln \varphi(t; F_j)$, $T \rightarrow \infty$, на любом конечном отрезке. Кроме того, легко видеть, что выполняются соотношения

$$\begin{aligned}\psi_{jq}^{(k)}(0) &\rightarrow \psi_j^{(k)}(0), \\ g_{jT}^{(k)}(0) &\rightarrow \{\ln \varphi(t; F_j)\}_{t=0}^{(k)},\end{aligned}\quad k = 1, 2, 3; \quad T \rightarrow \infty. \quad (8.16)$$

Из неравенств (8.7) для функций $\psi_{jq}(t)$ и леммы 10 следуют оценки для $t \in \prod \left(-\frac{1}{4}r, \frac{1}{4}r, 4T_3\right)$:

$$|t|^{-4} \{ |\varphi_{jq1}(t)| + |g_{jT1}(t)| \} \leq B(1 + |t|)^{-1}. \quad (8.17)$$

Из оценок (8.17) и соотношений (8.15), (8.16) легко получаем, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |v_{iT}(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^{-8} |\psi_i(t) - \tilde{P}_i(t) - \ln \psi(t; F_i) + \tilde{\tilde{P}}_i(t)|^2 dt, \quad (8.18)$$

$$\text{где } \tilde{P}_i(t) = \sum_{m=0}^3 \psi_i^{(m)}(0) \frac{t^m}{m!}, \quad \tilde{\tilde{P}}_i(t) = \sum_{m=0}^3 \{ \ln \varphi(t; F_i) \}_{t=0}^{(m)} \frac{t^m}{m!}.$$

Теперь рассмотрим функции $v_{iT}^-(x) = v_{iT}(x) - v_{iT}^+(x)$. Поскольку $\|v_{iT}(x)\|_2 \leq B$ и выполнено (8.18), то найдется подпоследовательность $v_{iT_k}(x)$, сходящаяся по норме в $L_2(-\infty; \infty)$ к функции $v_j(x) = v_j^+(x) + v_j^-(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, где функции $v_j^+(x)$, $v_j^-(x)$ определяются аналогично функциям $v_{iT}^+(x)$, $v_{iT}^-(x)$. Преобразования Фурье функций $v_{iT_k}(x)$, $v_{iT_k}^-(x)$ соответственно $W_{iT_k}(t)$ и $W_{iT_k}^-(t)$ сходятся по норме в $L_2(-\infty, \infty)$ соответственно к преобразованиям Фурье функций $v_j(x)$, $v_j^-(x)$: $W_j(t)$, $W_j^-(t)$. Поскольку на любом конечном отрезке $W_{iT}^-(t)$ сходятся почти всюду, то сходятся почти всюду они в силу (8.12) к функции $W_j(t)$. Переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$ по указанной выше последовательности, приходим к такому представлению для функций $\varphi(t; F_j)$, $j = 1, 2$:

$$\ln \varphi(t; F_j) = \frac{t^4}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{itx} v_j^-(x) dx + \int_0^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG_j^+(x) + \sum_{k=0}^3 a_{kj} t^k, \quad (8.19)$$

a_{kj} — постоянные. Такое представление для х. ф. $\varphi(t; F_j)$ получается из предположения а) теоремы 5. Из предположения б) теоремы 5, проводя аналогичные рассуждения, получаем следующее представление:

$$\ln \varphi(t; F_j) = \int_{-\infty}^0 \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG_j^-(x) + + t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{itx} v_j^+(x) dx + \sum_{k=0}^3 b_{kj} t^k, \quad (8.20)$$

где $G_j^-(x)$ — неубывающая функция с скачками в множестве $\{\mu_{n2}\}_{n=-\infty}^{\infty}$ и $G_j^-(\mu_{n2} + 0) - G_j^-(\mu_{n2}) \leq G(\mu_{n2} + 0) - G(\mu_{n2})$, $v_j^+(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, b_{kj} — постоянные.

По теореме М. Планшереля функция $\tilde{\psi}_j(t)$: $\tilde{\psi}_j(t) = t^{-4} \{ \psi_j(t) - \tilde{\psi}_j^{(1)}(0)t - \psi_j^{(2)}(0)\frac{t^2}{2} - \psi_j^{(3)}(0)\frac{t^3}{6} \}$ допускает представление

$$\tilde{\psi}_j(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \tilde{v}_j^+(x) dx, \quad \tilde{v}_j^+(x) \in L_2(-\infty, \infty), \quad \text{причем почти}$$

для всех x в смысле меры Лебега $\tilde{v}_j^+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_j(t) \times$

$$\times \frac{e^{-ixt} - 1}{-it} dt. \quad \text{Для } \forall h > 0 \text{ и } x < 0 \text{ имеем отсюда } \int_x^{x+h} \tilde{v}_j^+(u) du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_j(t) \frac{e^{-it(x+h)} - e^{-itx}}{-it} dt = I_{jh}(x). \quad \text{Поскольку функция}$$

$\tilde{\psi}_j(t)$ аналитична в верхней полуплоскости и допускает в ней оценку

$$|\tilde{\psi}_j(t)| \leq B(1 + |t|)^{-1}, \quad (8.21)$$

то с помощью теоремы Коши легко получаем для $\forall \Delta > 0$ равенство

$$I_{jh}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}_j(t + i\Delta) e^{(\Delta - it)x} \frac{e^{-h(it + \Delta)} - 1}{-i(t + i\Delta)} dt. \quad \text{Отсюда, учитывая}$$

оценку (8.21) с помощью неравенства Коши-Буняковского,

$$\text{имеем } |I_{jh}(x)| \leq e^{\Delta x} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}_j(t + i\Delta)|^2 dt \right\}^{1/2} \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{t^2 + \Delta^2} \right\} \leq B \times$$

$\times e^{\Delta x} \Delta^{-1/2}$. Устремляя $\Delta \rightarrow \infty$, получаем отсюда, что для $\forall h > 0$

$$x < 0 \quad \int_x^{x+h} \tilde{v}_j^+(u) du = 0, \quad \text{что влечет за собой почти всюду: } \tilde{v}_j^+(x) =$$

$= 0, x < 0$. Таким образом, получаем представление

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG_j^+(x) = \\ & = P_j^+(t) + t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{itx} \tilde{v}_j^+(x) dx. \end{aligned} \quad (8.22)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG_i^-(x) = \\ = P_i^-(t) + t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{itx} \tilde{v}_i^-(x) dx, \end{aligned} \quad (8.23)$$

где $P_i^-(t)$ — полином степени ≤ 3 , $\tilde{v}_i^-(x) \in L_2(-\infty, \infty)$. Учитывая соотношения (8.19), (8.20), (8.22), (8.23), записываем

$$t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{itx} \{v_i^-(x) - \tilde{v}_i^-(x)\} dx = t^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{itx} \{v_i^+(x) - \tilde{v}_i^+(x)\} dx + P(t),$$

где $P(t)$ — полином степени ≤ 3 . Поскольку после деления этого равенства на t^4 интегралы представляют собою функции из $L_2(-\infty, \infty)$, то $P(t) = 0$. Получившееся равенство позволяет заключить, что почти всюду $v_i^-(x) = \tilde{v}_i^-(x)$, $v_i^+(x) = \tilde{v}_i^+(x)$. Вспомнивая определение функций $\tilde{v}_i^-(x)$, $\tilde{v}_i^+(x)$, приходим к представлению

$$\varphi(t; F_j) = \exp \left\{ P_j(t) + \int_{R^1 \setminus \{0\}} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG_j(x) \right\}, \quad (8.24)$$

в котором $G_j(x) = G_j^-(x)$ для $x < 0$ и $G_j(x) = G_j^+(x)$ для $x > 0$, полином $P_j(t)$ степени ≤ 3 . Коэффициенты этого полинома обозначим через γ_{kj} , $k = 1, 2, 3$. Из вещественности $\varphi(t; F_j)$ на отрезке $\left(-\frac{i}{2}r, \frac{i}{2}r\right)$ мнимой оси следует вещественность чисел $i^k \gamma_{kj}$. Из ограниченности $\varphi(t; F_j)$ на вещественной оси и леммы 5.2.4 [2, с. 187] легко получаем $\gamma_{2j} \leq 0$, $j = 1, 2$. Покажем, что $\gamma_{3j} = 0$, $j = 1, 2$. Пусть это не так, т. е. $\gamma_{3j} \neq 0$. Не уменьшая общности, считаем, что $i\gamma_{3j} < 0$. Вернемся к функциям $g_{jT}(t)$. В силу (8.15) получаем на любом конечном отрезке соотношение

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{jq}(t) - \gamma_{3j}t^3 \rightrightarrows P_j(t) - \gamma_{3j}t^3 + \\ + \int_{-\infty}^0 \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} dG_j^-(x), \quad T \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (8.25)$$

Из (8.8) следует, что это соотношение сохраняется на любом компакте, лежащем в замкнутой нижней полуплоскости. Вспоминая, что функции $g_{jT}(t)$ аналитичны в прямоугольнике $\prod \left(\frac{1}{4}r, T_3\right)$, нетрудно заметить, что и функции $\psi_{jq}(t)$ аналитичны в этом

же прямоугольнике и задаются в этом прямоугольнике тем же рядом, что и на вещественной оси. Из свойства хребтовости функции $g_{jT}(t)$ в прямоугольнике $\prod\left(\frac{1}{4}r, T_3\right)$ имеем: $t = u + iv$,

$$3i\gamma_{3j}vu^2 \leq \psi_{jq}(iv) - \operatorname{Re} \psi_{jq}(u + iv) + \\ + \{\tilde{H}_{jq}(iv) + i\gamma_{3j}v^3\} - \operatorname{Re} \{\tilde{H}_{jq}(u + iv) - \gamma_{3j}(u + iv)^3\}. \quad (8.26)$$

Пусть $-v = u = 2\pi/\mu_{sl}$, $\mu_{sl}^{1/8} \leq \mu_{sl} \leq B$, тогда имеем оценку

$$|\psi_{jq}(iv) - \operatorname{Re} \psi_{jq}(u + iv)| \leq B \left(1 + \frac{|v|}{T_3}\right) \sum_{p=q}^{s-1} c_{p1} e^{-\mu_{p1}v} \sin^2 \frac{\mu_{p1}u}{2} + \\ + \frac{Bu}{T_3} \sum_{p=q}^{s-1} c_{p1} |e^{-\mu_{p1}v} \sin(\mu_{p1}u) - \mu_{p1}u| + \frac{Bu^2}{T_3} \leq Bu^2 \left(1 + \frac{|v|}{T_3} + \frac{u^2}{T_3}\right).$$

В силу соотношения (8.25) для $t = iv$, $u + iv$ при тех же u и v имеем для достаточно больших T $|\tilde{H}_{jq}(iv) - \operatorname{Re} \tilde{H}_{jq}(u + iv) + 3ivu^2\gamma_{3j}| \leq B(u^2 + 1)$. Положим в (8.26) $-v = u = 2\pi/\mu_{sl}$, где μ_{sl} — достаточно малое фиксированное число. Разделив обе части неравенства (8.26) на $-3vu^2$ и учитывая две последние оценки, получаем неравенство $|\gamma_{3j}| < \frac{1}{2}|\gamma_{3j}|$, что приводит нас к противоречию. Таким образом, в представлении (8.24) $\gamma_{3j} = 0$ и х. ф. $\varphi(t; F_j)$ являются х. ф. б. д. ф. р. Теорема 5 доказана.

Список литературы: 1. Чистяков Г. П. О факторизации вероятностных распределений класса L Ю. В. Линника. // Теория функций, функций. анализ и их прил. — 1986. — Вып. 47. — С. 20—77. 2. Линник Ю. В., Островский Н. В. Разложения случайных величин и векторов. — М.: Наука, 1972. — 480 с. 3. Евграфов М. А. Аналитические функции. — М.: Наука, 1965. — 424 с. 4. Чистяков Г. П. Об устойчивости для теоремы Ю. В. Линника // Теория функций, функций. анализ и их прил. — 1969. — Вып. 9. — С. 118—134. 5. Чистяков Г. П. Об устойчивости разложений одного класса безгранично делимых законов // Мат. физика и функций. анализ. — 1974. — Вып. 5. — С. 27—50.

Поступила в редколлегию 25.01.85

УДК 517.5

Ю. В. АЗАРИНА

МЕРОМОРФНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ $w(z+1) = R[w(z)]$

Настоящая работа посвящена описанию мероморфных в комплексной плоскости решений уравнения

$$w(z+1) = R[w(z)], \quad (1)$$

где R — рациональная функция.

Отметим, что к уравнению (1) сводится уравнение

$$\omega(bz) = R[\omega(z)] \quad (2)$$

заменой $z = b^u$. Существование мероморфных решений уравнения (2) исследовал А. Пуанкаре. Он показал, что при $|b| > 1$ для существования мероморфных решений необходимо наличие у функции R неподвижной точки с мультипликатором b . Каждой такой неподвижной точке β соответствует решение ω со свойствами

$$\omega(0) = \beta, \quad \omega'(0) = 1. \quad (3)$$

Остальные решения получаются подстановкой $\varphi(z) = \omega(az^m)$, $a \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$. Если $|b| \leq 1$, то мероморфных во всей плоскости решений не существует.

В своем мемуаре П. Фату [1, §§ 72—80] показал, что уравнение (1) всегда имеет решение. Через несколько лет Жюлиа [2] доказал это же утверждение, применив к (1) метод последовательных приближений. В последнее время решения уравнения (1) изучались рядом авторов. Так, Н. Янагихара [3] опять доказал существование решения (без ссылок на Фату и Жюлиа). И. Бэйкер и Л. Ливерпуль [4] полностью описали все решения уравнения (1) в случае, когда R — многочлен.

Дж. Ритт [5] исследовал мероморфные решения более общего функционального уравнения:

$$F[\omega(\lambda(z)), \omega(z)] = 0, \quad (4)$$

где F — многочлен от двух переменных, а $\lambda(z)$ — линейная функция. Дж. Ритт перечислил все мероморфные функции ω , которые могут удовлетворять соотношению вида (4), за исключением случая, когда уравнение (4) сводится к уравнению (1). По поводу функций, удовлетворяющих уравнению (1), Ритт пишет [5]: «Полное описание таких функций до сих пор не было дано. Большой их класс получается из функций Пуанкаре с помощью подстановки, но нет оснований считать, что все они могут быть получены таким образом».

Действительно, оказывается, что остальные решения уравнения (1) получаются из решений уравнения Абеля: $A[R^{-1}(z)] = A(z) - 1$.

В настоящей работе будут полностью описаны мероморфные решения уравнения (1) в случае, когда R — произвольная рациональная функция. Отметим, что все необходимое для такого описания имелось в мемуаре Фату [1], хотя в явном виде окончательный результат у него не приведен.

Изучение уравнения (1) тесно связано с теорией итераций рациональных функций, построенной в начале XX века Г. Жюлиа, П. Фату и Дж. Риттом. Введение в эту теорию имеется в книге П. Монтея [6] и обзоре П. Бланшара [7].

Основные определения и обозначения. Определим необходимые для дальнейшего понятия из теории итераций. Точка $\beta \in \mathbb{C}$ назы-

вается неподвижной точкой функции R , если $R(\beta) = \beta$. Мультипликатором или множителем неподвижной точки β называется число

$$b = \begin{cases} R'(\beta), & \text{если } \beta \neq \infty; \\ \frac{1}{R'(\beta)}, & \text{если } \beta = \infty. \end{cases}$$

Неподвижная точка β называется: притягивающей, если $|b| < 1$; нейтральной, если $|b| = 1$; отталкивающей, если $|b| > 1$. Через R^p обозначаем p -ю итерацию функции R , через R^{-1} — (многозначную) функцию, обратную к R .

Сходимость будем всюду понимать в сферической метрике (см. Монтель [6]).

Обозначим $P = P(a, c) = \{z = x + iy: a \leq y \leq c\}$, $S = S(a, c, d) = \{z = x + iy: a \leq y \leq c, x \leq d\}$, $\Pi = \Pi(a, c, d_1, d_2) = \{z = x + iy: a \leq y \leq c, d_1 \leq x \leq d_2\}$, $D = D(\alpha, r) = \{z: |z - \alpha| < r\}$.

Основные результаты. Далее предполагаем, что $\deg R > 1$.

Теорема 1. Пусть ω — произвольное мероморфное решение уравнения (1). Тогда

1) существует предел $\lim_{x \rightarrow -\infty} \omega(x + iy) = \beta$, где β — некоторая неподвижная точка функции R , причем сходимость равномерная при $a \leq y \leq c$ для любых a, c ;

2) модуль мультипликатора точки β удовлетворяет неравенству $|b| \geq 1$, причем если $|b| = 1$, то $b = +1$.

Теорема 2. Пусть в условиях теоремы 1 $|b| > 1$. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\omega(z) = \varphi(b^z E(z)),$$

где φ есть функция Пуанкаре (решение уравнения (2)), а E — произвольная периодическая целая функция с периодом 1.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы 1 $b = 1$, а значит, в окрестности точки β R имеет разложение*: $R(z) = \beta + (z -$

$-\beta) + \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j (z - \beta)^j$, $a_{m+1} \neq 0$ для некоторого целого $m \geq 1$.

Тогда имеется m мероморфных решений $\omega = \omega_j(z)$ уравнения (1)

таких, что $\omega_j(z) \sim \beta + c_j (-z)^{-\frac{1}{m}}$, $z \rightarrow \infty$ (c_j — постоянные), причем каждое непостоянное мероморфное решение ω , удовлетворяющее условию $\omega(-x) \rightarrow \beta$, $x \rightarrow +\infty$, имеет вид $\omega(z) = \omega_j(z + E(z))$ для некоторого j и произвольной целой периодической функции E с периодом 1.

Лемма (Жюлиа — Фату). Среди неподвижных точек рациональной функции найдется хотя бы одна либо отталкивающая точка, либо нейтральная точка с мультипликатором $+1$.

* Не ограничивая общности, считаем здесь и далее, что $\beta \neq \infty$.

Доказательство этой леммы см., например, в книге Монтеля [6, § 107].

Теоремы 1, 2, 3 вместе с этой леммой дают полное описание множества решений уравнения (1).

Мы приведем доказательство только теоремы 1, теорема 2 содержится в работе Н. Янагихары [3], а доказательство теоремы 3 в основном следует рассуждениям И. Бэйкера и Л. Ливерпуля [4], см. также [3]. Для доказательства теоремы 1 нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1 (Фату [1]). Пусть R — рациональная функция. Тогда у R найдется неподвижная точка, имеющая бесконечное число предшественников.

Обозначим $\omega_n(z) = \omega(z - n)$. Если λ — неподвижная точка функции R , то обозначим $A(\lambda) = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^{-n}(\lambda)$ множество всех предшественников к точке λ .

Лемма 2. Пусть ω — произвольное мероморфное решение уравнения (1), а λ — неподвижная точка из леммы 1. Тогда для любых вещественных a и c найдется $d > -\infty$ такое, что ω в полуполосе $S = S(a, c, d)$ не принимает значений из множества $A(\lambda) \setminus \{\lambda\}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть уравнение $\omega(z) = a$, где $R^m(a) = \lambda$, $a \neq \lambda$, имеет последовательность решений $\{z_k\}$, $a \leq \operatorname{Im} z_k \leq c$, $\operatorname{Re} z_k \rightarrow -\infty$. Будем считать, что $\operatorname{Re} z_k < -m - 2$, $k = 1, 2, \dots$. Добавляя подходящее натуральное число, каждую из точек z_k можно перевести в прямоугольник $\Pi = \Pi(a, c, -2, 0)$. Получим точки $\xi_k \in \Pi$, $k = 1, 2, \dots$. При этом для всех точек ξ_k будет выполняться $\omega(\xi_k) = \lambda$. Действительно, пусть $\xi_k = z_k + m + m_k$, $m_k \in \mathbb{N}$. Тогда в силу (1)

$$\begin{aligned}\omega(\xi_k) &= \omega(z_k + m + m_k) = R^{m_k}[R^m(\omega(z_k))] = \\ &= R^{m_k}[R^m(a)] = R^{m_k}(\lambda) = \lambda.\end{aligned}$$

Возможны два случая:

а) среди точек (ξ_k) есть бесконечное (счетное) число различных. Тогда, по теореме единственности, $\omega(z) \equiv \lambda$, что противоречит условию;

б) среди точек (ξ_k) конечное число различных. Тогда в некоторую точку ξ_0 перейдет бесконечное число различных точек z_k . Будем рассматривать только эти z_k . Пусть точка z_1 — ближайшая к прямоугольнику Π , и пусть точка z_s из последовательности такова, что $z_s = z_1 - n$, $n \geq m$. Тогда в силу (1) $\omega(z_1) = R^n[\omega(z_1 - n)] = R^n[\omega(z_s)] = R^n(a) = \lambda$. Получим, что в точке z_1 : $\omega(z_1) = \lambda$. Это противоречит предположению: $a \neq \lambda$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Семейство функций $\{\omega_n(z)\}$ нормально на каждом компакте в плоскости.

Доказательство. По лемме 1 найдется такая неподвижная точка λ , что множество $A(\lambda) \setminus \{\lambda\}$ содержит, по крайней мере, три различные точки. Так как для любого $n > n_0(d)$ $w_n(z)$ не принимает (по лемме 2) значений из множества $A(\lambda) \setminus \{\lambda\}$ в полуполосе $S = S(a, c, d)$, то семейство $\{w_n(z)\}$ нормально в любой компактной части множества S . Ввиду произвольности вещественных a, c и d , $\{w_n(z)\}$ нормально в любой компактной части плоскости, что и требовалось доказать.

Лемма 4. *Существует предел: $\lim_{t \rightarrow +\infty} w(z-t) = \beta$, где $R(\beta) = \beta$, равномерный по $z \in S(a, c, d)$ для любых a, c .*

Доказательство. Рассмотрим некоторую сходящуюся последовательность $w_{n_k}(z)$. Пусть $\psi(z)$ — ее предельная функция; ψ — мероморфна. В силу лемм 1 и 2 существуют три значения μ_1, μ_2, μ_3 такие, что для каждой ограниченной области K найдется число $N = N(K)$ такое, что $w_{n_k}(z) \neq \mu_1, \mu_2, \mu_3, z \in K, k > N$. По теореме Гурвица предельная функция ψ не принимает значений μ_1, μ_2, μ_3 в области K .

Поскольку K — произвольная область, то эти значения не принимаются во всей плоскости. Значит, по теореме Пикара ψ является постоянной. Мы показали, что каждая сходящаяся подпоследовательность $w_n(z)$ имеет своим пределом постоянную и сходимость будет равномерная на каждом компакте в плоскости.

Рассмотрим прямоугольник $\Pi = \Pi(a, c, -2, 0)$. Так как $\{w_n\}$ имеет только постоянные предельные функции (среди них может быть и ∞), то $\text{diam } w_n(\Pi) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ (диаметр берется в сферической метрике).

Для каждой из сходящихся подпоследовательностей $\{w_{n_k}\}$, предел которой, скажем, β , имеем $w_{n_k}(\Pi) \rightarrow \beta, n_k \rightarrow \infty$, и так как $(\Pi - 1) \cap \Pi \neq \emptyset$, то $w_{n_{k+1}}(\Pi) \cap w_{n_k}(\Pi) \neq \emptyset$. Следовательно, $w_{n_{k+1}}(\Pi) \rightarrow \beta, n_k \rightarrow \infty$. Возьмем такое z , чтобы и z , и $z+1$ принадлежали Π . Тогда $w_{n_{k+1}}(z) \rightarrow \beta, w_{n_k}(z) = R[w_{n_{k+1}}(z)] \rightarrow R(\beta)$. Отсюда $R(\beta) = \beta$. Мы показали, что пределом каждой подпоследовательности $\{w_{n_k}\}$ является неподвижная точка функции R . То же самое верно и для пределов произвольных подпоследовательностей: $w_{t_k}(z) = w(z-t_k), t_k \rightarrow +\infty$.

Но тогда множество Ω предельных постоянных является связным множеством (см., например, [8], гл. 1, §§ 1, 2). Так как число неподвижных точек конечно, то множество Ω обязано совпадать с одной из них. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Множитель b неподвижной точки β по модулю больше или равен единице.*

Доказательство. Предположим противное: $|b| < 1$. Покажем, что в этом случае образ прямоугольника $\Pi = \Pi(a, c, -2, 0)$ под действием w попадает в сколь угодно малую окрестность точки β .

В силу леммы 4 $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : \omega(\Pi - n) \subset D(\beta, \varepsilon)$ и, так как $|b| < 1$, то при $\varepsilon < \varepsilon_0$ $\omega(\Pi) = R^n[\omega(\Pi - n)] \subset R^n[D(\beta, \varepsilon)] \subset D(\beta, \varepsilon)$, что, очевидно, невозможно. Лемма 5 доказана.

Пусть для рациональной функции R разрешимо уравнение (1) и пусть f — ветвь обратной к R функции. Тогда, как показывает следующая лемма, для функции f выполняется некоторое характерное свойство.

Лемма 6 [4, с. 102—103]. Пусть в лемме 4 $\beta = 0$ и пусть $f(z)$ — та ветвь R^{-1} , для которой $f(0) = 0$. Тогда найдется односвязное множество G такое, что

$$f(G) \subset G; \quad (5)$$

$$f^n(G) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (6)$$

равномерно в G .

Такое множество G называется инвариантной областью притяжения функции f .

Доказательство. Пусть $D' = D(0, \varepsilon)$ — круг, в котором f однолиствен. Рассмотрим множество: $H = \bigcup_{n=N}^{\infty} \omega(\Pi - n) = \omega(\dot{S} - N)$, где $\Pi = \Pi(a, c, -2, 0)$, $S = S(a, c, -2)$. Выберем $N = N(\varepsilon)$ так, чтобы $H \subset D'$. Если H неодносвязно, то «заклеим» в нем все «дыры», т. е. добавим к нему все ограниченные компоненты дополнения. Полученная область и есть искомая G . Действительно, проверим выполнение свойств (5) и (6).

Из построения множества H видно, что условие (5) для него выполняется. Но в силу принципа сохранения области оно выполнено для всего G .

В силу леммы 4 условие (6) выполняется для $z \in H$. По принципу максимума (6) будет выполнено и для z из ограниченных компонент дополнения к H . Лемма 6, таким образом, доказана.

Следующая лемма показывает, что в случае нейтральной точки множитель равен +1.

Лемма 7. Пусть функция $f(z)$ имеет в окрестности нуля разложение:

$$f(z) = \gamma z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k, \quad |\gamma| = 1,$$

и пусть U — инвариантная область притяжения к нулю. Тогда $\gamma = 1$.

Доказательство см. Фату [1], §§ 54—55, а также Бэйкер, Ливерпуль [4], с. 102—103.

Теперь утверждения теоремы 1 сразу же следуют из лемм 4—7.

Замечание. Попутно доказан следующий факт. Пусть φ — решение уравнения Пуанкаре (2), мероморфное в $C \setminus \{0\}$. Тогда оно мероморфно во всей комплексной плоскости, а следовательно, выполняется

$$\varphi(0) = \beta, \quad R(\beta) = \beta, \quad b = R'(\beta), \quad |b| > 1.$$

Действительно, по лемме 4 точка $z = 0$ не может быть изолированной существенной особенностью функции φ .

Отметим, что Жюлиа [2] построил решения уравнения (2), мероморфные в проколотой окрестности нуля и имеющие существенную особенность в нуле. Ясно, что при этом $|b| \leq 1$.

После того, как настоящая работа была сдана в печать, автору стала известна работа N. Yanagihara "Meromorphic Solutions of Some Difference Equations and Conformal Mapping of Infinite Strips" *, в которой теорема 1 получена другим методом, не связанным с итерациями рациональных функций.

Список литературы: 1. *Fatou P.* Sur les equations fonctionnelles // Bull. Soc. Math. France. — 1919. — V. 47. — P. 161—271. — V. 48. — P. 33—94, 208—314. 2. *Julia G.* Sur quelques application de la representation conforme a la resolution d'equations fonctionnelles // Bull. Soc. Math. France. — 1924. — V. 52. — P. 279—315. 3. *Yanagihara N.* Meromorphic solutions of some difference equations // Funkc. Ekvac. — 1980. — V. 23, № 3. — P. 309—326. 4. *Baker I. N., Liverpool L. S. O.* The entire solutions of a polynomial difference equation // Aequat. Math. — 1984. — V. 27, № 1/2. — P. 97—113. 5. *Ritt J. F.* Meromorphic functions with addition or multiplication theorems // Trans. Amer. Math. Soc. — 1927. — P. 341—360. 6. *Монтель П.* Нормальные свойства аналитических функций. — М.: ОНТИ НКТП СССР. — 1936. — 240 с. 7. *Blanchard P.* Complex analytic dynamics // Bull. Amer. Math. Soc., 1984. — V. 11, № 1. — P. 85—141. 8. *Коллингвуд Э., Ловатер А.* Теория предельных множеств. — М.: Мир. — 1971. — 312 с.

Поступила в редколлегию 15.10.85

УДК 517.9

А. М. БЛОХ

О ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ НА ОДНОМЕРНЫХ РАЗВЕТВЛЕННЫХ МНОГООБРАЗИЯХ. 3

Настоящее исследование является продолжением работ [1, 2]. Ранее [2] для неатомических инвариантных мер μ непрерывного отображения одномерного разветвленного многообразия (будем писать ниже «графа») доказана равносильность таких свойств: а) $\exists x: \text{supp } \mu \subset \omega(x)$; б) $u \in \mu$ есть типичная точка; в) μ изоморфна

* N. Yanagihara. Meromorphic Solutions of Some Difference Equations and Conformal Mapping of Infinite Strips // Funkc. Ekvacioj. — 1983. — V. 26, № 1. — P. 17—35.

мере Лебега для некоторого иррационального поворота окружности либо приближается мерами, сосредоточенными на циклах.

Устанавливаем данный факт для любых мер. Для этого в подразд. 1 введено понятие квазиспецификации, более слабое, чем свойство спецификации, но влекущее аналогичные свойства инвариантных мер. В подразд. 2 доказано, что непрерывные отображения «графа» на базисном множестве (определения см. в работе [1] или ниже) обладают квазиспецификацией, что вместе с доказанным ранее [1] дает сформулированный результат (см. подразд. 3). Там же обобщены результаты о множествах вращения для отображений окружности степени 1 на случай отображений «графов» (ср. с [3]) и получен ряд следствий о поточечных предельных множествах чезаровских итераций непрерывных функций под действием отображения «графа».

1. Пусть (X, d) — метрический компакт; $T: X \rightarrow X$ — непрерывно; $Q_e(T)$ — множество всех типичных для какой-либо неатомической меры точек; $Q(T) = Q_e(T) \cup \text{Per } T$. Скажем, что T обладает свойством квазиспецификации (КС-свойством) и является КС-отображением, если есть компакты $X_1, \dots, X_R$ и число u с такими свойствами.

1) $X = \bigcup_{i=1}^R X_i$, $TX_i = X_{i+1}$ ($1 \leq i \leq R-1$), $TX_R = X_1$, $X_i \cap X_j$ конечно ($i \neq j$).

2) Для любого набора точек $\{x_1, \dots, x_n\} \subset Q(T)$, которым сопоставлены компакты $X_{r(i)} \ni x_i$, любых $s > 0$ и $\varepsilon > 0$, есть числа $N = N(\bigcup_{i=1}^n x_i, s, \varepsilon)$ и $M = M(\bigcup_{i=1}^n x_i, s, \varepsilon)$ такие, что если дан набор чисел $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \dots < a_n \leq b_n$, p , где $a_{i+1} - b_i \geq M \times (1 \leq i \leq n-1)$, $p - b_n + a_1 \geq M$, $p \in R$, $T^{a_j - a_i} X_{r(i)} = X_{r(j)} \times (1 \leq j \leq n)$, $b_i - a_i \geq N$ при $x_i \notin \text{Per } T$, то найдется z , где $T^{up} z = z$, с такими свойствами: а) при $x_i \in \text{Per } T$ и $a_i \leq t \leq b_i$, $d(T^{lp+tz}, T^{t-a_i} x_i) \leq \varepsilon$ ($1 \leq i \leq n$, $0 \leq l \leq u-1$); б) при $x_i \notin \text{Per } T$ для не менее чем $(1-s)(b_i - a_i)$ чисел t из $\{a_i, \dots, b_i\}$ имеем $d(T^{l+p} z, T^{t-a_i} x_i) \leq \varepsilon$ ($0 \leq l \leq u-1$, $1 \leq i \leq n$).

От известного свойства спецификации КС-свойство отличается «статистическим» характером и тем, что константы зависят от выбранных точек. Нам понадобится

Лемма 1. а) Пусть $\{a_i\}_{i=1}^N$ — набор чисел, причем для не менее чем k из них $|a_i| \leq \varepsilon$, а для остальных — $|a_i| \leq c$. Тогда $|\sum_{i=1}^N a_i| \cdot N^{-1} \leq \varepsilon + (1 - kN^{-1}) c$.

б) Пусть $\{a_i\}_{i=1}^N, \{b_j\}_{j=1}^M$ — два набора чисел, $N \leq M$, каждому i инъективно сопоставлено $j = j(i)$ так, что для не менее чем k чисел i $|a_i - b_{j(i)}| \leq \varepsilon$, а для любых i и j $|a_i| \leq c$,

$$|b_j| \leq c. \text{ Тогда } |N^{-1} \cdot \sum_{i=1}^N a_i - M^{-1} \cdot \sum_{j=1}^M b_j| \leq \varepsilon + 2c \left(1 - \frac{k}{N}\right) + 2c \times \left(\frac{M-N}{M}\right).$$

Доказательство. а) Очевидно. б) По пункту а) $|M^{-1} \times \sum_{i=1}^N (a_i - b_{j(i)})| \leq \varepsilon + 2c \left(1 - \frac{k}{N}\right)$. Но $\left|\sum_{i=1}^N \frac{b_{j(i)}}{N} - \sum_{j=1}^M \frac{b_j}{M}\right| \leq \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right)c + \frac{M-N}{M}c = 2c \left(\frac{M-N}{M}\right)$, что и требовалось доказать.

Назовем инвариантную меру с носителем на цикле СО-мерой; объединение СО-мер, сосредоточенных на циклах периода p , обозначим $P(p)$. Семейство всех T -инвариантных вероятностных мер обозначим $D_T(X)$. Центр T обозначим $Ce(T)$. Для $x \in X$ пусть $V_T(x)$ — множество предельных мер для последовательности мер $\delta_x^N = N^{-1} \cdot (\delta(x) + \dots + \delta(T^{N-1}x))$, где $\delta(\cdot)$ — обозначение для δ -меры. Заметим (см. [4, 3.8]), что $V_T(x) \subset D_T(X)$, $V_T(x)$ непусто, замкнуто и связно. Следующая теорема близка к доказанным в гл. 21 книги [4]; в ней мы будем считать $u=1$ (см. определение КС-свойства), так как все доказательства верны при $u>1$.

Теорема 1. Пусть $T: X \rightarrow X$ — КС-отображение. Тогда а) $\bigcup_{p>1} P(p)$ плотно в $D_T(X)$ ($\forall l$); б) семейство эргодических не-

атомических мер с носителем X массивно в $D_T(X)$; в) если $V \subset D_T(X)$ — непустой связный компакт, то множество $x \in Ce(T)$ таких, что $V_T(x) = V$, плотно в $Ce(T)$; г) множество $x \in Ce(T)$ таких, что $V_T(x) = D_T(X)$, массивно в $Ce(T)$.

Доказательство. а) Пусть $l \in N$, $\mu \in D_T(X)$, окрестность μ в $D_T(X)$ имеет вид $W(\mu) = \{v \in D_T(X) : \left|\int \varphi d\mu - \int \varphi dv\right| < \varepsilon \text{ при } \varphi \in F\}$, где $F \subset C(X)$ — конечный набор функций; $\|\varphi\| \leq 1$ при $\varphi \in F$. Докажем, что $W(\mu) \cap \left(\bigcup_{p>1} P(p)\right) \neq \emptyset$. Для $x \in Q(T)$

пусть $\varphi^*(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_x^N(\varphi)$. Разобьем $Q(T)$ на непустые борелевские множества $Q_1, \dots, Q_k$ так, что φ^*/Q_j имеет колебание меньше $\varepsilon/6$, выберем $x_j \in Q_j$ и возьмем достаточно большое N ; тогда $\left|\int \varphi d\mu - \sum_{j=1}^k \mu(Q_j) \cdot \delta_{x_j}^N(\varphi)\right| < \varepsilon/3$ ($\forall \varphi \in F$).

Найдем натуральные $m_1, \dots, m_k$ так, что $\frac{1}{m} \cdot m_j$ близко к $\mu(Q_j)$, где $m = m_1 + \dots + m_k$; тогда имеем $\left|\int \varphi d\mu - \sum_{j=1}^k \frac{1}{m} \cdot m_j \times \delta_{x_j}^N(\varphi)\right| < \varepsilon/3$. Пусть $s = \varepsilon/12$, точки $\{y_i\}_{i=1}^m$ выбраны так: при $0 < i \leq m_1$ $y_i = x_1, \dots$, при $m_1 + \dots + m_j < i \leq m_1 + \dots + m_{j+1}$ $y_i = x_{j+1}, \dots$. Далее, пусть δ — такое, что $d(x', y') \leq \delta$ влечет

$|\varphi(x') - \varphi(y')| \leq \frac{\varepsilon}{6} \quad (\forall \varphi \in F)$. Тогда по КС-свойству есть числа N, M с надлежащими свойствами, причем можно считать, что $(M+R) \cdot (M+N)^{-1} < \varepsilon/3$.

Подберем числа $0 = a_1, b_1, \dots, a_m, b_m, p$ так, чтобы удовлетворялись условия КС-свойства, причем $b_i = a_i + N, M \leq a_{i+1} - b_i \leq M + R$ ($1 \leq i \leq m-1$), $M \leq p - b_m \leq M + R, p \leq R$. Тогда есть z такое, что $T^p z = z, d(T^i z, T^{i-a_j} y_j) \leq \delta$ для не менее чем $(1-s)(b_j - a_j)$ чисел $t \in \{a_j, \dots, b_j\}$ ($j = 1, \dots, m$). Пусть A' — множество чисел из $Z \cap (\bigcup_{j=1}^m [a_j, b_j])$ таких, что при $t \in [a_j, b_j] \cap A'$ $d(T^i z, T^{i-a_j} y_j) \leq \delta$. Имеем 1) для $\text{card } A' \geq mN(1-s)$ чисел r между 0 и $p-1$ $|\varphi(T^r z) - \varphi(T^{r-a_j} y_j)| = \frac{\varepsilon}{6}$, где $a_j \leq r \leq b_j$; 2) $|\varphi(x)| \leq 1$ ($\forall x$). По лемме 1 отсюда

$$\begin{aligned} & \left| \delta_z^p(\varphi) - m^{-1} \sum_{j=1}^m \delta_{y_j}^N(\varphi) \right| = \left| \delta_z^p(\varphi) - \sum_{j=1}^m \frac{m_j}{m} \cdot \delta_{x_j}^N(\varphi) \right| < \\ & < \frac{\varepsilon}{6} + 2 \left(1 - \frac{mN(1-s)}{mN} \right) + 2 [1 - mN \cdot (m \cdot (N+M+R))^{-1}] < \\ & < \frac{\varepsilon}{6} + 2s + (M+R)(M+N+R)^{-1} < \frac{2}{3} \varepsilon. \end{aligned}$$

Окончательно $\left| \int \varphi d\mu - \delta_z^p(\varphi) \right| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

б) Несложно следует из а) (см. [4, предложения 21.9—21.12]).

в) Из а) $\text{Per } T = \text{Ce}(T)$. Поэтому достаточно в δ_0 -шаре с центром $x_0 \in \overline{\text{Per } T}$ найти $z \in \text{Ce}(T) : V_T(z) = V$. Пусть $\tilde{d}$ — метрика в пространстве $D(X)$ всех мер на X . Найдутся замкнутые шары $\{B_n\}$ в $D(X)$ с радиусами ε_n такие, что 1) $B_n \cap B_{n+1} \cap V \neq \emptyset$ ($\forall n$);

2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n \geq N} B_n = V$; 3) $\varepsilon_n \rightarrow 0$; 4) центры всех B_n — СО — меры γ_n , носители которых — орбиты периодических точек x_n периода q_n .

Лемма 2. Пусть $x, y \in \text{Per } T, p$ — период x, q — период $y, \tilde{\delta} > 0$. Найдутся числа k, l, M_1, M_2 и точка z такие, что если $r = kp + lq + M_1 + M_2$, то $T^r z = z$, а также 1) при $0 \leq i \leq kp$ $d(T^i x, T^i z) \leq \tilde{\delta}$; 2) при $kp + M_1 \leq i \leq kp + M_1 + lq$ $d(T^{i-kp-M_1} y, T^i z) \leq \tilde{\delta}$; 3) для $m \geq kp$ найдется $\alpha = \alpha(m) \in [0, 1]$ такое, что если $\varphi \in C(X), \|\varphi\| \leq 1$, а $d(x', y') \leq \tilde{\delta}$ влечет $|\varphi(x') - \varphi(y')| \leq \varepsilon$, то $|\delta_z^m(\varphi) - \alpha \cdot \delta_x^p(\varphi) - (1-\alpha) \delta_y^q(\varphi)| \leq 2\varepsilon$, причем при $m \geq r$ $\alpha(m) = 0$.

Доказательство. По КС-свойству найдем M , соответствующее числу $\tilde{\delta}$ и точкам x, y (так как $x, y \in \text{Per } T$, то s и N неважны). Выберем теперь k и l так, что $k > 4(M+R) \cdot (\varepsilon p)^{-1} 1$; $l > \max \{2kp \cdot q^{-1}(4\varepsilon^{-1} - 1), 8(2M+2R+p+q) \cdot q^{-1}\varepsilon^{-1}\}$ 2).

Выберем M_1 : $M \leq M_1 \leq M + R$, а затем M_2 : $M \leq M_2 \leq M + R$ так, чтобы КС-свойство было применимо к точкам x, y и числам $a_1 = 0, b_1 = kp, a_2 = b_1 + M_1, b_2 = a_2 + lq$, а период точки z , совместно приближающей орбиты x, y , есть $b_2 + M_2 = r$. Чтобы проверить для z пункт 3) условия, выделим в множестве $\{0, \dots, m-1\}$ подмножества $A = \{i : i \bmod r \leq kp\}$, $B = \{i : kp + M_1 \leq i \bmod r \leq kp + M_1 + lq - 1\}$. Уменьшив A не более чем на p , а B — не более чем на q элементов, можно считать A и B состоящими из целого набора групп по p (соответственно q) идущих друг за другом чисел, первое из которых в группах из A сравнимо по модулю r с кратным p числом, а в группах из B — с числом вида $kp + M_1 + tq$, где $t \in N, t \leq l$. Наконец, пусть $C = \{0, \dots, m-1\} \setminus (A \cup B)$.

Обозначим $\text{card } A = a, \text{card } B = b, \text{card } C = c$; для любого i такого, что $i \bmod r \in \{0, \dots, kp\} \cup \{kp + M_1, \dots, kp + M_1 + lq\}$, рассмотрим функцию $\chi(i) = 1$ $i \bmod r$ при $0 \leq i \bmod r \leq kp$; 2) $i \bmod r - kp - M_1$ при $kp + M_1 \leq i \bmod r \leq kp + M_1 + lq$ (ясно, что для этих $i d(T^i z, T^{i(i)} \xi) \leq \delta$, где $\xi = x$ или $\xi = y$ в зависимости от i). Применим лемму 1 к числам $\{\varphi(T^i z)\}_{i=0}^{m-1}$, а также $\{\varphi(T^{i(i)} x)\}_{i \in A}, \{\varphi(T^{i(i)} y)\}_{i \in B}$. Имеем $|\delta_z^m(\varphi) - (\sum_{i \in A} \varphi \times$

$$\begin{aligned} & \times (T^{i(i)} x) + \sum_{i \in B} \varphi(T^{i(i)} y)) \cdot (a+b)^{-1}| = \left| \delta_z^m(\varphi) - \frac{a}{a+b} \cdot \delta_x^p(\varphi) - b \times \right. \\ & \times (a+b)^{-1} \cdot \delta_y^q(\varphi) \left. \right| \leq \varepsilon + 2c(a+b+c)^{-1}. \text{ Но если } m \leq r, \text{ то } c \leq \\ & \leq M_1 + M_2, \text{ следовательно, } 2c(a+b+c)^{-1} \leq 2(M_1 + M_2)(kp)^{-1} \leq \\ & \leq \varepsilon \text{ по 1) (и } \alpha(m) = a(a+b)^{-1}), \text{ а если } m > r, \text{ то, обозначив } E \\ & \text{ целую часть } m/r, \text{ имеем } b \geq Elq, a \leq (E+1)kp, c \leq (E+1) \times \\ & \times (M_1 + M_2) + p + q; \text{ отсюда и из 2) } 2c(a+b+c)^{-1} \leq 2cb^{-1} \leq \\ & \leq [2(E+1)(M_1 + M_2) + p + q] \cdot (Elq)^{-1} \leq 4(M_1 + M_2 + p + q)/lq < \\ & < \varepsilon/2 \text{ 3). Поскольку } \left| \frac{a}{a+b} \delta_x^p(\varphi) - \frac{a}{a+b} \cdot \delta_y^q(\varphi) \right| \leq 2a(a+b)^{-1} \leq \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ то } |\delta_z^m(\varphi) - \delta_y^q(\varphi)| \leq 2\varepsilon. \text{ Лемма доказана.} \end{aligned}$$

Продолжая доказательство пункта в) теоремы 1, рассмотрим индуктивный процесс. Пусть $a_0 = b_0 = 0, z_0 = x_0$ — выбранная нами точка. Найдем по числу $\tilde{\delta}_1 = \tilde{\delta}_0 \cdot 2^{-1}$ и точкам z_0, x_1 с периодами $p_1 = q_0$ и q_1 числа k_1, l_1, M'_1, M''_1 и точку $z_1 \in \text{Per } T$ так, как гарантирует лемма 2. Тогда $T^{k_1 p_1 + l_1 q_1 + M'_1 + M''_1}(z_1) = z_1$, при $0 \leq i \leq k_1 p_1$ $d(T^i z_0, T^i z_1) \leq \tilde{\delta}_1$, при $k_1 p_1 + M'_1 \leq i \leq k_1 p_1 + M'_1 + l_1 q_1$ $d(T^i z_0, T^{i - k_1 p_1 - M'_1} x_1) \leq \tilde{\delta}_1$ выполняется свойство 3) из леммы 2. Далее построение аналогично; на n -м шагу найдем по числу $\tilde{\delta}_n = \tilde{\delta}_0 \cdot 2^{-n}$, точке z_{n-1} с периодом p_n и точке x_n с периодом q_n числа k_n, l_n, M'_n, M''_n и точку z_n со свойствами из леммы 2. Ясно, что есть $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z, d(z, x_0) \leq \delta_0$. Далее, очевидно, что при $i \leq k_n p_n$ $d(T^i z, T^i z_n) \leq \delta_n$, а при $k_{n-1} p_{n-1} + M'_n \leq j \leq$

$\leq k_{n-1}p_{n-1} + M'_{n-1} + l_{n-1}q_{n-1} \quad d(Tiz_n, T^{j-k_n p_n - M'_n} x_n) \leq \delta_n$. Докажем, что $V = V_T(z)$.

