ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

О ТРЕХ ТИПАХ ВЫПУКЛОСТИ

И. Е. Овчаренко

Ограниченную функцию $f(x)$, заданную при $a \leqslant x \leqslant b$, назовём выпуклой по отношению к функции $v(x)$, если при любом x из (a, b) найдётся такое $\delta_x > 0$, что при $x_1 < x < x_3$ и $x_3 - x_1 < \delta_x$ выполняется неравенство

$$f(x_1)\, v(x - x_3) + f(x)\, v(x_3 - x_1) + f(x_3)\, v(x_1 - x) \leqslant 0. \tag{1}$$

Функция $v(x)$ предполагается дифференцируемой в окрестности нуля, $v(0) = 0$, $v'(x)$ — чётная функция и

$$v'(x) = 1 + cx^2 + o(x^2). \tag{*}$$

Условие $v'(0) = 1$, очевидно, не налагает ограничений *.
Ясно, что

$$v(x) = x + \frac{c}{3} x^3 + o(x^3). \tag{**}$$

При $v(x) = x$ получаются выпуклые функции; если $v(x) = \sin \rho x$, получаем тригонометрически выпуклые функции. Случай $v(x) = \operatorname{sh} \rho x$ приводит к функциям, которые естественно назвать гиперболически выпуклыми.

Известно (см., напр., [1]), что выпуклость функции $f(x)$ по отношению к функции $v(x) = \sin \rho x$ может быть охарактеризована следующим образом: график функции $f(x)$ при всех $x \in (x_1, x_3)$ и любых $x_1 < x_3$, $x_3 - x_1 < \frac{\pi}{\rho}$ лежит не выше графика решения дифференциального уравнения $y'' + \rho^2 y = 0$, проходящего через точки $\{x_1, f(x_1)\}$ и $\{x_3, f(x_3)\}$. Точно так же доказывается, что выпуклые и гиперболически выпуклые функции допускают аналогичную характеристику. При этом уравнения будут соответственно **

$$y'' = 0 \quad \text{и} \quad y'' - \rho^2 y = 0.$$

В данной статье доказывается тот факт, что функция, выпуклая по отношению к функции $v(x)$, является либо просто выпуклой, либо тригонометрически выпуклой, либо, наконец, гиперболически выпуклой. Аналогичное предложение доказывается и для многомерного случая.

Сначала мы установим некоторые свойства введенного класса функций.

а) *Функция $f(x)$ непрерывна.*

---

* Ниже будет показано, что для любой функции v указанной структуры существуют выпуклые по отношению к ней функции.

** Заметим, что можно рассмотреть случай, когда уравнение будет $y'' + \rho(x)\, y = 0$. Для этого случая справедливы утверждения, аналогичные доказываемым ниже.

Докажем непрерывность справа; непрерывность слева доказывается аналогично. При $x_1 < x < x_3$ имеем

$$f(x_1)\, v(x - x_3) + f(x)\, v(x_3 - x_1) + f(x_3)\, v(x_1 - x) \leqslant 0$$

или

$$f(x)\, v(x_3 - x_1) + f(x_3)\, v(x_1 - x) + f(x_1)\left[v(x_1 - x_3) - v(x_1 - x)\right] \leqslant$$
$$\leqslant f(x_1)\left[v(x_3 - x) + v(x_1 - x_3) - v(x_1 - x)\right].$$

Разделив на $v(x_3 - x_1)\, v(x - x_1)$ и произведя некоторые преобразования, получим при $x_3 - x_1 < \delta$ для достаточно малого δ соотношение

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{v(x - x_1)} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{v(x_3 - x_1)} + f(x_1)\left[\frac{v(x_3 - x)}{v(x_3 - x_1)\, v(x - x_1)} - \frac{1}{v(x - x_1)} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{v(x_3 - x_1)}\right]. \qquad (2)$$