Вначале докажем, что $V \subset V_T(z)$. Если $\mu \in V$, то найдется последовательность $\{n(k)\}$ такая, что $\gamma_{n(k)} \rightarrow \mu$. Пусть $\varphi \in C(X)$, i_0 — такое, что при $d(x', y') \leq \delta_{i_0}$ $|\varphi(x') - \varphi(y')| \leq \varepsilon$. Тогда при $n(k) \geq i_0$ $|\delta_{z_{n(k)}}^{p_{n(k)}}(\varphi) - \delta_{x_{n(k)}}^{q_{n(k)}}(\varphi)| \leq 2\varepsilon$, а также $|\delta_z^{p_{n(k)}}(\varphi) - \delta_{z_{n(k)}}^{p_{n(k)}}(\varphi)| \leq \varepsilon$, откуда $|\delta_{z_{n(k)}}^{p_{n(k)}}(\varphi) - \int \varphi d\gamma_{n(k)}| \leq 3\varepsilon$. Так как $\gamma_{n(k)} \rightarrow \mu$, то отсюда $\delta_z^{p_{n(k)}}(\varphi) - \int \varphi d\mu \Big|_{k \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, т. е. $V \subset V_T(z)$.

Будем теперь доказывать, что $V_T(z) \subset V$. Пусть $\{n_i\}$ — последовательность, $\delta_{z_i}^{n_i} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} v$. Фиксируем $\varphi \in C(X)$, $\|\varphi\| \leq 1$. Для всех i найдем $r = r(i)$ так, что $k_{r(i)}p_{r(i)} \leq n_i < k_{r(i)+1}p_{r(i)+1}$. Пусть i так велико, что при $d(x', y') \leq \delta_{r(i)-1}$ $|\varphi(x') - \varphi(y')| \leq \varepsilon$. По лемме 2 для $\alpha_i = \alpha(n_i)$ $|\delta_{z_{r(i)}}^{n_i}(\varphi) - \alpha_i \cdot \delta_{z_{r(i)-1}}^{p_{r(i)-1}}(\varphi) - (1 - \alpha_i) \delta_{x_{r(i)}}^{q_{r(i)}}(\varphi)| \leq 2\varepsilon$, затем по той же лемме $|\delta_{z_{r(i)-1}}^{p_{r(i)-1}}(\varphi) - \delta_{x_{r(i)-1}}^{q_{r(i)-1}}(\varphi)| \leq 2\varepsilon$ и, наконец, $|\delta_z^{n_i}(\varphi) - \delta_{z_{r(i)}}^{n_i}(\varphi)| \leq \varepsilon$ по выбору i . Окончательно $|\delta_z^{n_i}(\varphi) - \alpha_i \times \int \varphi d\gamma_{r(i)-1} - (1 - \alpha_i) \int \varphi d\gamma_{r(i)}| \leq 5\varepsilon$. Значит, $\alpha_i \gamma_{r(i)-1} + (1 - \alpha_i) \times \gamma_{r(i)} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} v$. Но этот предел лежит в V , так как $\bar{d}(\gamma_{r(i)-1}, V) \leq \varepsilon_{r(i)-1}$, $\bar{d}(\gamma_{r(i)-1}, \gamma_{r(i)}) \leq \varepsilon_{r(i)-1} + \varepsilon_{r(i)}$, $\varepsilon_r \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$, что и требовалось доказать.

2. Напомним ряд определений из [1, 2]. Узел $\equiv$ точка «графа», не имеющая окрестности, гомеоморфной интервалу; из определения следует, что у «графа» конечное число узлов. Дуга $\equiv$ подмножество «графа», гомеоморфное интервалу. Если x — точка «графа» K , то под *стороной* R точки x будем понимать семейство открытых невырожденных не содержащих узлов дуг $\{V_R(x)\}$ с одним из концов в x и таких, что если $V_R'(x) \in R$, $V_R''(x) \in R$, то либо $V_R'(x) \subset V_R''(x)$, либо $V_R''(x) \subset V_R'(x)$. Пусть $f: K \rightarrow K$ непрерывно, $x \in K$, R — сторона x , S — сторона fx ; S принадлежит образу R , если для любой полуокрестности $V_R(x) \in R$ найдется полуокрестность $V_S(fx) \in S$ такая, что $fV_R(x) \supset V_S(fx)$. Множество всех сторон x обозначим $Si(x)$. Важным для нас будет следующее определение. Пусть $T: X \rightarrow X$, $\tilde{T}: \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ — непрерывные отображения топологических пространств, $\Phi: X \rightarrow \tilde{X}$ — монотонная (т. е. $\Phi^{-1}(\tilde{x})$ связно для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$) непрерывная сюръекция, полусопрягающая T и $\tilde{T}$ (т. е. $\Phi \circ T = \tilde{T} \circ \Phi$). Пусть $F \subset X$ — T -инвариантное замкнутое множество, причем существует $N < \infty$ такое, что для любого $\tilde{x} \in \tilde{X}$ $1 \leq \text{card}(\Phi^{-1}(\tilde{x}) \cap F) \leq N$ и $\text{int}(\Phi^{-1}(\tilde{x})) \cap F = \emptyset$ (т. е. $\Phi^{-1}(\tilde{x}) \cap F \subset \partial \Phi^{-1}(\tilde{x})$); тогда Φ почти точно на F полусопрягает T и $\tilde{T}$. Если еще $\Phi^{-1}(\tilde{x}) \cap F = \partial \Phi^{-1}(\tilde{x})$, то назовем Φ полным. Ниже, если не оговорено противное, рассматриваются

непрерывные отображения «графов». Наконец, пусть на «графе» выбрана метрика d с таким свойством: каждой дуге A сопоставлена ее длина $l(A)$ и если $l(A)$ мало, то для любых $x, y \in A$ $d(x, y) = l([x, y])$, где $[x, y] \subset A$ — дуга с концами в x и y .

Пусть M — инвариантный «подграф» $\stackrel{\text{def}}{=} \text{подмножеством}$.

Если множество $E(M) = \{x \in M: \text{любая окрестность } x \text{ в } M \text{ имеет плотную траекторию}\}$ бесконечно, то при $\text{Per } f/M \neq \emptyset$ назовем $E(M)$ базисным и будем обозначать $B(M)$, а при $\text{Per } f/M = \emptyset$ назовем $E(M)$ окружностным и будем обозначать $S(M)$. В [1, 5] доказаны две теоремы, которые объединим здесь в одну.

Теорема 2. а) [1] Бесконечное множество $E = E(M)$ — совершенно, $f|E$ — транзитивно и если $\omega_f(z) \supset E$, то $\omega_f(z) = E$; при этом существует «граф» M и транзитивное отображение $g: M \rightarrow M$ такие, что $f|M$ полно и почти точно на E полусопряжено с g , причем кратность полусопряжения на E зависит лишь от топологии M ; б) ([5]) Пусть $\psi: K \rightarrow K$ транзитивно.

Тогда $K = \bigcup_{i=0}^{m-1} K_i$, где все K_i — связные компакты, $K_i \cap K_j$ конечно при $i \neq j$, $\psi K_i = K_{i+1}$ ($0 \leq i \leq m-1$), $\psi K_{m-1} = K_0$, $f^m|K_i$ имеет свойство спецификации (если $\text{Per } \psi \neq \emptyset$) или сопряжено с иррациональным сдвигом в окрестности (если $\text{Per } \psi = \emptyset$).

Докажем КС-свойство для отображений базисных множеств.

Теорема 3. Если $f: K \rightarrow K$ — непрерывное отображение «графа», F — базисное, то $f|F$ — КС-отображение.

Доказательство. Из определения ясно, что можно считать $F = E(K)$. По теореме 2 найдется транзитивное отображение некоторого «графа» $g: K \rightarrow K$, с которым f полно и почти точно на F φ -полусопряжено, в K есть «подграфы» $K_1, \dots, K_{m'}$, циклически переставляющиеся под действием g , причем $g^{m'}|K_i$ обладает свойством спецификации $(\forall i)$. Обозначим $d(\cdot, \cdot)$ метрику на K . Достаточно доказать, что $f^{m'}/\varphi^{-1}(K_1) \cap F$ — КС-отображение с $R = 1$, отсюда будет следовать, что $f|F$ — КС-отображение с $R = m'$ и разбиением F на подмножества $\varphi^{-1}(K_i) \cap F$. Поэтому будем считать, что $m' = 1$, g обладает свойством спецификации. Пусть даны $\varepsilon > 0$, $s > 0$, $\{x_1, \dots, x_n\} \subset Q(f)$. Обозначим $\pi = \{i: x_i \in \text{Per } f\}$, для $i \in \pi$ пусть σ'_i — множество всех сторон x_i , с которых x_i предельна для F . Ясно, что найдется q такое, что для любого $i \in \pi$ $f^q(\sigma'_i) \subset \sigma'_i$ (в частности, $f^q x_i = x_i$ для $i \in \pi$). Пусть теперь σ''_i — множество всех сторон S точек из $F \cap \varphi^{-1}(\varphi(x_i))$, для которых найдется $m(S)$ такое, что $f^{qm(S)}(S) \subset \sigma'_i$; пусть m — максимум $m(S)$ по всем i и S . Обозначим $\sum'_i = \varphi(\sigma'_i)$, $\sum''_i = \varphi(\sigma''_i)$, $y_i = \varphi(x_i)$.

Определим важные для дальнейшего константы и окрестности.

1) Пусть ε_1 — такое, что $d(x', y') < \varepsilon_1$ влечет $d(f^i x', f^i y') < \varepsilon$ при $0 \leq i < q$ (в частности, $\varepsilon_1 < \varepsilon$).

2) Пусть A — семейство всех множеств вида $\varphi^{-1}(y)$ с $\text{diam } \varphi^{-1} \times \times (y) \geq \varepsilon/3$, B — семейство их окрестностей вида $\varphi^{-1}(U_y)$, где U_y

фиксировано для каждого $y \in \varphi(A)$ и выбрано так, что найдется N со следующим свойством: при $l \geq N$, $z \in \{x_1, \dots, x_n\} \setminus \text{Per } f$ выполняется $l^{-1} \cdot \sum_{i=0}^l \chi_{\varphi^{-1}(\bar{U})}(T^i z) < s$, где $\chi_A = 1$ на множестве, $\chi_A = 0$ вне A ; $\bar{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{B}} U$.

3) Фиксируем $i \in \pi$. По всем сторонам точек из $\varphi^{-1}(\varphi(x_i)) \cap F$, не принадлежащим σ_i'' , рассмотрим объединение Ω_i малых одно-сторонних полуокрестностей, f^q -образ которого не пересекается с некоторым объединением W_i^* односторонних полуокрестностей точек из $\varphi^{-1}(\varphi(x_i))$, которое, в свою очередь, берется по всем сторонам из σ_i'' . Можно считать, что $\text{diam } \Omega_i < \varepsilon_1$, $\text{diam } W_i^* < \varepsilon_1$. По выбору Ω_i , если $z \in \Omega_i$, а для некоторого k $f^{kq}z \in W_i^*$, то для некоторого $k' \leq k$ $f^{k'q}z \notin W_i^* \cup \Omega_i$, откуда для некоторого $\delta_2 > 0$ $d(f^{k'q}(\varphi(z)), y_i) \geq \delta_2$ (можно считать δ_2 не зависящим от i).

4) Пусть $\tilde{W}_i$ — часть W_i^* , получающаяся объединением полу-окрестностей по сторонам из σ_i' . Можно считать, что в $\tilde{W}_i$ вы-брано подмножество $\tilde{\tilde{W}}_i$, также составленное из невырожденных полуокрестностей, соответствующих сторонам из σ_i' , причем такое, что, обозначая $\varphi(W_i^*) = W_i^*$, $\varphi(\tilde{W}_i) = \tilde{W}_i$, $\varphi(\tilde{\tilde{W}}_i) = \tilde{\tilde{W}}_i$, имеем

а) для некоторого $\delta'_1 > 0$, если $z \in g^q \tilde{W}_i$, $d(z, \tilde{W}_i) \leq \delta'_1$, то $z \in \tilde{W}_i$ (δ'_1 найдется ввиду определения множества сторон σ_i');

б) $\varphi(\partial \tilde{\tilde{W}}_i \setminus x_i) \cap \varphi(\partial \tilde{W}_i \setminus x_i) = (\partial \tilde{\tilde{W}}_i \setminus y_i) \cap (\partial \tilde{W}_i \setminus y_i) = \emptyset$ (так что есть $\delta''_1 > 0$ такое, что $d(z, \xi) \geq \delta''_1$ при $z \in \partial \tilde{\tilde{W}}_i \setminus y_i$, $\xi \in \partial \tilde{W}_i \setminus y_i$);

в) $f^{qm}(W_i^* \setminus \tilde{W}_i) \subset \tilde{\tilde{W}}_i$, $g^{qm}(W_i^* \setminus \tilde{W}_i) \subset \tilde{\tilde{W}}_i$, $\tilde{\tilde{W}}_i \subset \tilde{W}_i \subset W_i^*$, $\tilde{W}_i \subset \tilde{W}_i \subset W_i^*$;

г) $\text{diam } W_i^* \leq \delta_3$, $d(\partial \tilde{\tilde{W}}_i \setminus y_i, y_i) \geq \delta_4$;

д) $0 < \delta_1 < \min(\delta_2 - \delta_3, \frac{1}{2}\delta_4, \delta'_1, \delta''_1)$;

е) $\varphi^{-1}(W_i^* \setminus y_i) = W_i^* \setminus x_i$, $\varphi^{-1}(\tilde{W}_i \setminus y_i) = \tilde{W}_i \setminus x_i$, $\varphi^{-1} \times \times (\tilde{\tilde{W}}_i \setminus y_i) = \tilde{\tilde{W}}_i \setminus x_i$.

При выборе этих окрестностей, возможно, придется умень-шить W_i^* .

5) Выберем $\delta < \delta_1$ так, что если $y \in K \setminus \varphi(\bar{U})$, то $d(y, x) \leq \delta$ влечет $d(\varphi^{-1}(y), \varphi^{-1}(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

6) Выберем, пользуясь спецификацией g , число $M' = M'(\delta)$ по числу δ ; пусть $M = M' + (m+1)q$, (m — такое, что $g^{mq} \times \times (W_i^* \setminus \tilde{W}_i) \subset \tilde{\tilde{W}}_i \subset \tilde{W}_i$).

Покажем, что M и найденное в пункте 2) N — искомые. Пусть $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \dots < a_n \leq b_n$, p — такие, что $a_{i+1} - b_i \geq M$

($0 \leq i \leq n-1$), $p + a_1 - b_n \geq M$, при $x_i \notin \text{Per } f$ $b_i - a_i \geq N$. Из определения КС-свойства очевидно, что можно считать $a_1 = mq$. Рассмотрим числа $\{a_i, b_i\}$, где $a_i' = a_i - mq$, $b_i' \equiv a_i' \pmod{q}$, $b_i \leq b_i' \leq b_i + q$. Кроме того, изменим точки $\{y_i\}$ так:

а) если $x_i \notin \text{Per } f$, то пусть $z_i = y_i = \varphi(x_i)$ (по выбору N при

$$r \geq N \frac{1}{r} \sum_{j=0}^{r-1} \chi_{\bar{U}}(g^j z_i) \leq s);$$

б) если $x_i \in \text{Per } f$, $y_i = \varphi(x_i)$, то выберем z_i так. Из транзитивности $g^q(\bar{W}_i) \not\subset \bar{W}_i$; значит, есть $y_i' \in \bar{W}_i$ такое, что $g^q y_i' \in \partial \bar{W}_i \setminus y_i$. Взяв у y_i' g^q -прообразы в $\bar{W}_i$, найдем в конце концов точку $z_i: g^{jq} z_i \in \bar{W}_i$ ($0 \leq j \leq (b_i - a_i') \cdot q^{-1}$), $g^{(b_i - a_i')} z_i \in \partial \bar{W}_i \setminus y_i$.

По точкам $\{z_i\}$ и числам $\{a_i', b_i', p\}$ найдем точку z так, что $d(g^i z, g^{i-a_i'} z_i) \leq \delta$ ($a_i' \leq t \leq b_i', 1 \leq i \leq n$), $g^p z = z$ (это возможно, так как $a_{i+1}' - b_i' \geq M - (m+1)q \geq M'$). По теореме 2 $\text{card}(F \cap \cap \varphi^{-1}(z)) \leq \tilde{u}$, $\tilde{u}$ зависит только от топологии K . Значит, если $u = \tilde{u}!$, то среди точек из $F \cap \varphi^{-1}(z)$ есть ξ такая, что $f^{pu} \xi = \xi$. Осталось показать, что $\text{orb}_f(\varphi^{-1}(z))$ проходит на расстоянии не больше, чем ε , от надлежащих итераций точек $\{x_i\}$.

Покажем, что при $i \in \pi$ $g^{a_i'} z \in W_i^*$. Пусть это не так. Так как по выбору z_i $g^{(b_i - a_i')} z_i \in \partial \bar{W}_i \setminus y_i$, то $d(g^{(b_i - a_i')} z_i, g^{b_i'} z) \leq \delta$, $d(g^{(b_i - a_i')} z_i, y_i) \geq \delta_4 > \delta$, $d(g^{b_i - a_i'} z_i, \partial \bar{W}_i \setminus y_i) \geq \delta_1' > \delta$, откуда $g^{b_i'} z \in \bar{W}_i$.

По пункту 3) выбора констант отсюда и так как $g^{a_i'} z \notin W_i^*$, то для некоторого $0 \leq k \leq (b_i - a_i') q^{-1}$ $d(g^{a_i' + kq} z, y_i) \geq \delta_2$. Значит, $d(g^{kq} z_i, y_i) \geq \delta_2 - \delta > \delta_3$, хотя $\text{diam } \bar{W}_i \leq \delta_3$ (условие 2) пункта 4).

Значит, $g^{a_i'} z \in W_i^*$, откуда $g^{lq + a_i'} z \in W_i$ для некоторого $0 \leq l \leq m$. Тогда условие а) пункта 4) влечет для $0 \leq k \leq (b_i - a_i') q^{-1} - l$ $g^{lq + kq + a_i'} z \in W_i$, так как $d(g^{lq + kq + a_i'} z, g^{(l+k)q} z_i) \leq \delta < \delta_1'$, а $g^{(l+k)q} z_i \in W_i$. Отсюда $f^{a_i' + (m+k)q} \varphi^{-1}(z) \subset W_i$ ($0 \leq k \leq (b_i - a_i') \times \times q^{-1} - m$); по пункту 3) и выбору ε_1 отсюда $d(f^t \varphi^{-1}(z), f^{t-a_i} x_i) \leq \varepsilon$ при $a_i \leq t \leq b_i$. Остался случай $x_i \notin \text{Per } f$. По выбору N для не менее чем $(1-s)(b_i - a_i)$ значений t между a_i и b_i $f^{t-a_i} x_i \in \bar{U}$, так что по пункту 5) для них $d(g^t z, g^{t-a_i}(\varphi(x_i))) \leq \delta$ влечет $d(f^{t-a_i} x_i, f^t(\varphi^{-1}(z))) \leq \varepsilon$, что и требовалось доказать.

3. Напомним ряд определений из [1].

Пусть $\hat{M} = \{m_i\}_{i=0}^\infty$ — последовательность целых чисел такая, что $m_{i+1} \geq m_i$ ($\forall i$). В $Z_{m_0} \times Z_{m_1} \times \dots$, взятом с топологией произведения, рассмотрим подгруппу $H(\hat{M})$ (несколько неточно назовем

ее «соленоидом»), состоящую из таких $(r_0, r_1, \dots)$, что $r_{i+1} \equiv r_i \pmod{m_i} \ (\forall i)$. Пусть y отображения f «графа» K есть семейство инвариантных компактов $\{M_n\}_{n=0}^\infty$, где $M_n = \bigcup_{i=0}^{m_n-1} M_n^{(i)} (\forall n)$, причем $fM_n^{(0)} \subset M_n^{(1)}$, $fM_n^{(1)} \subset M_n^{(2)}$, $\dots$, $fM_n^{(m_n-1)} \subset M_n^{(0)}$, все $M_n^{(i)}$ связны и $m_n \rightarrow \infty$. Тогда $\bigcap_{n \geq 0} M_n = Q$ — инвариантный компакт.

Назовем любое инвариантное $\Omega \subset Q$ *сильно соленоидальным*.

В [1] в теореме 1 доказано, что если $\tilde{Q} = \bigcap_{n \geq 0} M_n$ сильно соленоидально, то $\tilde{Q} \cap \overline{\text{Per } f}$ — минимальное и есть множество $\Omega'' = \omega(y) \subset \tilde{Q}$ такое, что $\omega(z) \cap Q \neq \emptyset$ влечет $\omega(z) \subset \Omega'' (\forall z)$. Максимальные по включению среди ω -предельных множество циклы назовем *множествами рода 0*. Суммируя нужные нам результаты из [1], приведем

Утверждение 1 [1]. Пусть выполнено одно из следующих условий: а) $\text{orb } p = \Omega = \tilde{Q}$ — множество рода 0; б) $\Omega \subset \bigcap_{n \geq 0} M_n = \tilde{Q}$ — предельное сильно соленоидальное множество; в) $\tilde{\Omega} = S(M)$ — окружностное множество, $\tilde{Q} = M$. Тогда $f|_{\tilde{Q}}$ полно и почти точно на Ω полусопряжено с минимальным сдвигом в компактной абелевой группе, которая в случае а) есть цикл, в случае б) — соответствующий соленоид, в случае в) — конечный набор окружностей.

Утверждение 2 [1]. Если $\Omega = \omega(x)$, т.е. множество $\tilde{\Omega}$ (либо базисное, либо окружностное, либо соленоидальное, либо рода 0) такое, что $\Omega \subset \tilde{\Omega}$.

Следствие 1. Если $A \subset D_f(K)$, то свойства 1) и 2) равносильны: 1) A замкнуто, связно и есть x такое, что $\text{supp } \mu \subset \omega(x) (\forall \mu \in A)$; 2) $\exists y: V_f(y) = A$ (D_f, V_f определены в разделе 1).

Доказательство. Следствие утверждений 1, 2 и теорем 1, 3.

Следствие 2. Для инвариантной меры μ равносильны такие свойства: а) $\exists x: \text{supp } \mu \subset \omega(x)$; 2) y и μ есть типичная точка; 3) μ приближается эргодическими мерами с носителями на циклах либо μ сосредоточена на окружностном множестве.

Доказательство. В [2] следствие 2 доказано для неатомических мер. Случай μ с носителем на окружностном множестве очевиден (см. теорему 2). Если окружностного множества, на котором сосредоточена μ , нет, то можно считать, что $\text{supp } \mu$ не пересекается с окружностными множествами (иначе ни а), ни б), ни в) невозможны). Ясно, что б) $\Rightarrow$ а). Далее, пусть $\text{supp } \mu \subset \omega(x)$. Если $\omega(x)$ — базисное, то а) $\Rightarrow$ в) по теоремам 1, 3. Если $\omega(x)$ сильно соленоидально, то μ неатомична и а) $\Rightarrow$ в) по доказанному в [2]. Наконец, случай, когда $\omega(x)$ — множество рода 0, очевиден. В силу утверждения 2 «а) $\Rightarrow$ в)» доказано. По следствию 1 а) $\Rightarrow$ б). Значит, осталось показать, что в) $\Rightarrow$ а). Нам понадобится

Лемма 3. Пусть $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$, $x_n \in \text{Per } f(\forall n)$, для малой односторонней полукрестности $W_n(x)$ $x_n \in W_T(x)$, начиная с некоторого $\tilde{n}$. Пусть $D = \{z : \forall U \ni z \exists n_k \rightarrow \infty : \text{orb } x_{n_k} \cap U \neq \emptyset\}$, где U — открытое. Тогда найдется $\xi : \omega(\xi) \supset D$. При этом 1) если G — окрестность D , то найдется n' такое, что $n \geq n'$ влечет $\text{orb } x_n \subset G$; 2) если D — конечно, то $\omega(\xi) = D$ — цикл; 3) если D — бесконечно, т. е. две возможности: а) $D \subset \bigcap_{r>0} M_r$ — сильно соленоидально и для любого r есть $n'' = n''(r)$ такое, что при $n \geq n''$ $\text{orb } x_n \subset M_r$; б) $D \subset B(M)$, где $B(M)$ — базисное, причем найдется n''' такое, что при $n \geq n'''$ $\text{orb } x_n \subset M$ и в любом множестве вида $\bar{U}$, где U — компонента множества $M \setminus B(M)$, лежит конечное (например, пустое) количество точек из $\bigcup_{i>0} \text{orb } x_i$.

Доказательство. Пункт 1) леммы очевиден. Ясно также, что $D = \overline{fD}$ — инвариантный компакт. Далее, пусть $P_T(x) = \bigcap_{U_T(x)} \overline{\text{orb } U_T(x)}$; ясно, что $P_T \cap \text{Per } f \supset D$. Лемма 1 из [1] исследует свойства множеств $P(z) = \bigcap_{U \ni z} \overline{\text{orb } U}$, где $z \in \Omega(f)$; U — открыто,

легко видеть, что она верна и в нашем случае, и в силу ее множество $P_T(x)$ есть либо цикл, либо сильно соленоидальное множество, либо «подграф», состоящий из циклически переставляющихся связанных компактов. Если $P_T(x)$ — цикл, то лемма очевидна. Пусть $P_T(x) \subset \bigcap M_r$ сильно соленоидально. По теореме 1 из [1] $P_T(x) \cap \text{Per } f = \overline{D} = \omega(\xi)$ для некоторого ξ . Для любого M_r найдется N такое, что $f^N x \in \text{int } M_r$; выбирая большие n так, что x_n близко к x , имеем отсюда $\text{orb } x_n \subset M_r$, что доказывает лемму. Итак, пусть $P_T(x)$ — «подграф» с циклически переставляющимися компонентами связности.

Если D конечно, то D — набор циклов $\{\xi_1^1, \dots, \xi_l\}$. Взяв их окрестности $U_1, \dots, U_l$, где $(U_i \cup fU_i) \cap U_j$ при $i \neq j$, и считая n' таким, что $\text{orb } x_n \subset \bigcup_{i=1}^l U_i$ при $n \geq n'$, имеем для $n \geq n'$ однозначно определено $i = i(n)$ такое, что $\text{orb } x_n \subset U_i$. Так как $x_n \rightarrow x$, то отсюда $l = 1$, $\xi_1 = \text{orb } x_n = D$ — цикл, и лемма доказана. Пусть D бесконечно. Так как $P_T(x)$ — «подграф», то, как легко видеть, найдется полукрестность $\tilde{W}_T(x) \subset P_T(x)$ и можно считать $x_n \in \tilde{W}_T(x)$ ($\forall n$). Пусть теперь $y \in D$, S — сторона y такая, что с этой стороны $y_{m_i} \rightarrow y$, где $\{m_i\}$ — некоторая последовательность; $y_{m_i} \in \text{orb } x_{m_i}$. Для любой полукрестности $U_S(y)$ $\overline{\text{orb } U_S(y)}$ есть «подграф», содержащий все x_{m_i} с большими i , а значит, содержащий некоторую T -полукрестность x , откуда $\overline{\text{orb } U_S(y)} = P_T(x)$. Мы показали, что $D \subset E(P_T(x))$, так как $\text{Per}(f/P_T \times \times(x)) \neq \emptyset$, то $E(P_T(x)) = B(P_T(x))$ — базисное. Осталось заметить, что если U' — компонента $P_T(x) \setminus B$ такая, что все x_n ,

кроме конечного числа, содержатся в $\bar{U}'$, то $D \subset B \cap \overline{\text{orb } U'}$, а $B \cap \overline{\text{orb } U'}$ конечно — противоречие. Лемма доказана.

Вернемся к импликации $\text{в)} \Rightarrow \text{а)}$. Пусть γ_n — меры, сосредоточенные на циклах $\text{orb } x_n$, $x_n \in \text{Per } f$, $\gamma_n \rightarrow \mu$. Считая, что x_n стремятся, с одной стороны, к некоторому x , найдем множество $\omega(\xi) \supset D$, где D строится, как в лемме 3. Но, очевидно, $\text{supp } \mu \subset \subset D$, что и требовалось доказать.

Следствие 3. Семейство $G_f \subset D_f(K)$ мер, имеющих типичную точку, замкнуто.

Следствие 4. Пусть $\varphi \in C(K, \mathbb{R}^1)$. Существует компакт $I \subset \mathbb{R}$ и не более, чем счетный набор выпуклых компактов $\{I_r\}$ такие, что следующие свойства множества $A \subset \mathbb{R}^1$ равносильны: а) найдется x такое, что A есть множество $I(\varphi, x)$ предельных точек последовательности $y_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi(f^i x)}{n}$; б) A — связный компакт,

$A \subset I$, причем если A невырожден, то для некоторого r $A \subset I_r$;

в) если $C = \overline{\bigcup_{x \in \text{Per } f} I(x, \varphi)}$, то $I \setminus C$ конечно и состоит из точек

$d = I(z, \varphi)$, где z принадлежит окружностному множеству;

г) $I_r = \bigcup_{x \in B_r} I(x, \varphi)$, где B_r — некоторое базисное множество, причем

$\overline{\bigcup_{x \in B_r \cap \text{Per } f} I(x, \varphi)} = I_r$; д) если $d' \in C \setminus \bigcup I_r$, т. е. $y \in \text{Per } f$ такое,

что $I(y, \varphi) = d'$.

Доказательство. Пусть $\Phi: \mu \rightarrow \int \varphi d\mu$. Положим $I = \Phi(G_f)$. По следствию 3 I — компакт. Далее, пусть $\{B_r\}$ — все базисные множества f , $D_r \equiv D_{f|B_r}(B_r)$, $I_r \equiv \Phi(D_r)$. Тогда I_r — выпуклые компакты, а по следствию 2 $I_r \subset I(\forall r)$. Далее, если $x \in K$, то множество предельных точек последовательности $y_n =$

$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\varphi(f^i x)}{n}$ есть $\Phi(V_f(x))$. Ясно, что а) $\Rightarrow$ б). Пусть A обладает

свойствами из б). Достаточно рассмотреть случай невырожденного связного компакта $A \subset I_r$. Но если $\tilde{A} = \Phi^{-1}(A) \cap D_r$, то, очевидно, $\tilde{A}$ связно и компактно, и по следствию 1 есть точка $x \in B_r$: $V_f(x) = \tilde{A}$, откуда $\Phi(V_f(x)) = \Phi(\tilde{A}) = A$. Теперь следствие 4 вытекает из следствия 2, что и требовалось доказать.

Для дальнейшего условимся подмножество $\tilde{M}$ в $\mathbb{R}^d$ ($d < \infty$) точек $\tilde{y} \in \mathbb{R}^d$, среди координат которых все целые, кроме одной, называть «решеткой». Нам понадобится такой несложный факт: «Пусть K — связный «граф»; для некоторого $d < \infty$ найдется вложенная в $\mathbb{R}^d$ «решетка» $\tilde{M}$, накрывающая K ».

Для доказательства можно, например, воспользоваться результатами главы VI первой части книги [6], в силу которых можно

выбрать точку $v \in K$ и конечное число петель $\{\alpha_i\}_{i=1}^d$ — образующих фундаментальной группы $\pi(K, v)$, причем так, что $\bigcup_{i=1}^d \alpha_i = K$.

На каждом ребре взятой в R^d решетки $\tilde{M}$, имеющем вид $\{(n_1, n_2, \dots, n_{k-1}, n_k + t, n_{k+1}, \dots, n_d) : 0 \leq t \leq 1\}$, рассмотрим отображение α_k , соответствующее одноименной петле; ясно, что полученное отображение $\tilde{\pi} : \tilde{M} \rightarrow K$ — искомое накрытие.

Далее, пусть Δ — семейство непрерывных $f : K \rightarrow K$, поднятие $F : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ которых имеет свойство $F(\tilde{x} + \tilde{e}_i) = F(\tilde{x}) + \tilde{e}_i$ ($\tilde{x} \in \tilde{M}$), где $\tilde{e}_i$ ($1 \leq i \leq d$) — координатные орты в R^d .

Для $x \in K$ пусть $\tilde{I}(f, x) = \tilde{I}(x)$ — множество предельных точек последовательности $(F^n(\tilde{x}) - \tilde{x}) \cdot n^{-1}$, где $\tilde{\pi}(\tilde{x}) = x$. Ясно, что $\tilde{I}(x)$ не зависит от выбора $\tilde{x}$; так как разные поднятия f отличаются константой вида $k_1 e_1 + \dots + k_d e_d$, сдвиг на которую оставляет $\tilde{M}$ на месте, то с точностью до таких констант и определено $\tilde{I}(x)$. Ниже, считая F выбранным, опишем возможные множества $\tilde{I}(z)$, $z \in K$; $\tilde{I} \equiv \bigcup_{\tilde{x} \in K} \tilde{I}(x)$. Наш результат аналогичен результату из [3], относящемуся к случаю отображений окружности степени 1.

Теорема 4. Пусть $f \in \Delta$. Существует конечное число выпуклых компактов $I_r \subset R^d$ таких, что свойства 1) и 2) множества $A \subset R^d$ равносильны: 1) $\exists z : A = \tilde{I}(z)$; 2) A — связный компакт, $A \subset I_r$ для некоторого r .

Доказательство. Отметим очевидное и важное для отображений $f \in \Delta$.

Свойство 1. Если S содержит подмножество, гомеоморфное окружности, то fS тоже содержит подмножество, гомеоморфное окружности.

Нам понадобится

Лемма 4. Пусть $x_n \in \text{Per} f$ ($\forall n \in N$), $\tilde{I}(x_i) \neq \tilde{I}(x_j)$ ($i \neq j$). Тогда есть базисное множество B такое, что для бесконечного множества индексов n и любых ω -предельных множеств $\Omega_n \ni x_n$ либо $\Omega_n = B$, либо есть компонента U_n множества $M \setminus B(M)$ и число k такие, что $\bar{U}_n, f \bar{U}_n, \dots, f^{k-1} \bar{U}_n$ попарно не пересекаются, $\bigcup_{i=1}^k f^i \bar{U} \supset \Omega_n$, $\tilde{I}(z)$ на $\bigcup_{i=1}^k f^i \bar{U}$ есть константа, совпадающая с $\tilde{I}(\xi)$ для $\xi \in \bar{U} \cap B$.

Доказательство леммы. Можно считать, что x_n сходятся к некоторому x с некоторой стороны T . Если производное множество D набора циклов $\{\text{orb } x_n\}$ конечно (оно определяется как в лемме 3), то по лемме 3 D есть цикл, к которому равномерно стремятся множества $\text{orb } x_n$; это противоречит тому, что $\tilde{I}(x_i) \neq \tilde{I}(x_j)$ ($i \neq j$). Пусть D бесконечно. Если D сильно солонидально, $D \subset \bigcap_{r>0} M_r$, то по свойству 1 для некоторого r $M_r =$

$= \bigcup_{i=1}^m M_r^{(i)}, \quad fM_r^{(i)} = M_r^{(i+1)} \quad (1 \leq i \leq m-1), \quad fM_r^{(m)} = M_r^{(1)}, \quad M_r^{(i)}$ не
 содержит подмножеств, гомеоморфных окружности $(1 \leq i \leq m)$,
 откуда следует, что $\tilde{I}(z)$ на M_r есть постоянная величина, что
 противоречит условию $\tilde{I}(x_i) \neq \tilde{I}(\tilde{x}_i)$. Значит, по лемме 3 есть базис-
 ное множество $B = B(M)$ и число n' такие, что $\text{orb } x_n \subset M$ при
 $n \geq n'$ и в замыкании любой компоненты множества $M \setminus B(M)$
 лежит конечное число точек из $\bigcup_{i \geq 0} \text{orb } x_i$. Вместе со свойством 1
 это, очевидно, влечет, что есть $n'' > n'$ с таким свойством: если
 $n \geq n''$ и $\bar{U}_n \ni x_n$, где U_n — компонента $M \setminus B(M)$, то $\tilde{I}(z)$ на U_n —
 константа, что и требовалось доказать.

Продолжим доказательство теоремы 4. Ясно, что на K пра-
 вильно определена непрерывная функция $\varphi(x) = F(\tilde{x}) - \tilde{x}$, где
 $\tilde{\pi}(\tilde{x}) = x$. Тогда множество $\tilde{I}(x)$ есть множество предельных точек
 последовательности $\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(f^i x) \cdot n^{-1}$, так что применимо следствие 4,
 обозначениями из которого мы и воспользуемся. Обозначим $C =$
 $= \bigcup \tilde{I}(z)$, где z пробегает весь K , кроме таких инвариантных
 «подграфов» $M \subset K$, что $E(M) = S(M)$ — окружностное множе-
 ство. Тогда $\tilde{I} \setminus C$ конечно. Пусть Λ — семейство множеств L , где
 $L = I_r$ для некоторого r или L — точка, $L \in C \setminus \bigcup I_r$; $L_1 \subset L_2 \subset \dots$
 $\dots$; $L_i \in \Lambda$. Так как уже L_2 невырождено, то $L_i = I_{r(i)}$ при $i \geq 2$
 и по следствию 4 есть $x_i \in \text{Per } f$ такое, что $I(x_i) \in L_i \setminus L_{i-1}$. Тогда
 к последовательности $\{x_i\}$ применима лемма 4, в силу которой,
 проредив $\{x_i\}$, можно считать, что есть базисное множество B
 такое, что для любого i либо $L_i = B$, либо $\tilde{I}|_{L_i}$ есть константа —
 противоречие. Значит, в семействе Λ есть, по лемме Цорна, се-
 мейство максимальных по включению множеств. Пусть оно бес-
 конечно, $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \dots$ — его элементы. Пользуясь следствием 4,
 найдем точки $\tilde{x}_i \in \text{Per } f \cap \tilde{L}_i$ так, что $\tilde{I}(\tilde{x}_i) \neq \tilde{I}(\tilde{x}_j)$ при $i \neq j$.
 По лемме 4 снова, обозначив Ω_j предельное множество такое, что
 $\tilde{L}_j = \tilde{I}(\Omega_j)$, найдем базисное B такое, что для бесконечного мно-
 жества индексов либо $\Omega_j = B (\Rightarrow \tilde{L}_j = \tilde{I}(B))$, либо $\tilde{I}(\Omega_j) = \tilde{L}_j$ — кон-
 станта, принадлежащая $\tilde{I}(B)$ — противоречие. Значит, есть лишь
 конечный набор множеств $\tilde{L}_i$ что с учетом того, что $\tilde{I} \setminus C$ конечно,
 завершает доказательство.

Список литературы: 1. Блох А. М. О динамических системах на одномерных
 разветвленных многообразиях. I//Теория функций, функцион. анализ и их
 прил.—1986.— Вып. 12.— С. 77—87. 2. Блох А. М. О динамических системах
 на одномерных разветвленных многообразиях. II//Теория функций, функцион.
 анализ и их прил.—1987.— Вып. 14.— С. 12—77. 3. Rotation intervals of

endomorphisms of the circle /R. Bamon, I. P. Malta, M. J. Pacifico, E. Takens//Erg. Theory and Dyn. Syst.—1984.—V.4, № 4.—P. 493—498. 4. Denker M. et al. Ergodic theory on compact spaces /M. Denker, C. Grillenberger, K. Sigmund//Berlin etc.: Springer, 1975.—345 p. (Lect. Notes in Math., v. 527). 5. Блох А. М. О транзитивных отображениях одномерных разветвленных многообразий//Дифференциально-разностные уравнения и задачи математической физики. К., 1984.—С. 3—10. 6. Масси У., Столлингс Дж. Алгебраическая топология.—М.: Мир, 1977.—343 с.

Поступила в редколлегию 15.10.85

УДК 517.937 : 962

Л. А. ВЛАСЕНКО

О ПОЛНОТЕ НОРМАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ

$Au'(t) + Bu(t) = f(t)$

Пусть A, B — замкнутые линейные операторы, действующие из банахова пространства X в банахово пространство Y , $f(t)$ — локально интегрируемая по Бохнеру на $0 \leq t < T < \infty$ вектор-функция со значениями в Y . Обобщенным решением задачи Коши

$$\begin{aligned} Au'(t) + Bu(t) &= f(t), \quad 0 < t < T \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \quad (1)$$

называется такая функция $u(t) \in C([0, T), X)$, что $Au(t) \in C([0, T), Y)$

и удовлетворяется уравнение $Au(t) - Au_0 + B \int_0^t u(s) ds = \int_0^t f(s) ds$.

Решение называется нормальным, если функции $u(t)$, $Au(t)$ имеют конечные экспоненциальные типы. Через ρ_γ обозначается множество γ — регулярных точек, в которых резольвентный оператор $R(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1} A$ определен на D_A , через $E_A = D_A$ банахово пространство с нормой графика оператора A . Для $\lambda \in \rho_\gamma$ резольвента $R(\lambda) \in [E_A, X]$ является голоморфной оператор-функцией. Обозначим $g(\lambda) = \|R(\lambda)\|_{[E_A, X]}$, $S(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$.

В работе [2] локальным преобразованием Лапласа на $[0, T)$ над локально суммируемым оригиналом $y(s)$ называется вектор-функция $F(\lambda)$, мероморфная в открытом угле:

$$\Gamma = \left\{ \lambda : \psi_1 < \arg \lambda < \psi_2, -\frac{\pi}{2} < \psi_1 < 0, 0 < \psi_2 < \frac{\pi}{2} \right\} \quad (2)$$

и допускающая в меньшем угле

$$\Gamma_+ = \{ \lambda : \alpha \leq \arg \lambda \leq \beta, \psi_1 < \alpha \leq 0, 0 < \beta \leq \psi_2 \} \quad (3)$$

представление

$$F(\lambda) = \int_0^t y(s) e^{-\lambda s} ds + e^{-\lambda t} \varepsilon(\lambda, t), \quad 0 \leq t < T \quad (4)$$

с некоторой функцией $\varepsilon(\lambda, t)$. Для формулировки условий на $\varepsilon(\lambda, t)$ вводится следующий предел по множеству M полной относительной меры на луче $r > 0$:

$$\omega(\varepsilon, M, \alpha, \beta) = \begin{cases} \overline{\lim}_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in M}} \frac{1}{r(\beta - \alpha)} \int_{\alpha}^{\beta} \ln^+ \|\varepsilon(re^{i\varphi}, t)\| d\varphi, & \alpha < \beta; \\ \overline{\lim}_{\substack{r \rightarrow \infty \\ r \in M}} \frac{1}{r} \ln^+ \|\varepsilon(re^{i\alpha}, t)\|, & \alpha = \beta. \end{cases}$$

Несколько ослабляя требования на $\varepsilon(\lambda, t)$ из [2], потребуем для локального преобразования Лапласа (4) выполнение $\bar{\omega}(\varepsilon, \alpha, \beta) = \inf_M \omega(\varepsilon, M, \alpha, \beta) = 0$. Такое обобщение не меняет свойств локального преобразования Лапласа, установленных в [2].

Степенью мероморфной оператор-функции $R(\lambda) \in [E_A, X]$ называется величина $\tau = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi r} \int_0^{2\pi} \ln^+ g(re^{i\varphi}) d\varphi$. Через $\bar{\tau}$ обозначается величина $\bar{\omega}\left(g, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$.

Теорема 1. Пусть $R(\lambda) \in [E_A, X]$ — мероморфная оператор-функция в некотором угле Γ (2) и существует такой угол Γ_+ (3), в котором $\bar{\omega}(g, \alpha, \beta) = 0$, а функция $f(t)$ допускает представление

$$\int_0^t f(s) e^{-\lambda s} ds = v(\lambda) + \sigma(\lambda, t) e^{-\lambda t}, \quad 0 \leq t < T \quad (5)$$

с мероморфной в Γ функцией $S(\lambda)$ $\sigma(\lambda, t)$ такой, что $\omega(S\sigma, M, \alpha, \beta) = 0$ для $0 \leq t < T$ и всякого множества M полной относительной меры на луче $r > 0$. Тогда любое обобщенное решение задачи Коши (1) является оригиналом для локального преобразования Лапласа $F(\lambda) = R(\lambda)u_0 + S(\lambda)v(\lambda)$.

Замечание. В силу теоремы единственности оригинала для локального преобразования Лапласа [2] условия мероморфности $R(\lambda) \in [E_A, X]$ в угле Γ и $\bar{\omega}(g, \alpha, \beta) = 0$ обеспечивают единственность решения задачи Коши (1).

Доказательство. Нетрудно видеть (подробности см. в [6]), что всякое обобщенное решение задачи Коши (1) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} R(\lambda)u_0 &= \int_0^t u(s) e^{-\lambda s} ds + R(\lambda)u(t) e^{-\lambda t} - \\ &- S(\lambda) \int_0^t f(s) e^{-\lambda s} ds, \quad 0 \leq t < T. \end{aligned}$$

Учитывая разложение для $f(t)$ (5), в Γ_+ при $0 \leq t < T$ справедливо $R(\lambda)u_0 + S(\lambda)v(\lambda) = \int_0^t u(s)e^{-\lambda s} ds + e^{-\lambda t} [R(\lambda)u(t) - S(\lambda) \times \sigma(\lambda, t)]$. Остается показать, что $\bar{\omega}(\varepsilon, \alpha, \beta) = 0$, где $\varepsilon(\lambda, t) = R(\lambda)u(t) - S(\lambda)\sigma(\lambda, t)$. Так как $\omega(\varepsilon, M, \alpha, \beta) \leq \omega(g, M, \alpha, \beta) + \omega(S\sigma, M, \alpha, \beta)$, то, действительно, $\bar{\omega}(\varepsilon, \alpha, \beta) = 0$.

Теорема доказана.

Для однородного уравнения

$$Au'(t) + Bu(t) = 0, \quad 0 < t < T \quad (6)$$

элементарным решением называется функция вида $u(t) = e^{\lambda_0 t} \times \times [\varphi_k + \varphi_{k-1}t + \dots + \varphi_0 \frac{t^k}{k!}]$, где $\varphi_j \in X$. Можно показать, что эта функция будет обобщенным решением уравнения (6) тогда и только тогда, когда векторы $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_k$ образуют цепочку из собственного и присоединенных векторов пучка $\lambda A + B$, соответствующих собственному числу λ_0 . Нетрудно видеть, что если λ_0 — полюс

$R(\lambda) \in [E_A, X]$ кратности r_0 , то проектор $P_0 y = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_0} R(\mu) y d\mu$,

определенный в [5], проектирует D_A на множество собственных и присоединенных векторов пучка $\lambda A + B$, соответствующих собственному числу λ_0 . В этом случае множество элементарных решений уравнения (6), соответствующих собственному числу λ_0 , описывается функциями вида $u(t) = \left(\frac{d}{dt} - \lambda_0\right)^p \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_0} R(\lambda) y e^{\lambda t} d\lambda$,

$0 \leq p \leq r_0 - 1, y \in D_A$.

Теорема 2. Пусть $R(\lambda) \in [E_A, X]$ является мероморфной функцией конечной степени в множестве полюсов $\{\lambda_k\}_1^\infty$ кратности $\{r_k\}_1^\infty$ и существует такой угол Γ_+ (3), что $\bar{\omega}(g, \alpha, \beta) = 0$. Тогда существует постоянная $c \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]^*$ такая, что любое обобщенное решение $u(t)$ однородного уравнения (6) равномерно аппроксимируется на каждом сегменте $[c\bar{t}, T_1]$ ($c\bar{t} < T_1 < T$) линейными комбинациями элементарных решений:

$$u_i(t) = \sum_{k=1}^j \sum_{p=1}^{r_k-1} \alpha_{p,k}^{(i)} \left(\frac{d}{dt} - \lambda_k\right)^p \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_k} e^{\lambda t} R(\lambda) u(0) d\lambda,$$

где c_k — окружность с центром λ_k и столь малым радиусом, что все остальные полюсы лежат вне c_k .

Если $\bar{t} = 0$, то многообразие собственных и присоединенных векторов пучка $\lambda A + B$ плотно в пространстве решений задачи Коши для уравнения (6).

* Константа c определена в [2].

Доказательство. По теореме 1 в случае $f(t) = 0$ любое обобщенное решение $u(t)$ уравнения (6) является оригиналом для локального преобразования Лапласа $R(\lambda)u(0)$. В силу теоремы 3.2 из [2] функцию $u(t)$ можно равномерно аппроксимировать на каждом сегменте $[c\bar{t}, T_1]$ ($c\bar{t} < T_1 < T$) функциями вида

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^j \sum_{p=1}^{r_k-1} \alpha_{p,k}^{(j)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_k} e^{\lambda t} (\lambda - \lambda_k)^p R(\lambda) u(0) d\lambda,$$

которые являются линейными комбинациями экспоненциальных решений однородного уравнения (6).

Теорема доказана.

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2. Предположим, что функция $f(t)$ (дополненная нулем, если $T < \infty$) допускает классическое преобразование Лапласа $\tilde{f}(\lambda)$ с абсциссой сходимости σ_f и на прямой $\operatorname{Re} \lambda = a > \max\{0, \sigma_f\}$ определена

функция $\theta(\lambda) = S(\lambda) \tilde{f}(\lambda)$ и конечны интегралы $\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} (\cdot) d\lambda$ от функций $\|\theta(\lambda)\|$, $\|A\theta(\lambda)\|$. Тогда любое обобщенное решение задачи Коши (1) равномерно аппроксимируется на каждом сегменте $[c\bar{t}, T_1]$ нормальными решениями:

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^j \sum_{p=1}^{r_k-1} \alpha_{p,k}^{(j)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_k} e^{\lambda t} (\lambda - \lambda_k)^p R(\lambda) \bar{u}_0 d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\lambda t} \theta(\lambda) d\lambda, \\ \text{где } \bar{u} = u_0 - \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \theta(\lambda) d\lambda.$$

Доказательство. Нетрудно видеть, что любое решение неоднородного уравнения (1) представимо в виде $u(t) = \bar{u}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{\lambda t} \theta(\lambda) d\lambda$, где $\bar{u}(t)$ — некоторое решение соответствующего однородного уравнения. По теореме 2 функция $\bar{u}(t)$ равномерно на каждом сегменте $[c\bar{t}, T_1]$ аппроксимируется следующими функциями:

$$u_j(t) = \sum_{k=1}^j \sum_{p=1}^{r_k-1} \alpha_{p,k}^{(j)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_k} (\lambda - \lambda_k)^p R(\lambda) \bar{u}_0 d\lambda.$$

Отсюда сразу же следует доказательство следствия.

Следствие 2. При $\bar{t} = 0$ в условиях следствия 1 всякий начальный вектор u_0 задачи Коши (1) аппроксимируется элементами вида $\sum_{k=1}^j h_k + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \theta(\lambda) d\lambda$, где h_k — собственные и присоединенные векторы пучка $\lambda A + B$.

Пусть Ω — открытая ограниченная область в R^n с гладкой границей L . В $L_2(\Omega, C^N)$ рассмотрим сильно эллиптический оператор [3]:

$$B = (-1)^m \sum_{(k)} B^{k_1 \dots k_m}(x) \frac{\partial^{2m}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_m^{k_m}} + Q,$$

где $B^{k_1 \dots k_m}(x)$ — $N \times N$ матрицы; Q — линейный дифференциальный оператор порядка меньше $2m$. Область определения D_B есть многообразие тех вектор-функций $u(x)$ из пространства Соболева $W_2^{2m}(\Omega)$, которые удовлетворяют условию

$$u|_L = \frac{\partial u}{\partial \nu}|_L = \dots = \frac{\partial^{m-1} u}{\partial \nu^{m-1}}|_L = 0.$$

($\frac{\partial}{\partial \nu}$ — дифференцирование по нормали к поверхности L).

В [3] показано, что при достаточной гладкости коэффициентов оператора B за счет добавки вида sI ($s > 0$, I — единичная матрица) можно обеспечить компактность обратного отображения B^{-1} . Более того, при $n < 2m$ оператор B^{-1} оказывается ядерным.

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega, C^N)$ рассмотрим задачу Коши:

$$A \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + Bu(t, x) = 0, \quad 0 < t < T \quad u(0, x) = u_0(x), \quad (7)$$

где A — ограниченный в $L_2(\Omega, C^N)$, вообще говоря, необратимый оператор.

Теорема 3. Пусть $n < 2m$. Всякое обобщенное решение задачи Коши (7) на любом сегменте $[0, T_1]$ ($0 < T_1 < T$) можно равномерно аппроксимировать линейными комбинациями элементарных решений:

$$u_j(t, x) = \sum_{k=1}^j \sum_{p=1}^{r_k-1} \alpha_{p,k}^{(j)} \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_k} (\lambda - \lambda_k)^p e^{\lambda t} R(\lambda) u_0(x) d\lambda,$$

где λ_k — полюсы резольвенты $S(\lambda)$ кратности r_k .

Собственные и присоединенные векторы пучка $\lambda A + B$ плотны в пространстве решений задачи Коши (7).

Доказательство. Согласно теореме 2 достаточно показать, что резольвента $S(\lambda) = (\lambda A + B)^{-1}$ является мероморфной функцией нулевой степени. Заметим, что $(\lambda A + B) = B(\lambda B^{-1}A + I)$,

где $B^{-1}A$ — вполне непрерывный оператор. Поэтому $S(\lambda) \in [L_2]$ является мероморфной функцией. С помощью оценки на резольвенту $(\lambda B^{-1}A + I)^{-1}$ для ядерного оператора $B^{-1}A$ (см. [1, с. 298]) доказывается, что оператор $(\lambda B^{-1}A + I)^{-1}$ имеет нулевую степень. Следовательно, нулевую степень имеет $S(\lambda)$.

Теорема доказана.

Заметим, что для неоднородной задачи Коши, соответствующей уравнению (7), при требованиях на $f(t)$ из следствия 1 обобщенное решение на любом сегменте $[0, T_1]$ ($0 < T_1 < T$) можно равномерно аппроксимировать нормальными.

Список литературы: 1. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука. — 1965. — 445 с. 2. Любич Ю. И., Ткаченко В. А. Теория и некоторые применения локального преобразования Лапласа // Мат. сб. — 1966. — Вып. 3. — С. 416—437. 3. Лидский В. Б. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // Науч. тр. Моск. мат. об-во. — 1962. — Ч. 2. — С. 3—35. 4. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ // Дифференц. уравнения. — 1975. — Ч. 2, № 11. — С. 1996—2010. 5. Радбель Н. И. Упорядочение пары линейных операторов и задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = 0$ в банаховом пространстве: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. — Донецк, 1984. — 133 с. 6. Власенко Л. А., Руткас А. Г. Исследование уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ с помощью резольвенты пучка $\lambda A + B$. — М., 1982. — С. 7—18. Деп. в ВИНТИ, 1982. № 4885—82.

Поступила в редколлегию 03.10.85

УДК 519.46

В. Я. ГОЛОДЕЦ, С. Д. СИНЕЛЬЩИКОВ

АВТОМОРФИЗМЫ ЭРГОДИЧЕСКИХ ГРУППОИДОВ И ПОЛУПРЯМЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1. Измеримые группоиды и их автоморфизмы играют существенную роль в эргодической теории при изучении действий непрерывных групп на пространстве Лебега и, в частности, при описании инвариантов внешней сопряженности локальных компактных групп преобразований. В настоящей работе установлено соответствие между автоморфизмами группоидов с непрерывными орбитами, а также автоморфизмами их дискретных редукций и ассоциированных алгебр фон Неймана. Указан способ построения полупрямого произведения измеримого группоида с дискретными орбитами на непрерывную группу его нестрогих автоморфизмов. Эти результаты могут быть использованы при изучении внешней сопряженности непрерывных аменабельных групп.

Пусть $\pi: H \times X \rightarrow G$ — коцикл действия группы H на пространстве Лебега (X, ν) со значениями в локально компактной сепарабельной (л. к. с.) группе G . Если μ_G — левоинвариантная

мера Хаара группы G , то на $(G \times X, \mu_G \times \nu)$ можно задать действие группы H :

$$h(g, x) = (\pi(h, x)g, hx),$$

где $h \in H, (g, x) \in G \times X$. Это действие называется косым произведением и обозначается $G \times_{\pi} X$. Если $G \times_{\pi} X$ гладко (т. е. разбиение на его траектории измеримо), то коцикл π называется транзитным [1].

Определение и подробное изложение теории измеримых группоидов содержится в [1—3].

Пусть (Ω, C) — принципиальный эргодический аппроксимативно конечный группоид типа II с непрерывными орбитами. Рассмотрим также группоид $(\Gamma \times X, [\mu_{\Gamma} \times \mu])$, построенный по свободному эргодическому сохраняющему меру μ действию счетной аменабельной группы Γ на пространстве Лебега (X, μ) , $\mu(X) = \infty$. Кроме того, пусть $(T \times T, [\mu_T \times \mu_T])$ — транзитивный группоид, порожденный трансляцией окружности T . Тогда группоид (Ω, C) изоморфен прямому произведению $((\Gamma \times X) \times (T \times T), [\mu_{\Gamma} \times \mu \times \mu_T \times \mu_T])$ [1, теорема 6.4], которое будем отождествлять с (Ω, C) .

Теорема 1. Пусть A — автоморфизм группоида (Ω, C) . Тогда найдутся автоморфизм θ группоида $(\Gamma \times X, [\mu_{\Gamma} \times \mu])$ и внутренний автоморфизм τ группоида (Ω, C) такие, что $A = (\theta \times \text{id}) \cdot \tau$.

Напомним, что отношение эквивалентности R на пространстве Лебега (X, μ) называется гладким, если разбиение пространства X на классы эквивалентности измеримо. Нам понадобится следующее очевидное

Предложение 2. Пусть (X, μ) — пространство Лебега, $R \subset X \times X$ — счетное борелевское гладкое отношение эквивалентности, R_0 — борелевское отношение эквивалентности, содержащееся в R . Тогда R_0 гладко.

Доказательство теоремы 1. В силу принципиальности группоида (Ω, C) автоморфизм A полностью определяется своим ограничением на пространство единиц $X \times T$, которое удовлетворяет условию $A(\gamma x, rt) = \pi((\gamma, r), (x, t)) A(x, t)$ для всех $(\gamma, r) \in \Gamma \times T$ при п. в. $(x, t) \in X \times T$, где $\pi: (\Gamma \times T) \times (X \times T) \rightarrow \Gamma \times T$ — коцикл. Этот коцикл как гомоморфизм группоида $(\Gamma \times X) \times (T \times T)$ имеет вид $\pi = \pi_0 \circ A$, где $\pi_0((\gamma, r), (x, t)) = (\gamma, r)$.

Пусть $A(x, t) = (A_1(x, t), A_2(x, t))$, α и δ — композиции π с проекциями на Γ и T соответственно. Тогда $A_1(\gamma x, rt) = \alpha((\gamma, r), (x, t)) A_1(x, t)$, $A_2(\gamma x, rt) = \delta((\gamma, r), (x, t)) A_2(x, t)$.

Выберем $t_0 \in T$ так, чтобы множество $X \times \{t_0\}$ содержалось mod 0 в несущественной редукции (н. р.) группоида (Ω, C) , на которой A является строгим изоморфизмом, и зададим отображение $\varphi: X \rightarrow X$, $\varphi(x) = A_1(x, t_0)$, тогда $\varphi(\gamma x) = \beta(\gamma, x)\varphi(x)$ (1),

где $\beta(\gamma, x) = \alpha((\gamma, 1), (x, t_0))$. Построим также функцию $f: X \times T \rightarrow \Gamma$, $f(x, t) = \alpha((e, t_0^{-1}t), (x, t_0))$, тогда $f(\gamma x, rt)^{-1} \times \alpha((\gamma, r), (x, t))f(x, t) = \beta(\gamma, x)$. Таким образом, ксцикл α кохомологичен коциклу $\beta \circ p$, где $p: (\Gamma \times T) \times (X \times T) \rightarrow \Gamma \times X$ — проекция.

Легко видеть, что коцикл π_0 является транзитным, поэтому и коцикл $\pi = \pi_0 \circ A$ обладает этим свойством. В силу тривиальности коцикла $\delta((\gamma, r), (x, t)) = A_2(\gamma x, rt)A_2(x, t)^{-1}$ транзитным будет также коцикл α , а значит, и кохомологичный ему коцикл $\beta \circ p$. Тогда, очевидно, и ксцикл β будет транзитным.

Рассмотрим косое произведение $\Gamma \times_{\beta} X$. Оно порождает гладкое счетное отношение эквивалентности R^{Γ} на $\Gamma \times X$. Зададим также отношение эквивалентности R_0 на X : $R_0 = \{(\gamma x, x) \in X \times X: \gamma \in \Gamma, \beta(\gamma, x) = e\}$. Оно поднимается до отношения эквивалентности R_0^{Γ} на $\Gamma \times X$: $R_0^{\Gamma} = \{((\gamma, x_1), (\gamma, x_2)): (x_1, x_2) \in R_0\}$. Но $R_0^{\Gamma} \subset R_0$, поэтому в силу предложения 2 R_0^{Γ} гладко. Тогда и R_0 , очевидно, является гладким.

Пусть $S \subset X$ — борелевское сечение для отношения эквивалентности R_0 , тогда $\mu(S) > 0$. Покажем, что ограничение отображения φ на S инъективно mod 0. Действительно, если $x_1, x_2 \in S$ не эквивалентны относительно действия Γ , то в силу выбора t_0 $\varphi(x_1)$ и $\varphi(x_2)$ тоже не эквивалентны и, следовательно, различны. Если же $x_2 = \gamma x_1$, $\gamma \neq e$, то в силу (1), определения R_0 и свободности действия Γ $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$.

Поскольку $A_1(x, t) = \alpha((e, t_0^{-1}t), (x, t_0))\varphi(x)$, отображения A и $(x, t) \mapsto (\varphi(x), t)$ принимают значения, эквивалентные относительно действия группы $\Gamma \times T$ для п. в. $(x, t) \in X \times T$. Так как при этом A является автоморфизмом, отображение φ должно переводить полные множества в полные, а неполные — в неполные. Но в X полными являются множества положительной меры и только они. Это означает, что φ отображает множество S несингулярно. Можно проверить, что производная Радона — Никодима $d\mu \circ \varphi / d\mu$ инвариантна относительно действия Γ и, значит, постоянна п. в., так что отображение φ умножает меру μ на число $c > 0$.

Заменяя, если необходимо, множество S подмножеством конечной меры и нормируя соответствующим образом меру μ , можно добиться, чтобы $\mu(S) = 1$, $\mu(\varphi(S)) = c$. Представим пространство X дважды в виде объединения счетных семейств непересекаю-

щихся множеств $X = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i = \bigcup_{i=0}^{\infty} S'_i$, где $S_0 = S$, $S'_0 = \varphi(S)$, причем $\mu(S_i) = 1$, $\mu(S'_i) = c$. Построим автоморфизмы γ_i , $\gamma'_i \in \Gamma$, $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, такие, что $\gamma_i(S_0) = S_i$, $\gamma'_i(S'_0) = S'_i$. Наконец, зададим автоморфизм $\theta: X \rightarrow X$, $\theta x = \gamma'_i \circ \varphi \circ \gamma_i^{-1}(x)$ при $x \in S_i$. Ясно, что θ лежит в нормализаторе $N[\Gamma]$ полной группы $[\Gamma]$. Из построения следует, что для п. в. $x \in X$ $\theta(x)$ и $\varphi(x)$ Γ -экви-

валентны. Следовательно, $\theta \times \text{id}$ поточечно эквивалентно относительно действия группы $\Gamma \times T$ отображению $\varphi \times \text{id}$, а значит, и автоморфизму A . Поэтому $A \cdot (\theta \times \text{id})^{-1}$ — внутренний автоморфизм группоида (Ω, C) , что и требовалось доказать.

Замечание 3. Аналогичными методами теорема 1 может быть доказана для случая, когда действие группы Γ на (X, μ) имеет тип III.

2. В работе П. Хана [4] каждому измеримому группоиду (Ω, C) ставится в соответствие банахова $\times$ -алгебра $\Pi(\Omega)$ и ее регулярное представление в $L^2(\Omega)$ операторами свертки L_f , $f \in \Pi(\Omega)$. Это позволяет, в частности, ставить в соответствие автоморфизму группоида автоморфизм алгебры фон Неймана $L(\Pi(\Omega))''$ и, таким образом, ввести понятие модуля для автоморфизма группоида. Опишем вкратце соответствующую конструкцию для эргодических аппроксимативно конечных группоидов типа II.

Сначала рассмотрим случай группоида с дискретными орбитами $(\Gamma \times X, [\mu_\Gamma \times \mu])$, описанного в предыдущем разделе. Алгебра фон Неймана (фактор типа II_∞) $M = L(\Pi(\Gamma \times X))''$ представляет собой фактор Кригера, построенный по действию группы Γ на (X, μ) . M содержит максимальную абелеву подалгебру A_d , изоморфную $L^\infty(X)$ и регулярную в том смысле, что ее нормализатор $N(A_d) = \{U \in M; U \text{ унитарный, } UA_dU^* = A_d\}$ порождает M .

Всякий автоморфизм группоида $\Gamma \times X$ определяется автоморфизмом $\theta \in N[\Gamma]$ и действует на элемент соответствующей н. р. группоида $\Gamma \times X$ следующим образом: $\theta(\gamma, x) = (\gamma^\theta(x), \theta x)$, где $\gamma^\theta(x) \in \Gamma$ таков, что $\gamma^\theta(x)\theta x = \theta\gamma x$. Автоморфизм θ можно поднять до автоморфизма $\bar{\theta}$ алгебры $\Pi(\Gamma \times X)$: $(\bar{\theta}/f)(\gamma, x) = f(\gamma^{\theta^{-1}}(x), \theta^{-1}x)$, а затем продолжить его до автоморфизма фактора M .

Теорема 1 позволяет перенести известные из [5] соотношения между автоморфизмами счетных отношений эквивалентности и автоморфизмами ассоциированных алгебр фон Неймана на случай группоидов с непрерывными орбитами. Рассмотрим группоид $\Omega, C) = ((\Gamma \times X) \times (T \times T), [\mu_\Gamma \times \mu \times \mu_T \times \mu_T])$, описанный в предыдущем разделе. Его алгебра фон Неймана $L(\Pi(\Omega))''$ распадается в тензорное произведение $L(\Pi(\Gamma \times X))'' \otimes L(\Pi(T \times T))'' \cong M \otimes_{L^2_T} B(L^2(T))$ с максимальной абелевой регулярной подалгеброй $A_d \otimes A_c$, где $A_c \cong L^\infty(T)$ [1, предложение 8.1, 8.2].

Теорема 4. Существует взаимно однозначное соответствие между внутренними автоморфизмами группоида (Ω, C) и классами операторов из $N(A_d \otimes A_c) \subset M \otimes B(L^2(T))$, отличающихся друг от друга на унитарный оператор из $A_d \otimes A_c$.

Доказательство. Пусть θ — внутренний автоморфизм группоида (Ω, C) . Ограничение θ на пространство единиц $X \times T$ определяется некоторыми борелевскими отображениями $\varphi: X \times T \rightarrow \Gamma$ и $\psi: X \times T \rightarrow T$: $\theta(x, t) = (\varphi(x, t)x, \psi(x, t))$.

Пусть $X \times T = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} Q_\gamma$ — разбиение пространства единиц на множества постоянства функции φ , $Q_\gamma = \varphi^{-1}(\gamma)$. Этому разбиению соответствуют преобразования $\gamma^{-1}\theta: Q_\gamma \rightarrow \gamma^{-1}\theta Q_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, подчиненные действию группы T на $X \times T$. Указанным преобразованиям отвечают, в свою очередь, частичные изометрии $a_\gamma \in A_d \otimes B(L^2(T))$.

Рассмотрим семейство унитарных операторов $\lambda_\gamma \in M \otimes B(L^2(T))$, $\gamma \in \Gamma$: $(\lambda_\gamma \xi)((\gamma', x), (s, t)) = \xi((\gamma^{-1}\gamma', x), (s, t))$, где $(\gamma', x) \in \Gamma \times X$, $(s, t) \in T \times T$, $\xi \in L^2(\Omega)$. Сильно сходящийся ряд $U_\theta = \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma a_\gamma$ тогда задает некоторый унитарный оператор $U_\theta \in N(A_d \otimes A_c)$. Соответствующий внутренний автоморфизм $\text{Ad } U_\theta$ алгебры $M \otimes B(L^2(T))$ будем обозначать через $\bar{\theta}$.

Пусть теперь U — унитарный оператор из $N(A_d \otimes A_c)$, τ — след на факторе $M \otimes B(L^2(T))$ и E — условное ожидание на подалгебру $A_d \otimes B(L^2(T))$. Оператор U допускает разложение $U = \sum_{\gamma \in \Gamma} \lambda_\gamma a_\gamma$, $a_\gamma = E(\lambda_{\gamma^{-1}} U) \in A_d \otimes B(L^2(T))$, сходящееся на операторах из $L^2(M \otimes B(L^2(T)), \tau)$. Из того, что $U \in N(A_d \otimes A_c)$, а также из свойств ортогональности системы $\{\lambda_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$ относительно следа τ следует, что a_γ являются частичными изометриями, причем системы начальных и конечных проекторов операторов $\lambda_\gamma a_\gamma$ дизъюнкты и лежат в $A_d \otimes A_c$. Домножая, если необходимо, операторы a_γ на унитарные элементы подалгебры $A_d \otimes A_c$, можно добиться, чтобы a_γ были подчинены действию группы T на $X \times T$. Мы получаем ряд описанной выше структуры для оператора Ua , где a — некоторый унитарный оператор из $A_d \otimes A_c$. Пусть θ — автоморфизм пространства $X \times T$, являющийся точечной реализацией действия автоморфизма $\text{Ad } U$ на $A_d \otimes A_c$ [6], тогда $\text{Ad } Ua = \bar{\theta}$.

Теорема 5. *Существует взаимно однозначное соответствие между внешними автоморфизмами группоид (Ω, C) и классами внешних автоморфизмов Φ фактора $M \otimes B(L^2(T))$ таких, что $\Phi(A_d \otimes A_c) = A_d \otimes A_c$, и действующих одинаково на $A_d \otimes A_c$.*

Доказательство. Пусть A — внешний автоморфизм группоид Ω . В силу теоремы 1 он допускает представление $A = (\theta \times \text{id}) \cdot \omega$, где θ — автоморфизм группоид $\Gamma \times X$; ω — внутренний автоморфизм группоид Ω . Поставим в соответствие автоморфизму A автоморфизм $\bar{A} = (\bar{\theta} \times \text{id}) \cdot \bar{\omega}$ фактора $M \otimes B(L^2(T))$, где $\bar{\theta}$ и $\bar{\omega}$ — автоморфизмы, описанные выше.

Обратно, пусть Φ — внешний автоморфизм фактора $M \otimes B(L^2(T))$, удовлетворяющий условию $\Phi(A_d \otimes A_c) = A_d \otimes A_c$. Можно проверить, что тогда $\Phi(N(A_d \otimes A_c)) = N(A_d \otimes A_c)$. В силу теоремы 4 это означает, что точечная реализация A автоморфизма Φ на пространстве $X \times T$ отображает множество внутренних автоморфизмов на себя и, следовательно, задает

автоморфизм группоида Ω . Легко видеть, что автоморфизмы Φ и $\bar{A}$ одинаково действуют на подалгебре $A_d \otimes A_c$.

Определение. Модулем автоморфизма A группоида (Ω, C) называется число $\text{mod } A = \tau \circ \bar{A} / \tau$, где $\bar{A}$ — автоморфизм фактора $M \otimes B(L^2(T))$, соответствующий автоморфизму группоида A ; τ — след на указанном факторе. Пусть теперь (Ξ, Q) — произвольный эргодический аппроксимативно конечный группоид типа II с непрерывными орбитами и $\varphi: \Xi \rightarrow \Omega$ — изоморфизм. Для автоморфизма B группоида (Ξ, Q) положим $\text{mod } B = \text{mod } (\varphi B \varphi^{-1})$.

Очевидно, модуль является гомоморфизмом $\text{Aut}(\Xi, Q) \rightarrow R_+^*$ и не зависит от выбора изоморфизма φ .

Замечание 6. Модуль автоморфизма A группоида (Ω, C) совпадает с модулем соответствующего ему в силу теоремы 1 автоморфизма $\theta \in N[\Gamma]$, $\text{mod } \theta = \mu \circ \theta / \mu$.

Рассмотрим группоид $((D \times S) \times (T \times T), [\mu_D \times \nu \times \mu_T \times \mu_T])$, соответствующий свободному эргодическому действию счетной аменабельной группы D на пространстве Лебега S с конечной инвариантной мерой ν и трансляции окружности. Пусть A — автоморфизм этого группоида. Домножив последний на трансляцию группы Z , получим изоморфный группоид $((D \times S) \times (Z \times Z) \times (T \times T), [\mu_D \times \nu \times \mu_Z \times \mu_Z \times \mu_T \times \mu_T])$, причем группоид $((D \times S) \times (Z \times Z), [\mu_D \times \nu \times \mu_Z \times \mu_Z])$ изоморфен группоиду $(\Gamma \times X, [\mu_\Gamma \times \mu])$. Автоморфизм A естественным образом продолжается до автоморфизма группоида $(D \times S) \times (Z \times Z) \times (T \times T)$ и в силу теоремы 1 допускает представление $A = (\theta \times \text{id}) \cdot \omega$, где ω — внутренний автоморфизм; $\theta \in N[D \times Z]$. Если $\text{mod } A = 1$, то θ сохраняет меру $\nu \times \mu_Z$, и для него, в свою очередь, легко построить $\theta_1 \in N[D]$ и $\omega_1 \in [D \times Z]$ такие, что $\theta = (\theta_1 \times \text{id}) \omega_1$. Замечая при этом, что транзитивный группоид $(Z \times Z) \times (T \times T)$ изоморфен группоиду $T \times T$, мы получаем

Следствие 7. Пусть A — автоморфизм группоида $((D \times S) \times (T \times T), [\mu_D \times \nu \times \mu_T \times \mu_T])$, $\nu(S) = 1$ и $\text{mod } A = 1$. Тогда найдутся автоморфизм $\theta_1 \in N[D]$ и внутренний автоморфизм ω группоида $(D \times S) \times (T \times T)$ такие, что $A = (\theta_1 \times \text{id}) \cdot \omega$.

3. Пусть (Ω, C) — измеримый группоид и $\alpha: G \rightarrow \text{Aut}(\Omega, C)$ — действие л. к. с. группы G строгими автоморфизмами группоида (Ω, C) такое, что отображение $(g, x) \mapsto \alpha(g)x$ — борелевское. Зададим проекции $r, d: G \times \Omega \rightarrow \{e\} \times \Omega^{(0)}$: $r(g, x) = (e, \alpha(g)r(x))$; $d(g, x) = (e, d(x))$. Эти отображения, а также произведение $(g, x)(h, y) = (gh, (\alpha(h^{-1})x)y)$, определенное при $(\alpha(h^{-1})x, y) \in \Omega^{(2)}$, задают на множестве $G \times \Omega$ структуру группоида. При этом $(g, x)^{-1} = (g^{-1}, \alpha(g)x^{-1})$. Указанные отображения являются борелевскими относительно борелевской структуры произведения, и $(G \times \Omega, [\mu_G] \times C)$ является измеримым группо-

идом. Этот группоид называется полупрямым произведением и обозначается $G_{S\alpha}\Omega$.

Аналогичное определение было сформулировано в [3] для непрерывных групп автоморфизмов топологических группоидов. Однако в теории измеримых группоидов наиболее типична ситуация, когда автоморфизмы из группы G являются нестрогими, т. е. представляют собой изоморфизмы некоторых н. р. группоидов Ω . Мы укажем способ построения полупрямого произведения принципиального группоидов со счетными орбитами на л. к. с. группу его нестрогих автоморфизмов.

Пусть Γ — счетная свободнодействующая группа автоморфизмов пространства Лебега (S, μ) , $\mu(S) = 1$, сохраняющая класс меры μ . Обозначим через R_Γ соответствующее отношение эквивалентности на S . Рассмотрим также действие л. к. с. группы G на (S, μ) автоморфизмами $\alpha(g) \in N[\Gamma]$ такое, что отображение $(g, x) \mapsto \alpha(g)x$ борелевское.

Теорема 8. *Существует борелевское отношение эквивалентности $R \subset S \times S$, инвариантное относительно G (точно, а не mod 0), и борелевское множество $B \subset S$, $\mu(B) = 1$, такое, что на B отношения эквивалентности R и R_Γ совпадают.*

Доказательство. С каждым автоморфизмом $\theta \in N[\Gamma]$ свяжем два семейства борелевских отображений: $\varphi_\gamma(s) = \theta\gamma s$, $\psi_\gamma(s) = \gamma\theta s$, $s \in S$, $\gamma \in \Gamma$. Рассмотрение областей совпадения этих отображений дает возможность выделить борелевское множество $U_\theta(\Gamma) \subset S$, имеющее меру $\mu(U_\theta(\Gamma)) = 1$. Оно обладает следующим свойством: для любых двух точек $x, y \in U_\theta(\Gamma)$ соотношение $(x, y) \in R_\Gamma$ эквивалентно $(\theta x, \theta y) \in R_\Gamma$.

В пространстве $G \times S$ рассмотрим борелевское множество $A = \{(g, x) \in G \times S : x \in U_{\alpha(g)}(\Gamma)\}$. Тогда $(\mu_G \times \mu)(G \times S \setminus A) = 0$, поскольку при каждом $g \in G$ $\mu(U_{\alpha(g)}(\Gamma)) = 1$. Отсюда по теореме Фубини получаем, что при п. в. $x \in S$ $\mu_G(G \setminus M_x) = 0$, где $M_x = \{g \in G : x \in U_{\alpha(g)}(\Gamma)\}$. Пусть $B \subset S$ — борелевское множество меры 1, состоящее из точек с этим свойством.

Каждой паре точек $(x, y) \in S \times S$ поставим в соответствие борелевское множество $L(x, y) = \{g \in G : \gamma\alpha(g)x = \alpha(g)y \text{ при некотором } \gamma \in \Gamma\}$. Тогда множество $R = \{(x, y) \in S \times S : \mu_G(G \setminus L(x, y)) = 0\}$ является борелевским. Это следует из борелевости множества $C = \{(g, x, y) \in G \times S \times S : g \in L(x, y)\}$ и функции $f: S \times S \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x, y) = \mu_G(G \setminus L(x, y))$.

Из свойств $L(x, y)$ следует, что R является отношением эквивалентности, строго инвариантным относительно группы G .

Пусть $x, y \in B$. Если $(x, y) \in R_\Gamma$, то $L(x, y) \supset M_x \cap M_y$, и поэтому $\mu_G(G \setminus L(x, y)) = 0$. Если же $(x, y) \notin R_\Gamma$, то, напротив, получаем $G \setminus L(x, y) \supset M_x \cap M_y$. Это означает, что $R_\Gamma|_B = R|_B$.

Введем на R меру $\nu = \int \nu^x d\mu(x)$, где $\nu^x(E) = \text{card}(E \cap \{x\} \times B)$ для всякого борелевского множества $E \subset R$. Тогда (R, ν) стано-

вится измеримым группоидом, изоморфным (хотя и нестрого) группоиду $\Omega = \Gamma \times S$.

Соотношение $GR = R$ позволяет поднять действие группы G автоморфизмами $\alpha(g)$ на (S, μ) до действия строгими автоморфизмами $\bar{\alpha}(g)$ группоида (R, ν) : $\bar{\alpha}(g)(x, y) = (\alpha(g)x, \alpha(g)y)$ для $(x, y) \in R$. Это дает возможность построить полупрямое произведение $Gs_{\bar{\alpha}}R$, которое мы и принимаем за определение полупрямого произведения $Gs_{\bar{\alpha}}\Omega$.

Список литературы: 1. *Feldman J. et al.* Orbit structure and countable sections for actions of continuous groups//J. Feldman, P. Hahn, C. C. Moore//Adv. in Math.—1978.—V. 28.—P. 186—230. 2. *Ramsay A.* Virtual groups and group actions//Adv. in Math.—1971.—V. 6. No 3.—P. 253—322. 3. *Renault J.* A groupoid approach to C^* -algebras//Lect. Notes in Math.—1980.—V. 793.—160 p. 4. *Hahn P.* The regular representations of measure groupoids//Trans. Amer. Math. Soc.—1978.—V. 242.—P. 35—73. 5. *Feldman J., Moore C. C.* Ergodic equivalence relations, cohomology, and von Neuman algebras, I, II//Trans. Amer. Math. Soc.—1977.—V. 234, No 2.—P. 289—359. 6. *Mackey G. W.* Point realizations of transformation groups. — Illinois J. Math. — 1962. — V. 6, No 1—2. — P. 327—355.

Поступила в редколлегию 04.01.86

УДК 517.53

А. А. ГОЛЬДБЕРГ, А. Э. ЕРЕМЕНКО, М. Л. СОДИН

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В СМЫСЛЕ Р. НЕВАНЛИНЫ
И В СМЫСЛЕ В. П. ПЕТРЕНКО. 2

Настоящая статья является продолжением работы [1]. В ней будут доказаны теоремы 2—4, сформулированные в первой части, при этом используем определения и обозначения, введенные в [1]. Нумерация разделов и формул продолжается.

3. Через c_j обозначаем положительные постоянные.

Лемма 3.1. Пусть D — жорданова область, граница которой содержит интервал l , а v — положительная гармоническая в D функция, имеющая нулевые предельные значения на l . Тогда существует непрерывная и положительная на l нормальная производная dv/dn .

Лемма 3.2. Пусть D — область, содержащая сектор $\{z: |\arg z| < \pi/(2\alpha), |z| \leq R\}$, $\frac{1}{2} < \alpha < \infty$, $R > 0$, причем отрезки $l_{\pm} = \{z = t \exp(\pm i\pi/(2\alpha)), 0 \leq t \leq R_0\}$, $R_0 < R$ лежат на границе ∂D . Пусть v — положительная гармоническая в D функция, обращающаяся в нуль на $l_{\pm}$. Тогда существуют числа $c_2 > c_1 > 0$ такие, что при $0 \leq r \leq R_0/2$ выполняется

$$c_1 r^{\alpha} \cos \alpha \theta \leq v(re^{i\theta}) \leq c_2 r^{\alpha} \cos \alpha \theta, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{2\alpha}, \quad (3.1)$$

причем левая часть этого неравенства выполняется и при $r \leq R$.

Лемма 3.3. Пусть D — область, содержащая сектор $\{z: |\arg z| < \frac{\pi}{2\alpha}, |z| \geq R\}$, $\frac{1}{2} < \alpha < \infty$, $R > 0$, причем лучи $l_{\pm} = \{z = t \exp(\pm i\pi/(2\alpha)), |z| \geq R_1\}$, $R_1 > R$ лежат на границе ∂D . Пусть v — положительная гармоническая функция в D , обращающаяся в нуль на $l_{\pm}$ и неограниченная в этом секторе. Тогда при $r \geq 2R_1$, $|\theta| \leq \pi/(2\alpha)$ справедливо неравенство (3.1), причем левая часть этого неравенства выполняется и при $r \geq R$.

Утверждения такого типа хорошо известны, поэтому доказательства леммы мы опускаем. Следующий факт также известен (см., например, [2], § 2.3, упр. 2).

Лемма 3.4. Пусть D_1, D_2 — непересекающиеся области $\partial D_1 \cap \partial D_2 = l$, где l — отрезок. Пусть функция v гармонична в D_1, D_2 непрерывна в $D_1 \cup D_2 \cup l$ и равна 0 на l . Через $\partial/\partial n_1, \partial/\partial n_2$ обозначим производные по внутренней нормали к границе областей D_1, D_2 соответственно. Если $\left(\frac{\partial}{\partial n_1} + \frac{\partial}{\partial n_2}\right)v(z) \geq 0$, $z \in l$, то v субгармонична в $D_1 \cup D_2 \cup l$.

Следующая лемма играет основную роль при доказательстве теоремы 3.

Лемма 3.5. Для любого $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, \frac{6}{11}\right)$ существует функция $u \in S$ со следующими свойствами:

$$u(z) \equiv 0, |z| \leq 1; \quad (3.2)$$

$$|u(z)| \leq |z|^{\alpha}, z \in \mathbb{C}; \quad (3.3)$$

$$\|u^+(re^{i\theta})\| \geq c_3 r^{\alpha}, r \geq 4; \quad (3.4)$$

$$\|u^-(re^{i\theta})\| \geq \delta \|u^+(re^{i\theta})\|, r > 0, \delta > 0. \quad (3.5)$$

Доказательство. Пусть $\beta = \alpha/(2\alpha - 1)$, тогда $\pi/(2\beta) = \pi - \pi/(2\alpha)$, $\beta > 6$. Положим $D = \{z: |z| > 2\} \cup \left\{z: |\arg(z-1)| < \frac{3\pi}{2\beta}\right\}$, $D_1 = \left\{z: |\arg(z-1)| < \frac{\pi}{2\beta}\right\}$, $D_0 = D \setminus D_1$. Пусть $v_0 = q \operatorname{Re} \Psi$, где Ψ — функция, конформно и однолистно отображающая D_0 на $\{w: \operatorname{Re} w > 0\}$, $\Psi(\infty) = \infty$, $q > 0$ (рисунок). Очевидно, что v_0 — положительная гармоническая в D_0 функция, имеющая на ∂D_0 нулевые предельные значения. В силу лемм 3.2 и 3.3 множитель q можно выбрать так, что

$$v_0(z) \leq |z|^{\alpha}, z \in D_0; \quad (3.6)$$

$$v_0(z) \leq (|z| - 1)^{\beta}, z \in D_0, |z| \leq 6. \quad (3.7)$$

Далее, в силу леммы 3.2

$$v_0(re^{i\theta} + 1) \geq -c_4 r^{\beta} \cos \beta\theta, r \leq 6, \left|\theta \pm \frac{\pi}{\beta}\right| \leq \frac{\pi}{2\beta}, \quad (3.8)$$

а в силу леммы 3.3 при $r \geq 4$, $|\theta| \in \left[\pi - \frac{\pi}{2\alpha}, \pi\right]$ выполняется

$$c_5 r^\alpha \cos \alpha(\pi - |\theta|) \leq v_0(re^{i\theta} + 1) \leq c_6 r^\alpha \cos \alpha(\pi - |\theta|). \quad (3.9)$$

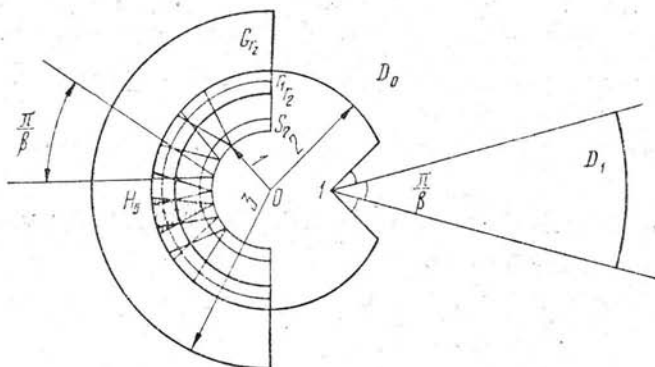
Положим $v(re^{i\theta} + 1) = r^\alpha \cos \alpha(\pi - |\theta|)$, $re^{i\theta} + 1 \in D_1$, $|\theta| < \pi$ (3.10), а затем в секторе $D_1 \cup \{z: |z-1| < 5\}$ заменим эту функцию на ее наименьшую гармоническую мажоранту v^* и положим

$$v^*(z) = v(z), \quad z \in D_1 \cap \{z: |z-1| \geq 5\}. \quad (3.11)$$

Тогда при $r \leq 5$, $|\theta| \leq \frac{\pi}{2\beta}$ выполняется

$$-c_7 r^\beta \cos \beta\theta \leq v^*(re^{i\theta} + 1) \leq -c_8 r^\beta \cos \beta\theta. \quad (3.12)$$

Действительно, рассмотрим в секторе $0 < r < 5$, $|\theta| < \pi/(2\beta)$



гармоническую функцию $V(re^{i\theta}) = v^*(re^{i\theta} + 1) + kr^\beta \cos \beta\theta$, $k > 0$. На граничных отрезках эта функция обращается в нуль. В силу (3.10), выбрав достаточно большое k , функцию V можно сделать неотрицательной и на дуге $\{r = 5, |\theta| \leq \frac{\pi}{2\beta}\}$. По принципу минимума $V(z) \geq 0$, что дает левую часть неравенства (3.12). Правая часть этого неравенства получается аналогично.