Соотношение (2) является основным при дальнейших рассмотрениях. Обозначим

$$k(x, x_1, x_3) = \left[\frac{v(x_3 - x)}{v(x_3 - x_1)\, v(x - x_1)} - \frac{1}{v(x - x_1)} + \frac{1}{v(x_3 - x_1)}\right]. \qquad (3)$$

Тогда при $x_1 < x < x_3$, $x_3 - x_1 < \delta$ имеем

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{v(x - x_1)} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_1)}{v(x_3 - x_1)} + f(x_1)\, k(x, x_1, x_3). \qquad (4)$$

Записав $k(x, x_1, x_3)$ в форме

$$k(x, x_1, x_3) = \frac{v(x_3 - x) + v(x - x_1) - v(x_3 - x_1)}{v(x_3 - x_1)\, v(x - x_1)}$$

и применив теорему Лагранжа, получим

$$k(x, x_1, x_3) = \frac{1}{v(x_3 - x_1)\, v(x - x_1)}\left[v'(x_3 - \xi)(x_1 - x) + v(x - x_1)\right]$$
$$x_1 < \xi < x.$$

Из (*) и (**) получаем

$$k(x, x_1, x_3) = \frac{x_1 - x}{v(x_3 - x_1)\, v(x - x_1)}\left[1 + c(x_3 - \xi)^2 - 1 - \frac{c}{3}(x - x_1)^2 + \right.$$
$$\left. + o\left((x_3 - x_1)^2\right)\right].$$

Итак,

$$|k(x, x_1, x_3)| < k\,|x_3 - x_1|, \qquad (5)$$

где k — постоянная, зависящая лишь от δ и не зависящая от положения точки x, а также от величины $x_3 - x_1 < \delta$. Таким образом, при некотором $N > 0$ справедливо неравенство $f(x_1)\, k(x, x_1, x_3) < N$. Отсюда следует, что величина

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{v(x - x_1)}$$

ограничена сверху. Ограниченность снизу легко получается, если заметить, что неравенство (2) остаётся в силе при $x < x_1 < x_3$, а при $x_3 < x < x_1$ знак неравенства меняется на обратный. Соединяя ограниченность сверху с ограниченностью снизу, получаем непрерывность функции $f(x)$ справа; непрерывность слева доказывается аналогично.

b) *Функция $f(x)$ имеет всюду правую и левую производную.*

Докажем существование правой производной; существование левой получается аналогично.

Легко видеть, что

$$\lim_{x\to x_3-0}\frac{k(x, x_1, x_3)}{x_3-x}=\frac{1}{v^2(x_3-x_1)}-\frac{v'(x_3-x_1)}{v^2(x_3-x_1)}=-c+o(1),$$

а отсюда и из (5) следует:

$$|k(x, x_1, x_3)(x_3-x)^{-1}|<M, \quad x_1<x<x_3, \tag{6}$$

где M — постоянная, зависящая лишь от δ.

Неравенства (4) и (6) позволяют заключить, что

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{v(x-x_1)}+M'(x-x_1)\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{v(x_3-x_1)}+M'(x_3-x_1); \quad (M'=|f(x_1)|M),$$

откуда следует, что величина

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{v(x-x_1)}+M'(x-x_1)$$

монотонно убывает. Ранее была доказана ограниченность её снизу. Поэтому

$$\lim_{x\to x_1+0}\left[\frac{f(x)-f(x_1)}{v(x-x_1)}+M'(x-x_1)\right]$$

существует и конечен. Существование правой производной доказано.

c) *Правая производная не превышает левой.*

Доказательство. Исходное неравенство (2) остаётся верным и при $x<x_1<x_3$, $x_3-x<\delta$, то есть

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{v(x-x_1)}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{v(x_3-x_1)}+f(x_1)\left[\frac{v(x_3-x_1)}{v(x_3-x_1)v(x-x_1)}+\frac{1}{v(x_3-x_1)}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{v(x-x_1)}\right]. \tag{7}$$

Аналогично предыдущему можно получить оценку

$$|\tilde{k}(x, x_1, x_3)|\leqslant\tilde{K}|x_3-x|,$$

где

$$\tilde{k}(x, x_1, x_3)=\frac{v(x_3-x)+v(x-x_1)-v(x_3-x_1)}{v(x_3-x_1)v(x-x_1)},$$

а $\tilde{K}$ — константа, зависящая лишь от δ.