Определим функцию u следующим образом:

$$u(z) = v_0(z), \quad z \in \bar{D}_0; \quad (3.13)$$

$$u(z) = cv^*(z), \quad z \in D_1, \quad c > 0; \quad (3.14)$$

$$u(z) \equiv 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus (\bar{D}_0 \cup D_1). \quad (3.15)$$

Покажем, что постоянную c из (3.14) можно выбрать так, чтобы $u \in S$. Очевидно, что u непрерывна в $\mathbb{C}$ и субгармонична вне лучей $l_\pm = \{z: \arg(z-1) = \pm\pi/(2\beta)\}$. В силу (3.9)–(3.11), (3.13), (3.14) и лемм 3.1 и 3.4 функция u субгармонична в $\{z: |z-1| > 5\}$, если только $c < c_5$. А в силу (3.8), (3.12)–(3.14) и лемм 3.1 и 3.4 функция u субгармонична в окрестности $l_\pm \cap \{z: |z-1| < 5\}$,

если только $c < c_4/c_7$. В трех точках $z = 1$, $z = 1 + 5\exp\left(\pm i \frac{\pi}{2\beta}\right)$ субгармоничность не нарушается, так как $u(z)$ непрерывна и субгармонична в проколотых окрестностях этих точек (см., например, [3], теорема 5.18).

Уменьшив в случае надобности постоянную c , будем считать, что

$$u(z) \geq -|z|^\alpha, \quad z \in \bar{D}_1. \quad (3.16)$$

Далее нам понадобятся следующие оценки:

$$u(re^{i\theta} + 1) \leq -\kappa_1 B(r + 1, u), \quad r > 0, \quad |\theta| \leq \frac{\pi}{4\beta}, \quad \kappa_1 > 0; \quad (3.17)$$

$$|u(z)| \leq c_9(|z| - 1)^\beta, \quad 1 \leq |z| \leq 6. \quad (3.18)$$

Оценка (3.17) следует из (3.7), (3.9)—(3.15), а оценка (3.18) — из (3.7), (3.12)—(3.15).

Покажем, что функция u удовлетворяет (3.2)—(3.5).

Равенство (3.2) следует из (3.15), оценка (3.3) — из (3.6), (3.13) и (3.16), оценка (3.4) — из (3.9) и (3.13). При $1 \leq r \leq 4$ в силу (3.14), (3.12) и (3.18):

$$\|u^-(re^{i\theta})\| = c \|v^*(re^{i\theta})\| \geq c_{10}(r - 1)^\beta \geq c_{11} \|u^+(re^{i\theta})\|,$$

а при $r \geq 4$ в силу (3.14), (3.10), (3.11) и (3.3)

$$\|u^-(re^{i\theta})\| = c \|v^*(re^{i\theta})\| \geq c_{12} r^\alpha \geq c_{12} \|u^-(re^{i\theta})\|,$$

таким образом, неравенство (3.5) доказано. Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется несколько изменить функцию u , заменив неравенство (3.5) на «противоположное» неравенство (3.23).

Лемма 3.6. Для любого $\alpha \in \left(\frac{1}{2}, \frac{6}{11}\right)$ существует постоянная $\kappa > 0$, и последовательности (u_n) $u_n \in S$, и (s_n) , $1 < s_n < 2$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что функции u_n удовлетворяют следующим условиям:

$$u_n(z) \equiv 0, \quad |z| \leq 1; \quad (3.19)$$

$$|u_n(z)| \leq c_{13}|z|^\alpha, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (3.20)$$

$$|u_n(z)| \leq c_{14}(|z| - 1)^\beta, \quad 1 \leq |z| \leq 6, \quad \beta = \alpha/(2\alpha - 1); \quad (3.21)$$

$$B(r, u_n) \geq \|u_n^+(re^{i\theta})\| \geq c_{15}r^\alpha, \quad r \geq 4; \quad (3.22)$$

$$\|u_n^-(s_n e^{i\theta})\| \leq \frac{1}{n} \|u_n^+(s_n e^{i\theta})\|; \quad (3.23)$$

$$u_n(re^{i\theta} + 1) \leq -\kappa B(r + 1, u_n), \quad (3.24)$$

$$r > 0, \quad |\theta| \leq \pi/(4\beta), \quad \kappa > 0.$$

Доказательство. Будем использовать области и функции, построенные при доказательстве леммы 3.5.

Для каждого t , $1 < t < 2$, пусть $G_t = \{z: \operatorname{Re} z < 0, t < |z| < 3\}$. Заменяем в полукольце G_t функцию u на ее наименьшую гармоническую мажоранту. Полученную функцию обозначим через ω_t . Легко видеть, что

$$\omega_t \rightarrow \omega_1, \quad t \rightarrow 1, \quad (3.25)$$

равномерно в C .

Введем секторы $H_k = \{z: z \exp(-i\pi(\frac{3}{4} + \frac{k}{2\pi})) \in D_1, |z| < 3\}$, $k = 0, 1, \dots, n$, и функции

$$v_k(z) = \begin{cases} -u(z \exp(-i\pi(\frac{3}{4} + \frac{k}{2\pi}))), & z \in H_k, \\ 0, & z \notin H_k, \quad |z| < 3. \end{cases} \quad (3.26)$$

Это положительные гармонические в H_k функции, субгармонические при $|z| < 3$. В силу (3.12) и (3.14)

$$0 \leq v_k(z) \leq c_{16}(|z| - 1)^\beta, \quad z \in G_1. \quad (3.27)$$

С другой стороны,

$$\omega_1(z) \geq c_{17}(|z| - 1), \quad z \in G_1 \cap \{z: |\pi - \arg z| \leq 0,4\pi\},$$

чтобы убедиться в этом, достаточно к ω_1 применить модификацию леммы 3.1, в которой D на своей границе содержит дугу окружности вместо интервала l . Поэтому найдется такое число r_1 , $1 < r_1 < 2$, что $\omega_1(z) > 2v_k(z)$, $|z| = r_1$, $z \in G_1$, $k = 0, 1, \dots, n$. Теперь из (3.25) заключаем, что найдется настолько близкое к 1 число $r_2 < r_1$, что

$$\min \{\omega_r, (r_1 e^{i\theta}): 0,6\pi \leq \theta \leq 1,4\pi\} > B(r_1, v_0) = \dots = B(r_1, v_n). \quad (3.28)$$

Отметим, что числа r_1, r_2 не зависят от n .

Определим теперь функцию u_n :

$$u_n(z) = \begin{cases} \omega_{r_2}(z), & |z| > r_1; \\ \max \{\omega_{r_2}, v_0, \dots, v_n\}, & |z| \leq r_1. \end{cases} \quad (3.29)$$

Эта функция субгармонична при $|z| > r_1$, так как $\omega_{r_2} \in S$, а при $|z| < r_1$ — как верхняя огибающая конечного семейства субгармонических функций. Наконец, u_n субгармонична в окрестности окружности $\{z: |z| = r_1\}$ потому, что в силу (3.28) и (3.29) в некоторой окрестности этой окружности она совпадает с ω_{r_2} . Итак, $u_n \in S$. Отметим сразу же, что при $\operatorname{Re} z \geq 0$ или $|z| \geq 3$ справедливо

$$u_n(z) \equiv u(z). \quad (3.30)$$

Покажем, что для функции u_n выполняются соотношения (3.19)—(3.24). По построению выполняется (3.19). В силу (3.30) и (3.3) неравенство (3.20) выполняется при $|z| \geq 3$, а в силу (3.19) — и при $|z| < 3$ (возможно, с другим значением постоянной c_{13}). Неравенство (3.21) при $1 \leq |z| \leq r_2$ и при $3 \leq |z| \leq 6$

следует из (3.18), (3.27), (3.29) и (3.30), следовательно, оно верно и при $1 \leq |z| \leq 6$. Оценка (3.22) с $c_{15} = c_3$ немедленно следует из (3.4) и (3.30).

Число $s_n < r_2$ выберем настолько близким к единице, чтобы множества $H_k \cap \{z: |z| = s_n\}$ попарно не пересекались. Тогда в силу (3.30), (3.29) и (3.26) выполняется $u_n(z) \geq 0$ при $\operatorname{Re} z < 0$ и

$$\begin{aligned} \|u_n^-(s_n e^{i\theta})\| &= \|u^-(s_n e^{i\theta})\| \leq \frac{1}{n} ((n+1) \|u^-(s_n e^{i\theta})\| + \\ &+ \|u^+(s_n e^{i\theta})\|) = \frac{1}{n} \|u_n^+(s_n e^{i\theta})\|, \end{aligned}$$

что дает (3.23).

Наконец, в силу (3.30), (3.17), (3.8), (3.26), (3.21) и (3.29) при $|\theta| \leq \pi/(4\beta)$ $u_n(1 + re^{i\theta}) = u(1 + re^{i\theta}) \leq -\kappa_1 B(1+r, u) \leq -\kappa_1 c_{18} \times \times B(1+r, u_n)$, что дает (3.24) с $\kappa = \kappa_1 c_{18}$. Лемма 3.6 доказана.

Доказательство теоремы 2. Сначала построим функцию $U \in S$ порядка ρ , $\frac{1}{2} < \rho \leq 1$, такую, что

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \|U^-(re^{i\theta})\| / \|U^+(re^{i\theta})\| = 0, \quad (3.31)$$

но в то же время

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \min \{U^-(z): |z| = r, z \in K\} / B(r, U) > 0, \quad (3.32)$$

где $K = \{z: \operatorname{Re} z > 0, |\operatorname{Im} z| < \ln |z|, |z| > 1\}$.

Если $\rho < 6/11$, то положим $\alpha = \rho$, если же $\rho \geq 6/11$, то в качестве α возьмем произвольное число $1/2 < \alpha < 6/11$. Тогда согласно лемме 3.6 найдутся функции u_n и числа s_n , для которых выполняется (3.19)–(3.24). Положим $p_n = \|u_n^+(s_n e^{i\theta})\|$.

Построим индуктивно последовательности положительных неограниченно возрастающих чисел (A_k) , (T_k) . Положим $A_1 = T_1 = 1$. Если числа $A_1, \dots, A_{n-1}$, $T_1, \dots, T_{n-1}$ уже выбраны, то выберем T_n , $n \geq 2$ с соблюдением следующих условий:

$$\ln T_n \geq n \sum_{k=1}^{n-1} A_k; \quad (3.33)$$

$$\ln T_n \geq A_{n-1}/p_n; \quad (3.34)$$

положим теперь

$$A_n = T_n^\rho \ln T_n, \quad n \geq 2. \quad (3.35)$$

Положим $U_k(z) = A_k u_k(z/T_k)$, $U(z) = \sum_{k=1}^{\infty} U_k(z)$. В силу (3.19) этот ряд сходится равномерно на каждом компакте, следовательно, $U \in S$.

Пусть далее $T_n \leq |z| = r < T_{n+1}$. Тогда

$$U(z) = U_{n-1}(z) + U_n(z) + o(1) \|U_{n-1}^+(re^{i\theta})\|, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.36)$$

равномерно по z . Действительно, в силу (3.19), (3.20), (3.33), (3.35) и (3.22) имеем

$$\begin{aligned} |U(z) - U_{n-1}(z) - U_n(z)| &\leq \sum_{k=1}^{n-2} A_k |u_k(z/T_k)| \leq c_{13} r^\alpha \sum_{k=1}^{n-2} A_k \leq \\ &\leq \frac{c_{13}}{n} r^\alpha \ln T_{n-1} \leq \frac{c_{13}}{n} A_{n-1} \frac{r^\alpha}{T_{n-1}^\rho} \leq \frac{c_{13}}{n} A_{n-1} \frac{r^\alpha}{T_{n-1}^\alpha} \leq c_{19} n^{-1} \|U_{n-1}^+(re^{i\theta})\|. \end{aligned}$$

Если же $T_n s_n \leq r = |z| < T_{n+1}$, то

$$U(z) = U_n(z) + o(1) \|U_n^+(re^{i\theta})\|, \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.37)$$

также равномерно по z . Действительно, пусть сперва $T_n s_n \leq r \leq 5T_n$. Тогда в силу (3.20), (3.34) и (3.35) имеем

$$\begin{aligned} |U_{n-1}(z)| &\leq c_{13} A_{n-1} \frac{r^\alpha}{T_{n-1}^\alpha} \leq c_{20} A_{n-1} \frac{T_n^\alpha}{T_{n-1}^\alpha} \leq c_{20} p_n \frac{T_n^\alpha}{T_{n-1}^\alpha} \ln T_n \leq \\ &\leq \frac{c_{20}}{T_{n-1}^\alpha} A_n p_n = \frac{c_{20}}{T_{n-1}^\alpha} \|U_n^+(T_n s_n e^{i\theta})\|, \end{aligned}$$

что вместе с (3.36) дает (3.37). Если же $5T_n \leq r \leq T_{n+1}$, то, используя (3.20), (3.33), (3.35), (3.22) получаем

$$\begin{aligned} |U_{n-1}(z)| &\leq c_{13} A_{n-1} \frac{r^\alpha}{T_{n-1}^\alpha} \leq \frac{c_{13}}{n} r^\alpha \ln T_n = \frac{c_{13}}{n} \frac{A_n r^\alpha}{T_n^\rho} \leq \\ &\leq \frac{c_{13}}{n} A_n \frac{r^\alpha}{T_n^\alpha} \leq \frac{c_{21}}{n} \|U_n^+(re^{i\theta})\|, \end{aligned}$$

что вместе с (3.36) опять дает (3.37).

Теперь найдем порядок функции U . В силу (3.36) и (3.35) имеем при $T_n \leq r < T_{n+1}$ $B(r, U) \leq (1 + o(1)) B(r, U_{n-1}) + B(r, U_n) \leq (1 + o(1)) c_{13} \frac{A_{n-1}}{T_{n-1}^\alpha} r^\alpha + c_{13} \frac{A_n}{T_n^\alpha} r^\alpha \leq (1 + o(1)) c_{13} r^\alpha T_{n-1}^{\rho-\alpha} \times$
 $\times \ln T_{n-1} + c_{13} r^\alpha T_n^{\rho-\alpha} \ln T_n \leq c_{22} r^\alpha T_n^{\rho-\alpha} \ln T_n \leq c_{22} r^\rho \ln r$. С другой стороны, в силу (3.37), (3.34), (3.35) при $n \rightarrow \infty$ $B(T_n s_n, U) \geq$
 $\geq (1 + o(1)) \|U_n^+(T_n s_n e^{i\theta})\| = (1 + o(1)) A_n p_n \geq (1 + o(1)) \frac{A_{n-1}}{\ln T_n} T_n^\rho \ln T_n \geq$
 $\geq (1 + o(1)) T_n^\rho \geq (2^{-\rho} + o(1)) (T_n s_n)^\rho$. Поэтому порядок функции U равен ρ .

Далее, используя (3.37) и (3.23), получаем при $n \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \|U^-(T_n s_n e^{i\theta})\| &\leq \|U_n^-(T_n s_n e^{i\theta})\| + o(1) \|U_n^+(T_n s_n e^{i\theta})\| \leq \\ &\leq \left(\frac{1}{n} + o(1)\right) \|U_n^+(T_n s_n e^{i\theta})\| = o(1) \|U^+(T_n s_n e^{i\theta})\|, \end{aligned} \quad (3.38)$$

что дает (3.31).

Теперь докажем оценку (3.32). Пусть сперва $T_n \leq r = |z| \leq T_n + \ln^3 T_n$. Тогда в силу (3.21), (3.35)

$$|U_n(z)| \leq c_{14} A_n \left(\frac{|z|}{T_n} - 1 \right)^\beta \leq c_{14} A_n \frac{\ln^{3\beta} T_n}{T_n^\beta} = \\ = c_{14} T_n^{\rho-\beta} \ln^{3\beta+1} T_n = o(1), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.39)$$

так как $\rho \leq 1 < 6 < \beta$. Поэтому в силу (3.36), (3.20), (3.22) и (3.24) имеем

$$U(z) = U_{n-1}(z) + o(1) B(r, U_{n-1}) \leq -(\kappa + o(1)) B(r, U),$$

если $z \in K$, т. е. условие (3.32) выполняется. Пусть теперь $T_n + \ln^3 T_n \leq r = |z| < T_{n+1}$, $z \in K$. В этом случае ввиду (3.26), (3.20), (3.22), (3.24) выполняется при $n \rightarrow \infty$: $U(z) = U_{n-1}(z) + U_n(z) + o(1) \|U_{n-1}^+(re^{i\theta})\| \leq (-\kappa + o(1)) B(r, U_{n-1}) - \kappa B(T_n + |z - T_n|, U_n) \leq (-\kappa + o(1)) B(r, U_{n-1}) - \kappa B(r, U_n) \leq (-\kappa + o(1)) B(r, U)$. Таким образом, неравенство (3.32) доказано.

Воспользовавшись теоремой Ю, аппроксимируем функцию $U \in S$ логарифмом модуля целой функции f так, чтобы выполнялось (2.17). Легко видеть, что порядок целой функции f также равен ρ . Так как $U_n(-r) \geq 0$, $r \geq 0$, $n \in N$, то $B(r, U) \geq U(-r) \geq U_1(-r) = u_1(-r) \geq c_5(r+1)^\alpha$ при $r \geq 4$ в силу (3.9), (3.13), (3.30).

В силу (3.36), (3.19), (3.20), (3.35) и (3.33) выполняется $B(T_n, U) = (1 + o(1)) B(T_n, U_{n-1}) \leq (c_{13} + o(1)) A_{n-1} \frac{T_n^\alpha}{T_{n-1}^\alpha} \leq (c_{13} + o(1)) T_n^\alpha \ln T_n$, $n \rightarrow \infty$, поэтому нижний порядок функции U равен α .

Заметим теперь, что

$$\|U(re^{i\theta}) - \ln |f(re^{i\theta})|\| = o(r^\alpha), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.40)$$

Действительно, пусть $E(r)$ — пересечение исключительного множества из теоремы Ю с окружностью $\{z: |z| = r\}$. Тогда в силу (2.17) и уже использовавшейся в п. 2 теоремы Эдreja и Фукса о малых дугах [4, с. 58] в применении как к U , так и к f , имеем

$$\|U(re^{i\theta}) - \ln |f(re^{i\theta})|\| = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{[0, 2\pi] \setminus E(r)} + \int_{E(r)} \right\} |U(re^{i\theta}) - \\ - \ln |f(re^{i\theta})|| d\theta = O(\ln^2 r) + O(r^{\rho-1} \ln r) = o(r^\alpha), \quad r \rightarrow \infty.$$

Теперь из (3.38) и (3.40) получаем

$$m(T_n s_n, 0, f) \leq \|U^-(T_n s_n e^{i\theta}) - \ln^- |f(T_n s_n e^{i\theta})|\| + \|U^-(T_n s_n e^{i\theta})\| = \\ = o(T_n^\alpha) + o(1) \|U^+(T_n s_n e^{i\theta})\| \leq o(T_n^\alpha) + o(1) \|U^+(T_n s_n e^{i\theta}) - \\ - \ln^+ |f(T_n s_n e^{i\theta})|\| + o(1) \|\ln^+ |f(T_n s_n e^{i\theta})|\| = o(T_n^\alpha) + \\ + o(1) T(T_n s_n, f) = o(1) T(T_n s_n, f), \quad n \rightarrow \infty,$$

что дает $\delta(0, f) = 0$.

Так как $E \in (\sigma)$, то при достаточно больших r множество E не может целиком покрывать дугу $\{z: |z| = r\} \cap K$. Поэтому из (3.32) следует, что $\beta(0, f) > 0$.

Искомая функция построена для любого ρ , $1/2 < \rho \leq 1$. Рассматривая функции $g(z) = f(z^n)$, $n \in N$, можно получить любой наперед заданный порядок $\rho > 1/2$. Теорема 2 доказана.

Замечание 3.1. При $\rho < 6/11$ нижний порядок построенной функции f совпадает с ρ . При $6/11 \leq \rho \leq 1$ этого можно добиться, усложнив построение вспомогательных функций u_n из леммы 3.6.

Замечание 3.2. Для построенной функции f выполняется

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ |f(r)|}{\ln M(r, f)} > 0. \quad (3.41)$$

Действительно, пусть

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \{z: |z - z_k| < r_k\}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} r_k \leq M, \quad (3.42)$$

где E — исключительное множество из теоремы Ю (см. [1]). Заметим, что в круге $\{z: |z - r| \leq 2M + 1\}$ найдется окружность $\{z: |z - r| = t\}$, не пересекающаяся с E . Теперь в силу теоремы о среднем, теоремы Ю, (3.36) и (3.22) при $n \rightarrow \infty$ выполняется

$$\begin{aligned} \ln |f(r)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln |f(r + te^{i\psi})| d\psi \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(r + te^{i\psi}) d\psi + \\ &+ o(r^\alpha) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_{n-1}(r + te^{i\psi}) d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_n(r + te^{i\psi}) d\psi + \\ &+ o(1) B(r, U_{n-1}), \end{aligned} \quad (3.43)$$

если $T_n \leq r \leq T_{n+1}$. Если теперь $T_n \leq r \leq T_n + \frac{1}{2} \ln^3 T_n$, то при $n \geq n_0$ выполняется $r + t \leq r + 2M + 1 \leq T_n + \ln^3 T_n$ и в силу (3.43), (3.39), (3.24), (3.20) и (3.22) имеем

$$\begin{aligned} \ln |f(r)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_{n-1}(r + te^{i\psi}) d\psi + o(1) B(r, U_{n-1}) \leq \\ &\leq -\kappa B(T_{n-1} + |r - T_{n-1} + te^{i\psi}|, U_{n-1}) + o(1) B(r, U_{n-1}) \leq \\ &\leq -\kappa B(r - 2M - 1, U_{n-1}) + o(1) B(r, U_{n-1}) \leq \\ &\leq (-c_{21} + o(1)) B(r, U_{n-1}) = (-c_{21} + o(1)) B(r, U). \end{aligned} \quad (3.44)$$

Пусть теперь $T_n + \frac{1}{2} \ln^3 T_n \leq r \leq T_{n+1}$. Тогда при $|\psi| \leq \pi/2$ имеем $r \leq |r + te^{i\psi}| \leq T_n + |r - T_n + te^{i\psi}|$. В силу (3.43), (3.24), (3.36), неравенства $U_n(r + te^{i\psi}) \leq 0$ и уже приведенных оценок при $n \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \ln |f(r)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U_{n-1}(r + te^{i\psi}) d\psi + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} U_n(r + te^{i\psi}) d\psi + \\ &+ o(1) B(r, U_{n-1}) \leq (-c_{24} + o(1)) B(r, U_{n-1}) - \\ &- \frac{\kappa}{2} B(T_n + |r - T_n + te^{i\psi}|, U_n) \leq (-c_{24} + o(1)) B(r, U_{n-1}) - \\ &- \frac{\kappa}{2} B(r, U_n) \leq (-c_{25} + o(1)) B(r, U). \end{aligned} \quad (3.45)$$

В силу леммы (2.2) и теоремы Ю из [1] выполняется

$$\ln M(r, f) \sim B(r, U), \quad r \rightarrow \infty. \quad (3.46)$$

Теперь (3.41) следует из (3.44)–(3.46).

Доказательство теоремы 3 полностью повторяет доказательство теоремы 2 с той только разницей, что функции u_n из леммы 3.6 нужно заменить на функцию u из леммы 3.5, неравенство (3.32) не нужно, а оценку (3.31) нужно заменить неравенством $\|U^-(re^{i\theta})\| \geq (\delta + o(1)) \|U^+(re^{i\theta})\|$, $r \rightarrow \infty$, $\delta > 0$, выполняющимся в силу (3.5). В силу этого неравенства для целой функции f , входящей в (3.40), выполняется $\delta(0, f) > 0$. Далее, из (3.2), (3.3), (3.35) и (3.36) следует, что

$$B(T_n, U) = (1 + o(1)) B(T_n, U_{n-1}) \leq \frac{1 + o(1)}{T_{n-1}^\alpha} T_n^\alpha \ln T_n, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теперь в силу (3.37), (3.4) и (3.35) выполняется $\|U^+(4T_n e^{i\theta})\| = (1 + o(1)) \|U_n^+(4T_n e^{i\theta})\| \geq (c_{26} + o(1)) A_n = (c_{26} + o(1)) T_n^\rho \ln T_n \geq (c_{26} + o(1)) T_{n-1}^\alpha B(T_n, U)$. Отсюда и из (3.40) заключаем, что функция f удовлетворяет всем требованиям теоремы 3.

4. Доказательство теоремы 4. Пусть $2 < \mu < \infty$, $\eta = \frac{1}{2} \min\left(\frac{\pi}{\mu}, \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\mu}\right)$. Рассмотрим области

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ z = 1 + re^{i\theta} : r > 0, |\theta| < \eta + \frac{\pi}{\mu} \right\}, \\ D_2 &= \left\{ z = -1 + re^{i\theta} : r > 0, |\theta - \pi| < \frac{\pi}{2\mu} \right\}. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} w_1(z) &= \begin{cases} r^\mu \sin \mu(|\theta| - \eta), & z \in D_1; \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus D_1; \end{cases} \\ w_2(z) &= \begin{cases} r^\mu \cos \mu(\theta - \pi), & z \in D_2, \\ 0, & z \in \mathbb{C} \setminus D_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Рассмотрим функцию $w = w_1 + w_2$, заданную в $\mathbb{C}$. Ясно, что $w \in S$. Построенная функция обладает следующими свойствами:

$$w(z) = 0, \quad |z| \leq 1; \quad (4.1)$$

$$|w(z)| \leq |z|^\mu, \quad z \in \mathbb{C}; \quad (4.2)$$

$$\|w^-(re^{i\theta})\| \geq \delta \|w^+(re^{i\theta})\|, \quad r \geq 1, \quad (4.3)$$

где положительная постоянная δ зависит только от μ . Далее

$$\omega(-t + e^{i\theta}) \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad t > 0; \quad (4.4)$$

$$\|\omega^+(-t + e^{i\theta})\| \geq \alpha t^{\mu+1}, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad (4.5)$$

$$\|\omega^+(re^{i\theta})\| \geq \beta r^\mu, \quad r \geq 2; \quad (4.6)$$

$$\|\omega^+(re^{i\theta})\| \geq \gamma(r-1)^{\mu+1}, \quad 1 \leq r \leq 2, \quad (4.7)$$

где положительные числа α, β, γ зависят только от μ . Пусть $R_k \geq 2, R_k \uparrow \infty, a_k > 0, u_k(z) = a_k \omega(z/R_k)$. В силу (4.1) ряд

$$u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$$

сходится равномерно на компактах в C и $u(z) \in S$.

Положим $a_k = R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k$, а последовательность (R_k) выберем так, чтобы выполнялось при $k \geq 2$

$$\ln R_k > \max \{2^k, R_{k-1}^{2\mu+1} \ln^2 R_{k-1}\} = \max \{2^k, a_{k-1}\}. \quad (4.8)$$

Оценим порядок функции u . Если $|z| \geq R_k$, то в силу (4.2) и (4.8)

$$u_k(z) \leq R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k \frac{|z|^\mu}{R_k^\mu} \leq |z|^{2\mu+1} \ln^2 |z| \leq 2^{-k} |z|^{2\mu+1} (\ln^+ |z|)^3.$$

Если $|z| < R_k$, то ввиду (4.1) последнее неравенство, очевидно, выполняется. Таким образом, порядок функции u не превосходит $2\mu + 1$. Так как все $u_k(-r) \geq 0$ при $r > 0$, то

$$u(-2R_k) \geq u_k(-2R_k) = R_k^{2\mu+1} (\ln^2 R_k) \omega(-2) = R_k^{2\mu+1} (\ln^2 R_k).$$

Следовательно, порядок функции u равен $2\mu + 1$.

Покажем, что функция u имеет положительный дефект. Пусть $r \geq R_1$. Число k выберем так, чтобы $R_k \leq r < R_{k+1}$.

Пусть сперва $2R_k \leq r < R_{k+1}$. В силу (4.6) имеем

$$\|u_k^+(re^{i\theta})\| = R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k \left\| \omega^+\left(\frac{r}{R_k} e^{i\theta}\right) \right\| \geq \beta R_k^{\mu+1} (\ln^2 R_k) r^\mu. \quad (4.9)$$

С другой стороны, $u_m(re^{i\theta}) = 0$ при $m > k$ в силу (4.1) и, кроме того, в силу (4.2), (4.8) и (4.9) имеем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{k-1} u_j(re^{i\theta}) \right| &\leq (k-1) R_{k-1}^{\mu+1} \ln^2 R_{k-1} r^\mu = \\ &= (k-1) R_{k-1}^{\mu+1} (\ln^2 R_{k-1}) r^\mu = o(\|u_k^+(re^{i\theta})\|), \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (4.10)$$

равномерно по $r \in [2R_k, R_{k+1}]$. Следовательно, при таких r в силу (4.3) имеем

$$\|u^-(re^{i\theta})\| \geq (\delta + o(1)) \|u^+(re^{i\theta})\|, \quad r \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

Пусть теперь $R_k + 1 \leq r < 2R_k$. В силу (4.7) имеем

$$\begin{aligned} \|u_k^+(re^{i\theta})\| &= R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k \left\| \omega^+ \left(\frac{r}{R_k} e^{i\theta} \right) \right\| \geq \\ &\geq R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k \left\| \omega^+ ((1 + R_k^{-1}) e^{i\theta}) \right\| \geq \\ &\geq \gamma R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k R_k^{-\mu-1} = \gamma R_k^\mu \ln^2 R_k. \end{aligned}$$

С другой стороны, при $r < 2R_k$ в силу (4.2), (4.8) и предыдущей оценки выполняется

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^{k-1} u_j(re^{i\theta}) \right| &\leq (k-1) R_{k-1}^{2\mu+1} (\ln^2 R_{k-1}) \left(\frac{2R_k}{R_{k-1}} \right)^\mu = \\ &= 2^\mu (k-1) R_{k-1}^{\mu+1} (\ln^2 R_{k-1}) R_k^\mu = o(1) \|u_k^+(re^{i\theta})\|, \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

равномерно по $r \in [R_k + 1, 2R_k]$. Таким образом, в силу (4.3) и в этом случае выполняется оценка (4.11).

Рассмотрим оставшийся случай $R_k \leq r < R_k + 1$. Из (4.10) с заменой $k-1$ на $k-2$ следует, что $\left\| \sum_{j=1}^{k-2} u_j(re^{i\theta}) \right\| = o(\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|)$, $k \rightarrow \infty$.

Предположим, что $\|u_k^+(re^{i\theta})\| \geq \|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|$. Тогда

$$\begin{aligned} \|u^+(re^{i\theta})\| &\leq (1 + o(1)) \|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\| + \|u_k^+(re^{i\theta})\| \leq \\ &\leq (2 + o(1)) \|u_k^+(re^{i\theta})\|, \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Заметим, что если $u_k(z) < 0$, то и $u_j(z) < 0$ при $1 \leq j \leq k-1$. Отсюда и из (4.1), (4.3), (4.12) следует, что $\|u^-(re^{i\theta})\| \geq \|u_k^-(re^{i\theta})\| \geq$

$$\geq \delta \|u_k^+(re^{i\theta})\| \geq \left(\frac{\delta}{2} + o(1) \right) \|u^+(re^{i\theta})\|, \quad r \rightarrow \infty.$$

Если же $\|u_k^+(re^{i\theta})\| \leq \|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|$, то так, как (4.12), получаем $\|u^+(re^{i\theta})\| \leq (2 + o(1)) \|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|$, $r \rightarrow \infty$. Достаточно малое число $\varepsilon > 0$ выберем так, чтобы $u_k(re^{i\theta}) = 0$, $r \in [R_k, R_k + 1]$, $|\theta| \in \left[\varepsilon, \frac{\pi}{2} \right]$.

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\theta| > \varepsilon} u_{k-1}^-(re^{i\theta}) d\theta \geq \frac{1}{2} \|u_{k-1}^-(re^{i\theta})\|, \quad r \in [R_k, R_k + 1].$$

Тогда при $k \rightarrow \infty$ $\|u^-(re^{i\theta})\| \geq o(\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|) + \|(u_{k-1}(re^{i\theta}) + u_k(re^{i\theta}))^-\| \geq o(\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|) + I(r) \geq o(\|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\|) + \frac{1}{2} \times$
 $\times \|u_{k-1}^-(re^{i\theta})\| \geq \left(\frac{\delta}{2} + o(1) \right) \|u_{k-1}^+(re^{i\theta})\| \geq \left(\frac{\delta}{4} + o(1) \right) \|u^+(re^{i\theta})\|.$ (4.13)

Таким образом, из (4.11)—(4.13) следует, что функция u имеет положительный дефект.

Покажем, что дефект функции $u(z-1)$ равен 0. Имеем

$$\left| \sum_{j=1}^{k-1} u_j (R_k e^{i\theta} - 1) \right| \leq (k-1) R_{k-1}^{2\mu+1} \ln^2 R_{k-1} 2^\mu \frac{R_k^\mu}{R_{k-1}^\mu} = \\ = 2^\mu (k-1) R_{k-1}^{\mu+1} \ln^2 R_{k-1} R_k^\mu. \quad (4.14)$$

Далее, в силу (4.5) $\|u_k^+(R_k e^{i\theta} - 1)\| = R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k \left\| \omega^+ \left(e^{i\theta} - \frac{1}{R_k} \right) \right\| \geq \alpha R_k^{2\mu+1} \ln^2 R_k R_k^{-\mu-1} = \alpha R_k^\mu \ln^2 R_k$. Поэтому из (4.14), (4.1) и (4.8) заключаем, что при $k \rightarrow \infty$ $|u(R_k e^{i\theta} - 1) - u_k(R_k e^{i\theta} - 1)| = o(\|u_k^+(R_k e^{i\theta} - 1)\|)$. Но в силу (4.4) $u_k(R_k e^{i\theta} - 1) \geq 0$, таким образом, при $k \rightarrow \infty$ $\|u^-(R_k e^{i\theta} - 1)\| = o(\|u_k^+(R_k e^{i\theta} - 1)\|) = o(\|u^+(R_k e^{i\theta} - 1)\|)$, что и требовалось.

Изменяя некоторые из этапов доказательства теоремы Р. С. Юлмухаметова [5], можно получить следующую теорему*.

Теорема Ю'. Для произвольной субгармонической функции $v(z)$ конечного порядка существует целая функция f , удовлетворяющая асимптотическому неравенству:

$$\|v(re^{i\theta} - a) - \ln |f(re^{i\theta} - a)|\| = O(\ln^2 r), \quad r \rightarrow \infty$$

для каждого $a \in \mathbb{C}$.

Применив эту теорему к построенной субгармонической функции $u(z)$, получаем целую функцию f , для которой справедливо утверждение теоремы 4.

Замечание 4.1. При $r > 0$ выполняется $\omega(-r) \geq 0$. Поэтому при $r \geq 2R_1$ справедливо

$$u(-r) \geq u_1(-r) \geq \kappa r^\mu, \quad \kappa > 0.$$

Следовательно, нижний порядок функции u , а вместе с ней и f не меньше, чем $\mu = (\rho - 1)/2$.

Основные результаты настоящей работы, теоремы 1 и 2, анонсированы авторами в ДАН УССР, 1984, № 10, с. 3—5.

Список литературы: 1. Гольдберг А. А. и др. Исключительные значения в смысле Р. Неванлинны и в смысле В. П. Петренко, I / А. А. Гольдберг, А. Э. Еременко, М. Л. Содин // Теория функций, функций. анализ и их прил. — 1987. — Вып. 47. — С. 77—80. 2. Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Наука. — 1979. — 320 с. 3. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции. — М.: Мир. — 1980. — 304 с. 4. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука. — 1970. — 591 с. 5. Юлмухаметов Р. С. Приближение субгармонических функций // Мат. сб. — 1984. — Т. 124, № 3. — С. 393—415.

Поступила в редколлегию 16.10.85

* В случае $a = 0$ эта теорема доказана в дипломной работе Л. М. Пше-ницкой, С. С. Сичак, Г. В. Якимец, выполненной в 1985 г. в Львовском госуниверситете под руководством первого из соавторов.

1. *Определения и формулировки результатов.* Напомним, следуя [1], что оператор A в комплексном гильбертовом пространстве H называют m -секториальным с вершиной в нуле и полууглом θ , $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2})$, если его резольвентное множество $\rho(A)$ — не пусто, а числовой образ $\Sigma(A)$ — подмножество сектора $|\arg z| \leq \leq \theta$. Последнее условие, очевидно, эквивалентно неравенству

$$\operatorname{Re}(Af, f) \geq \operatorname{ctg} \theta |\operatorname{Im}(Af, f)|, \quad f \in D(A). \quad (1)$$

При $\theta = 0$ оператор A — положительный, самосопряженный, при $\theta = \frac{\pi}{2} - m$ — аккретивный. Наряду с оператором A обычно рассматривают сжатие T его дробно-линейное преобразование:

$$T = (I - A)(I + A)^{-1}. \quad (2)$$

Неравенство (1) при этом трансформируется в неравенство (2):

$$2\operatorname{Im}(Tf, f) \operatorname{ctg} \theta \leq ((I - T^*T)f, f) = (D_T^2 f, f), \quad (3)$$

которое, как легко видеть, эквивалентно следующему:

$$\|T \sin \theta \pm i \cos \theta\| \leq 1. \quad (4)$$

Обозначим соответственно через $S(\theta)$ и $C(\theta)$ совокупности всех m -секториальных операторов с условием (1) и всех сжатий T , удовлетворяющих неравенствам (3).

Очевидно, $C(\frac{\pi}{2})$ — множество всех, а $C(0)$ — множество самосопряженных сжатий. Ясно также, что T представляется в виде (2) $\Leftrightarrow \operatorname{Ker}(T + I) = 0$.

Классы $S(\theta)$ и $C(\theta)$ представляют интерес уже потому, что оператор $A \in S(\theta)$ генерирует голоморфную в секторе $|\arg z| \leq \leq \frac{\pi}{2} - \theta$ полугруппу сжатий $\exp(-zA)$, $T = (I - A)(I + A)^{-1}$ — ее когенератор (см. [2,3]).

Спектр $\tau(T)$ оператора $T \in C(\theta)$ содержится в лунке $|z \sin \theta \pm \pm i \cos \theta| \leq 1$ и пересекается с окружностью $|z| = 1$ разве лишь в точках ± 1 . Поэтому условие $\operatorname{ker}(T \pm I) = 0$ эквивалентно полной неунитарности оператора T , т. е. (см. [2]) отсутствию у него приводящих подпространств, в которых бы индуцировался унитарный оператор. Таким образом, если $\operatorname{ker}(T \pm I) = 0$, то $T \in C_{\text{во}}$, его минимальная унитарная дилатация — двусторонний сдвиг и $\dim \operatorname{ker}(I - T^*T) = \dim \operatorname{ker}(I - TT^*)$ (см. [2, с. 102]).

Напомним еще, что если T — вполне неунитарен, $\|T\| \leq 1$, то $\forall f(z) \in H^\infty$ в круге, корректно определен оператор $f(T)$ (см. [2, с. 131]). Аналогично, если оператор A с условием (I) — чистый (т. е. iA — вполне несамосопряжен $\Leftrightarrow \ker A = 0$, (см. [2, с. 92]), то $\forall f(z)$ голоморфных в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ и таких, что $\operatorname{Re} f(z) > 0$, определен оператор $f(A)$ [2, с. 193].

Нас интересует вопрос, когда функция $f(A)$ ($f(T)$) от m -секториального оператора A (сжатия $T \in C(\theta)$) будет оператором того же класса. Небезынтересно отметить, что даже при $\theta \leq \frac{\pi}{2n}$ импликация $A \in S(\theta) \Rightarrow A^n \in S(n\theta)$ неверна — контрпример уже в двумерном пространстве $H = C^2$ доставляет Жорданова клетка $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ при $\alpha = 2 \sin \theta$.

Следующая теорема, которую следует рассматривать как аналог известного неравенства фон Неймана (см. [2, 4, 5] и библиографию в [5]) — основной результат заметки.

Теорема 1. Пусть $T \in C(\theta)$, $\ker(T \pm I) = 0$. Если $f(z) \in H^\infty$, $\|f\|_{H^\infty} \leq 1$ и $f^t(z) \operatorname{def} = \overline{f(z)} = f(z)$, то $f(T) \in C(\theta)$.

Из нее с помощью равенства (2) получается

Теорема 1'. Пусть $A \in S(\theta)$, $\ker A = 0$. Если $f(z)$ голоморфна при $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} f(z) > 0$ и $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, то $f(A) \in S(\theta)$.

В скалярном случае ($\dim H = 1$) теоремы 1 и 1' означают следующее: функция, голоморфная в круге (правой полуплоскости), отображает лунку $|z \sin \theta \pm i \cos \theta| \leq 1$ (сектор $x \geq |y| \operatorname{ctg} \theta$) в себя для всех $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$, если последнее имеет место при $\theta = 0$ и $\theta = \frac{\pi}{2}$. Этот факт имеется, например, в [6].

2. Доказательства теорем. Докажем вначале два вспомогательных утверждения.

Лемма 1. Пусть $b_a(z) \operatorname{def} = (z - a)(1 - \bar{a}z)^{-1}$, $a = \bar{a}$ и $|a| < 1$. Тогда $\forall \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ справедлива эквивалентность:

$$T \in C(\theta) \Leftrightarrow b_a(T) = (T - aI)(I - aT)^{-1} \equiv T_a \in C(\theta).$$

Доказательство. $D_{T_a}^2 = I - T_a^* T_a = k^* (I - T^* T) k = k^* D_T^2 k$, где $k = (1 - |a|^2)^{1/2} (I - aT)^{-1}$. Из неравенства (3), эквивалентного условию $T \in C(\theta)$, получаем

$$\operatorname{ctg} \theta |\operatorname{Im}(Tkf, kf)| \leq \|D_T k f\|^2 = \|D_{T_a} f\|^2. \quad (5)$$

Далее, $(Tkf, kf) = a^{-1}(1 - a^2)(aT(I - aT)^{-1}f, (I - aT)^{-1}f) = -a^{-1}(1 - a^2)(f, (I - aT)^{-1}f) + a^{-1}(1 - a^2)\|(I - aT)^{-1}f\|^2. \quad (6)$

Из (6) $|\operatorname{Im}(Tkf, kf)| = |a^{-1}|(1 - a^2)|\operatorname{Im}((I - aT)^{-1}f, f)| = |\operatorname{Im}(T_a f, f)|$, т. е. неравенство (5) эквивалентно неравенству (3) для оператора T_a . Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть $-\frac{1}{3} < \xi < 1$, $f(z) = \frac{z^2 + 2\xi z + \xi}{\xi z^2 + 2\xi z + 1}$. Тогда $\forall \theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ справедлива импликация $T \in C(\theta) \Rightarrow f(T) \in C(\theta)$.

Доказательство. Прямое доказательство этого факта даже в скалярном случае довольно громоздкое. Воспользуемся поэтому представлением $f(z)$ через элементарные множители Бляшке $b_\alpha(z)$ и $b_\beta(z)$ с вещественными нулями: $f(z) = b_\beta(zb_\alpha(z))$, $b_\alpha(z) = (z - \alpha)(1 - \alpha z)^{-1}$, $\alpha = \bar{\alpha} = -2\xi(1 + \xi)^{-1}$, $|\alpha| < 1$, $b_\beta(z) = (z - \beta)(1 - \beta z)^{-1}$, $\beta = \bar{\beta} = -\xi$, $|\beta| < 1$.

В таком случае $f(T) = b_\beta(Tb_\alpha(T))$ и лемма 2 следует из предыдущей, если учесть импликацию $T \in C(\theta) \Rightarrow Tb_\alpha(T) \in C(\theta)$, которая проверяется элементарно. Лемма доказана.

Следствие. Если $a \in \mathbb{C}$, $|a| < 1$, $b(z) = b_a(z)b_{\bar{a}}(z)$ и $T \in C(\theta)$, то $b(T) \in C(\theta)$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $f(z) \in H^\infty$. Тогда $F(\xi) = \left|1 - f\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\right| \left|1 + f\left(\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\right|^{-1}$, где $\xi = (1-z)(1+z)^{-1} = x + iy$ удовлетворяет условиям теоремы 1'. Поэтому [7]

$$F(\xi) = a\xi + ib + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\xi - it} - \frac{1}{1 + t^2} \right) d\sigma(t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(t)}{1 + t^2} dt < \infty, \quad (7)$$

причем в (7) $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$, а $\sigma(t)$ — неубывающая функция на мнимой оси. Условие $\text{Im } F(x) = 0$ эквивалентно следующему:

$$b + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\sigma(t) = 0. \quad (8)$$

Полагая в (8) $x = 1$, получаем $b = 0$. Далее,

$$\int_{-\infty}^0 \left(\frac{t}{x^2 + t^2} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\sigma(t) = - \int_0^{\infty} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\sigma(-t) \quad (9)$$

и потому условие (8) с учетом (9) приобретает вид

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{t}{x^2 + t^2} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d(\sigma(t) - \sigma(-t)) = 0. \quad (10)$$

Ясно, однако, что равенство (10) эквивалентно условию: $\sigma(t) = \sigma(-t)$. Поэтому из (7) и (9)

$$F(\xi) = a\xi + \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{\xi - it} + \frac{1}{\xi + it} \right) d\sigma(t). \quad (11)$$

Теорему достаточно доказать для строгих сжатий $T \in C(\theta)$ (т. е. $\|T\| < 1$), ибо последние плотны в $C(\theta)$ по равномерной норме. Если же $\|T\| < 1$, то $T = (I - A)(I + A)^{-1}$, где $A \in S(\theta)$, причем A и A^{-1} ограничены и не имеют спектра на мнимой оси. Поэтому, как следует из (11),

$$F(A) = \alpha A + \int_0^\infty [(A - it)^{-1} + (A + it)^{-1}] d\sigma(t), \quad (12)$$

с учетом (12), достаточно установить импликацию: $A \in S(\theta)$, $t > 0 \Rightarrow \Rightarrow B = (A - it)^{-1} + (A + it)^{-1} \in S(\theta)$. Но

$$(I - B)(I + B)^{-1} = (T^2 + 2\alpha T + \alpha)(T^2\alpha + 2\alpha T + 1)^{-1}, \quad (13)$$

где $\alpha = (t^2 - 1)(t^2 + 3)^{-1}$. Так как $-\frac{1}{3} < \alpha < 1$, то применение леммы 2 дает: $(I - B)(I + B)^{-1} \in C(\theta)$, т. е. $B \in S(\theta)$. Теорема доказана.

Следствие. Если $F(z)$ голоморфна в полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ $|\arg F(z)| < \frac{\pi\varphi}{2}$ ($0 < \varphi \leq 1$) и $F(\bar{z}) = \overline{F(z)}$, то верна импликация: $A \in S(\theta) \Rightarrow F(A) \in S(\theta\varphi)$.

Доказательство. Функция $g(z) = [F(z)]^{\frac{1}{\varphi}}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и поэтому $g(A) \in S(\theta)$. Осталось заметить, что $F(A) = [g(A)]^\varphi$ и воспользоваться известной [1—3, 8] импликацией: $B \in S(\theta)$, $0 \leq \alpha \leq 1 \Rightarrow B^\alpha \in S(\theta\alpha)$, которую, впрочем, легко вывести из формул Шварца для правой полуплоскости.

Замечание. Теорема 1 для функций $\varphi(z) = z^n$ и $\varphi(z) = \exp\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$ другим методом доказана Ю. М. Арлинским.

Список литературы: 1. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир. — 1972. — 740 с. 2. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Изд-во иностр. лит. — 1970. — 431 с. 3. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука. — 1967. — 464 с. 4. Neuman J. von. Eine spectral Theorie für allgemeine Operatoran eines unitaren Raumes // Math. Nachr. — 1951, 4. — S. 258—281. 5. Пеллер В. В. Аналог неравенства Дж. Неймана // Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова — 1981. — 45. — С. 103—150. 6. Неванlinna P. Однозначные аналитические функции. — М.: Гостехтеоретиздат. — 1941. — 338 с. 7. Крейн М. Г., Нудельман А. А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука. — 1973. — 551 с. 8. Мацаев В. И., Палант Ю. А. О степенях ограниченного диссипативного оператора // Укр. мат. журн. — 1962. — 14, № 3. — С. 329—337.

Поступила в редакцию 28.04.85

НЕТРИВИАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОРОДНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В работе изучается вопрос о локальной нетривиальной C^∞ — разрешимости линейного однородного уравнения:

$$\varphi(Fx) - Q(x)\varphi(x) = 0, \quad (1)$$

где $Q: R^1 \rightarrow C^{m^2}$ — заданное C^∞ -отображение, а $F: (R^1, 0) \rightarrow (R^1, 0)$ — конечно-определенный (относительно сопряженности) C^∞ — диффеоморфизм. Эта работа примыкает к работе [1], в которой изучался вопрос о локальной C^∞ -разрешимости соответствующего неоднородного уравнения.

Конечная определенность диффеоморфизма F означает, что F удовлетворяет одному из условий: 1) F гиперболичен ($|F'(0)| \neq 1$); 2) F — негиперболичен ($|F'(0)| = 1$) и $F^2(x) = x + f(x)$, $f \neq 0$. (Здесь $\hat{f}$ — формальный ряд Тейлора в нуле).

Теорема 1. Пусть F — локальный конечно-определенный C^∞ -диффеоморфизм. Любое нетривиальное формальное решение уравнения (1) восстанавливается до его локального C^∞ -решения.

Заметим, что уравнение (1) не имеет нетривиальных формальных решений при отсутствии резонансных соотношений, т. е. при выполнении условий: $\lambda^s = q_i$, $s = 0, 1, 2, \dots$; $i = 1, 2, \dots, m$. (Здесь $\lambda = F'(0)$; $q_1, \dots, q_m$ — собственные значения матрицы $Q(0)$).

Из теоремы 1 следует, что если уравнение (1) не имеет нетривиальных формальных решений, то задача сводится к существованию плоского в нуле локального нетривиального решения уравнения (1).

При выяснении условий существования плоского в нуле локального нетривиального C^∞ -решения уравнения (1), а также при доказательстве разрешимости соответствующего неоднородного уравнения используются леммы о нормализации матрицы $Q(x)$.

Лемма 1. Пусть F — локальный конечно-определенный C^∞ -диффеоморфизм. Существует C^∞ -преобразование $\varphi(x) = T(x)\tilde{\varphi}(x)$, приводящее уравнение (1) к уравнению того же вида с блочно-треугольной матрицей $\tilde{Q}(x) = (T(Fx))^{-1}Q(x)T(x)$ с диагональными блоками $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, где матрица $Q_1(0)$ невырождена, а матрица $Q_2(0)$ нильпотентна.

Лемма 1 сводит изучение вопроса о нетривиальной разрешимости уравнения (1) к рассмотрению двух уравнений вида (1) с невырожденной в нуле и нильпотентной в нуле матрицей $Q(x)$.

Теорема 2. Пусть F — локальный гиперболический C^∞ -диффеоморфизм. Если матрица $Q(0)$ невырождена, то уравнение (1) не имеет плоских в нуле локальных нетривиальных C^∞ -решений. Если же матрица $Q(0)$ нильпотентна, а $\det Q(x)$ — неплюская в нуле функция, то для существования плоского в нуле локального нетривиального C^∞ -решения уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы $|F'(0)| < 1$.

В негиперболической ситуации при невырожденной в нуле матрице $Q(x)$ требуется дополнительная нормализация $Q(x)$. Заметим вначале, что если $F'(0) = -1$, то уравнение (1) имеет локальное нетривиальное плоское в нуле C^∞ -решение тогда и только тогда, когда уравнение $\varphi(F^2x) - Q(Fx)Q(x)\varphi(x) = 0$ имеет локальное нетривиальное C^∞ -решение, плоское в нуле. Поэтому в негиперболической ситуации будем рассматривать только случай $F'(0) = 1$. Заметим также, что поскольку мы ищем плоское в нуле решение уравнения (1), достаточно отдельно рассматривать это уравнение в правой и левой полукрестностях начала координат.

Лемма 2. Пусть $F(x) = x + \alpha x^{k+1} + \dots$, $\alpha \neq 0$, $\det Q(0) \neq 0$, $x \geq 0$. Существует допустимое преобразование $\varphi(x) = T(x)\tilde{\varphi}(x)$, приводящее уравнение (1) к уравнению того же вида с треугольной матрицей $\tilde{Q}(x) = (T(Fx))^{-1}Q(x)T(x)$.

Под допустимым преобразованием понимается такое преобразование $T(x)$, которое становится гладким после замены $x \rightarrow x^p$ и умножения на x^r с некоторыми $p, r \in \mathbb{R}$ (то же предполагается относительно обратной матрицы $T^{-1}(x)$). Такое преобразование является изоморфизмом пространства плоских в нуле C^∞ -отображений.

Лемма 2 сводит изучение вопроса о нетривиальной разрешимости уравнения (1) в негиперболическом случае при $\det Q(0) \neq 0$ к рассмотрению одномерной ситуации ($m = 1$).

Теорема 3. Пусть $F(x) = x + \alpha x^{k+1} + \dots$, $\alpha \neq 0$. I. Если $m = 1$ и $|Q(x)| = q + \beta x^l + \dots$, $q \neq 0$, $\beta \neq 0$, $l \leq \infty$, то для существования плоского в нуле локального нетривиального C^∞ -решения уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий: 1) $q \neq 1$, k нечетно; 2) $q \neq 1$, k четно, $\alpha \ln q > 0$; 3) $q = 1$, $l < k$, $\alpha\beta > 0$; 4) $q = 1$, $l < k$, $\alpha\beta < 0$, $l - k \equiv 1 \pmod{2}$. II. Если матрица $Q(0)$ нильпотентна и $\det Q(x)$ — неплюская в нуле функция, то для существования плоского в нуле локального нетривиального C^∞ -решения уравнения (1) необходимо и достаточно выполнения одного из следующих условий: 1) k — нечетно; 2) k — четно, $\alpha < 0$.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\tilde{\varphi}$ — нетривиальное формальное решение уравнения (1), а φ_0 — локальное C^∞ -отображение с рядом Тейлора $\tilde{\varphi}$. Будем искать решение φ уравнения (1) в виде $\varphi_0 + \psi$, где $\psi = 0$. Для ψ получим уравнение

$$\psi(Fx) - Q(x)\psi(x) = \gamma(x), \quad (2)$$

где $\varphi(x) = -\varphi_0(Fx) + Q(x)\varphi_0(x)$ — плоское в нуле C^∞ -отображение. Разрешимость уравнения (2) доказана в [1] при невырожденной в нуле матрице $Q(x)$ (при этом в негиперболическом случае предполагалось, что матрица $Q(x)$ треугольна). Методами, аналогичными изложенным в [1], доказываем разрешимость уравнения (2) в случае, если матрица $Q(0)$ нильпотентна. Учитывая этот факт, а также леммы 1, 2, получаем разрешимость уравнения (2) при любой матрице $Q(x)$. Тогда отображение $\varphi = \varphi_0 + \psi$ является локальным C^∞ -решением уравнения (1), ряд Тейлора в нуле которого равен $\hat{\varphi}$ ($\hat{\varphi} \neq 0$).

Доказательство теоремы 2. Предположим вначале, что матрица $Q(0)$ невырождена. Покажем, что уравнение (1) не имеет плоского в нуле локального нетривиального C^∞ -решения. Пусть $|F'(0)| > 1$, а $\varphi(x)$ — плоское в нуле C^∞ -решение уравнения (1). Выберем $\delta > 0$ так, чтобы

$$|F^{-1}x| \leq \tilde{\lambda}|x|, \quad \tilde{\lambda} < 1, \quad |x| \leq \delta. \quad (3)$$

Положим $m = \max_{|x| < \delta} \|Q(x)\|$. Уравнение (1) запишем в виде

$$\varphi(x) = Q(F^{-1}x)\varphi(F^{-1}x). \quad (4)$$

Выберем v_0 так, чтобы $m\tilde{\lambda}^{v_0} = \tilde{\lambda} < 1$. Поскольку $\varphi(x)$ — плоское в нуле, $\|\varphi(x)\| \leq C_{v_0}|x|^{v_0}$ при некотором $C_{v_0} > 0$. Итерируя уравнение (4) и учитывая (3), получаем

$$\|\varphi(x)\| \leq \prod_{i=1}^n \|Q(F^{-i}x)\| \cdot \|\varphi(F^{-n}x)\| \leq m^n C_{v_0} \tilde{\lambda}^{nv_0} |x|^{v_0}, \quad |x| \leq \delta.$$

В силу выбора v_0 правая часть полученного неравенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Следовательно, любое плоское в нуле C^∞ -решение уравнения (1) тривиально.

Если $|F'(0)| < 1$, то задача сводится к предыдущей преобразованием уравнения (1) к виду $\varphi(x) = Q^{-1}(x)\varphi(Fx)$.

Пусть теперь матрица $Q(0)$ нильпотентна. При $|F'(0)| > 1$ доказательство отсутствия плоского в нуле нетривиального C^∞ -решения уравнения (1) проводится аналогично предыдущему.

Предположим теперь, что $0 < F'(0) < 1$, а матрица $Q(0) = 0$. Поскольку $\det Q(x)$ — неплюсая в нуле функция, существует точка $x_0 > 0$, такая, что матрицы $Q(x_i)$, где $x_i = F^i x_0$, невырождены для всех целых неотрицательных i . Зафиксируем произвольный вектор $y_0 \neq 0$ и положим $y_n = \prod_{i=0}^{n-1} Q(x_i) y_0$. Построим плоское в нуле C^∞ -отображение $\varphi_0(x)$, удовлетворяющее условиям $\varphi_0(x_n) = y_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. С этой целью положим

$$\zeta_n(x) = \begin{cases} \exp\left\{-\frac{(x-x_n)^2}{(x_{n-1}-x)(x-x_{n+1})}\right\}, & x \in (x_{n+1}, x_{n-1}), \\ 0, & x \in (x_{n+1}, x_{n-1}). \end{cases} \quad (5)$$

Тогда отображение $\varphi_0(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \xi_n(x)$ обладает нужными свойствами. В самом деле, $|Fx| \leq \tilde{\lambda} |x|$ при некотором $\tilde{\lambda} < 1$ и достаточно малых x . Поэтому $x_i \leq \tilde{\lambda}^i x_0$. Поскольку $Q(0) = 0$, $\|Q(x)\| \leq A|x|$ при некотором $A > 0$. Отсюда $\|y_n\| \leq B^n \tilde{\lambda}^{n^2}$ при некотором $B > 0$. Далее, $(x_{n-1} - x_{n+1}) \geq D \tilde{\lambda}^n$ и $|\xi_n^{(s)}(x)| \leq C_s (x_{n-1} - x_{n+1})^{-v_s}$, $s = 1, 2, \dots$, при некоторых $\tilde{\lambda}, D, C_s, v_s > 0$. Из этих оценок вытекает, что ряд, полученный из ряда $\varphi_0(x)$ его почленным дифференцированием, мажорируется сходящимся числовым рядом. Следовательно, $\varphi_0(x)$ — отображение класса C^∞ . При этом, $\varphi_0(x_n) = y_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Кроме того, $\varphi_0^{(s)}(x_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, $s = 0, 1, 2, \dots$. Значит, $\varphi_0(x)$ — плоское в нуле отображение.

Будем искать решение уравнения (1) в виде $\varphi_0 + \psi$, где ψ — плоское в нуле C^∞ -отображение, равное нулю в точках $x_n = F^n x_0$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Для $\psi(x)$ получим неоднородное уравнение:

$$\psi(Fx) = Q(x)\psi(x) + \tau(x), \quad (6)$$

где $\tau(x) = -\varphi_0(Fx) + Q(x)\varphi_0(x)$ — плоское в нуле C^∞ -отображение, равное нулю в точках x_n , $n = 0, 1, 2, \dots$. Методами, аналогичными изложенным в [1], доказываются существование плоского в нуле локального C^∞ -решения ψ уравнения (6), равного нулю в точках $\{x_n\}$. Значит, отображение $\varphi = \varphi_0 + \psi$ — нетривиальное ($\varphi(x_n) = y_n \neq 0$) локальное C^∞ -решение уравнения (1), плоское в нуле.

Случай, когда $-1 < F'(0) < 0$, как и в негиперболической ситуации, сводится к предыдущему однократным итерированием уравнения (1).

Пусть теперь $Q(0) \neq 0$ — нильпотентная жорданова матрица. В уравнении (1) произведем допустимое преобразование $\varphi(x) = T(x)\tilde{\varphi}(x)$, где $T(x) = \text{diag}\{|x|^{p_1}, |x|^{p_2}, \dots, |x|^{p_m}\}$, $0 < |p_i| - p_i| < 1$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, m$. Подбором показателей p_i можно добиться того, чтобы $\tilde{Q}(0) = 0$. Тем самым ситуация сводится к ранее рассмотренной.

Доказательство теоремы 3. Пусть $F(x) = x + \alpha x^{k+1} + \dots$. Будем считать, для определенности, что $x \geq 0$, $\alpha < 0$. Заметим сначала, что в силу [2, с. 52], выполняются неравенства

$$C_1 n^{-\frac{1}{k}} \leq |F^n x| \leq C_2 n^{-\frac{1}{k}} \quad (7)$$

при некоторых $C_1, C_2 > 0$.

Предположим, что $m = 1$, k — нечетно, $0 < q < 1$. Зафиксируем какую-нибудь точку $x_0 > 0$. Положим $y_0 = 1$, $y_n = \sum_{i=0}^{n-1} Q(x_i)$, где $x_i = F^i x_0$. Как и при доказательстве теоремы 2, введем в рас-

смотрение функции (5) и положим $\varphi_0(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \xi_n(x)$. В силу

(7), а также неравенств $|y_n| \leq \tilde{q}^n$, $\tilde{q} < 1$, $(x_{n-1} - x_{n+1}) \geq C_3 n^{-\frac{k+1}{k}}$, $C_3 > 0$, функция $\varphi_0(x)$ принадлежит классу C^∞ , является плоской в нуле и удовлетворяет условиям $\varphi_0(x_n) = y_n$. Дальнейшие рассуждения в этом случае проводятся аналогично доказательству теоремы 2.

Случай $q > 1$ сводится к предыдущему умножением обеих частей уравнения (1) на $Q^{-1}(x)$, заменой $x \rightarrow F^{-1}x$ и рассмотрением левой полуокрестности нуля.

Доказательство раздела 1 теоремы 3 в случаях 2—4 проводится аналогично. При этом, если $q = 1$, используется оценка:

$$|y_n| \leq \exp\left(Cn^{1-\frac{1}{k}}\right).$$

Если матрица $Q(0)$ нильпотентна, доказательство теоремы 3 также проводится по схеме доказательства теоремы 2. В этом случае используется оценка: $\|y_n\| \leq C^n n^{-\frac{n}{k}}$.

Замечание. Из изложенного видно, что ограничение на функцию $\det Q(x)$ в формулировках теорем 2, 3 при доказательстве необходимости не используется.

Список литературы: 1. Кучко Л. П. Линейные функциональные уравнения от одной переменной.— Теория функций, функций. анализ и их прил.— 1986.— Вып. 46.— С. 24—25. 2. Полина Г., Сега Г. Задачи и теоремы из анализа.— М.: Наука.— 1978.— 391 с.

Поступила в редколлегию 03.05.85

УДК 517.535.4

Т. А. КОЛОМИЙЦЕВА

**ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ СУБГАРМОНИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ С ПРАВИЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ МАСС**

0. Пусть $f(z)$ — целая функция порядка ρ и вполне регулярного роста при уточненном порядке $\rho(r)$ [1, с. 47]. Тогда существует некоторое C^0 -множество, вне которого $\ln |f(z)|$ имеет определенную асимптотику, выраженную через индикатор роста функции $f(z)$.

В работе [2, с. 37] это исключительное множество было исчерпывающим образом охарактеризовано в терминах распределения нулей $f(z)$.

В настоящей работе эти результаты обобщаются на субгармонические функции в m -мерном ($m \geq 2$) пространстве R^m . Отметим, что нетривиальность такого обобщения связана прежде всего с тем,

что индикатор функции, субгармонической в R^m , при $m \geq 3$ уже не является ни ограниченным, ни непрерывным, и это влечет изменение основных формулировок по сравнению с работой [2] и приводит к необходимости совершенствования применяемого в ней метода.

Напомним основные определения и результаты.

Будем обозначать $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\dots$, $\vec{PQ}$ векторы из R^m . Если O — начало координат, то

$$r_Q = \|\vec{OQ}\|, \quad r_{PQ} = \|\vec{PQ}\|.$$

Если $u: R^m \rightarrow R$, то будем писать $u(Q)$, $u(\vec{p})$, $u(\vec{Rx})$, где $\|x\| = 1$, а $R \geq 0$.

Пусть $u(\vec{rx})$ — субгармоническая функция в R^m и $M(r, u)$ — ее максимум на сфере $S_r = \{\vec{rx}: \|\vec{x}\| = 1\}$.

Напомним, что функция $u(\vec{rx})$ имеет нормальный тип при уточненном порядке $\rho(r)$ (обозначение $u \in SH(\rho(r))$), ($\rho(r) \rightarrow \rho$ при $r \rightarrow \infty$), если величина

$$\sigma_u := \limsup_{r \rightarrow \infty} M(r, u) r^{-\rho(r)} \quad (0.1)$$

удовлетворяет условию $0 < \sigma_u < \infty$.

Величина

$$h(\vec{x}, u) := \overline{\lim}_{\vec{x}' \rightarrow \vec{x}} \{ \limsup_{r \rightarrow \infty} u(\vec{rx}') r^{-\rho(r)} \} \quad (0.2)$$

называется индикатором функции $u \in SH(\rho(r))$.

Если внешний $\overline{\lim}$ в (0.2) опущен, то получаем нерегуляризованный индикатор, который не превосходит индикатора и может быть строго меньше лишь на множестве $\gamma \in S_1$ таком, что конус

$$K_\gamma = \{\vec{rx}: \vec{x} \in \gamma, 0 < r < \infty\}$$

имеет нулевую емкость в R^m [3, с. 56].

Множество $C \subset R^m$ называется C_0 -множеством, если его можно покрыть объединением шаров вида $B(Q_i, \delta_i) = \{P: r_{PQ_i} \leq \delta_i\}$, для которых выполнено условие

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^{m-1}} \sum_{Q_i \in R} \delta_i^{m-1} = 0. \quad (0.3)$$

Функцию $u \in SH(\rho(r))$ будем называть функцией вполне регулярного роста ($u \in SH_{reg}$), если найдется C_0 -множество C такое, что для функции $h_u(r\vec{x}) := u(r\vec{x}) r^{-\rho(r)}$ соотношение

$$h_u(r\vec{x}) - h(\vec{x}, u) = o(1) \quad (0.4)$$

выполняется равномерно при $r\vec{x} \rightarrow \infty$ вне C_0 .*

Пусть $\mu(E)$ — распределение масс (мера), ассоциированное по Риссу с u .

Известно [3, с. 40], что условие $u \in SH_{reg}$ влечет слабую при $t \rightarrow \infty$ сходимость семейства мер μ_t вида $\mu_t(E) = \mu(tE) t^{-\rho(t)}$ к мере $\nu(E)$, которая ассоциирована с субгармонической функцией

$$\nu(r\vec{x}) = h(\vec{x}, u) r^\rho, \quad (0.5)$$

причем

$$\nu = \Delta_{\vec{x}} \times \{\rho r^{\rho-1} dr\}, \quad (0.6)$$

т. е. ν является произведением меры $\Delta_{\vec{x}}$, зависящей от $h(\vec{x}, u)$ и определенной на S_1 , на меру, заданную на положительном луче.

Пусть μ — распределение масс в R^m . Обозначим

$$\mu_{r\vec{x}}(t) = \mu(\{P : \|\vec{OP} - r\vec{x}\| < t\}). \quad (0.7)$$

Пусть $u \in SH_{reg}$, μ_u — ассоциированное распределение масс, $h(\vec{x}, u)$ — индикатор, $\nu(E)$ — распределение масс, ассоциированное с $v = r^\rho h(\vec{x}, u)$.

Определение. Ω -множеством функции u называется множество точек $r\vec{x}$, удовлетворяющих условиям: для произвольно малого $\varepsilon > 0$ найдутся $\delta > 0$ и $R = R(\varepsilon, \delta)$ такие, что если $r > R$, то выполняется неравенство

$$\left| \int_0^{\delta r} \frac{\mu_{r\vec{x}}(t)}{t^{m-1}} dt - r^{\rho(r)} \int_0^\delta \frac{\nu_x(\tau)}{\tau^{m-1}} d\tau \right| < \varepsilon r^{\rho(r)}. \quad (0.8)$$

Теорема 1. Пусть $u \in SH_{reg}$. Для того чтобы условие

$$h_u(r\vec{x}) - h(\vec{x}, u) = o(1) \quad (0.9)$$

выполнялось равномерно при $r\vec{x} \rightarrow \infty$ вне множества C , необходимо и достаточно, чтобы C было дополнением к Ω -множеству функции u .

* В. С. Азарин. О субгармонических во всем пространстве функциях вполне регулярного роста // Зап. мехматем. ф-та Харьк. ун-та и ХМО, XXVIII. — 1961. — Сер. 4. — С. 128—148.

Отметим, что в определении Ω -множества в [2] фигурировало лишь первое слагаемое.

Следующее утверждение объясняет это явление.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $m = 2$. Тогда $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ такое, что

$$\int_0^\delta \frac{\vec{v}_x(\tau)}{\tau^{m-1}} d\tau < \varepsilon. \quad (0.10)$$

При $m \geq 3$ для любого $\rho(r)$ найдется $u \in SH(\rho(r))$ такая, что (0.10) не выполняется для счетного всюду плотного множества значений $\vec{x} \in S_1$.

Отметим, что в [4] изучались специальные классы субгармонических функций в R^m , для которых выполнено условие, подобное (0.10).

1. Здесь приведем доказательство теоремы 1 и предложения 2, воспользовавшись следующими леммами.

Лемма 3. Пусть $u \in SH(\rho(r))$, $C = C_0$ — множество и $S(Q, \delta) = \{P: \|\vec{PQ}\| = \delta r\}$ — сфера с центром в точке Q , $\vec{r}$ — радиус-вектор точки Q . Тогда

$$\frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta) \cap C} |u(p)| d\sigma_p = o(r^{\rho(r)}) \quad (1.1)$$

при $r \rightarrow \infty$.

Лемма 4. Пусть $u \in SH_{reg}$ и $h(\vec{x}, u)$ — ее индикатор. Тогда при $\delta < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \left[\int_{S(Q, \delta)} u(p) d\sigma_p - r^{\rho(r)+m-1} \int_{S(\vec{x}_Q, \delta)} h(\vec{x}_p) r_p^\rho d\sigma_p \right] = \\ = o(r^{\rho(r)}) \end{aligned} \quad (1.2)$$

при $r \rightarrow \infty$, где $\vec{x}_Q = \frac{\vec{OQ}}{r}$.

Эти леммы будут доказаны в §§ 2, 3.

Доказательство теоремы 1. Достаточность.

Пусть $\varepsilon > 0$ и найдены $\delta, R(\delta, \varepsilon)$. Пусть $\vec{rx} \in \Omega$ и $r > R(\delta, \varepsilon)$ такое, что выполняется условие (0.8).

Воспользовавшись формулой Иенсена

$$\frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta)} u(p) d\sigma_p - u(Q) = \int_0^{\delta r} \frac{\mu_{rx}(t)}{t^{m-1}} dt, \quad (1.3)$$

где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки Q ; $\vec{x} = \frac{\vec{r}}{r}$, представим разность (0.9) в виде

$$u(\vec{r}\vec{x})r^{-\rho(r)} - h(\vec{x}, u) = \left[\frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta)} u(p) d\sigma_p - \int_0^{\delta r} \frac{\mu_{\vec{r}\vec{x}}(t)}{t^{m-1}} dt \right] r^{-\rho(r)} - \left[\frac{1}{\text{mes } S(\vec{x}_Q, \delta)} \int_{S(\vec{x}_Q, \delta)} h(\vec{x}_p) \times \right. \\ \left. \times r_p^\rho d\sigma_p - \int_0^\delta \frac{\nu_{\vec{x}}(\tau)}{\tau^{m-1}} d\tau \right].$$

Перепишем это представление в форме

$$u(\vec{r}\vec{x})r^{-\rho(r)} - h(\vec{x}, u) = \left[\frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta)} u(p) d\sigma_p - \frac{1}{\text{mes } S(\vec{x}_Q, \delta)} \int_{S(\vec{x}_Q, \delta)} h(\vec{x}_p) r_p^\rho r^{\rho(r)} d\sigma_p \right] r^{-\rho(r)} - \\ - \left[\int_0^{\delta r} \frac{\mu_{\vec{r}\vec{x}}(t)}{t^{m-1}} dt - r^{\rho(r)} \int_0^\delta \frac{\nu_{\vec{x}}(\tau)}{\tau^{m-1}} d\tau \right] r^{-\rho(r)}. \quad (1.4)$$

Выбираем $R_1(\delta, \varepsilon) > R(\delta, \varepsilon)$ так, чтобы первое слагаемое в (1.4) было меньше ε .

По лемме 4 это возможно.

Так как, кроме того, по условию $\forall \varepsilon, \exists \delta$ и $R = R(\delta, \varepsilon)$ такие, что при $r > R$ выполняется (0.8), тогда при $r > R_1$ будет выполняться (0.9), что требовалось доказать.

Необходимость. Пусть для точек $Q(\vec{r}_Q = \vec{r})$, принадлежащих некоторому Ω -множеству, при $\forall \varepsilon > 0$ и $r > R = R(\varepsilon)$ выполняется соотношение $|u(\vec{r}\vec{x})r^{-\rho(r)} - h(\vec{x}, u)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Найдем по лемме 4 такое $R_1 = R_1(\varepsilon, \delta) > R(\varepsilon)$, чтобы первое слагаемое в (1.4) было меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, тогда из (1.4) получаем

$$\left| \int_0^{\delta r} \frac{\mu_{\vec{r}\vec{x}}(t)}{t^{m-1}} dt - r^{\rho(r)} \int_0^\delta \frac{\nu_{\vec{x}}(\tau)}{\tau^{m-1}} d\tau \right| r^{-\rho(r)} \leq \\ \leq \frac{\varepsilon}{2} + |u(\vec{r}\vec{x})r^{-\rho(r)} - h(\vec{x}, u)| \leq \varepsilon.$$

То есть Q удовлетворяет условию (0.8). Значит, $Q \in \Omega$ -множеству, что требовалось доказать.

Доказательство предложения 2. Запишем формулу Иенсена (1.3) при $m=2$ для субгармонической функции: $v(z) = h(e^{i\varphi}, u)r^2$, где $z = re^{i\varphi}$.

Пусть точка $z_0 = e^{i\varphi_0} \in S_1$ и является центром окружности $S(z_0, \delta)$ радиуса δ , тогда согласно формуле Иенсена получаем

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(e^{i\varphi}, u) r^2 d\varphi - h(e^{i\varphi_0}, u) = \int_0^\delta \frac{v_\varphi(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (1.5)$$

где $v_\varphi(\tau)$ — мера, ассоциированная с субгармонической функцией $v(z)$.

В силу непрерывности индикатора $h(e^{i\varphi}, u)$ при $m=2$ можно при достаточно малом $\varepsilon > 0$ указать такое $\delta > 0$, что будет справедливо соотношение

$$h(e^{i\varphi}, u) r^2 < h(e^{i\varphi_0}, u) + \varepsilon, \quad (1.6)$$

когда $|z - z_0| < \delta$.

Подставляя оценку (1.6) в (1.5), находим

$$\int_0^\delta \frac{v_\varphi(\tau)}{\tau} d\tau < \varepsilon.$$

Пусть $m \geq 3$. Рассмотрим меру v , определенную равенством (0,6), в котором $\Delta_{\vec{x}}$ — дискретное распределение масс на S_1 , сосредоточенное на счетном, всюду плотном множестве $\Phi \subset S_1$.

Для каждой точки $\vec{x} \in \Phi$ имеем

$$v_{\vec{x}}(\tau) \geq v(\{\vec{x}\}) > 0.$$

Поэтому интеграл в (0.10) расходится при любом δ и, значит, неравенство (0.10) выполняться не может.

2. Доказательство леммы 3 основано на следующих леммах.

Лемма 3.0. Пусть $H(p)$ — гармоническая функция в шаре $K(O, 2R)$ радиуса $2R$, $\max_{p \in K(O, 2R)} H(p) \leq M$, $H(O) = 0$. Тогда

$\max_{p \in K(O, R)} |H(p)| \leq AM$, где A — абсолютная постоянная.

Утверждение следует из формулы Пуассона.

Лемма 3.1. Пусть $H(p)$ — наилучшая гармоническая мажоранта субгармонической функции $u(p)$ в шаре $K(O, 2r)$, тогда имеет место соотношение $\frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta) \cap C} |H(p)| d\sigma_p = o(r^{\rho(r)})$, где

$S(Q, \delta)$ — сфера в центре в точке Q , радиуса δr ; $\vec{r}$ — радиус-вектор точки Q , $(0 < \delta < \frac{1}{2})$, $C = C_0$ — множество.

Лемма непосредственно следует из леммы 3.0 и определения C_0 -множества.

Лемма 3.2. Пусть α — произвольная гиперплоскость, проходящая через точку P , лежащую внутри сферы S радиуса R .

Обозначим через L_α проекцию точки $L \in S$ на гиперплоскость α .

Верно следующее неравенство:

$$\int_{S \cap M} \frac{d\sigma_L}{r_{PL}^{m-2}} \leq A_1(m) \max_{\alpha} \int_{M_\alpha} \frac{d\sigma_{L_\alpha}}{r_{PL_\alpha}^{m-2}},$$

при $m \geq 3$, где M_α — проекция множества $M \in S$ на гиперплоскость α ; $A_1(m)$ — постоянная, зависящая лишь от размерности пространства.

При доказательстве воспользуемся возможностью разбиения M на части: M_i ($M = \bigcup_{i=1}^k M_i$, $M_i \cap M_j = \emptyset$ при $i \neq j$) так, чтобы выполнялось неравенство

$$d\sigma_{L_i} < A_1(m) d\sigma_{L_{\alpha_i}}, \quad (2.1)$$

где $L_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$; M_{α_i} — проекция M_i на гиперплоскость α_i , проходящую через точку P .

При $m \geq 3$ из неравенств $r_{PL} \geq r_{PL_{\alpha}}$ и (2.1) следует

$$\int_{S \cap M} \frac{d\sigma_L}{r_{PL}^{m-2}} \leq A_1(m) \sum_{i=1}^k \int_{M_{\alpha_i}} \frac{d\sigma_{L_{\alpha_i}}}{r_{PL_{\alpha_i}}^{m-2}} \leq A_1(m) \max_{\alpha} \int_{M_\alpha} \frac{d\sigma_{L_\alpha}}{r_{PL_\alpha}^{m-2}}.$$

Лемма 3.3. В обозначениях леммы 3.2 имеет место соотношение

$$\int_{M_\alpha} \frac{d\sigma_{L_\alpha}}{r_{PL_\alpha}^{m-2}} \leq \int_{K_R(M_\alpha)} \frac{d\sigma_{L_\alpha}}{r_{PL_\alpha}^{m-2}} = [S(M_\alpha)]^{\frac{1}{m-1}} \text{ при } m \geq 3,$$

где $K_R(M_\alpha)$ — круг в гиперплоскости α , площадь которого равна площади M_α .

Доказательство леммы 3.3 основано на следующем утверждении (см., например, [5; 6, с. 56]).

Пусть Q — множество, лежащее внутри шара K_R , $\text{mes } Q = s$, $E_{R(S)}$ — шар с центром в начале координат, такой, что $\text{mes } E_{R(S)} = s$, $\lambda(t)$, $t \in (0, R)$ — невозрастающая функция на $(0, R)$ (допускается $\lambda(0) = \infty$).

Тогда $\int_Q \lambda(|x|) dV_x = \int_{E_{R(S)}} \lambda(|x|) dV_x$, где dV_x — элемент объема.

В нашем случае при $m \geq 3$ $\lambda(t) = \frac{1}{t^{m-2}}$; $Q = M_\alpha$, $E_{R(S)} = K_R(M_\alpha)$.

$$\text{Следовательно, } \int_{M_\alpha} \frac{d\sigma_L}{r_{PL_\alpha}^{m-2}} \leq \int_{K_{R(M_\alpha)}} \frac{d\sigma_L}{r_{PL_\alpha}^{m-2}} = B(m) \int_0^{R(M_\alpha)} \frac{r^{m-2}}{r^{m-2}} dr =$$

$= B(m) R(M_\alpha) = [S(M_\alpha)]^{\frac{1}{m-1}}$ при $m \geq 3$, где $B(m)$ — площадь сферы размерности $m-2$.

Лемма 3.4. Пусть $G(p, L)$ — функция Грина шара K_{2r} с центром в начале координат, радиуса $2r$ и $p \in K_{\frac{3}{2}r}$, $S(Q, \delta)$ — сфера с центром в точке Q радиуса δr , $\vec{r}$ — радиус-вектор точки Q , $(0 < \delta < \frac{1}{2})$.

Тогда $\int_{S(Q, \delta) \cap C} G(p, L) d\sigma_L = o(r)$, где $C = C_0$ — множество.

Известно, что [5] $G_{2r}(x, y) \leq C(m) |x - y|^{2-m}$, следовательно,

$$\int_{S(Q, \delta) \cap C} G(p, L) d\sigma_L \leq C(m) \int_{S(Q, \delta) \cap C} \frac{d\sigma_L}{r_{PL}^{m-2}}.$$

Используя леммы 3.2 и 3.3, получаем $\int_{S(Q, \delta) \cap C} G(p, L) d\sigma_L \leq C(m) A_1 \max_{\alpha} [S(M_\alpha)]^{\frac{1}{m-1}} = o[(r^{m-1})^{\frac{1}{m-1}}] = o(r)$.

Доказательство леммы 3. Докажем справедливость соотношения (1.1): $\frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta) \cap C} |u(p)| d\sigma_p = o(r^{\rho(r)})$.

Запишем для функции $u(\vec{r})$ представление Рисса в шаре $K(2r)$ с центром в начале координат, радиуса $2r$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки Q : $u(p) = H(p) - \int_{K(2r)} G(p, L) d\mu_L \Rightarrow |u(p)| \leq |H(p)| + \int_{K(2r)} G(p, L) d\mu_L$ (2.2), где $H(p)$ — наилучшая гармоническая мажоранта функции $u(\vec{r})$.

Интегрируя (2.2) по множеству $S(Q, \delta) \cap C$, получаем $\int_{S(Q, \delta) \cap C} |u(p)| d\sigma_p \leq \int_{S(Q, \delta) \cap C} |H(p)| d\sigma_p + \int_{S(Q, \delta) \cap C} \left(\int_{K(2r)} G(p, L) \times d\mu_L \right) d\sigma_p$.

Так как функция Грина измерима по Борелю, то, согласно теореме Фубини [8, с. 116], можно изменить порядок интегрирования во втором слагаемом:

$$\int_{S(Q, \delta) \cap C} |u(p)| d\sigma_p \leq \int_{S(Q, \delta) \cap C} |H(p)| d\sigma_p + \int_{K(2r)} \left(\int_{S(Q, \delta) \cap C} G(p, L) \times \right. \\ \left. \times d\sigma_p \right) d\mu_L.$$

Используя леммы 3.1 и 3.4, получаем $\int_{S(Q, \delta) \cap C} |u(p)| d\sigma_p \leq o(r^{\rho(r)}) \text{mes } S(Q, \delta) + o(r) \mu_u(2r)$, где $\mu_u(2r)$ — масса Рисса функции $u(\vec{rx})$, распределенная в шаре $K(2r)$.

Так как $u(\vec{rx})$ — субгармоническая функция нормального типа при уточненном порядке $\rho(r)$, то для $\mu_u(2r)$ имеет место оценка $\mu_u(2r) \leq C(2r)^{\rho(2r)+m-2}$, где $C = \text{const}$.

Подставляя эту оценку в предыдущее соотношение, получаем

$$\int_{S(Q, \delta) \cap C} |u(p)| d\sigma_p \leq o(r^{\rho(r)}) \text{mes } S(Q, \delta) + o(r) C(2r)^{\rho(2r)+m-2} \Rightarrow \\ \frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta) \cap C} |u(p)| d\sigma_p = o(r^{\rho(r)}).$$

3. Доказательство леммы 4 основано на следующих леммах.

Лемма 4.1. Для r_p , удовлетворяющих условию $(1-\delta)r < r_p < (1+\delta)r$, верно соотношение $r_p^{\rho(r_p)} = r_p^{\rho}(1+o(1))L(r)$ при $r \rightarrow \infty$, где $L(r)$ — медленно меняющаяся функция.

Лемма 4.2. Если $u(\vec{rx})$ — субгармоническая функция вполне регулярного роста, а $h(\vec{x}, u)$ — ее индикатор, то справедливо соотношение

$$\frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta) \cap C} h(\vec{x}_p) r_p^{\rho} d\sigma_p = o(r^{\rho}). \quad (3.1)$$

Так как $v(\vec{rx}) = h(\vec{x}, u) r^{\rho}$ — субгармоническая функция уточненного порядка $\rho(r) = \rho$, то, применяя к ней лемму 3, убеждаемся в справедливости соотношения (3.1).

Доказательство леммы 4. Докажем справедливость соотношения (1.2).

Представим первое слагаемое левой части (1.2) в виде

$$\frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta)} u(p) d\sigma_p = \frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta) \cap C} u(p) d\sigma_p + \\ + \frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta) \setminus C} u(p) d\sigma_p \stackrel{\text{def}}{=} I_1(Q) + I_2(Q). \quad (3.2)$$

По лемме 3

$$I_1(Q) = o(r^{\rho(r)}). \quad (3.3)$$

Так как $u(p)$ — субгармоническая функция вполне регулярного роста, то для нее справедливо соотношение

$$u(p) = [h(\vec{x}_p) + o(1)] r_p^{\rho(r_p)}, \quad (3.4)$$

где $p \in C_0$ -множеству.

Используя (3.4), представим интеграл $I_2(Q)$ в виде

$$I_2(Q) = \frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta) \setminus C} [h(\vec{x}_p) + o(1)] r_p^{\rho(r_p)} d\sigma_p. \quad (3.5)$$

По лемме 4.1,

$$r_p^{\rho(r_p)} = r_p^\rho [1 + o(1)] L(r) \text{ при } r \rightarrow \infty.$$

Подставляя в правую часть (3.5), получаем

$$I_2(Q) = \frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(Q, \delta) \setminus C} h(\vec{x}_p) r_p^\rho L(r) [1 + o(1)] d\sigma_p + o(r^{\rho(r)}). \quad (3.6)$$

Запишем соотношение

$$\begin{aligned} \int_{S(Q, \delta) \setminus C} h(\vec{x}_p) r_p^\rho d\sigma_p &= \int_{S(Q, \delta)} h(\vec{x}_p) r_p^\rho d\sigma_p - \\ &- \int_{S(Q, \delta) \cap C} h(\vec{x}_p) r_p^\rho d\sigma_p. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Используя оценку (3.1) леммы 4.2 из (3.7), получаем

$$\int_{S(Q, \delta) \setminus C} h(\vec{x}_p) r_p^\rho d\sigma_p = \int_{S(Q, \delta)} h(\vec{x}_p) r_p^\rho d\sigma_p - o(r^\rho). \quad (3.8)$$

Далее делаем в интеграле

$$\int_{S(Q, \delta)} h(\vec{x}_p) r_p^\rho d\sigma_p \quad (3.9)$$

замену переменной $\vec{\tau}_{x_p} = \frac{\vec{x}_p r_p}{r}$. При этом $S(Q, \delta)$ переходит в сферу $S(\vec{x}_Q, \delta)$ с центром в $\vec{x}_Q \in S_1$ радиуса δ , а интеграл (3.9) — в интеграл вида

$$\int_{S(\vec{x}_Q, \delta)} h(\vec{x}_p) \tau^\rho r^{m-1} r^\rho d\sigma_p. \quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.8) и последнее затем — в (3.6), получаем

$$I_2(Q) = \frac{1}{\text{mes } S(Q, \delta)} \int_{S(\vec{x}_Q, \delta)} h(\vec{x}_p) \tau^\rho r^{m-1} r^\rho L(r) [1 + o(1)] d\sigma_p + o(r^{\rho(r)}).$$

Возвращаясь к старым обозначениям (но интегрирование идет уже по $S(\vec{x}_Q, \delta)$) и выполняя некоторые преобразования, получаем

$$I_2(Q) = \frac{r^{m-1}}{\text{mes } S(Q, \delta)} r^{\rho(r)} \int_{S(\vec{x}_Q, \delta)} h(\vec{x}_p) r_p^\rho d\sigma_p + o(r^{\rho(r)}). \quad (3.11)$$

Подставляя в (3.2) значения $I_1(Q)$ и $I_2(Q)$ из (3.3) и (3.11), получаем (1.2). Лемма доказана.

Список литературы: 1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: Гостехтеоретиздат, 1956. — 632 с. 2. Коломийцева Т. А. Об асимптотическом поведении целой функции с правильным распределением корней // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1972. — № 15. — С. 35—43. 3. Аварин В. С. Теория роста субгармонических функций. — Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1982. — 73 с. 4. Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В. Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Мат. записки. — 1983. — 34, вып. 2. — С. 227—236. 5. Агранович П. З. О функциях вполне регулярного роста многих переменных // Теория функций, функцион. анализ и их прил. — 1978. — № 30. — 6 с. 6. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970. — 591 с. 7. Ландкоф Н. С. Основы современной теории потенциалов. — М.: Наука, 1966. — 515 с. 8. Хейман У., Кеннеди П. Субгармонические функции — М.: Мир, 1980. — 304 с.

Поступила в редакцию 03.05.85

УДК 517.925.71

В. Р. СМЛЯНСКИЙ

О МНОЖИТЕЛЯХ СТОКСА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО РАНГА

Пусть задана система из n уравнений ($\bar{w}$ -вектор):

$$\frac{d\bar{w}}{dz} = \left(A_0 + \frac{A_1}{z} \right) \bar{w}, \quad A_0 = \text{diag} \{ \lambda_1, \dots, \lambda_n \}, \quad (1)$$

для которой все постоянные λ_k ($k = \overline{1, n}$) различны и ни один из диагональных элементов $[A_1]_{kk} \equiv r_k$ постоянной матрицы A_1 не равен целому числу. Точка $z = \infty$ является иррегулярной особой точкой (первого ранга) системы (1). Точка $z = 0$ — регулярная особая точка системы и, следовательно, ее фундаментальная матрица (ф. м.) может быть представлена в виде $\Psi(z) = U(z) z^J$, где матрица $U(z)$ голоморфна при $z = 0$, а J — жорданова форма некоторой постоянной матрицы Δ . Формальная матрица — решение системы (1) имеет вид

$$\hat{\Phi}(z) = P(z) z^R e^{A_0 z}, \quad P(z) = \sum_{v=0}^{\infty} P_v z^{-v}, \quad (1a)$$

$$\det P_0 \neq 0, \quad R = \text{diag} \{r_1, \dots, r_n\},$$

где P_v — постоянные матрицы. Введем линии («линии Стокса») в комплексной плоскости z , определяемые условием

$$\text{Re } \lambda_{l_1} z = \text{Re } \lambda_{l_2} z = \dots = \text{Re } \lambda_{l_k} z \quad (2 \leq k \leq n). \quad (1b)$$

Возьмем какую-либо линию (1b) в качестве исходной — l_1 и последовательно (против часовой стрелки) обозначим остальные через $l_2, l_3, \dots$. В секторе $l_1 \leq \arg z < l_1 + \pi$ любая пара выражений $\text{Re } \lambda_{\alpha} z, \text{Re } \lambda_{\beta} z$ ($\alpha \neq \beta$) становится равной только на одной линии l_v . Любопытный сектор в z -плоскости, полуоткрытый или открытый, обладающий указанным свойством, будем называть стандартным сектором (С. С.) (см. [1, с. 98]), а число линий (1b) в С. С. обозначим через L . Если матрица P_0 в выражениях (1a) и нумерация характеристических корней $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ зафиксированы (это и будет предполагаться ниже), то в любом С. С. существует единственная ф. м., для которой формальное решение (1a) является асимптотическим представлением при больших $|z|$ (см. [1—3, теорема 1.1]). Ф. м., имеющую асимптотическое представление (1a) в каком-либо секторе, будем называть асимптотически базисной в этом секторе.

Пусть ф. м. $\Phi_{(v-1)L+1}(z)$ ($v = 1, 2, 3$) асимптотически базисны соответственно в С. С.:

$$l_2 - \pi + (v-1)\pi \leq \arg z < l_2 + (v-1)\pi, \quad v = 1, 2, 3$$

$$(l_2 + \pi \equiv l_{L+2}; \quad l_2 + 2\pi \equiv l_{2L+2}) \quad (1b)$$

и пусть нумерация $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ выбрана из условия $\text{Re } \lambda_j z < \text{Re } \lambda_{j+1} z$ в секторе $l_1 < \arg z < l_2$. В этом случае $\Phi_1(z) = \Phi_{L+1}(z) F_1$, $\Phi_{L+1}(z) = \Phi_{2L+1}(z) F_2$, где F_1 — постоянная верхняя треугольная матрица с единичными элементами на главной диагонали, а F_2 — постоянная нижняя треугольная матрица с единичными элементами на главной диагонали. Нетривиальные элементы матриц F_1, F_2 выражаются через множители Стокса, и если $k = n$ в (1b), то совпадают с ними. Как известно, $\Psi(z) = \Phi_1(z) T_1$, где T_1 — постоянная неособая матрица («матрица связи»). Для определения матриц связи системы (1) в полной окрестности $z = \infty$ достаточно знать T_1 [4, § 1]. С другой стороны, существуют соотношения

$$1) \quad \Phi_1(z e^{i2\pi}) = \Phi_1(z) Y,$$

где $i = \sqrt{-1}$, а Y — постоянная неособая («циклическая») матрица; 2) $Y = T_1 e^{i2\pi R} T_1^{-1}$ [4, § 1]; 3) $F_2 F_1 = e^{-i2\pi R} Y$ [1, теоремы 1.2, 1.7]. По известным матрицам Y и R матрицы F_1, F_2 могут быть

однозначно определены по теореме о разложении матрицы в произведение треугольных матриц.

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы для системы (1) найти либо T_1 (наиболее общий случай), либо только Y (не находя явно T_1).

Вектор-решение $\bar{y}_k(z)$ системы (1) в виде контурных интегралов Лапласа имеет вид

$$\bar{y}_k(z) = e^{\lambda_k z} \int_{\Sigma_k} e^{z(\xi - \lambda_k)} \bar{v}_k(\xi) d\xi, \quad k = \overline{1, n}, \quad (2)$$

где $\bar{v}_k(\xi)$ — подходящим образом выбранный вектор-решение следующей системы из n уравнений:

$$(A_0 - \xi E) \frac{d\bar{v}}{d\xi} = (A_1 + E) \bar{v} \quad (3)$$

(E — единичная матрица; $\bar{v}$ — вектор), а Σ_k — подходящим образом выбранный контур интегрирования. Система (3) имеет только регулярные особые точки $\xi = \lambda_1, \dots, \lambda_n$ и $\xi = \infty$. Показатели, относящиеся к $\xi = \lambda_k$ ($k = \overline{1, n}$), равны нулю, за исключением одного, равного $-(r_k + 1)$. Вектора-решения, соответствующие нулевым показателям, голоморфны в $\xi = \lambda_k$. Обозначим через X_k ($k = \overline{1, n}$) ф. м. системы (3), у которой первый столбец есть не голоморфное в $\xi = \lambda_k$ решение $\bar{v}_k(\xi)$ (соответствующее показателю $-(r_k + 1)$), а остальные $(n - 1)$ столбцов — голоморфные в $\xi = \lambda_k$ решения. Вектор $\bar{v}_k(\xi) = \bar{v}'_k(\xi) (\xi - \lambda_k)^{-(r_k + 1)}$, где вектор $\bar{v}'_k(\xi)$ голоморфен в $\xi = \lambda_k$. Именно вектор $\bar{v}_k(\xi)$ подразумевается везде ниже в (2). Обозначим через X_∞ каноническую (типа $\Psi(z)$) ф. м. системы (3) при $\xi = \infty$. Матрицы T_1 и Y явно выражены через постоянные матрицы, связывающие ф. м. X_k, X_∞ .

Интегралы (2) и решения системы (3) уже применялись для анализа системы (1) [5]. По мнению автора, метод, развитый в настоящей статье, более удобен для практического нахождения матрицы связи T_1 и множителей Стокса (МС). Например, этим методом найдены в явном виде T_1 и МС для скалярного уравнения n -го порядка с линейными коэффициентами («уравнения Лапласа»)*, зависящего от $2n$ параметров [4, § 2].

Проведем в ξ -плоскости из точки λ_k полубесконечный луч f_k так, чтобы он не встречал на своем пути других особых точек λ_j ($j \neq k$). Пусть контур Σ_k представляет собой петлю, идущую из бесконечности вдоль этого луча, обходящую точку $\xi = \lambda_k$ в положительном направлении (против часовой стрелки) и возвращающуюся к бесконечности вдоль этого же луча. Как известно [6, 7], если на указанном луче выполнено условие $\operatorname{Re} z (\xi - \lambda_k) < 0$, то (2) является решением системы (1), причем решением,

* МС в [4] найдены также и другим методом.

для которого соответствующий столбец матрицы $\hat{\Phi}(z)$ является асимптотическим представлением. Обозначим аргумент левой стороны луча f_k (если смотреть из точки λ_k), т. е. линии, вдоль которой контур интегрирования идет из бесконечности к точке λ_k , через ω . На левой стороне луча f_k задаем $\arg(\xi - \lambda_k) = \omega$. (Ниже многозначные функции $(\xi - \lambda_k)^{-r_k+1}$ рассматриваются на римановой поверхности, причем левая сторона луча f_k здесь — место склейки левого берега разреза нижнего листа $(\xi - \lambda_k)$ с правым берегом верхнего листа). Условие на луче $\operatorname{Re} z(\xi - \lambda_k) < 0$ будем записывать в виде

$$\pi/2 < \arg z + \omega < 3\pi/2. \quad (4)$$

Если ω задано, то (4) однозначно определяет область $\arg z$, где (2) асимптотически базисно. В определенных пределах ($\omega_{k, \min} < \omega < \omega_{k, \max}$) луч f_k можно поворачивать так, чтобы он не пересекал других особых точек λ_j . Если при этом на луче постоянно выполнено (4), то такие решения являются аналитическими продолжениями исходного. Если под (2) понимать именно такое решение, то область асимптотической базисности (2) больше, чем $\pi \left(\frac{\pi}{2} - \omega_{k, \max} < \arg z < \frac{3}{2} \pi - \omega_{k, \min} \right)$. Пусть все лучи f_k ($k = \overline{1, n}$) параллельны и не пересекают других особых точек λ_j ($j \neq k$). Тогда совокупность векторов $\bar{y}_k(z)$ ($k = \overline{1, n}$) в (2) составляет ф. м., асимптотически базисную в общем секторе, большем, чем π , т. е. асимптотически базисную в стандартном секторе.

Введенную выше исключительную ф. м. $\Phi_1(z)$ будем считать составленной из векторов-столбцов $\bar{y}_k(z)$. Полагаем далее, что нумерация λ_k произведена «геометрическим» способом, указанным в теореме 2.1 [4]. Кроме того, для определенности будем считать, что лучи f_k перпендикулярны оси проектирования [4]. Введем в ξ -плоскости контур Ω_n . Он представляет собой петлю, идущую из бесконечности вдоль луча (параллельного лучам f_k и выходящего из точки $\xi = 0$), обходящую против часовой стрелки точки $\xi = 0$ по окружности такой, это все точки λ_k ($k = \overline{1, n}$) лежат внутри ее, и возвращающуюся к бесконечности вдоль этого же луча [4, рис. 2]. В окрестности $\xi = \infty$ ф. м. $X_\infty(\xi)$ имеет вид

$$X_\infty(\xi) = \left(\sum_{v=0}^{\infty} X_{\infty v} \xi^{-v} \right) \left(\frac{1}{\xi} \right)^Q, \quad (5)$$

где $X_{\infty v}$ — постоянные матрицы; Q — жорданова форма некоторой постоянной матрицы. Для выражения (5) задаем на левой стороне луча контура Ω_n : $\arg \xi = \omega$.

Предложение 1. Пусть контур Ω_n расположен в той области ξ -плоскости, где справедливо разложение (5). Пусть в точке

$\xi = \infty$ нет голоморфных векторов-решений системы (3). Тогда

$$\int_{\Omega_n} X_{\infty}(\xi) e^{z\xi} d\xi = \Psi(z). \quad (6)$$

Доказательство разделяется на два случая. 1. Пусть какой-либо вектор-столбец $\bar{x}_{\infty}(\xi)$ в выражении (5) имеет вид ($\bar{x}_{\infty v}$ — постоянные векторы)

$$\bar{x}_{\infty}(\xi) = \sum_{v=0}^{\infty} x_{\infty v} \xi^{-v-q}, \quad (7)$$

где q — соответствующий элемент матрицы Q . Тогда

$$\int_{\Omega_n} \bar{x}_{\infty}(\xi) e^{z\xi} d\xi = \sum_{v=0}^{\infty} \bar{x}_{\infty v} \int_{\Omega_n} \xi^{-v-q} e^{z\xi} d\xi. \quad (8)$$

Замена $z\xi = t$ преобразует правую сторону равенства (8) в

$$z^{q-1} \sum_{v=0}^{\infty} z^v \bar{x}_{\infty v} \int_{\Omega'_n} e^t t^{-v-q} dt, \quad (9)$$

где контур интегрирования Ω'_n в t -плоскости подобен контуру Ω_n в ξ -плоскости. Очевидно, что (9) является одним из канонических векторов-решений системы (1) в окрестности $z = 0$, т. е. является столбцом матрицы $\Psi(z)$. 2. Пусть какой-либо вектор-столбец $\bar{x}_{\infty}(\xi)$ в выражении (5) имеет вид

$$\bar{x}_{\infty}(\xi) = \left(\frac{1}{\xi}\right)^q \sum_{k=0}^l \bar{u}_k \left(\frac{1}{\xi}\right) \ln^k \left(\frac{1}{\xi}\right), \quad (10)$$

где векторы $\bar{u}_k \left(\frac{1}{\xi}\right)$ голоморфны в $\xi = \infty$ и

$$\bar{u}_k \left(\frac{1}{\xi}\right) = \sum_{v=0}^{\infty} \bar{u}_{kv} \xi^{-v} \quad (11)$$

($\bar{u}_{kv}$ — постоянные векторы). Тогда

$$\int_{\Omega_n} \bar{x}_{\infty}(\xi) e^{z\xi} d\xi = \int_{\Omega_n} \left(\frac{1}{\xi}\right)^q \left[\sum_{k=0}^l \bar{u}_k \left(\frac{1}{\xi}\right) \ln^k \left(\frac{1}{\xi}\right) \right] e^{z\xi} d\xi. \quad (12)$$

Производя после замены $z\xi = t$ несложные преобразования, получаем правую сторону равенства (12) в виде

$$z^{q-1} \int_{\Omega'_n} t^{-q} \left[\sum_{k=0}^l \bar{u}_k \left(\frac{z}{t}\right) \sum_{m=0}^k C_k^m (\ln z)^m (-\ln t)^{k-m} \right] e^t dt, \quad (13)$$

где C_k^m — число сочетаний из k по m и $C_0^0 \equiv 1$. Далее последовательно получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^l \bar{u}_k \left(\frac{z}{t} \right) \sum_{m=0}^k C_k^m (\ln z)^m (-\ln t)^{k-m} = \\ &= \sum_{m=0}^l (\ln z)^m \left(\sum_{k=m}^l \bar{u}_k \left(\frac{z}{t} \right) C_k^m (-\ln t)^{k-m} \right) = \\ &= \sum_{m=0}^l (\ln z)^m \left(\sum_{k=m}^l \sum_{v=0}^{\infty} \bar{u}_{kv} z^v t^{-v} C_k^m (-\ln t)^{k-m} \right) = \\ &= \sum_{m=0}^l (\ln z)^m \left(\sum_{v=0}^{\infty} z^v t^{-v} \left[\sum_{k=m}^l \bar{u}_{kv} C_k^m (-\ln t)^{k-m} \right] \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя последнее выражение из (14) в (13), получаем (13) в виде

$$\begin{aligned} & z^{q-1} \sum_{m=0}^l \varphi_m(z) (\ln z)^m; \\ \varphi_m(z) &= \sum_{v=0}^{\infty} z^{-v} \int_{\Omega'_n} t^{-v-q} \left[\sum_{k=m}^l \bar{u}_{kv} C_k^m (-\ln t)^{k-m} \right] e' dt. \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что (15) является одним из канонических решений системы (1) в окрестности $z = 0$, т. е. является столбцом матрицы $\Psi(z)$.

Замечание 1. Из доказательства предложения 1 видно, что показатели при $z = 0$ системы (1) $\rho = q - 1$. Пусть часть линейно независимых векторов-решений системы (3) голоморфна в $\xi = \infty$. Замена $\bar{w} = z^g E \bar{w}'$ в (1) (g — скалярный параметр) приводит к системе

$$\frac{d\bar{w}'}{dz} = \left[A_0 + \frac{A_1 - gE}{z} \right] \bar{w}'. \quad (16)$$

Очевидно, что всегда можно подобрать g так, чтобы соответствующая (3) система (16) не имела голоморфных решений в $\xi = \infty$.

Замечание 2. Далее под ф. м. $\Psi(z)$ будет пониматься ф. м., определяемая (6), а под ф. м. $\Phi_1(z)$ — определенная выше ф. м. $\Phi_1(z)$, составленная из векторов-столбцов $\bar{y}_k(z)$. Именно для этих ф. м. рассматриваются матрицы T_1 и Y .

Пусть $X_{\infty} = X_k H_k$ ($k = \overline{1, n}$), где H_k — постоянная неособая матрица и аналитическое продолжение X_{∞} от ∞ к λ_k проведено вдоль левой стороны луча f_k (или, что то же самое, по той части петли $\sum_k$, которая идет от бесконечности к $\xi = \lambda_k$). Произведем аналитическое продолжение ф. м. X_{j+1} ($j = \overline{1, n-1}$) из

окрестности точки λ_{j+1} в окрестность точки λ_j вдоль линии $\overline{a_{j+1}a_j}$ (рис. 1). Исходная точка a_{j+1} этой линии берется на левой стороне луча f_{j+1} в окрестности точки λ_{j+1} , а конечная точка a_j — на левой стороне луча f_j в окрестности точки λ_j . Полагаем, что при аналитическом продолжении вдоль недеформированной линии $\overline{a_{j+1}a_j}$ выбрано $\omega \leq \arg(\xi - \lambda_k) < \omega + 2\pi$ в окрестности $\xi = \lambda_k$ для всех ф. м. X_k ($k = \overline{1, n}$). Далее деформируем эту линию так, что точка b_j уходит в бесконечность вдоль луча, параллельного лучам f_{j+1} , f_j и расположенного между ними. Тогда деформированную линию $\overline{a_{j+1}a_j}$ можно представить состоящей из следующих трех частей: 1) окружность вокруг точки λ_{j+1} , которая начинается в точке a_{j+1} и обходит точку λ_{j+1} против часовой стрелки, заканчиваясь на правой стороне луча f_{j+1} ; 2) часть правой стороны луча f_j (в направлении от λ_{j+1} к ∞); 3) часть левой стороны луча f_j (к направлению от ∞ к λ_j) вплоть до точки a_j . Аналитическое продолжение ф. м. X_{j+1} по окружности дает $X_{j+1} \rightarrow X_{j+1}C_{j+1}$ (где $C_{j+1} = \text{diag}\{e^{-i2\pi\nu_{j+1}}, 1, \dots, 1\}$); далее по правой стороне луча f_{j+1} дает $X_{j+1}C_{j+1} \rightarrow X_\infty \times \times H_{j+1}^{-1}C_{j+1}$; по левой стороне луча f_j — $X_\infty H_{j+1}^{-1}C_{j+1} \rightarrow X_j H_j \times \times H_{j+1}^{-1}C_{j+1}$. Таким образом, результат аналитического продолжения ф. м. X_{j+1} по линии $\overline{a_{j+1}a_j}$ есть $X_{j+1} \rightarrow X_j \Pi_{j, j+1}$, где «матрица перехода» $\Pi_{j, j+1} = H_j H_{j+1}^{-1} C_{j+1}$ ($j = \overline{1, n-1}$). Обозначим

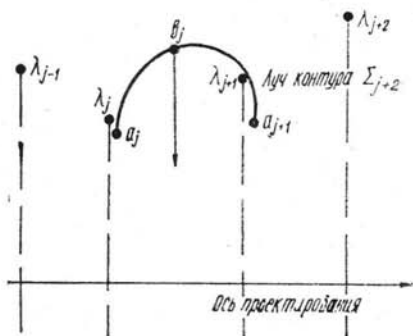


Рис. 1

$$M_k = H_k^{-1} C_k H_k \quad (k = \overline{1, n}). \quad (17)$$

Введем матрицы

$$L_{n-k} = H_{n-k} M_{n-k+1} M_{n-k+2} \dots M_n \equiv B_{n-k} H_n; \quad (18)$$

$$(k = \overline{1, n-1})$$

$$L_n = H_n; \quad B_{n-k} = \Pi_{n-k, n-k+1} \Pi_{n-k+1, n-k+2} \dots \Pi_{n-1, n},$$

а также матрицу B , у которой j -я строка есть первая строка матрицы B_j ($j = \overline{1, n-1}$), а в n -й строке элемент первого столбца равен единице, элементы всех прочих столбцов равны нулю. Обозначим элементы матриц L_k через $[L_k]_{vm}$.

Теорема 1. Пусть система (3) не имеет решений, голоморфных в $\xi = \infty$. Тогда

$$T_1 = \begin{pmatrix} [L_1]_{11}, [L_1]_{12}, \dots, [L_1]_{1n} \\ [L_2]_{11}, [L_2]_{12}, \dots, [L_2]_{1n} \\ \vdots \\ [L_n]_{11}, [L_n]_{12}, \dots, [L_n]_{1n} \end{pmatrix}; \quad (19)$$

$$F_2 F_1 = e^{-i2\pi R} Y = e^{-i2\pi R} B M B^{-1}; \quad (20)$$

$$M = [\Pi_{12} \Pi_{23} \dots \Pi_{n-1, n}]^{-1} C_1^{-1} [\Pi_{12} C_2^{-1} \Pi_{23} C_3^{-1} \dots \Pi_{n-1, n} C_n^{-1}].$$

Матрицы T_1 и $F_2 F_1$ не зависят от выбора подсистемы из $(n-1)$, голоморфных в $\xi = \lambda_k$ векторов-столбцов ф. м. X_k ($k = \overline{1, n}$).

Матрицу M в уравнении (20) можно проинтерпретировать следующим образом. Произведем аналитическое продолжение ф. м.

X_n вдоль указанной на рис. 2 кривой, начиная с точки a_n ; т. е. по простой петле, начинающейся в точке a_n и охватывающей все конечные особые точки $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, причем обход совершается по часовой стрелке — в отрицательном направлении. (Это эквивалентно обходу в положительном направлении только одной особой точки $\xi = \infty$). Тогда $X_n \rightarrow \rightarrow X_n M$.

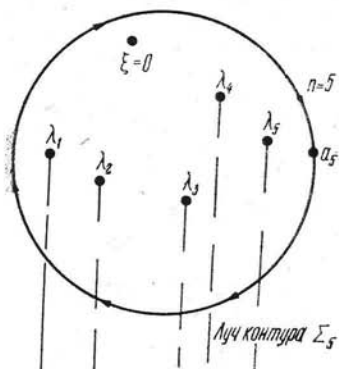


Рис. 2

Замечание 3. Как видно из выражения для $F_2 F_1$ в форме (20), для определения $F_2 F_1$ достаточно найти только матрицы перехода $\Pi_{j, i+}$ ($j = \overline{1, n-1}$) и нет необходимости находить матрицы H_k ($k = \overline{1, n}$).

Доказательство теоремы 1. Деформируя контур Ω_n , легко получить $\Omega_n = \sum_n \sum_{n-1} \dots \sum_1$. Подчеркнем, что порядок следования контуров $\sum_k$ однозначно определяется проекциями векторов λ_k на ось проектирования, т. е. однозначно определяется способом нумерации λ_k по теореме 2.1 [4]. Найдем, во что переходит интеграл в левой стороне равенства (6) при интегрировании по $\sum_n \sum_{n-1} \dots \sum_1$. Аналитическое продолжение X_∞ по левой части петли $\sum_n$ (вдоль левой стороны луча f_n) в окрестность точки $\xi = \lambda_n$ дает $X_\infty \rightarrow X_n H_n$. Далее в процессе обхода по контуру $\sum_n$ последовательно имеем $X_n H \rightarrow X_n C_n H_n = X_n H_n H_n^{-1} C_n H_n \rightarrow \rightarrow X_\infty M_n$. Таким образом, обход по $\sum_n$ дает $X_\infty \rightarrow X_\infty M_n$. Продолжая далее полученное выражение по левой части петли $\sum_{n-1}$ в окрестность точки $\xi = \lambda_{n-1}$, имеем $X_\infty M_n \rightarrow X_{n-1} H_{n-1} M_n$. Обход по контуру $\sum_n \sum_{n-1}$ дает $X_\infty \rightarrow X_\infty M_{n-1} M_n$. Отсюда очевидно, что при обходе по контуру $\sum_n \sum_{n-1} \dots \sum_{n-k+1}$ имеем $X_\infty \rightarrow$

$\rightarrow X_{\infty} M_{n-k+1} M_{n-k+2} \dots M_n$. Продолжая далее полученное выражение по левой части петли $\sum_{n-k}$ в окрестность точки $\xi = \lambda_{n-k}$, имеем

$$X_{\infty} \rightarrow X_{n-k} H_{n-k} M_{n-k+1} M_{n-k+2} \dots M_n \equiv X_{n-k} L_{n-k}. \quad (21)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} e^{z\xi} X_{\infty} d\xi &= \sum_{k=0}^{n+1} \int_{\Sigma_{n-k}} e^{z\xi} X_{n-k} L_{n-k} d\xi = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{\Sigma_{n-k}} e^{z\xi} X_{n-k} d\xi \right) L_{n-k}, \end{aligned} \quad (22)$$

где, разумеется, при интегрировании по всему контуру Σ_{n-k} предполагается соответствующее аналитическое продолжение подынтегральной функции. Обозначим любой голоморфный в $\xi = \lambda_{n-k}$ вектор-столбец ф. м. X_{n-k} через $\bar{x}_{n-k}$. Так как $\int_{\Sigma_{n-k}} e^{z\xi} \times \bar{x}_{n-k} d\xi = 0$, то последнее выражение из (22) может быть представлено так ($\bar{y}_{n-k}$ — вектор вида (2) по контуру Σ_{n-k}):

$$\sum_{k=0}^{n-1} (\bar{y}_{n-k}, 0, \dots, 0) L_{n-k} = (\bar{y}_1 [L_1]_{11},$$

$$\bar{y}_1 [L_1]_{12}, \dots, \bar{y}_1 [L_1]_{1n}) + (\bar{y}_2 [L_2]_{11}, \bar{y}_2 [L_2]_{12}, \dots, \bar{y}_2 [L_2]_{1n}) + \dots + (\bar{y}_n [L_n]_{11}, \bar{y}_n [L_n]_{12}, \dots,$$

$$\bar{y}_n [L_n]_{1n}) = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_n) T_1 \equiv \Phi_1(z) T_1. \quad (23)$$

Формула (19) доказана. Из нее имеем $T_1 = B H_n$. Следовательно,

$$Y = T_1 e^{i2\pi J} T_1^{-1} = B H_n e^{i2\pi J} H_n^{-1} B^{-1} = B H_n e^{i2\pi Q} H_n^{-1} B^{-1}, \quad (24)$$

поскольку $J = Q - E$ (см. (9), (15)). Обход ф. м. X_{∞} по контуру $\Omega_n = \sum_n \sum_{n-1} \dots \sum_1$ дает $X_{\infty}(\xi) \rightarrow X_{\infty}(\xi) M_1 M_2 \dots M_n$. Обход по контуру Ω_n — это обход точки $\xi = \infty$ в отрицательном направлении. Следовательно (см. (5)), этот обход дает $X_{\infty}(\xi) \rightarrow X_{\infty}(\xi) \times \times e^{-i2\pi Q}$, а значит,

$$e^{-i2\pi Q} = M_1 M_2 \dots M_n. \quad (25)$$

Используя уравнение (25), получаем $H_n e^{i2\pi Q} H_n^{-1} = H_n (M_n^{-1} \times \times M_{n-1}^{-1} \dots M_1^{-1}) H_n^{-1} = (\prod_{n-1, n}^{-1} \prod_{n-2, n-1}^{-1} \dots \prod_{12}^{-1}) C_1^{-1} H_1 H_n^{-1}$. Так как $H_1 H_n^{-1}$ можно представить в виде $H_1 H_n^{-1} = \prod_{12} C_2^{-1} \prod_{23} C_3^{-1} \dots \dots \prod_{n-1, n} C_n^{-1}$, окончательно $H_n e^{i2\pi Q} H_n^{-1} = (\prod_{12} \prod_{23} \dots \prod_{n-1, n})^{-1} (C_1^{-1} \prod_{12} C_2^{-1} \prod_{23} \dots C_{n-1}^{-1} \prod_{n-1, n} C_n^{-1})$ (26).

Подставляя (26) в (24), получаем (20). Докажем, что матрица T_1 не зависит от выбора подсистемы из $(n-1)$, голоморфных в $\xi = \lambda_k$ векторов-столбцов ф. м. X_k ($k = \overline{1, n}$). (Тогда от этого

дящей точку λ_n по часовой стрелке; 2) линии $a_n a_{n-1}$. Результат аналитического продолжения ф. м. X_n по петле есть $X_n \rightarrow X_n C_n^{-1}$.

Далее продолжение (по пунктирной линии) $\widehat{a_n a_{n-1}}$ дает $X_n \rightarrow X_{n-1} \prod_{n-1, n} C_n^{-1}$. Таким образом, результат аналитического про-

должения X_n (по непунктирной линии) $\widehat{a_n a_n'}$ есть $X_n \rightarrow X_{n-1} \times \times \prod_{n-1, n} C_n^{-1}$. Последовательно повторяя этот прием у точек λ_{n-1} , λ_{n-2} , ..., λ_2 и затем обходя по часовой стрелке точку λ_1 , получаем $X_n \rightarrow X_{n-1} \prod_{n-1, n} C_n^{-1} \rightarrow X_{n-2} \prod_{n-2, n-1} C_{n-1}^{-1} \prod_{n-1, n} C_n^{-1} \rightarrow \dots \dots \rightarrow X_1 [\prod_{12} C_2^{-1} \prod_{23} C_3^{-1} \dots \prod_{n-1, n} C_n^{-1}] \rightarrow X_1 C_1^{-1} [\prod_{12} C_2^{-1} \prod_{23} \times$

$\times C_3^{-1} \dots \prod_{n-1, n} C_n^{-1}]$. Оставшуюся часть пути аналитического продолжения можно представить как совокупность последовательно проходимых в обратном направлении

линий $\widehat{a_2 a_1}$, $\widehat{a_3 a_2}$, ..., $\widehat{a_n a_{n-1}}$ (см. рис. 1), т. е. проходимых в прямом направлении ли-

ний $\widehat{a_1 a_2}$, $\widehat{a_2 a_3}$, ..., $\widehat{a_{n-1} a_n}$. Так как результат аналитического продолжения X_{j+1} по $a_{j+1} a_j$ есть $X_{j+1} \rightarrow X_j \prod_{j, j+1}$, то последова-

тельное продолжение по линиям $\widehat{a_1 a_2}$, $\widehat{a_2 a_3}$,

..., $\widehat{a_{n-1} a_n}$ суммарно дает $X_n \rightarrow X_n [\prod_{n-1, n}^{-1} \times \times \prod_{n-2, n-1}^{-1} \dots \prod_{12}^{-1}] C_1^{-1} [\prod_{12} C_2^{-1} \prod_{23} C_3^{-1} \dots \prod_{n-1, n} C_n^{-1}] \equiv X_n M$. Это завершает доказательство.

Предложение 2. Если в последних столбцов ф. м. X_∞ голоморфны в точке $\xi = \infty$, то

$$[H_k]_{ij} = 0 \quad (j = n - v + 1, n - v + 2, \dots, n; \\ v = \overline{1, n-1}; k = \overline{1, n}). \quad (29)$$

Доказательство. Обозначим такой столбец через $\bar{x}_{\infty j}$. Так как

$$\int_{\Sigma_n} e^{2i\bar{x}_{\infty j}} d\xi = 0, \quad (30)$$

то (см. доказательство теоремы 1, выражения (23)) должно выполняться

$$\sum_{k=1}^n \bar{y}_k [L_k]_{ij} = 0 \quad j = n - v + 1, n - v + 2, \dots, n. \quad (31)$$

Но и в рассматриваемом случае $\bar{y}_k$ линейно независимы (это видно хотя бы из того, что линейно независимы их асимптотические

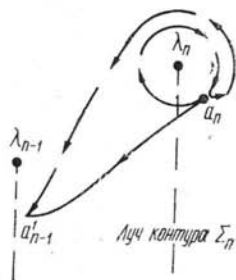


Рис. 3

представления на бесконечности). Тогда должно выполняться

$$[L_k]_{ij} = 0, \quad j = n - v + 1, n - v + 2, \dots, n; \quad k = \overline{1, n}. \quad (32)$$

Поскольку $L_n = H_n$, то

$$[H_n]_{ij} = 0 \quad j = n - v + 1, n - v + 2, \dots, n. \quad (33)$$

Следовательно (см. (28)), каждый из v последних столбцов матрицы M_n имеет только один ненулевой элемент. Этот элемент расположен на главной диагонали и равен единице. Поэтому v последних столбцов матрицы $L_{n-1} = H_{n-1}M_n$ совпадают с v последними столбцами H_{n-1} и, значит, в силу (32)

$$[H_{n-1}]_{ij} = 0, \quad j = n - v + 1, n - v + 2, \dots, n. \quad (34)$$

Следовательно (см. (28)), и каждый из v последних столбцов матрицы M_{n-1} имеет только один ненулевой элемент, который расположен на главной диагонали и равен единице. Но тогда и матрица $M_{n-1}M_n$ имеет такую же структуру, т. е. каждый из v последних столбцов матрицы $M_{n-1}M_n$ имеет только один ненулевой элемент, расположенный на главной диагонали и равный единице. Следовательно, (29) справедливо для $k = n - 2$, так как (см. (18)) $L_{n-2} = H_{n-2}M_{n-1}M_n$. Общий случай доказывается простой индукцией (с использованием (18)).

Замечание 4. Подчеркнем, что (32) не означает, что v последних столбцов матрицы T_1 равны нулю, так как в рассмотренном случае теорема 1 неприменима (их нельзя определить указанным в доказательстве теоремы 1 способом). В рассмотренном случае для нахождения T_1 и Y нужно преобразовать систему (1) так, как указано в замечании 1.

Список литературы: 1. Смилянский В. Р. Некоторые свойства множителей Стокса. I//Исследования по теории операторов и их приложениям. К., 1979, с. 97—107. 2. Смилянский В. Р. Некоторые свойства множителей Стокса. II//Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения. К., 1981, с. 107—117. 3. Смилянский В. Р. Некоторые свойства множителей Стокса. I. II. Исправление текста//Операторы в функциональных пространствах и вопросы теории функций. К., 1987, с. 27—28. 4. Смилянский В. Р. Множители Стокса и коэффициенты связи для некоторых уравнений//Функц. анализ и прикл. мат.— К., 1982,— С. 157—173. 5. Balser W. et al. On the reduction of connection problems for differential equations with an irregular singular point to ones with only regular singularities. I/W. Balser, W. B. Jurkat, D. A. Lutz//Siam J. Math. Anal.— 1981.— 12, N 5.— P. 691—721. 6. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Х.: ОНТИ, 1939.— 647 с.

Поступила в редколлегию 15.10.85

**СВЯЗЬ СПЕКТРАЛЬНЫХ И ОСЦИЛЛЯЦИОННЫХ СВОЙСТВ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ
ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА. I. ТЕОРЕМЫ ТИПА ШТУРМА**

Для дифференциальных уравнений произвольного четного порядка с операторнозначными коэффициентами на конечном и бесконечном интервалах в работе установлены теоремы типа Штурма: осцилляционные, сравнения и перемежаемости, а также факторизационные теоремы, обобщающие на рассматриваемый случай теорему Фробениуса и теорему М. Г. Крейна-Хайнца-Реллиха. В качестве приложения этих теорем получено обобщение критерия осцилляторности Этджена — Павловски (2-й порядок) на уравнения любого четного порядка с операторнозначными коэффициентами. Установлен аналог осцилляционной теоремы для дискретных уровней в лакуне непрерывного спектра уравнений любого четного или нечетного порядка.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений и их конечных систем теоремы типа Штурма и различные их обобщения, связанные со спектральной теорией и теорией расширений, рассмотрены в ряде известных монографий по спектральной теории дифференциальных операторов. Там же приведена обширная библиография. Отметим, что обобщения на конечномерные системы теорем о перемежаемости и теорем сравнения Штурма принадлежат М. Морсу, Г. Биркгофу, В. Рейду. Вопросы осцилляторности для линейных канонических систем исследованы в работах В. Б. Лидского (1955), В. А. Якубовича (1962).

Осцилляционные вопросы для бесконечных систем второго порядка, иначе для уравнений Штурма — Лиувилля с операторнозначными коэффициентами, рассмотрены в [1].

Основные результаты данной работы анонсированы в [2]. В [1] и [2] содержатся дополнительные литературные указания*.

§ 1. Самосопряженные краевые условия типа Штурма (распадающиеся условия), фундаментальное решение. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $|\cdot|$. Обозначим $H(a, b) = L_2\{H; (a, b); W(x) dx\}$ гильбертово пространство вектор-функций $y(x)$ со значениями в H скалярным произведением:

$$(y, z) = \int_a^b (W(x) y(x), z(x)) dx, \quad -\infty \leq a < b \leq \infty,$$

* Отметим, что полученные нами для бесконечных систем результаты, будучи примененными к конечным системам или к скалярным задачам, оказываются не менее, а иногда и более точными, чем известные для этих случаев.

и соответствующей нормой $\|\cdot\|$, где $W(x) = W^*(x) \gg 0$, $W(x) \in C(B(H); (\overline{a}, \overline{b}))$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение порядка $r \geq 1$ с операторными коэффициентами из $B(H)$:

$$l[y] = \sum_{k=0}^r i^k l_k[y] = \lambda W(x) y, \quad x \in (a, b), \quad (1)$$

где

$$l_{2j} = D^j p_j(x) D^j; \quad p_j^*(x) = p_j(x); \\ l_{2j+1} = \frac{1}{2} D^j \{D q_j(x) + q_j^*(x) D\} D^j; \quad D = \frac{d}{dx};$$

коэффициент при старшей производной, $p_n(x)$ при $r = 2n$ или $\operatorname{Re} q_n(x) = \frac{1}{2} (q_n + q_n^*)$ при $r = 2n + 1$, имеет ограниченный обратный во всем H при $x \in (\overline{a}, \overline{b})$; $p_j(x), q_{j-1}(x) \in C^j(B(H); (a, b))$, включая a и b , если они конечны.

Всюду в работе предполагается, что для минимального оператора L , порожденного дифференциальным выражением $l_w[y] = W^{-1}(x) l[y]$ в гильбертовом пространстве $H(\alpha, \beta)$, существуют самосопряженные распадающиеся граничные условия на любом интервале $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$.

Для полуограниченного дифференциального оператора в $H(a, b)$ всегда существуют самосопряженные расширения с распадающимися граничными условиями, например расширение по Фридрихсу L^F .

На конечном интервале операторы четного порядка всегда имеют распадающиеся граничные условия без предположения полуограниченности [3]. Однако на полуоси это не так, ибо уже эрмитова симметричная система двух уравнений второго порядка может иметь там разные дефектные числа (3, 2) (известен пример Г. А. Калябина) и поэтому совсем не иметь самосопряженных расширений. Дополняя такую систему до бесконечной с помощью диагональной системы вида $-y_k'' = \lambda y_k$, $k = 3, 4, \dots$, получим пример уравнения второго порядка с операторнозначным потенциалом и с равными дефектными числами (∞, ∞) на полуоси, которое, однако, не имеет распадающихся краевых условий, ибо постановка самосопряженного краевого условия при $x = 0$ приводит эту систему к минимальному относительно $x = \infty$ оператору с индексом дефекта (1, 0).

Для операции нечетного порядка $r = 2n + 1$ на конечном интервале для существования распадающихся граничных условий, когда $\dim H < \infty$ или $\dim H = \infty$, но $r = 1$, необходимо и достаточно [3], чтобы

$$\dim H_x^+ = \dim H_x^-, \quad (2)$$

где H_x^+, H_x^- — приводящие подпространства оператора $\operatorname{Re} q_n(x)$,

на первом из которых $\operatorname{Re} q_n(x)$, а на втором — $\operatorname{Re} q_n(x)$ являются положительно определенными. Если $\dim H = \infty$ и $r \geq 3$, то самосопряженные распадающиеся граничные условия на конечном интервале существуют всегда.

Таким образом, при наших предположениях $r \cdot \dim H = \infty$ или чётно.

Пусть в точке $a \geq -\infty$ задано самосопряженное краевое условие:

$$U_a[y] = 0. \quad (3)$$

Самосопряженность условия (3) означает, что минимальный относительно ξ оператор L_ξ , порожденный в $H(a, \xi)$, $a < \xi \leq b$, выражением $l_w[y]$ и условием (3), является симметрическим и функции $y \in D(L_\xi^*)$ также удовлетворяют этому условию. Аналогично определяется самосопряженное условие $U_b[y] = 0$ в точке b . (Описание расширений симметричных операторов в терминах абстрактных граничных условий и литературные указания содержатся в [4]).

Если $a > -\infty$, то самосопряженное краевое условие имеет вид [3] (см. также [4]):

$$U_a[y] := \cos A \cdot y^{\sim}(a) - \sin A \cdot \hat{y}(a) = 0, \quad (4)$$

$-\frac{\pi}{2}I < A \leq \frac{\pi}{2}I$, A — самосопряженный оператор в $H^{\sim}$, где при

$$r = 2n \text{ положено } H^{\sim} = H^n = \underbrace{H \oplus H \oplus \dots \oplus H}_n,$$

$$\begin{aligned} y^\wedge(x) &= \operatorname{col} \{y^{(k)}(x)\}_{k=0}^{n-1} \in H^n, \\ y^\vee(x) &= \operatorname{col} \{y^{[2n-j]}(x)\}_{j=1}^n \in H^n, \end{aligned} \quad (5)$$

а при $r = 2n + 1$ и условии (2) — $H^{\sim} = H' \oplus H^n$,

$$\begin{aligned} y^\vee(x) &= \operatorname{col} \{(V^+(x)q_+^{1/2}(x) + V^-(x)q_-^{1/2}(x))y^{(n)}(x), \\ & y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)\} \in H^{\sim}, \quad y^\vee(x) = \operatorname{col} \{i(V^-(x)q_-^{1/2}(x) - \\ & - V^+(x)q_+^{1/2}(x))y^{(n)}(x), y^{[2n]}(x), \\ & y^{[2n-1]}(x), \dots, y^{[n+1]}(x)\} \in H^{\sim}, \end{aligned} \quad (6)$$

$q_\pm(x) = \pm \frac{1}{2} \operatorname{Re} q_n(x) P_x^\pm$, $P_x^\pm$ — ортопроекторы на $H_x^\pm$, H' — произвольное гильбертово пространство такое, что $\dim H' = \dim H_x^+$, $\forall x \in (a, b)$, операторы $V^\pm(x)$ изометрически отображают $H_x^\pm$ на H' и равны нулю на $H_x^\mp$, $y^{[k]}$ — квазипроизводные, отвечающие операции $l[y]$, определенные в соответствии с [3], а именно:

$$y^{[k]} = y^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1; \quad \left(n = \left[\frac{r}{2}\right]\right),$$

$$y^{[n]} = p_{r-n} y^{(r-n)} - \frac{i}{2} q_{r-n-1} y^{(r-n-1)}; y^{[r-1]} = -Dy^{[r-1-1]} + \\ + p_j y^{(j)} + \frac{i}{2} [q_j^* y^{(j+1)} - q_{j-1} y^{(j-1)}], \quad (7)$$

$$j = 0, 1, \dots, r-n-1; q_{-1} \equiv 0 \equiv p_{n+1}; l[y] = y^{[r]}.$$

Если не выполнено условие (2), но $\dim H = \infty$ и $r = 2n + 1 \geq 3$, то $y^\wedge(x)$, $y^\vee(x)$ записываются, подобно (6), используя возможность изометрического отображения $H_x^- \oplus H$ на $H_x^+ \oplus H$ (см. [3]).

При $b < \infty$ самосопряженное граничное условие на правом конце интервала имеет аналогичный (4) вид:

$$U_b[y] := \cos B \cdot y^\vee(b) + \sin B \cdot y^\wedge(b) = 0. \quad (8)$$

Для задачи на бесконечном интервале (a, ∞) , $a \geq -\infty$, в абсолютно неопределенном (иначе — квазирегулярном) случае распадающиеся самосопряженные граничные условия при названных выше условиях имеют вид [5]:

$$\begin{aligned} \cos A \cdot P_1 \cdot (Sy)(a) - \sin A \cdot P_2 \cdot (Sy)(a) &= 0, \\ \cos B \cdot P_1 \cdot (Sy)(b) + \sin B \cdot P_2 \cdot (Sy)(b) &= 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где A, B — самосопряженные операторы в H^- (5), (6), $P_1 = (I_n; 0_n)$, $P_2 = (0_n; I_n)$ при $r = 2n$ ($0_n, I_n$ — нулевой и единичный операторы в H^n), а при $r = 2n + 1$ и условии (2)

$$P_1 = \left(\frac{i}{\sqrt{2}} [V^+(0) + V^-(0)] \right), \\ P_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} [V^+(0) - V^-(0)] \right).$$

(Здесь P_1, P_2 приведены в эквивалентном [5], но несколько упрощенном виде. Все невыписанные операторы равны 0), $(Sy)(x) = (Y_0^-(x))^{-1} y^-(x)$, где

$$y^-(x) = \begin{cases} \text{col} \{y, y', \dots, y^{(n-1)}; y^{[2n-1]}, \dots, y^{[n]}\}, & r = 2n, \\ \text{col} \{y, y', \dots, y^{(n-1)}; y^{[2n]}, \dots, y^{[n+1]}; -iy^{(n)}\}, & r = 2n+1, \end{cases}$$

$Y_0(x): H' \rightarrow H$ — решение уравнения (1) при $\lambda = 0$, удовлетворяющее начальному условию:

$$Y_0^-(0) = \begin{cases} I_{2n}, & r = 2n, \\ I_{2n} \oplus \frac{1}{\sqrt{2}} [q_+(0) + q_-(0)]^{-\frac{1}{2}}, & r = 2n+1. \end{cases}$$

Заметим, что

$$P_1 \cdot (Sy)(0) = y^\wedge(0), \quad P_2 \cdot (Sy)(0) = y^\vee(0). \quad (10)$$

Для вещественного скалярного уравнения четного порядка описание краевых задач на полуоси в явном виде для общего случая индексов дефекта дано Р. Т. Гусейновым и И. М. Пашаевым (1983).

Определение 1. [2], [6]. *Фундаментальным решением (ф. р.) задачи (1), (3) называем решение уравнения (1) $Y(x, \lambda) \in B(H, H)$, где H — какое-либо гильбертово пространство, если 1) $y = Y(x, \lambda)h \in H(a, \xi)$, $\forall h \in H, \xi \in (a, b)$ и удовлетворяет краевому условию (3); 2) любое решение $y \in H(a, \xi)$ задачи (1), (3) представимо в виде $y(x, \lambda) = Y(x, \lambda)h$; 3) при некотором, а потому и при любом x , самосопряженный оператор*

$$M_Y(x, \lambda) := \sum_{k=0}^{r-1} Y^{(k)*}(x, \lambda) Y^{(k)}(x, \lambda) \gg 0. \quad (11)$$

Условия 2), 3) определения 1 означают полноту и линейную независимость определяемой по ф. р. $Y(x, \lambda)$ системы решений задачи (1), (3).

Для задачи (1), (4) с краевым условием в регулярной точке a ф. р. $Y(x, \lambda)$, аналитическое по λ , можно построить как решение уравнения (1) с операторными данными Коши: $Y^\wedge(a, \lambda) = \cos A \cdot K$, $Y^\vee(a, \lambda) = \sin A \cdot K$, операторы $Y^\wedge(x, \lambda)$, $Y^\vee(x, \lambda)$ определяются формулами $Y^\wedge(x, \lambda)h = (Yh)^\wedge(x, \lambda)$, $Y^\vee h = (Yh)^\vee$, $h \in H$. При $H = H^-$ можно взять $K = I_H$ — единичный оператор в H ; вообще же $K \in B(H, H^-)$, $K^{-1} \in B(H^-, H)$ — любые.

Если $a = -\infty$ или является конечной сингулярной точкой, то построение ф. р. задачи (1), (3) не сводится к задаче Коши. Однако в ряде случаев ф. р. можно построить явно. Например, для скалярного уравнения Шредингера с высокосингулярным при $x = 0$ потенциалом — Ф. С. Рофе-Бекетов и Е. Х. Христов (1966, 1971), в абсолютно неопределенном случае для уравнения с коэффициентами из $B(H)$ на оси — А. М. Холькин (1981) и [5].

Всюду ниже конечные точки $x \in \mathbb{R}$ считаем регулярными.

Определение 2. [2], [6]. *Решение $Y(x, \lambda) \in B(H, H)$ уравнения (1) при $\lambda \in \mathbb{R}$ называем самосогласованным, если при $\xi \in (a, b)$ существует самосопряженное краевое условие:*

$$U_{\xi, \lambda}[y] := \cos A_{\xi, \lambda} \cdot y^\vee(\xi) - \sin A_{\xi, \lambda} y^\wedge(\xi) = 0, \quad (12)$$

которому при $x = \xi$ удовлетворяют все функции вида $y(x, \lambda) = Y(x, \lambda)h$.

Если (12) выполняется при некотором ξ , то оно справедливо и при любом $\xi \in (a, b)$, так как (12) эквивалентно эрмитову отношению [3], [4] и так как для решений (1) при $\lambda \in \mathbb{R}$ в силу тождества Лагранжа

$$\frac{d}{dx} [(y^\vee, z^\wedge) - (y^\wedge, z^\vee)] = 0.$$

Если $Y(x, \lambda)$ есть ф. р. задачи (1), (3), то (12) эквивалентно следующему краевому условию для вектор-функций:

$$Y^{\wedge*}(\xi, \lambda) y^{\vee}(\xi) - Y^{\vee*}(\xi, \lambda) y^{\wedge}(\xi) = 0. \quad (13)$$

В определении 2 содержатся известные определения попарной сопряженности решений скалярного уравнения и канонической системы при $\dim H = 2k < \infty$.

Обозначим $\sigma(T)$, $\sigma_e(T)$ соответственно спектр и предельный спектр оператора T , $\text{Def } T$ — дефектное число оператора T , $\text{nul } T = \dim \text{Ker } T$.

Существование ф. р. $Y(x, \lambda) \in B(H, H)$ для задачи (1) (3) при $\dim H = \frac{r}{2} \dim H \leq \infty$ и $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma_e(L_{\xi})$ установлено в [6]. Там же показаны при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma_e(L_{\xi})$ самосогласованность ф. р. $Y(x, \lambda)$, равенство $\text{nul } Y^{\wedge}(x, \lambda) = \text{nul } Y^{\wedge*}(x, \lambda)$, а при $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma_e(L_x^0)$ фредгольмовость $Y^{\wedge}(x, \lambda)$, (L_x^0 — расширение оператора L_x в $H(a, x)$ условием $y^{\wedge}(x) = 0$, совпадающее с фридриховым для полуограниченных L_x . $\sigma_e(L_{\xi})$ не зависит от ξ , а при регулярном конце $a > -\infty$ — пусто).

Лемма 1. Пусть $Y(x, \lambda)$ — ф. р. задачи (1), (3). Тогда если $0 \in \sigma(Y^{\wedge}(\xi, \lambda'))$ при некоторых $\xi \in (a, b)$, $\lambda' \in \mathbb{R}$, то $\lambda' \in \sigma(L_{\xi}^0)$. Обратно, если $\lambda' \in \sigma(L_{\xi}^0) \setminus \sigma_e(L_{\xi})$, то $0 \in \sigma(Y^{\wedge}(\xi, \lambda'))$.

Эта лемма является частным случаем леммы 3 из [6].

§ 2. Осцилляционная теорема для дифференциально-операторных уравнений четного порядка. Предположим, что минимальный относительно конца $b \leq \infty$ оператор L_b (1), (3) является полуограниченным снизу. Обозначим L^- — самосопряженное расширение оператора L_b , при $b < \infty$ оно порождается условием (8), а при $b = \infty$ в квазирегулярном случае — условием (9), $N(\lambda)$ — количество собственных значений $\lambda_k(L^-) < \lambda$ с учетом их кратностей $\kappa(\lambda_k)$, $N^F(\lambda)$, $\kappa^F(\lambda)$ — то же для $\lambda_k(L_b^F)$.

Теорема 1. При $\lambda < \lambda_e(L^-) := \inf \sigma_e(L^-)$

$$N(\lambda) - p \leq \sum_{x \in (a, b)} \text{nul } Y^{\wedge}(x, \lambda) = N^F(\lambda) \leq N(\lambda), \quad (14)$$

где $p = \text{Def } \{L^- | D(L_b^F) \cap D(L^-)\}$. Если λ не является собственным значением L_b , то вместо p в (14) можно взять $\min \{p, \text{Def } L_b - \kappa(\lambda)\}$ (при $b < \infty$ имеем $p = \text{rnk } \cos B$, $\text{Def } L_b = n \times \dim H \leq \infty$).

Если $\lambda_e(L_{\xi}^F) > \lambda_e(L_b^F)$ при $\xi \in (a, b)$, в частности, если конец $a > -\infty$ регулярен, то (14) верно и при $\lambda = \lambda_e(L^-)$, $p < \infty$.

Заметим, что в случае двух сингулярных концов последнее утверждение ново и для скалярного уравнения Штурма-Лиувилля.

(При $r = 2$, $a > -\infty$ эта теорема доказана в [1], при $r = 4$, $\dim H < \infty$, $-\infty < a < b < \infty$ она содержится в [7]).

Замечание 1. Если $a > -\infty$ и при некотором $\lambda \in \mathbb{R}$ существует ф. р. $Y(x, \lambda)$ задачи (1), (4) такое, что оператор $Y^\wedge(x, \lambda)$ фредгольмов при всех $x \in (a, b)$, то $\lambda \leq \lambda_e(L_b^F)$.

Доказательство теоремы 1 при $b < \infty$ с учетом монотонной и непрерывной зависимости спектра от интервала ([8] или [2, лемма 2]) и с использованием стандартных для этого круга вопросов рассуждений о движении собственных значений $\lambda_j(\xi) < \lambda_e$ оператора L_ξ^0 при $\xi \searrow a$, начиная с $\xi = b$, проводится аналогично доказательству теорем 1 и 2 из [1], включая использование леммы 5 из [1]*, и затем с помощью предельного перехода от конечных значений b теорема распространяется на случай $b = \infty$, учитывая сходимость спектров последовательности фридрихсовых расширений регулярных задач к спектру фридрихсова расширения предельной задачи (ср. с [1]).

Справедливость замечания 1 вытекает из того, что если $\lambda > \lambda_e(L_b^F)$, то при $a > -\infty$ в силу [8] или [2, лемма 2]**, найдется такое $\xi \in (a, b)$, что $\lambda = \inf \sigma_e(L_\xi^0)$. В этом случае по лемме 1 получим, что $0 \in \sigma_e(Y^\wedge(\xi, \lambda))$ и, следовательно, оператор $Y^\wedge(\xi, \lambda)$ не является фредгольмовым.

Следствие 1. Если $\lambda_k > \lambda_{k-1}$ для L_b^F , то при этом k

$$\sum_{x \in (a, b)} \text{nul } Y^\wedge(x, \lambda_k) = k - 1, \quad (15)$$

а при $\kappa(\lambda_k) = n \cdot \dim H < \infty$ и $\lambda_k(L^-) > \lambda_{k-1}(L^-)$, $b < \infty$, (15) верно и для L^- .

В частности, для скалярного уравнения второго порядка $Y^\vee(x, \lambda) = Y(x, \lambda)$ и (15) содержит в себе классическую осцилляционную теорему Штурма и ее обобщения на случай невещественных коэффициентов, которые допускаются при первой производной (и поэтому невещественного решения $Y(x, \lambda)$) а также на случай бесконечного интервала, так как при $r = 2$ (15) верно при $-\infty \leq a < b \leq \infty$ и для L^- .

При $b < \infty$ следствие очевидно, а при $b = \infty$, $r = 2$ доказано в [1].

Равенство (15) означает, что для собственного значения λ_k задачи (1), $y^\wedge(a) = 0$, $y^\wedge(b) = 0$, ($a > -\infty$), b является k -й присоединенной к a точкой, если при $x \in (a, b)$ $\text{nul } Y^\wedge(x, \lambda_k) \leq 1$. (Ср. с теоремой А. Халая и Ш. Шандора (1957), относящейся к случаю $\dim H < \infty$ на конечном интервале).

Отметим, что при $n \cdot \dim H > 1$ и общем краевом условии (8) равенство в (15) без дополнительных предположений может не выполняться (см. пример в [1, с. 413]).

* О связи спектров конечномерных расширений.

** О непрерывном стремлении $\inf \sigma_e(L_\xi^0) \nearrow +\infty$ при $\xi \searrow a > -\infty$.

Замечание 2. Теорема 1 содержит в себе при $r = 2$, $\dim H < \infty$, $-\infty < a < b < \infty$, $\cos A = \cos B = 0$, теорему Морса об индексе (см. [1]), возможность обобщения которой на общий случай конечных систем Штурма — Лиувилля отметил М. М. Постников (1965).

§ 3. Теоремы сравнения и перемежаемости. Пусть $r = 2n$. Операции $l[y]$ (1) сопоставим форму $l_\Delta[y, y]$ — интеграл Дирихле по интервалу Δ :

$$l_\Delta[y, y] = \int_{\Delta} \left\{ \sum_{j=0}^n (p_j(x) y^{(j)}, y^{(j)}) + \right. \\ \left. + \frac{i}{2} \sum_{j=0}^{n-1} [(q_j^*(x) y^{(j+1)}, y^{(j)}) - (q_j(x) y^{(j)}, y^{(j+1)})] \right\} dx.$$

Теорема 2. Пусть $-\infty < a < b < \infty$, $Y_1(x), Y_2(x)$ ф. р. задач вида (1), (4): $l^{(k)}[Y_k] = 0$, $k = 1, 2$, с $A = A_k$ в (4) соответственно,

$$\inf \sigma_e(L_b^{(2)0}) > 0, \quad W_k(x) \equiv I, \quad r = 2n, \\ l_{(a,b)}^{(1)}[y, y] \leq l_{(a,b)}^{(2)}[y, y] \quad (16)$$

для равных нулю в окрестности точки b вектор-функций. Тогда, если

$$\text{rnk} \{Y_2^{\vee*} Y_1^{\wedge} - Y_2^{\wedge*} Y_1^{\vee}\}_{x=a} = m < \infty$$

или, что эквивалентно

$$\text{rnk} \{\sin A_2 \cdot \cos A_1 - \cos A_2 \cdot \sin A_1\} = m < \infty,$$

то при любом $\beta \in (a, b]$

$$\sum_{x \in [a, \beta]} \text{nul } Y_1^{\wedge}(x) \geq \sum_{x \in [a, \beta]} \text{nul } Y_2^{\wedge}(x) - m. \quad (17)$$

Условие (16) обеспечено, в частности, если при $j = 0, 1, \dots, n$

$$p_j^{(1)}(x) \leq p_j^{(2)}(x), \quad q_j^{(1)}(x) = q_j^{(2)}(x), \quad x \in (a, b). \quad (16_1)$$

Если $l^{(1)} = l^{(2)}$, то суммировать в (17) можно по $x \in [\alpha, \beta] \subset (a, b]$. Если $\dim H < \infty$, то суммировать в (17) можно по $x \in [\alpha, \beta]$ и при условии (16₁), если заменить m на $n \cdot \dim H$:

$$\sum_{x \in [\alpha, \beta]} \text{nul } Y_1^{\wedge}(x) \geq \sum_{x \in [\alpha, \beta]} \text{nul } Y_2^{\wedge}(x) - n \cdot \dim H. \quad (17_1)$$

Следствие 2. Если $l^{(1)} = l^{(2)}$, то при любом $[\alpha, \beta] \subset (a, b]$

$$\left| \sum_{x \in [\alpha, \beta]} \text{nul } Y_1^{\wedge}(x) - \sum_{x \in [\alpha, \beta]} \text{nul } Y_2^{\wedge}(x) \right| \leq m, \quad (17_2)$$

и если $\sum_{x \in [\alpha, \beta]} \text{nul } Y_1^{\wedge}(x) \geq m + 1$, то отрезок $[\alpha, \beta]$ содержит, по

крайней мере, одну точку, где $\text{puI } Y_2^\wedge(x) \geq 1$. В частности, при $\dim H < \infty$ имеем $m \leq n \cdot \dim H$ и поэтому из теоремы 2 вытекают также теоремы сравнения и перемежаемости Хайнца — Реллиха в уточненном виде.

Доказательство. Обозначим $M_\beta^{(2)0}$ самосопряженный оператор, порожденный в $H(a, \beta)$ при некотором $\beta \in (a, b]$ операцией $l^{(2)}[y]$, самосопряженными граничными условиями $y^\wedge(\beta) = 0$ и (4) с $A = A_1$ которое в силу (13) эквивалентно условию

$$Y_1^{\wedge*}(a) \cdot y^\vee(a) - Y_1^{\vee*}(a) y^\wedge(a) = 0. \quad (18)$$

Заметим теперь, что при $y^\wedge(b) = 0$ $\langle l[y], y \rangle_{(a, b)} = (y^\vee, y^\wedge)|_a + l_{(a, b)}[y, y]$, что величины $y^{\wedge(1)}$ и $y^{\wedge(2)}$, построенные по $l^{(1)}$ и $l^{(2)}$, совпадают, поэтому $(y^{\vee(1)}, y^{\wedge(1)}) = (y^{\vee(2)}, y^{\wedge(2)})$, если обе пары $y^{\vee(1)}$ и $y^{\wedge(1)}$, $y^{\vee(2)}$ и $y^{\wedge(2)}$ подчинены условию (4) с одним и тем же A . Поэтому в силу (16) $L_\beta^{(1)0} \leq M_\beta^{(2)0}$ и, следовательно,

$$N_1^F(0) \geq N_M^F(0), \quad N_1^F(0) + \kappa_1^F(0) \geq N_M^F(0) + \kappa_M^F(0). \quad (19)$$

Величины $N^F(\lambda)$, $\kappa^F(\lambda)$ для операторов $L_\beta^{(1)0}$, $L_\beta^{(2)0}$, $M_\beta^{(2)0}$ снабжаем соответственно индексами 1, 2, M). Операторы $L_\beta^{(2)0}$, $M_\beta^{(2)0}$ являются самосопряженными расширениями их максимальной общей части Λ , определенной на вектор-функциях $y \in D(M_\beta^{(2)0})$, удовлетворяющих, кроме того, условию

$$Y_2^{\wedge*}(a) y^\vee(a) - Y_2^{\vee*}(a) y^\wedge(a) = 0. \quad (20)$$

Индексы дефекта оператора Λ есть (m, m) , где* $m = \text{гнк } W_a\{Y_2, Y_1\}$,

$$W_x\{Y_2, Y_1\} \equiv (Y_2^{\vee*} Y_1^\wedge - Y_2^{\wedge*} Y_1^\vee)(x).$$

Действительно, если $g_1, \dots, g_m$ — базис в области значений оператора W_a , а $h_1, \dots, h_m \in H$ таковы, что $W_a h_k = g_k$, $k = 1, \dots, m$, то вектор-функции $y_k(x) = \varphi(x) Y_1(x) h_k$, где $0 \leq \varphi(x) \in C_0^\infty$ — скалярная функция, равная 1 в окрестности точки a и равная 0 в окрестности β , принадлежат $D(M_\beta^{(2)0})$ и линейно независимы по

модулю $D(\Lambda)$, так как, если $\sum_{k=1}^m c_k y_k \in D(\Lambda)$, то $0 = \sum_{k=1}^m c_k [Y_2^{\wedge*} \times \times (a) y_k^\vee(a) - Y_2^{\vee*}(a) y_k^\wedge(a)] = - \sum_{k=1}^m c_k W_a h_k = - \sum_{k=1}^m c_k g_k$, поэтому $c_k = 0$, $k = 1, \dots, m$, и, следовательно, $\dim D(M_\beta^{(2)0})/D(\Lambda) \geq m$.

Пусть $z_1(x), \dots, z_{m+1}(x)$ — произвольные вектор-функции из $D(M_\beta^{(2)0})$. В силу (18) и леммы 2 из [3] о параметрическом пред-

* Поэтому $\text{гнк } W_a\{Y_2, Y_1\} = \text{гнк } W_a\{Y_1, Y_2\}$.

ставлении эрмитовых бинарных отношений, при некоторых $e_k \in \mathbf{H}$

$$z_k^\wedge(c) = Y_1^\wedge(a) e_k, \quad z_k^\vee(a) = Y_1^\vee(a) e_k, \quad k = 1, \dots, m+1.$$

Векторы $W_a e_1, \dots, W_a e_{m+1}$ линейно зависимы, поэтому существует нетривиальная комбинация: $\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k W_a e_k = 0$. При этом $\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k z_k^\wedge(x) \in D(\Lambda)$, так как

$$Y_2^{\wedge*} \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k z_k^\vee(a) - Y_2^{\vee*} \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k z_k^\wedge(a) = - \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k W_a e_k = 0.$$

Таким образом, $\dim D(M_\beta^{(2)0})/D(\Lambda) = m$ и, следовательно, $\text{Def } \Lambda = m$. Поскольку $M_\beta^{(2)0}$ и $L_\beta^{(2)0}$ являются конечномерными расширениями оператора Λ , то $\sigma_e(M_\beta^{(2)0}) = \sigma_e(L_\beta^{(2)0})$. По условию теоремы $\inf \sigma_e(L_\beta^{(2)0}) > 0$, поэтому при всех $\beta \in (a, b]$ $\inf \sigma_e(L_\beta^{(2)0}) > 0$ и, используя лемму 5 из [1], имеем $N_M^F(0) + \kappa_M^F(0) \geq N_2^F(0) + \kappa_2^F(0) - m$. Сравнивая с (19), имеем $N_1^F(0) + \kappa_1^F(0) \geq N_2^F(0) + \kappa_2^F(0) - m$, откуда, в силу теоремы 1, получаем (17), так как

$$\sum_{x \in (a, \beta)} \text{nul } Y_j^\wedge(x) + \kappa_j^F(0) = \sum_{x \in (a, \beta)} \text{nul } Y_j^\wedge(x); \quad j = 1, 2. \quad (21)$$

Если $l^{(1)} = l^{(2)}$, то рассмотрим операторы $L_\beta^{(1)0}$, $L_\beta^{(2)0}$, $M_\beta^{(2)0}$ в $H(\alpha - \varepsilon, \beta)$, $\varepsilon > 0$, с самосопряженными граничными условиями вида (18), (20) в точке $\alpha - \varepsilon$, определяемыми теми же ф. р. $Y_1(x)$, $Y_2(x)$, но не при $x = a$, а при $x = \alpha - \varepsilon \geq a$. Учитывая фредгольмовость операторов $Y_1^\wedge(x)$, $Y_2^\wedge(x)$, вытекающую из положительности $\inf \sigma_e$ дифференциальных операторов на (a, b) , видим в силу замечания 1, что для рассматриваемых в $H(\alpha - \varepsilon, \beta)$ дифференциальных операторов $\inf \sigma_e > 0$ тоже. Так как при $l^{(1)} = l^{(2)}$ $W_x\{Y_2, Y_1\}$ не зависит от x , то $\text{rnk } W_{\alpha-\varepsilon} = \text{rnk } W_a = m$.

Поэтому, учитывая (21), получаем (17) с суммированием по $x \in (\alpha - \varepsilon, \beta]$, откуда при $\varepsilon \rightarrow 0$ следует

$$\sum_{x \in [\alpha, \beta]} \text{nul } Y_1^\wedge(x) \geq \sum_{x \in [\alpha, \beta]} \text{nul } Y_2^\wedge(x) - m. \quad (22)$$

Утверждение теоремы, относящееся к случаю $\dim H < \infty$, следует из того, что $m \leq n \cdot \dim H$. Теорема доказана.

Следствие 2 вытекает из теоремы 2, так как при $l^{(1)} = l^{(2)}$ в (17) $Y_1^\wedge(x)$ и $Y_2^\wedge(x)$ можно менять местами.

Список литературы: 1. Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М. О связи между спектральными и осцилляционными свойствами матричной задачи Штурма — Лиувилля // Матем. сб.—1977.—102, № 3.—С.410—424. 2. Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М. Связь спектральных и осцилляционных свойств дифференциальных систем произвольного порядка // Докл. АН СССР.—1981.—261,

№ 3.— С. 551—555. 3. Рофе-Бекетов Ф. С. О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Теория функций, функцион. анализ и их прил.—1969.— Вып. 8.— С. 3—24. 4. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— К.: Наук. думка.—1984.—284 с. 5. Холькин А. М. Описание самосопряженных расширений дифференциальных операторов произвольного порядка на бесконечном интервале в абсолютно неопределенном случае. // Теория функций, функцион. анализ и их прил.—1985.— Вып. 44.— С. 112—122. 6. Рофе-Бекетов Ф. С., Холкин А. М. Фундаментальная система решений операторного дифференциального уравнения с краевым условием на бесконечности // Мат. заметки.—1984.— 35, № 5.— С. 697—709. 7. Свободные колебания тонких упругих оболочек/ А. Л. Гольденвейзер, В. Б. Лидский, П. Е. Товстик.— М.: Наука,—1979.—384 с. 8. Рофе-Бекетов Ф. С., Холькин А. М. Зависимость спектра операторной краевой задачи от изменения интервала // Теория функций, функцион. анализ и их прил.—1985.— Вып. 43.— С. 107—119.

Поступила в редколлегию 25.12.85

УДК 517.9

Н. В. НОРИН

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ, СВЯЗАННАЯ С БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМИ ТЕПЛОВЫМИ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Важную роль в конечномерной теории уравнений с частными производными играет теорема о среднем для решения дифференциального уравнения. Перенесение этой теоремы на бесконечномерный случай наталкивается на значительные трудности, связанные, в первую очередь, с отсутствием в этой ситуации меры Лебега, т. е. ненулевой σ -конечной меры, инвариантной относительно всех сдвигов. Эта работа близка к работам А. А. Беляева, рассматривавшего эллиптический случай (см. [1, 2]).

1. Обозначим через $H_+ \subset H \subset H_-$ оснащенное гильбертово пространство, которое можно получить следующим образом: если $A: H_- \rightarrow H_-$ — положительно определенный самосопряженный оператор Гильберта — Шмидта в сепарабельном гильбертовом пространстве H_- , наделенном нормой $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$, то $H = AH_-$, $H_+ = A^2H_-$ — гильбертовы пространства, наделенные нормами $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)} = \sqrt{(A^{-1}\cdot, A^{-1}\cdot)}$ и $\|\cdot\|_+ = \sqrt{(\cdot, \cdot)} = \sqrt{(A^{-2}\cdot, A^{-2}\cdot)}$ соответственно. Пусть $\Phi = H_- \times R^1$, U — область в Φ , $S \equiv S_\lambda = \{x \in H_- : \|x\| = \lambda\}$, $D \equiv D_\lambda = \{x \in H_- : \|x\| \leq \lambda\}$, $T > 0$, $DT = D \times [-T, 0]$, $n(x) = x/\|x\|$ — внешняя нормаль к S в точке x , $\bar{n}(x) = A^2n(x)$ — кономаль, $p_t(x, \cdot)$ — гауссовская мера на H_- с корреляционным оператором tA^2 и средним x , $p_t^s(x, \cdot)$ — соответствующая ей поверхностная мера (см. [3]). Для функции $f: U \rightarrow R^1$ обозначим символами Df и D^2f первую и вторую производные Фреше по подпространству H [4], символом f' — первую

производную Фреше по подпространству H_- , символом $\frac{\partial f}{\partial t}$ — производную по подпространству R^1 . Пусть $\{e_n\}$ — ортонормированный в H_- базис, собственный для $A: Ae_n = \lambda_n e_n$, $\lambda_n \geq \lambda_{n+1} > 0$.

Определение 1. Функция $f: U \rightarrow R^1$ принадлежит множеству $C_H^{1,2}(U)$, если производные $Df: U \rightarrow H$, $D^2f: U \rightarrow L(H, H)$, $f': U \rightarrow H_+$, $\frac{\partial f}{\partial t}: U \rightarrow R^1$ существуют, непрерывны и ограничены, а частичные суммы $\Delta_N f(x, t) = \sum_{n=1}^N \lambda_n^2 d_{e_n}^2 f(x, t)$ ограничены в совокупности.

Замечание 1. Очевидно, что, какова бы ни была точка $(x, t) \in U$, существуют такие $\lambda > 0$, $T > 0$, что $DT + (x, t) \subset U$. Делая в случае необходимости сдвиг времени на $t - T$, можем считать $t - T$, несколько упрощая дальнейшие выкладки.

Теорема 1. Если $f \in C_H^{1,2}(U)$, то для любой точки $(x, t) \in U$

$$\begin{aligned} f(x, t) = & \int_0^t \int_S d\bar{n}(\xi) f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}^S(x, d\xi) d\tau + \\ & + \int_0^t \int_S f(\xi, \tau) (n(\xi), \xi - x) (2(t - \tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}^S(x, d\xi) d\tau - \\ & - \int_0^t \int_D \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \Delta \right) f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}(x, d\xi) d\tau + \\ & + \int_D f(\xi, 0) p_{2t}(x, d\xi), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\Delta = \lim_{N \rightarrow \infty} \Delta_N$.

Замечание 2. По аналогии с конечномерным случаем естественно называть первое слагаемое в правой части (1) тепловым потенциалом простого слоя с плотностью $d_{\bar{n}(\xi)} f(\xi, \tau)$, второе слагаемое — тепловым потенциалом двойного слоя с плотностью $f(\xi, \tau)$, а третье — объемным тепловым потенциалом с плотностью $\left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \Delta \right) f(\xi, \tau)$ [5].

Определение 2. Функция $f: U \rightarrow R^1$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, если $f \in C_H^{1,2}(U)$ и $\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \Delta \right) f = 0$ в U .

Пусть $q: [0, \lambda] \rightarrow R^1$ — произвольная суммируемая функция,

$$b_\lambda(\tau) = \int_\lambda^\tau q(r) dr.$$

Теорема 2. Если функция f удовлетворяет уравнению теплопроводности, то

$$\left(\int_0^\lambda r q(r) dr \right) f(x, t) \int_0^t \int_{D_\lambda} f(\xi, \tau) C_1(\xi - x, t - \tau) \times \\ \times p_{2(t-\tau)}(x, d\xi) d\tau + \int_{D_\lambda} f(\xi, 0) C_2(\xi - x) p_{2t}(d\xi), \quad (2)$$

где $C_1(y, s) = \gamma(y) q(\|y\|) + b_\lambda(\|y\|) [-\|A\|_2^2 \|y\|^{-1} + \gamma(y) \|y\|^{-1} +$
 $+ \|y\|/s]$, $C_2(y) = \int_{\|y\|}^\lambda r q(r) dr - \|y\| b_\lambda(\|y\|)$, $a \gamma(y) = \|Ay\|^2 / \|y\|^2$,

$$\|A\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2.$$

Замечание 3. Теорема 2 является аналогом конечномерной теоремы об объемном среднем для решения уравнения теплопроводности и выражает значение решения f в точке (x, t) через его значения на множестве $(x, t) + D_\lambda \times [-t, 0]$ (см. также замечание 1). Подбирая подходящие функции q , можно изучать поведение решения уравнения теплопроводности, в частности, его дифференцируемость.

Следствие 1. Функция f , удовлетворяющая уравнению теплопроводности в U , бесконечное число раз дифференцируема по Фреше по подпространству H .

Доказательство следствия 1. Пусть функция $F: [0, \lambda] \rightarrow R^1$ такова, что 1) $\exists \varepsilon > 0: F|_{[0, \varepsilon]} \equiv K > 0$; 2) $F(\lambda) = K$; 3) F беско-

нечно дифференцируема на $[0, \lambda]$, $\lambda K - \int_0^\lambda F(r) dr > 0$. Определим

функцию q равенством $q = F'$. Легко видеть, что она удовлетворяет следующим условиям: 1) q — бесконечно дифференцируема;

2) $q|_{[0, \varepsilon]} \equiv 0$. Так как $b_\lambda(\tau) = \int_\tau^\lambda q(r) dr = F(r)|_\tau^\lambda = F(\lambda) - F(\tau) =$
 $= K - F(\tau)$, то 1) $b_\lambda(\lambda) = 0$; 2) $b_\lambda|_{[0, \varepsilon]} \equiv 0$; 3) b_λ бесконечно дифференцируема. Пользуясь этим, а также тем, что $\frac{d}{d\tau} \times$

$$\times \left(\int_\tau^\lambda r q(r) dr - \tau b_\lambda(\tau) \right) = \frac{d}{d\tau} \left(K(\lambda - \tau) - \int_\tau^\lambda F(r) dr \right) = -b_\lambda(\tau), \text{ в (2)}$$

можно продифференцировать правую часть по x любое число раз.

2. Доказательство теоремы 1 основано на лемме, представляющей самостоятельный интерес.

Лемма. В условиях теоремы 1 функция $\varphi_\tau(x, t) =$
 $= \int_D f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}(x, d\xi)$ удовлетворяет уравнению теплопроводности, если $0 < \tau < t - \varepsilon$ и $0 < \varepsilon < t$.

Доказательство леммы. Пусть мера $\mu: B(H_-) \rightarrow R^1$ достаточное число раз дифференцируема по H (см. [4]) и относительно нее интегрируема в смысле Угланова [3] поверхность S . Тогда справедлива формула

$$\int_D d_h \mu(d\xi) = \int_S (h, n(\xi)) \mu^S(d\xi) \quad (3)$$

(см., например, [1]). Из (3), пользуясь тем, что

$$d_{e_i}(\psi \cdot \mu) = \psi \cdot (d_{e_i} \mu) + (d_{e_i} \psi) \cdot \mu \quad (4)$$

«[6, теорема 2.2.1)], получаем

$$\begin{aligned} \int_D d_{e_i}^2 \psi(\xi) \mu(d\xi) &= - \int_D d_{e_i} \psi(\xi) (d_{e_i} \mu)(d\xi) + \\ &+ \int_S d_{e_i} \psi(\xi) e_i, n(\xi)) \mu^S(d\xi). \end{aligned}$$

Полагая $\psi(\xi) = \|\xi - x\|^2 / (2(t - \tau))$, $\mu(E) = \int_E f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}(x, d\xi)$, $E \in B(U)$, получим после вычисления производных гауссовской меры и перегруппировки

$$\begin{aligned} \int_S (e_i, \xi - x) (e_i, n(\xi)) (2(t - \tau))^{-1} f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}^S(x, d\xi) = \\ = (2(t - \tau))^{-1} \int_D [1 - (e_i, \xi - x) \langle e_i, \xi - x \rangle (2(t - \tau))^{-1}] \times \\ \times f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}(x, d\xi) + \int_D (e_i, \xi - x) (2(t - \tau))^{-1} d_{e_i} f(\xi, \tau) \times \\ \times p_{2(t-\tau)}(x, d\xi). \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $(e_i, \xi - x) \langle e_i, \xi - x \rangle = \langle \tilde{e}_i, \xi - x \rangle^2$, где $\tilde{e}_i = \lambda_i e_i$, а $d_{e_i}^2 \varphi_\tau(x, t) = -(2\lambda_i^2(t - \tau))^{-1} \int_D [1 - \langle \tilde{e}_i, \xi - x \rangle^2 (2(t - \tau))^{-1}] f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}(x, d\xi)$, получим, применяя теорему Лебега, что

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_\tau(x, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 d_{e_i}^2 \varphi_\tau(x, t) = \int_D \langle f'(\xi, \tau), \xi - x \rangle \times \\ &\times (2(t - \tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}(x, d\xi) - \int_S f(\xi, \tau) (n(\xi), \\ &\xi - x) (2(t - \tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}^S(x, d\xi). \end{aligned} \quad (5)$$

С другой стороны,

$$\varphi_\tau(x, t) = \int_{(D-x)/\sqrt{2(t-\tau)}} f(q\sqrt{2(t-\tau)} + x, \tau) p_1(dq)$$

и, пользуясь теоремой, аналогичной теореме 10 (о поверхностном слое) из [3], утверждающей, что (в обозначениях [3])

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-1} [\mu(Q_+^\varepsilon) - \mu(Q_-^\varepsilon)] = \int_Q \langle \bar{n}(\xi), \frac{\partial u}{\partial \varepsilon}(\xi, 0) \rangle \mu^G(d\xi),$$

где Q_+^ε (Q_-^ε) — «положительный» («отрицательный») поверхностный слой, определяемый знаком функции u , получим, что $\frac{\partial}{\partial t} \varphi_\tau(x, t)$ существует и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_\tau(x, t) &= \int_D \langle f'(\xi, \tau), \xi - x \rangle (2(t - \tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}(x, d\xi) - \\ &- \int_S f(\xi, \tau) (n(\xi), \xi - x) (2(t - \tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}^S(x, d\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует, что $\left(-\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) \varphi_\tau(x, t) = 0$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из формул (3) и (4) можно получить, что

$$\begin{aligned} \int_D \Delta f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}(x, d\xi) - \Delta \int_D f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}(x, d\xi) &= \\ &= \int_S \langle f'(\xi, \tau), A^2 n(\xi) \rangle p_{2(t-\tau)}^S(x, d\xi) - \\ &- \int_S f(\xi, \tau) \langle A^2 n(\xi), \xi - x \rangle (2(t - \tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}^S(x, d\xi). \end{aligned} \quad (7)$$

Объединяя (7) и

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_\tau(x, t) = -\frac{\partial}{\partial \tau} \varphi_\tau(x, t) + \int_D \frac{\partial}{\partial \tau} f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}(x, d\xi),$$

интегрируя их по τ от 0 до $t - \varepsilon$ и применяя формулу Ньютона—Лейбница, получим

$$\begin{aligned} &\int_0^{t-\varepsilon} \int_D \left(-\frac{\partial}{\partial \tau} + \Delta\right) f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}(x, d\xi) d\tau - \\ &- \int_0^{t-\varepsilon} \left(-\frac{\partial}{\partial t} + \Delta\right) \int_D f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}(x, d\xi) d\tau = \\ &= \int_0^{t-\varepsilon} \int_S \langle f'(\xi, \tau), A^2 n(\xi) \rangle p_{2(t-\tau)}^S(x, d\xi) d\tau + \\ &+ \int_0^{t-\varepsilon} \int_S f(\xi, \tau) (n(\xi), \xi - x) (2(t - \tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}^S(x, d\xi) d\tau - \\ &- \int_D f(\xi, t - \varepsilon) p_{2\varepsilon}(x, d\xi) + \int_D f(\xi, 0) p_{2t}(x, d\xi). \end{aligned}$$

Устремляя ε к нулю, пользуясь леммой и тем, что $p_{2\varepsilon}(x, \cdot) \rightarrow \delta(x)$, завершаем доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Для упрощения выкладок без потери общности будем считать, что $x=0$. Так как функция f удовлетворяет уравнению теплопроводности, то из (1) следует, что

$$\begin{aligned} f(0, t) = & \int_0^t \int_{S_r} d_{n(\xi)} f(\xi, \tau) p_{2(t-\tau)}^{S_r} (d\xi) d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{S_r} f(\xi, \tau) (n(\xi), \xi - x) (2(t-\tau))^{-1} p_{2(t-\tau)}^{S_r} (d\xi) d\tau + \\ & + \int_{D_r} f(\xi, 0) p_{2t} (d\xi). \end{aligned} \quad (8)$$

Интегрируя (8) по r от r_1 до r_2 и заменяя $n(\xi)$ на $\xi/\|\xi\|$, получим

$$\begin{aligned} (r_2 - r_1) f(0, t) = & \int_0^t \int_{D_{r_1, r_2}} \langle f'(\xi, \tau), A^2 \xi \rangle \|\xi\|^{-1} p_{2(t-\tau)} (d\xi) d\tau + \\ & + \int_0^t \int_{D_{r_1, r_2}} f(\xi, \tau) \|\xi\| (2(t-\tau))^{-1} p_{2(t-\tau)} (d\xi) d\tau + \\ & + \int_{r_1}^{r_2} \int_{D_r} f(\xi, 0) p_{2t} (d\xi) dr, \end{aligned} \quad (9)$$

где $D_{r_1, r_2} = \bigcup_{r_1 < r < r_2} S_r$. Пользуясь формулой интегрирования по частям

$$\int_{D_{r_1, r_2}} d_{e_i} (f\mu) = \int_{S_{r_2}} f(n, e_i) \mu^{S_{r_2}} - \int_{S_{r_1}} f(n, e_i) \mu^{S_{r_1}},$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{D_{r_1, r_2}} \langle f'(\xi, \tau), A^2 \xi \rangle \|\xi\|^{-1} p_{2(t-\tau)} (d\xi) = & \int_{S_{r_2}} f(\xi, \tau) \gamma(\xi) p_{2(t-\tau)}^{S_{r_2}} (d\xi) - \\ & - \int_{S_{r_1}} f(\xi, \tau) \gamma(\xi) p_{2(t-\tau)}^{S_{r_1}} (d\xi) - \int_{D_{r_1, r_2}} f(\xi, \tau) \times \\ & \times \left[- \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \|\xi\|^{-1} + \gamma(\xi) \|\xi\|^{-1} + \|\xi\| (2(t-\tau))^{-1} \right] p_{2(t-\tau)} (d\xi). \end{aligned} \quad (10)$$

Меняя в последнем слагаемом в правой части (9) порядок интегрирования, подставляя (10), устремляя r_1 к нулю и заменяя r_2 на r , получим

$$rf(0, t) = \int_0^t \int_{S_r} (f, \tau) \gamma(\xi) p_{2(t-\tau)}^{S_r} (d\xi) d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^t \int_{D_r} f(\xi, \tau) [-\|A\|_2^2 \|\xi\|^{-1} + \gamma(\xi) \|\xi\|^{-1} + \|\xi\| (t - \tau)^{-1}] \times \\
& \times p_{2(t-\tau)}(d\xi) d\tau + \int_{D_r} (r - \|\xi\|) f(\xi, 0) p_{2t}(d\xi). \quad (11)
\end{aligned}$$

Умножая (11) на $q(r)$ и интегрируя по r от 0 до λ , получим после преобразований

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\lambda r q(r) dr \right) f(0, t) &= \int_0^t \int_{D_\lambda} f(\xi, \tau) \gamma(\xi) q(\|\xi\|) \times \\
&\times p_{2(t-\tau)}(d\xi) d\tau + \int_0^t \int_{D_\lambda} f(\xi, \tau) b_\lambda(\|\xi\|) \times \\
&\times [-\|A\|_2^2 \|\xi\|^{-1} + \gamma(\xi) \|\xi\|^{-1} + \|\xi\| (t - \tau)^{-1}] p_{2(t-\tau)}(d\xi) d\tau + \\
&+ \int_{D_\lambda} f(\xi, \tau) \left[\int_{\|\xi\|}^\lambda r q(r) dr - \|\xi\| b_\lambda(\|\xi\|) \right] p_{2t}(d\xi),
\end{aligned}$$

а это и есть искомая формула (2) (при $x = 0$).

Список литературы: 1. Беляев А. А. Интегральное представление гармонических функций на гильбертовом пространстве // Вестн. МГУ. Сер. мат.—1982.— № 6.— С. 44—47. 2. Беляев А. А. Теорема о среднем для функций, гармонических в области гильбертова пространства // Вестн. МГУ. Сер. мат.—1982, № 5.— С. 32—35. 3. Угланов А. В. Поверхностные интегралы в банаховом пространстве // Мат. сб.—1979.—110, № 2.— С. 189—217. 4. Смолянов О. Г. Анализ в топологических линейных пространствах и его приложения.— М.: Изд-во МГУ, 1979.—86 с. 5. Норин Н. В. Тепловые потенциалы на гильбертовом пространстве // Мат. заметки.—1984.—35, № 4.— С. 531—548. 6. Авербух В. И. и др. Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. 1. Дифференцируемые меры // В. И. Авербух, О. Г. Смолянов, С. В. Фомин // Науч. тр. Моск. мат. об-во.—1975.—24.— С. 173—174.

Поступила в редколлегию 12.06.85

УДК 517.53

Д. Е. ПАПУШ

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ С «ПЛОСКИМИ» НУЛЯМИ

Здесь в основном будет рассматриваться связь роста целой функции $f(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, с распределением ее множества нулей $Z_f = \{z: f(z) = 0\}$ в случае, когда Z_f имеет простейшую геометрическую структуру. Именно в дальнейшем всюду предполагается,

что $f(z)$ имеет «плоские» нули, т. е. $Z_f = \bigcup_{k=1}^{\infty} H_k$ (1), где $H_k = \{z: \langle z, e^k \rangle = 1\}$ — гиперплоскость. Здесь $e^k \in C^n$, $\langle z, w \rangle = z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$. Этот класс функций, рассмотренный впервые, по-видимому, Л. Баумгартнером (1914), изучался в работах Л. Грумена [1], Е. Н. Бута (1974), Л. И. Ронкина (1979), А. Б. Секерина (1981). Основное достоинство функций этого класса заключается в том, что их нулевые множества допускают естественную прямую параметризацию посредством последовательностей точек $a^k = e^k |e^k|^{-2}$ (e^k из (1)), являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных из начала координат на гиперплоскости H_k . В этом случае в качестве характеристик распределения множества нулей функции $f(z)$ можно рассматривать характеристики распределения указанных точек; при этом выявляется достаточно полная аналогия с одномерным случаем, когда считающая функция корней также есть характеристика дискретного множества точек.

Приводимые в этой заметке факты о связи роста функции $f(z)$ с распределением точек a_k большей частью вполне элементарны и могут быть получены из общих теорем путем соответствующих характеристик. Однако и эти факты, приводимые почти без доказательства, необходимы для последующего изучения функций с «плоскими» нулями. В конце заметки рассматривается вопрос об эквивалентности двух определений полной регулярности роста. Этот вопрос отличен по своему характеру от упомянутых выше. Полученное утверждение доказывается хотя и коротко, но с привлечением весьма тонких теорем Грумена, Азарина и Фаворова.

1°. Обозначим число точек a^k в шаре радиуса t через $n(t)$. Пусть далее $M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$; $\rho = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}$ — порядок роста функции $f(z)$, $\rho_1 = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r}$ — порядок считающей функции. Считая, что $\rho_1 < \infty$, обозначим $\pi(z) = \prod_{k=1}^{\infty} G(\langle z, a^k | a^k |^{-2} \rangle, \rho)$ (2), где $G(u, \rho) = (1-u) \exp(u + u^2/2 + \dots + u^\rho/\rho)$ — первичный множитель Вейерштрасса, $\rho \in N$ определено условиями:

$$\sum |a^k|^{-\rho} = \infty, \quad \sum |a^k|^{-\rho-1} < \infty. \quad (2')$$

Следующие утверждения почти дословно переносятся на наш случай из одномерной ситуации (см. [2, гл. 1]).

Предложение 1. $\rho_1 = \inf \{\lambda \in R^+ : \sum |a^k|^{-\lambda} < \infty\} = \inf \{\lambda \in R^+ : \int_0^\infty \frac{n(t) dt}{t^{1+\lambda}} < \infty\}.$

Предложение 2. *Имеет место оценка:*

$$\ln |\pi(z)| \leq c_p r^{p+1} \int_0^\infty \left\{ \frac{p}{(t+r)t^{p+1}} + \frac{1}{(t+r)^2 t^p} \right\} n(t) dt. \quad (3)$$

Предложение 3. *Для канонического произведения вида (2) $\rho \leq \rho_1$.*

2°. Для произвольной целой функции $f(z)$, $f(0) \neq 0$, справедлива формула

$$\int_0^R V(t) t^{1-2n} dt = \frac{1}{\theta_{2n-1} R^{2n-1}} \int_{S_R} \ln |f(z)| d\sigma_z + c_f,$$

называемая формулой Иенсена (см., напр., [3, теор. 1.2.2]). Здесь $V(t)$ — объем нулевого множества функции $f(z)$ в шаре $B_t = \{z: |z| < t\}$. Для функций с «плоскими» нулями, как легко видеть,

$$V(t) = (2n-2) \sigma_{2n-2} \int_0^t s (t^2 - s^2)^{n-2} n(s) ds$$

и формула Иенсена принимает вид

$$\begin{aligned} (2n-2) \sigma_{2n-2} \int_0^r K(t, r) n(t) dt = \\ = \frac{1}{\theta_{2n-1} r^{2n-1}} \int_{S_r} \ln |f(z)| d\sigma_z + c, \end{aligned} \quad (4)$$

где $K(t, r) = t \int_r^t s^{1-2n} (s^2 - t^2) ds$, σ_m и θ_m — объем единичного шара и площадь единичной сферы в пространстве R^m соответственно.

Из (4) легко следует

Лемма 1. *Если $f(z)$ — функция с «плоскими» нулями, то имеет место оценка:*

$$\ln M_f(r) \geq c_1 n \left(\frac{r}{2} \right) + c_2,$$

где $c_1 = 4^{-n-1} (n-1) \sigma_{2n-2}$, $c_2 = \ln |f(0)|$. Из этой леммы заключаем, что для любой целой функции с «плоскими» нулями имеет место неравенство $\rho_1 \leq \rho$. С учетом предложения 3 это приводит к следующему утверждению:

Теорема 1. *Для канонического произведения вида (2) $\rho_1 = \rho$.*

3°. Имеет место следующий аналог одномерной теоремы Адамара:

Теорема 2. Пусть целая функция с «плоскими» нулями $f(z)$ имеет конечный порядок и $f(0) \neq 0$. Тогда она представляется в виде

$$f(z) = \exp(P(z)) \prod_{k=1}^{\infty} G(\langle z, a^k | a^k |^{-2}, \rho),$$

где ρ выбрано из условий (2'), а $P(z)$ — аналитический многочлен степени не выше $[\rho]$.

Доказательство. Утверждение теоремы легко следует из оценки (3) и теоремы об оценке частного (в предположении его аналитичности) двух аналитических функций (см., напр., [3, лемма 1.3.2]). Заметим также, что теорема 2 может быть получена как частный случай теоремы Лелона о факторизации (см. [3, теор. 4.3.1]).

4°. Рассмотрим теперь вопрос о типе канонического произведения $\pi(z)$. Пусть

$$\sigma_f = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}; \quad \Delta_f = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r)}{r^\rho}.$$

С одной стороны, из леммы 1 следует

Предложение 4. Для любой целой функции с «плоскими» нулями $\Delta_f \leq c_3 \sigma_f$, где $c_3 = 2^{\rho} c_1^{-1}$, c_1 — из леммы 1.

Так же, как и в случае одного переменного, из оценки (3) получаем следующие два утверждения.

Предложение 5. Если ρ — порядок канонического произведения — нецелое число, то величины σ_π и Δ_π одновременно конечны, равны нулю или бесконечности.

Предложение 6. Если $\rho = p + 1$, где p выбрано посредством (2'), то $\sigma_\pi = \Delta_\pi = 0$.

Несколько более сложным является случай $\rho = p$. Для его рассмотрения воспользуемся теоремой Брело — Линделефа о типе субгармонической функции. В силу этой теоремы (см. [4, с. 26]) из условия $\sigma_\pi < \infty$ (соответственно $\sigma_\pi = 0$) вытекает ограниченность (соответственно равенство нулю) величины

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \sup_{|z|=1} \int_{|w| < r} \frac{B_p((z, w))}{|w|^{p+2n-2}} d\mu(w), \quad (5)$$

где μ — мера, ассоциированная по Риссу субгармонической функции $\ln |\pi(z)|$, $B_p(\psi)$ — полином Гегенбауэра.

Для целой функции с «плоскими» нулями условия (5) оказываются возможным заменить конечным числом условий, налагаемых непосредственно на последовательность точек $\{a^k\}$. Эти условия есть аналог для многомерной ситуации обычного условия Линделефа для случая одного переменного.

Условимся говорить, что для последовательности $\{a^k\}$ с показателем сходимости $\rho_1 = p$ (ρ_1 — из предложения 1, p — из усло-

вия (2') выполнено условие A (соответственно условие A_0), если

$$\forall (s_1, \dots, s_n) \in Z_+^n : s_1 + \dots + s_n = p$$

величина

$$D_s \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \left| \sum_{|a^k| < r} \frac{(a_1^k)^{s_1} \dots (a_n^k)^{s_n}}{|a^k|^{2p}} \right| < \infty$$

(соответственно $D_s = 0$).

Теорема 3. Для канонического произведения $\pi(z)$ вида (2) при $p = p$ справедливы импликации:

$$\sigma_\pi < \infty \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_\pi < \infty \\ \text{выполнено } A \end{cases}; \quad \sigma_\pi = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_\pi = 0 \\ \text{выполнено } A_0 \end{cases}.$$

Доказательство.

а) Пусть $\Delta_\pi < \infty$ и выполнено A . Обозначим $|z| = r$. Имеем

$$\ln |\pi(z)| \leq \sum_{|a^k| < r} \ln \left| G \left(\langle z, \frac{a^k}{|a^k|^2} \rangle, p-1 \right) \right| + \sum_{|a^k| > r} \ln \left| G \left(\langle z, \frac{a^k}{|a^k|^2} \rangle, p \right) \right| + \frac{1}{p} \left| \sum_{|a^k| < r} \langle z, \frac{a^k}{|a^k|^2} \rangle^p \right| \leq r^p \int_0^r \frac{dn(t)}{t^{p-1}(t+r)} + r^{p+1} \times$$

$$\times \int_r^\infty \frac{dn(t)}{t^p(t+r)} + \frac{1}{p} \left| \sum_{|a^k| < r} \langle z, \frac{a^k}{|a^k|^2} \rangle^p \right|. \text{ Обозначим } z|z|^{-1} = \xi \in S_1.$$

Тогда $\frac{\ln |\pi(z)|}{|z|^p} \leq \frac{1}{r} \int_0^r \frac{pn(t) dt}{t^p} + r \int_r^\infty \frac{dn(t)}{t^{p+2}} + \frac{1}{p} \left| \sum_{|a^k| < r} \langle \xi, \frac{a^k}{|a^k|^2} \rangle^p \right| \leq$

$$\leq (2p+1) \Delta_\pi + o(1) + \frac{1}{p} \left| \sum_{|a^k| < r} \langle \xi, \frac{a^k}{|a^k|^2} \rangle^p \right| \leq (2p+1) \Delta_\pi + o(1) +$$

$$+ c(p, n) \sup_{\substack{s_1 + \dots + s_n = p \\ s_j \geq 0}} \left| \sum_{|a^k| < r} \frac{(a_1^k)^{s_1} \dots (a_n^k)^{s_n}}{|a^k|^{2p}} \right|. \text{ Переходя в последнем}$$

неравенстве к $\lim$ при $r \rightarrow \infty$, получим $\sigma_\pi < \infty$. Аналогично доказывается импликация $(\Delta_\pi = 0 \wedge A_0) \Rightarrow \sigma_\pi = 0$.

б) Пусть $\sigma_\pi < \infty$; докажем, что выполнено условие A . Заметим, что функция $|z|^p \int_{|w| < R} \frac{B_p((w, \hat{z})) d\mu(w)}{|w|^{p+2n-2}}$ есть однородный гармонический многочлен степени p . Поэтому условия на величину (5) можно заменить условием ограниченности (соответственно равенства нулю) величины

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \sup_{|z|=1} \left| \int_{|w| < R} \frac{B_p((w, \hat{z})) d\mu(w)}{|w|^{p+2n-2}} \right|. \quad (6)$$

Воспользуемся теперь следующим представлением функции $B_p(\psi)$ (см., напр., [3, с. 74]):

$$B_p(\psi) = \sum_{k+l=p} A_k^{n-1} A_l^{n-1} \cos(k-l)\psi, \quad (7)$$

где $A_\alpha^n = \frac{\alpha(\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{n!}$. Переразлагая $\cos(k-l)\psi$ по степеням косинуса, получаем, что (7) записывается в виде

$$B_p(\psi) = \sum_{k=0}^{[p/2]} \gamma_k \cos^{p-2k} \psi, \quad (8)$$

где $\gamma_0 \neq 0$.

Зафиксируем временно точку $z \in S_1$ и для $w \in C^n$ обозначим $\langle w, z \rangle = \alpha(w, z) + i\beta(w, z)$. Тогда $\operatorname{Re} \langle w, e^{i\theta} z \rangle = \alpha \cos \theta + \beta \sin \theta$. Отметим, что $\cos(\widehat{w, e^{i\theta} z}) = |w|^{-1} \operatorname{Re} \langle w, e^{i\theta} z \rangle$. Следовательно,

$$B_p(\widehat{w, e^{i\theta} z}) = \sum_{k=0}^{[p/2]} \gamma_k \frac{(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)^{p-2k}}{|w|^{p-2k}}.$$

Из условий на величину (6) тогда следует, что

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{|w| < R} \sum_{k=0}^{[p/2]} \gamma_k |w|^{2k+2-2p-2n} (\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)^{p-2k} d\mu(w) \right| < \infty. \quad (9)$$

Изучим сумму, стоящую под знаком интеграла. Рассмотрим случай $p = 2q$; случай нечетного порядка аналогичен. Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^q \gamma_k \frac{(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)^{p-2k}}{|w|^{2p+2n-2k-2}} &= \sum_{k=0}^q \gamma_k \frac{(\alpha \cos \theta + \beta \sin \theta)^{p-2k}}{|w|^{2p+2n-2k-2}} \times \\ &\times (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^k = \sum_{j=0}^{2q} \lambda_j(w, z) \cos^{2q-j} \theta \sin^j \theta |w|^{2-2p-2n}. \end{aligned} \quad (10)$$

В силу того что система функций $\cos^{2q-j} \theta \sin^j \theta = \cos^{2q} \theta \operatorname{tg}^j \theta$, $j = 0, 1, \dots, 2q$, линейно независима, выполнение (9) равносильно выполнению условий

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{|w| < R} \frac{\lambda_j(w, z) d\mu(w)}{|w|^{2p+2n-2}} \right| < \infty \quad (11)$$

$\forall j = 0, 1, \dots, 2q$, где $\lambda_j(w, z)$

— коэффициенты из представления (10).

Проводя элементарные, но громоздкие вычисления, нетрудно убедиться в справедливости следующих формул:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^q (-1)^j \lambda_{2j}(\omega, z) &= \gamma_0 \sum_{j=0}^q (-1)^j C_{2q}^{2j} \alpha^{2q-2j} \beta^{2j} = \gamma_0 \operatorname{Re} (\alpha + i\beta)^{2q}; \\ \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j \lambda_{2j+1}(\omega, z) &= \gamma_0 \sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j C_{2q}^{2j+1} \alpha^{2q-2j-1} \beta^{2j+1} = \\ &= \gamma_0 \operatorname{Im} (\alpha + i\beta)^{2q}.\end{aligned}\quad (12)$$

Следовательно, в силу (11) и (12) выполняется условие

$$\begin{aligned}\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{|w| < R} \frac{[\alpha(\omega, z) + i\beta(\omega, z)]^p}{|w|^{2p+2n-2}} d\mu(\omega) \right| &< \infty, \\ \text{т. е. } \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{|w| < R} \frac{\langle \omega, z \rangle^p d\mu(\omega)}{|w|^{2p+2n-2}} \right| &< \infty \quad \forall z \in S_1.\end{aligned}$$

Как легко видеть, отсюда следует, что $\forall (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$s_1 + \dots + s_n = p \Rightarrow \overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \left| \int_{|w| < R} \frac{w_1^{s_1} \dots w_n^{s_n}}{|w|^{2p+2n-2}} d\mu(\omega) \right| < \infty. \quad (13)$$

Воспользуемся условиями (13) для целых функций с «плоскими» нулями. В этом случае мера μ имеет вид

$$d\mu(\omega) |_{\{z: |z| < R\}} = \sum_{|a^k| < R} d\omega^{n-1}(\lambda^k) |_{\{|\lambda^k| < \sqrt{R^2 - |a^k|^2}\}},$$

где $d\omega^{n-1}$ — элемент евклидова объема в пространстве C^{n-1} . Учитывая это, получаем, что

$$\int_{|w| < R} \frac{w_1^{s_1} \dots w_n^{s_n}}{|w|^{2p+2n-2}} d\mu(\omega) = \sum_{|a^k| < R} \frac{(a_1^k)^{s_1} \dots (a_n^k)^{s_n}}{|a^k|^{2p}} + O(1)$$

при $R \rightarrow \infty$, причем величина $O(1)$ оценивается через размерность пространства, порядок и тип функции $\pi(z)$. Отсюда и из (13) следует, что

$$\overline{\lim}_{R \rightarrow \infty} \left| \sum_{|a^k| < R} \frac{(a_1^k)^{s_1} \dots (a_n^k)^{s_n}}{|a^k|^{2p}} \right| < \infty,$$

т. е. в рассматриваемом случае выполнено условие А.

Импликация $\sigma_\pi = 0 \Rightarrow A_0$ доказывается аналогично. Теорема 3 доказана.

5°. В теории функций одного и нескольких переменных видное место занимает теория функций вполне регулярного роста (в. р. р.). При этом для случая многих переменных существует два различных определения полной регулярности роста. Именно, следуя обзору Л. И. Ронкина «Целые функции» в сб. «Современные проблемы

математики. Фундаментальные направления», т. 9, назовем целую функцию $f(z)$, $z \in C^n$, функцией I-в. р. р., если $\forall \xi \in S_1$ функция $f_\xi(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} f(\lambda_\xi)$ одного комплексного переменного λ имеет вполне регулярный рост в смысле Левина—Пфлюгера* (см. [2, с. 182]). Целую функцию $f(z)$ назовем функцией II — в. р. р., если $\ln |f(z)|$ — субгармоническая функция в. р. р.** Известно (см. [5, с. 253]), что из условия I — в. р. р. следует условие II — в. р. р. Обратное утверждение неверно; соответствующий пример был построен С. Ю. Фаворовым (1982). Мы покажем сейчас, что для функций с «плоскими» нулями условия I — в. р. р. и II — в. р. р. эквивалентны.

Теорема 4. Если $f(z)$ — целая функция конечного порядка ρ с «плоскими» нулями, обладающая свойством II — в. р. р., то $f(z)$ обладает и свойством I — в. р. р.

Доказательство. Мы будем основываться на следующих утверждениях:

Теорема А [1]. Радиальный индикатор $L_r(f; z) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} t^{-\rho} \times \ln |f(tz)|$ целой функции $f(z)$ с «плоскими» нулями есть непрерывная функция.

Теорема Б [6]*.** Для того чтобы целая функция $f(z)$ имела II — в. р. р. при порядке ρ , необходимо и достаточно, чтобы для любой целой функции не выше чем нормального типа при порядке ρ имело место соотношение $L_r^*(fg; z) = L_r^*(f; z) + L_r^*(g; z)$, где $L_r^*(f; z)$ — регуляризованный радиальный индикатор функции $f(z)$.

Пусть $f(z)$ — целая функция II — в. р. р. с «плоскими» нулями, $\xi \in S_1$. Рассмотрим в комплексной плоскости $\{\lambda_\xi, \lambda \in C^1\}$ произвольную целую функцию $g_\xi(\lambda)$ не выше чем нормального типа при порядке ρ . Положим $G(z) = g_\xi(\langle z, \xi \rangle)$; тем самым мы продолжили функцию $g_\xi(\lambda)$ во все пространство C^n . Очевидно, что функции $G(z)$ и $G(z)f(z)$ будут при этом целыми функциями с «плоскими» нулями не выше чем нормального типа при порядке ρ . Следовательно, по теореме Б, $L_r^*(fG; z) = L_r^*(f; z) + L_r^*(G; z)$. Но в силу теоремы А все функции, фигурирующие в последнем равенстве, непрерывны до взятия регуляризации, поэтому $L_r(fG; z) = L_r(f; z) + L_r(G; z)$. Сужая это равенство на комплексную плоскость $\{\lambda_\xi, \lambda \in C^1\}$, получим $h_{f_\xi}(\theta) + h_{g_\xi}(\theta) = h_{fg_\xi}(\theta)$, где $h_\varphi(\theta)$ — обычный индикатор целой функции φ одного переменного. Поскольку это соотношение выполнено для любой целой функции $g_\xi(\lambda)$ не

* Это определение принадлежит Л. Грумену (1971).

** Определение субгармонической функции в. р. р. принадлежит В. С. Азарину (см. [4, с. 39]).

*** Для случая $n = 1$ теорема Б (точнее, та ее часть, которая относится к достаточности) получена В. С. Азариним (1966).

ныше чем нормального типа при порядке ρ , то по теореме Б для $n = 1$ $f_\zeta(\lambda)$ есть целая функция в. р. р. $\forall \zeta \in S_1$. Это означает, что $f(z)$ — целая функция I — в. р. р. Теорема доказана.

Список литературы: 1. Gruman L. The regularity of growth of entire functions whose zeros are hyperplanes // Arkiv. mat.—1972.—10, № 1.—С. 23—31. 2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехтеоретиздат, 1956.—632 с. 3. Ронкин Л. И. Введение в теорию целых функций многих переменных.—М.: Наука, 1971.—430 с. 4. Азарин В. С. Теория роста субгармонических функций.—Х.: Вища шк. Изд-во при ХГУ.—1982.—74 с. 5. Агранович П. З., Ронкин Л. И. О функциях вполне регулярного роста многих переменных // Annales Polonici Mathematici.—1981.—С. 239—254. 6. Фаворов С. Ю. О сложении индикаторов целых и субгармонических функций многих переменных // Мат. сб.—1978.—105 (147).—С. 128—140.

Поступила в редколлегию 02.10.85

УДК 517.53

С. В. ЛЬВОВА

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В ПОЛУПЛОСКОСТИ

1. В работе [1] мы рассматривали задачу простой интерполяции в полуплоскости в данной работе, примыкающей к [1], исследовали задачу кратной интерполяции в полуплоскости.

Обозначим через $\|z\|$ диаметр окружности, которая касается вещественной оси в начале координат и которой принадлежит точка z . Таким образом, $z = |z|e^{i\varphi} = \|z\|e^{i\varphi}\sin\varphi$, $0 < \varphi < \pi$. Далее обозначим $M(r) = \max_{0 < \varphi < \pi} |f(re^{i\varphi}\sin\varphi)|$. Всюду под порядком и типом функции $f(z)$ будем понимать порядок и тип функции $\ln M(r)$.

Обозначим через $[\rho, \infty)^+$ класс голоморфных в полуплоскости C^+ функций не выше, чем нормального типа при порядке ρ . Множество $D = \{\lambda_k, q_k\}$ точек $\{\lambda_k\} = \Lambda$, $\lambda_k \in C^+$ с кратностями $q_k \in N$ будем называть дивизором.

Дивизор $\{\lambda_k, q_k\}$ называется интерполяционным в классе $[\rho, \infty)^+$, если для любой последовательности комплексных чисел $\{a_{k,j}\}$, $j = 1 \dots q_k$, $k = 1, 2, \dots$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_k\|^{-\rho} \cdot \ln \max_{1 \leq j \leq q_k} \frac{|a_{k,j}|}{(j-1)!} < \infty, \quad (1)$$

найдется функция $F(z)$ класса $[\rho, \infty)^+$ такая, что $F^{(j-1)}(\lambda_k) = a_{k,j}$, $j = 1, \dots, q_k$, $k = 1, 2, \dots$.

Обозначим через $n(r, D)$ число точек D с учетом кратности в круге $\|z\| = r$. Предположим, что точка нуль не принадлежит замыканию множества $\{\lambda_k\}$ и

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n(r, D)}{r^\rho} < \infty. \quad (2)$$

Тогда функция $\pi(z) = \prod_{\lambda_k \in D} \{E_p(z, \lambda_k)\}^{q_k}$, где $E_p(z, \lambda_k) = \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \times$
 $\times \left(1 - \frac{z}{\bar{\lambda}_k}\right)^{-1} \cdot \exp\left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{i} \left(\frac{z\left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\bar{\lambda}_k}\right)}{1 - \frac{z}{\lambda_k}}\right)^i\right)$ корректно определена в C^*

(см. [2]) и для нее справедлива оценка $\ln |\pi(z)| \leq A_1 \|z\|^p$. * В работе получен следующий результат.

Теорема. Для того чтобы дивизор D , удовлетворяющий условию (1), был интерполяционным в классе $[\rho, \infty)^+$ ($\rho > 1$), необходимо и достаточно выполнения условия (2) и условия

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_k\|^{-\rho} \cdot \ln \frac{q_k!}{|\pi^{(q_k)}(\lambda_k)|} < \infty. \quad (3)$$

Доказательство этой теоремы существенно опирается на следующее утверждение из [3].

Теорема А. Пусть G — открытое множество в C , $\varphi(z)$ — субгармоническая функция в G , $\gamma(z)$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию $\int_G |\gamma|^2 \cdot \exp(-\varphi) d\lambda < \infty$. Тогда существует функция $\beta(z)$, удовлетворяющая условию

$$\int_G |\beta|^2 \exp(-\varphi) (1 + |z|^2)^{-2} d\lambda < 2^{-1} \cdot M,$$

и такая, что $\frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}} = \gamma$ (в смысле распределений). Если $\gamma(z) \in C^\infty(G)$, то и $\beta(z) \in C^\infty(G)$.

2. Доказательство достаточности. Приведем сначала несколько вспомогательных утверждений:

1) Функция $\|z\|^\rho$ при $\rho > 0$ является субгармонической в C^* (см. [1]).

2) $\forall z: |z - s| \leq \frac{1}{2} \operatorname{Im} s$, $s \in C^+$ справедливо неравенство (см. [1]):

$$2^{-1} \cdot \|s\| < \|z\| < 2 \cdot \|s\|. \quad (2.1)$$

Лемма 2.1 [1, 3]. Пусть $g(z)$ — функция, аналитическая в круге $|z| < r$ и пусть $g(z)$ имеет в точке $z = 0$ нуль кратности p , а в точке $z = a$ нуль кратности q , $0 < |a| < r$. Тогда

$$|a|^q \geq \frac{|q^{(p)}(0)|}{p!} \cdot r^{p+q} \cdot \left\{ \max_{|z| < r} |g(z)| \right\}^{-1}. \quad (2.2)$$

* Здесь и далее A_i — константы.

Теперь введем обозначения: $d_k = \min \{1/2 \operatorname{Im} \lambda_k, \operatorname{dist}(\lambda_k, \{\lambda_j\}/\lambda_k)\}$; $\gamma_k = q_k! \{ \pi^{(q_k)}(\lambda_k) \}^{-1}$; $m_k(r) = \sup \{ | \gamma_i |^{-1} (\operatorname{Im} \lambda_i / 2)^{q_i} : | \lambda_i - \lambda_k | < r \}$; $M_k = \max_{|z - \lambda_k| < d_k} | \pi(z) |$;

$$B_k(z) = \sum_{j=1}^{q_k} \frac{a_{k,j}}{(j-1)!} (z - \lambda_k)^{j-1}; \quad (2.3)$$

$$a_k = \max \frac{|a_{k,j}|}{(j-1)!};$$

$$l_k(r) = \sup \{ |B_k(z)| : |z - \lambda_k| \leq r \}.$$

Лемма 2.2. Для z таких, что $|z - \lambda_k| \in \left[\frac{d_k}{4}, \frac{d_k}{2} \right]$ справедлива оценка

$$| \pi(z) | \geq (1/4)^{q_k} \cdot d_k^{3q_k} \cdot | \gamma_k |^{-3} \cdot M_k^{-2}. \quad (2.4)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\varphi_1(z) = d_k^{-q_k} \times \times z^{-q_k} \pi(\lambda_k + d_k z) \cdot \gamma_k$. Используя неравенство Каратеодори и оценивая максимум функции $| \varphi_1(z) |$ в круге $|z| \leq 1$, получаем неравенство (2.4).

Заметим, что в силу того, что точка нуль не принадлежит замыканию множества Λ , существует $\delta > 0$ такое, что $| \lambda_k | \geq \delta$, $k = 1, 2, \dots$ и функция $\pi(z)$ голоморфна в круге $|z| < \delta$. Обозначим $G = C^+ \cup \{z : |z| < \delta\}$.

Лемма 2.3. Пусть $d_k = \operatorname{dist}(\lambda_k, \{\lambda_j\}/\lambda_k)$, тогда $\forall k$ справедливо неравенство

$$d_k^{q_k} \geq \exp(-A_2 \| \lambda_k \|^p) \cdot \left(\frac{\delta^2}{4 \| \lambda_k \|} \right)^{q_k} \quad (2.5)$$

Доказательство. Полагая $a = \lambda_k - \lambda_i$, применим лемму 2.1 к функции $g(z) = \pi(\lambda_i + z)$ в круге $r = 1/2 \operatorname{Im} \lambda_i$. Учитывая рост функции $\pi(z)$ и неравенство (2.1), получим, что

$$d_k^{q_k} \geq \frac{|\pi^{(q_i)}(\lambda_i)|}{q_i!} \cdot (1/2 \operatorname{Im} \lambda_i)^{q_i + q_k} \cdot \exp(-2^p \cdot A_1 \| \lambda_i \|^p).$$

Отсюда ввиду (2) и (3) и того, что, по предположению леммы, $\operatorname{Im} \lambda_i \geq 1/2 \operatorname{Im} \lambda_k = \frac{1}{2} \frac{|\lambda_k|^2}{\| \lambda_k \|} \geq \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\| \lambda_k \|}$, а для величины $\| \lambda_i \|$ справедливо неравенство (2.1), следует неравенство (2.5).

Определим функции $\chi_k(z) \in C^\infty(C^+)$ так, чтобы $\chi_k(z) \in [0, 1]$, $\forall z \in C^+$:

$$\chi_k(z) = 1 \text{ при } |z - \lambda_k| \leq \frac{d_k}{4}; \quad \chi_k(z) = 0 \text{ при } |z - \lambda_k| \geq \frac{d_k}{2};$$

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial z} \leq A_3 \cdot d_k^{-1}. \quad (2.6)$$

Положим

$$F(z) = \sum_k \chi_k(z) \cdot B_k(z) - \beta(z) \cdot \pi(z), \quad (2.7)$$

где $\pi(z)$ — каноническое произведение, построенное по дивизору D , а функция $\beta(z)$ будет далее выбрана так, чтобы функция $F(z)$ была голоморфна в области G и имела нужный рост.

Рассмотрим уравнение $\bar{\partial}\beta = \pi^{-1} \cdot \sum_k \bar{\partial}\chi_k \cdot B_k = \alpha(z)$. В сумме $\sum_k \bar{\partial}\chi_k \cdot B_k$ при $|z - \lambda_k| \in \left[\frac{d_k}{4}, \frac{d_k}{2}\right]$ лишь одно слагаемое отлично от нуля, поэтому при таких z имеем $|\alpha(z)| \leq |\pi(z)|^{-1} |\bar{\partial}\chi_k| |\partial\chi_k| \cdot |B_k|$.

Отсюда, используя оценки (2.4), (2.6), (2.3), оценку роста функции $\pi(z)$, неравенства (1), (2), (3) и (2.1), получаем

$$|\alpha(z)| \leq c_1 \cdot \exp(A_4 \cdot \|z\|^p). \quad (2.8)$$

Далее, так же, как и выше, можно показать, что из неравенств (2.1) и (2.3) следует, что $\forall z: |z - \lambda_k| \leq d_k$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_k \chi_k(z) \cdot B_k(z) \right| \leq \exp(A_5 \|z\|^p). \quad (2.9)$$

Выберем теперь функцию $\varphi(z)$, так, чтобы выполнялось условие $\int_G |\alpha|^2 \cdot \exp(-\varphi) d\lambda < \infty$. Поскольку $\alpha(z) = 0$ при $|z| < \delta$, то

$$\int_G |\alpha|^2 \exp(-\varphi(z)) d\lambda = \int_{G \setminus \{|z| < \delta\}} |\alpha|^2 \cdot \exp(-\varphi(z)) d\lambda.$$

Для $|z| > \delta$ положим $\varphi(z) = D_1 \|z\|^p$, где $D_1 > 4(A_4 + A_5)$, а в круге $|z| \leq \delta$ определим $\varphi(z)$ произвольно, лишь бы функция $\varphi(z)$ была субгармонична и непрерывна в G . Нетрудно видеть, что при таком выборе функции $\varphi(z)$ условия теоремы A выполнены и, следовательно, существует функция $\beta(z) \in C^\infty(G)$ такая, что $\bar{\partial}\beta = \alpha$ и $\int_G |\beta|^2 \cdot \exp(-\varphi(z)) (1 + |z|^2)^{-2} d\lambda < \infty$.

Тем самым мы показали, что функция $F(z)$ голоморфна в области G . Покажем, что функция $F(z)$ имеет нужный рост. В силу голоморфности $F(z)$ имеем

$$\begin{aligned} |F(z)|^2 &\leq \frac{4}{\pi (1mz)^2} \int_{|z-z| \leq 1mz/2} |F(\zeta)|^2 d\lambda \leq \frac{4}{\pi (1mz)^2} \times \\ &\times \exp\left\{ \max_{|z-z| \leq 1mz/2} |\psi(z)| \right\} \cdot \int_{|z-z| \leq 1mz/2} |F(\zeta)|^2 \cdot \exp(-\varphi(\zeta)) d\zeta. \end{aligned}$$

Отсюда, положив $\psi(\xi) = 2 \ln(1 + |\xi|^2 + 2D_1 \|\xi\|^\rho)$ и проводя стандартные оценки, получаем

$$|F(z)|^2 \leq C^2 (\operatorname{Im} z)^{-2} \cdot \exp(A_6 \cdot 2^\rho \cdot \|z\|^\rho).$$

Далее, учитывая, что $\operatorname{Im} z > \frac{\delta^2}{4\|z\|}$ при $z \in \mathbb{C}^+$, $|z| > \frac{\delta}{2}$, а при $z \in \mathbb{C}^+$, $|z| \leq \frac{\delta}{2}$, $F(z)$ голоморфна в области G , получаем: функция $F(z)$ принадлежит классу $[\rho, \infty)^+$.

3. Доказательство необходимости. Доказательство проводим методом от «противного».

Пусть D — интерполяционный дивизор, но условие (3) не выполнено, т. е. существует подпоследовательность $\{\gamma_l\} = \{\lambda_{k_l}\} \subset \Lambda$ такая, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|\gamma_l\|^{-\rho} \cdot \ln \frac{q_l!}{|\pi^{q_l}(\gamma_l)|} = \infty, \quad (3.1)$$

где q_l — кратность γ_l .

Пусть функция $F(z)$ такова, что $ak_l q_l = q_l!$ и $a_{k,j} = 0$ при $\lambda_{k_j} \notin \{\gamma_l\}$ или $\lambda_{k_j} \in \{\gamma_l\}$, но $j < q_k$. Считаем, не нарушая общности,

$$\|\gamma_1\| = 1, \quad \|\gamma_{l+1}\| < 4\|\gamma_l\|. \quad (3.2)$$

Положим

$$\Omega(z) = \pi_0(z) \cdot \pi^{-1}(z) \cdot F(z), \quad (3.3)$$

где $\pi(z)$ — каноническое произведение, построенное по корням $\{\lambda_k, q_k\}$, а $\pi_0(z) = \prod_{\gamma_l} \left[1 - \frac{z}{\gamma_l}\right] \cdot \left[1 - \frac{z}{\gamma_l}\right]^{-1}$. В силу леммы 4 [1] имеем

$$\ln |\Omega(z)| \leq A_7 \|z\|^\rho. \quad (3.4)$$

Далее, из (3.3) получаем, учитывая, что $F^{(q_l-1)}(\gamma_l) = q_l!$

$$\Omega(\gamma_l) = \pi'_0(\gamma_l) \cdot [\pi^{(q_l)}(\lambda_l)]^{-1} \cdot q_l! \quad (3.5)$$

Так же, как и в ([1] с. 16)), получаем

$$|\pi'_0(\gamma_l)| \geq \operatorname{const} \cdot (\operatorname{Im} \gamma_l)^{-1}.$$

И далее, из (3.4) и (3.5) имеем

$$A_7 \cdot \|\gamma_l\|^\rho \geq \ln |\Omega(\gamma_l)| \geq \operatorname{const} \ln \left[|\pi^{(q_l)}(\gamma_l)|^{-1} \cdot \frac{q_l!}{\operatorname{Im} \gamma_l} \right].$$

Отсюда, учитывая, что $\operatorname{Im} \gamma_l \leq \|\gamma_l\|$, получаем

$$\operatorname{const} \geq \|\gamma_l\|^{-\rho} \cdot \ln \frac{q_l'!}{|\pi^{(q_l')}(q_l)|} + \|\gamma_l\|^{-\rho} \cdot (\ln \|\gamma_l\|)^{-1},$$

что противоречит предположению (3.1). Теорема доказана.

Список литературы: 1. Львова С. В. Об одной задаче интерполяции в полуплоскости. М., 1982.—С. 20. Депон. в ВИНТИ, 1982, № 4496—82, с. 20. 2. Львова С. В. Об одном аналоге канонического произведения Вейерштрасса в полуплоскости.—М., 1982.—С. 13. Деп. в ВИНТИ 1982, № 1417. 3. Berenstein C. A., Taylor B. A. A New look at Interpolation Theory for entire Functions of One Variable.—1979.—33.—Р. 109—143. 4. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций.—М.: Гостехтеоретиздат, 1956.—632 с.

Поступила в редколлегию 11.12.84

УДК 517.982

М. И. ОСТРОВСКИЙ

СРАВНЕНИЕ СЛАБОГО И НЕПРЕРЫВНОГО СВОЙСТВ БАНАХА — САКСА

Настоящая заметка посвящена сравнению следующих двух модификаций свойства Банаха—Сакса.

Определение 1 [1, с. 39]. Говорят, что банахово пространство X обладает слабым свойством Банаха—Сакса (записывается: $X \in WBS$), если каждая слабо сходящаяся к нулю последовательность $\{x_n\} \subset X$ содержит подпоследовательность $\{y_n\}$ такую, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right\|_X = 0.$$

Определение 2. (А. Н. Пличко). Говорят, что банахово пространство X обладает непрерывным свойством Банаха—Сакса (записывается: $X \in CBS$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что любая последовательность $\{x_i\} \subset X$, удовлетворяющая условию $\limsup_{i \rightarrow \infty} |f(x_i)| < \delta(\varepsilon)$ для любого f из единичного шара X^* , содержит подпоследовательность $\{y_i\}$, для которой

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k \right\|_X < \varepsilon.$$

Из полученной Бозами [1, с. 50] характеристики слабого свойства Банаха—Сакса непосредственно вытекает, что из $X \in CBS$

следует $X \in WBS$. Целью настоящей работы является доказательство того, что обратное неверно.

Теорема. *Существует банахово пространство X такое, что $X \in WBS$, но $X \notin CBS$.*

Доказательство. Нам понадобится конструкция пространства Шрейера [1, с. 97]. Множество $A = \{n_1, \dots, n_k\} \subset N$ с $n_1 < \dots < n_k$ назовем допустимым, если $k \leq n_1$. Обозначим через B множество всех допустимых подмножеств в N . Пространство Шрейера S — это пополнение пространства финитных последовательностей вещественных чисел по норме

$$\|x\|_S = \sup_{A \in B} \sum_{i \in A} |x(i)|$$

(через $x(i)$ обозначаем i -й член последовательности x). Ясно, что S содержит l_1 (как множество) и что при $\alpha > 0$ и $\beta \geq 0$ выражение $\alpha \|x\|_{l_1} + \beta \|x\|_S$ задает эквивалентную норму на l_1 .

Введем последовательность норм на l_1 равенствами

$$\|x\|_k = \frac{1}{k+1} \|x\|_{l_1} + \frac{k}{k+1} \|x\|_S; \quad k = 1, 2, \dots$$

Пространство l_1 с нормой $\|\cdot\|_k$ обозначим X_k . Покажем, что прямая сумма $X = (\sum_{k=1}^{\infty} \oplus X_k)_2$ (определение прямой суммы см., например, в [2, с. 12]) и будет искомым пространством.

Сначала покажем, что $X \in WBS$.

Векторы из X будем записывать в виде последовательностей: $x = (x^1, \dots, x^i, \dots)$; $x^i \in X_i$. Последовательности векторов $\{y_i\} \subset X$ и $\{z_i\} \subset X$ будем называть эквивалентными, если $\|y_i - z_i\|_x \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$. Ясно, что сходимости средних Чезаро эквивалентных последовательностей равносильны.

Пусть $\{x_i\}$ — слабо сходящаяся к нулю последовательность из X . Ясно, что она эквивалентна некоторой последовательности $\{y_i\}$ вида

$$y_i = (y_i^1, \dots, y_i^{q(i)}, 0, \dots), \quad y_i^j \in X_j.$$

Поскольку при любом j последовательность $\{y_i^j\}_{i=1}^{\infty}$ является слабо сходящейся к нулю в пространстве X_j , а в X_j слабая и сильная сходимости последовательностей к нулю эквивалентны (для l_1 соответствующий результат имеется в [3, с. 59], для X_j это свойство сохраняется, так как является изоморфно инвариантным), то из $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{y_{k_m}\}_{m=1}^{\infty}$, эквивалентную последовательности $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ следующего вида:

$$\begin{aligned} z_1 &= (z_1^1, \dots, z_1^{p_1}, 0, \dots, 0, 0, \dots), \\ z_2 &= (0, \dots, 0, z_2^{p_1+1}, \dots, z_2^{p_2}, 0, 0, \dots), \\ z_3 &= (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, z_3^{p_2+1}, \dots) \\ &\dots \end{aligned} \quad (1)$$

Ясно, что $\{z_m\}$ тоже слабо сходится к нулю. Поэтому для некоторого $M < \infty$ имеем $\sup_m \|z_m\| \leq M$. Отсюда из определения нормы в X и из (1) следует, что

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n z_m \right\| \leq M/\sqrt{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Так как $\{z_m\}$ эквивалентна некоторой подпоследовательности в $\{x_i\}$, это означает, что $X \in WBS$.

Легко видеть, что для доказательства $X \notin CBS$ достаточно установить, что для ортов пространства X_k (обозначим их $\{e_i^k\}_{i=1}^\infty$), любого функционала f из единичного шара X_k^* и любого набора $\{p_1 < \dots < p_n\} \subset N$ имеют место неравенства

$$\text{а) } \limsup_{i \rightarrow \infty} |f(e_i^k)| \leq 1/\sqrt{k+1};$$

$$\text{б) } \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{p_i}^k \right\|_k > 1/2.$$

Неравенство а) установим от противного. Пусть функционал $f \in X_k^*$ таков, что

$$\limsup_{i \rightarrow \infty} |f(e_i^k)| > \frac{1}{\sqrt{k+1}}. \quad (2)$$

Поскольку пространство X_k изоморфно l_1 , то f можно рассматривать как элемент l_∞ :

$$f = (f_1, \dots, f_n, \dots); f_i \in \mathbf{R}, \sup_i |f_i| < \infty,$$

и считать, что $f(e_i^k) = f_i$. В силу (2) найдется такая возрастающая последовательность натуральных чисел $(s_i)_{i=1}^\infty$, что $|f_{s_i}| > 1/\sqrt{k+1}$. Для любого конечного набора $(t_i) \subset \mathbf{R}$ имеем

$$\|f\|_k \geq \left| \sum f_i t_i \right| / \left\| \sum t_i e_i^k \right\|_k. \quad (3)$$

Доказательство неравенства а) будет завершено, если докажем, что существует такой набор (t_i) , для которого выражение в правой части (3) будет больше 1. Для этого последовательность $(s_i)_{i=1}^\infty$ разобьем на «участки» $(\tau_i)_{i=1}^\infty$ следующим образом:

$$\tau_1 = \{s_1\};$$

$$\tau_2 = \{s_2, \dots, s_{q_2}\}, \text{ где } q_2 \in N \text{ таково, что } q_2 - 1 > s_1;$$

$$\tau_3 = \{s_{q_2+1}, \dots, s_{q_3}\}, \text{ где } q_3 \in N \text{ таково, что } q_3 - q_2 > s_{q_2};$$

...

$\tau_n = \{s_{q_{n-1}+1}, \dots, s_{q_n}\}$, где $q_n \in N$ таково, что $q_n - q_{n-1} > s_{q_{n-1}}$.

Пусть теперь $\{t_m : 1 \leq m \leq s_{q_n}\}$ — последовательность следующего вида:

$$t_m = \begin{cases} 0, & \text{если } m \notin (s_i); \\ \text{sign } f_m / (q_j - q_{j-1}), & \text{если } m \in \tau_j; j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Тогда $|\sum f_i t_i| > n / \sqrt{k+1}$, а для $\|\sum t_i e_i^k\|_k$ имеем оценку:

$$\left\| \sum t_i e_i^k \right\|_k \leq \frac{n}{k+1} + \frac{k}{k+1} \sup_{A \in B} \sum_{i \in A} |t_i|.$$

Если $\min A > s_{q_n}$, то вторая сумма равна нулю, если же для некоторого $j \leq n$ имеем $s_{q_{j-1}} < \min A \leq s_{q_j}$, то $\sum_{i \in A} |t_i| \leq \sum |t_i| + \text{card } A \times \max |t_i|$, где сумма в правой части берется от $s_{q_{j-1}+1}$ до s_{q_j} а $\max$ берется по $i > s_{q_j}$. Воспользовавшись тем, что для $r \geq j$ имеет место $q_{r+1} - q_r > s_{q_r} \geq s_{q_j}$, имеем $\sum_{i \in A} |t_i| \leq 1 + s_{q_j} (1/s_{q_j}) = 2$.

В итоге получаем оценку:

$$\left\| \sum_i t_i e_i^k \right\|_k \leq \frac{n}{k+1} + \frac{2k}{k+1}.$$

Так как для достаточно больших n имеем

$$\left(\frac{n}{\sqrt{k+1}} \right) / \left(\frac{n}{k+1} + \frac{2k}{k+1} \right) > 1,$$

то тем самым неравенство а) доказано.

Докажем неравенство б): Имеем

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{p_i}^k \right\|_k = \frac{1}{k+1} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{p_i}^k \right\|_{l_1} + \frac{k}{k+1} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{p_i}^k \right\|_S.$$

Первое слагаемое равно $1/(k+1)$. Для оценки второго заметим, что множество $\{p_{j+1}, p_{j+2}, \dots, p_n\}$, где j — целая часть $(n/2)$, является допустимым; следовательно,

$$\frac{k}{k+1} \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{p_i}^k \right\|_S \geq \frac{k(n-j)}{(k+1)n} \geq \frac{k}{2(k+1)}.$$

Так что

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_{p_i}^k \right\|_k \geq \frac{1}{k+1} + \frac{k}{2(k+1)} > \frac{1}{2}.$$

Теорема доказана.

Список литературы: 1. Beauzamy B., Lapreste J. T. Modèles étalés des espaces de Banach. — Paris: Hermann, 1983.—211 p. 2. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces, v. I. — Berlin: Springer, 1977.—188 p. 3. Дад М. М. Нормированные линейные пространства. — М.: Изд-во иностр. лит., 1961—232 с.

Поступила в редколлегию 29.05.86

СОДЕРЖАНИЕ

Чистяков Г. П. О факторизации вероятностных распределений класса L Ю. В. Линника. 2	3
Азарина Ю. В. Мероморфные решения уравнения $\omega(z+1) = R[\omega(z)]$.	26
Блох А. М. О динамических системах на одномерных разветвленных многообразиях. 3	32
Власенко Л. А. О полноте нормальных решений уравнения $Au'(t) + Bu(t) = f(t)$	46
Голодец В. Я., Синельников С. Д. Автоморфизмы эргодических группоидов и полупрямые произведения.	51
Гельдберг А. А., Еременко А. Э., Содин М. Л. Исключительные значения в смысле Р. Неванлинны и в смысле В. П. Петренко. 2	58
Колманович В. Ю., Маламуд М. М. Операторный аналог леммы Шварца—Левнера	71
Кучко Л. П. Нетривиальная разрешимость однородных функциональных уравнений	75
Коломийцева Т. А. Об асимптотическом поведении субгармонических функций с правильным распределением масс	79
Смилянский В. Р. О множителях Стокса для одной системы первого ранга.	89
Рофе—Бекетов Ф. С., Холькин А. М. Связь спектральных и осцилляционных свойств дифференциально-операторных уравнений произвольного порядка. I. Теорема типа Штурма	101
Норин Н. В. Теорема о среднем, связанная с бесконечномерными тепловыми потенциалами	111
Папуш Д. Е. О росте целых функций с «плоскими» нулями	117
Львова С. В. Об одной задаче кратной интерполяции в полуплоскости.	125
Островский М. И. Сравнение слабого и непрерывного свойств Банаха—Сакса	130

СБОРНИК НАУЧНЫХ ТРУДОВ

**ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ,
ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ
И ИХ
ПРИЛОЖЕНИЯ**

Выпуск 48

Редактор *Н. С. Калинина*
Художественный редактор *Т. П. Короленко*
Технический редактор *Л. Т. Ена*
Корректор *Е. В. Сергина*

Информ. бланк № 11611

Сдано в набор 09.07.86. Подп. в печать 22.12.86. БЦ 08326. Формат 60×90/16.
Бумага типогр. № 2. Лит. гарн. Выб. печать. Печ. л. 8,5. Кр.-отт. 8,75.
Уч.-изд. л. 10. Тираж 700 экз. Изд. № 1508. Зак. 6-285. Цена 1 р. 40 к.

Издательство при Харьковском государственном университете издательского
объединения «Вища школа», 310003, Харьков-3, ул. Университетская, 16

Отпечатано с матриц книжной фабрики им. М. В. Фрунзе в Харьковской
городской типографии № 16, 310003, Харьков-3, Университетская, 16. Зак. 66.