Переходя теперь в неравенстве (7) к пределу при $x\to x_1+0$ и $x_3\to x_1+0$, получаем $f'_+(x_1)\geqslant f'_-(x_1)$.

d) *При любых α и β, $\alpha<\beta$ справедливо неравенство*

$$f'_-(\beta)-f'_+(\alpha)-2c\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\geqslant 0. \tag{8}$$

Доказательство. При $x_1<x<x_3$ справедливо неравенство (2). Из выражения (3) для $k(x, x_1, x_3)$ при $x\to x_1+0$ и $x\to x_1+0$ имеем

$$\lim_{x\to x_1+0}k(x, x_1, x_3)=\frac{1}{v(x_3-x_1)}\left[1+\lim_{x\to x_1+0}\frac{v(x_3-x)-v(x_3-x_1)}{v(x-x_1)}\right],$$

откуда

$$\lim k(x, x_1, x_3)=\frac{1}{v(x_3-x_1)}[1-v'(x_3-x_1)].$$

Переходя в (2) к пределу при $x\to x_1+0$, имеем

$$f'_+(x_1)\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{v(x_3-x_1)}+f(x_1)\frac{1-v'(x_3-x_1)}{v(x_3-x_1)}. \tag{9}$$

Точно так же убедимся в справедливости неравенства

$$f'_-(x_3) \geqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{v(x_3-x_1)} - f(x_1)\frac{1-v'(x_3-x_1)}{v(x_3-x_1)}. \tag{10}$$

Вычитая из неравенства (10) неравенство (9), найдём, что

$$[f'_-(x_3)-f'_+(x_1)]+[f(x_1)+f(x_3)]\frac{1-v'(x_3-x_1)}{v(x_3-x_1)} \geqslant 0. \tag{11}$$

Разобьём интервал (α, β) точками $x_1, x_2, \dots x_j, \dots x_n$, так, чтобы в точках x_j существовала производная. Запишем неравенства (11) для каждого из таких интервалов и просуммируем.

Имеем

$$\left\{[f'_-(\beta)-f'_+(\alpha)]+\sum_{j=0}^{n-1}[f(x_j)+f(x_{j+1})]\left[\frac{1-v'(x_{j+1}-x_j)}{v(x_{j+1}-x_j)}\right]\right\} \geqslant 0. \tag{12}$$

Принимая во внимание разложение в окрестности нуля для функций $v(x)$ и $v'(x)$, убеждаемся, что

$$\frac{1-v'(x_3-x_1)}{v(x_3-x_1)} = -c(x_3-x_1)+o(x_3-x_1).$$

Подставляя это в неравенство (12) и переходя к пределу при $\max|x_{j+1}-x_j| \to 0$, получаем требуемое соотношение (8).

e) *Если при некоторых α и β в (8) имеет место знак равенства:*

$$f'_-(\beta)-f'_+(\alpha)-2c\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = 0,$$

то $f(x)$ является решением дифференциального уравнения $f''-2cf=0$.

Доказательство. Пусть $\alpha < x < \beta$.

Обозначим

$$s(\alpha; x) = f'_-(x)-f'_+(\alpha)-2c\int_\alpha^x f(\tau)\,d\tau.$$

Тогда

$$s(x; \beta) = f'_-(\beta)-f'_+(x)-2c\int_x^\beta f(\tau)\,d\tau$$

и, следовательно,

$$s(\alpha; x)+s(x; \beta) = f'_-(x)-f'_+(x)+f'_-(\beta)-f'_+(\alpha)-2c\int_\alpha^\beta f(\tau)\,d\tau.$$

Так как

$$0 = s(\alpha; \beta) = s(\alpha; x)+s(x; \beta)+f'_+(x)-f'_-(x),$$

а

$$f'_+(x)-f'_-(x) \geqslant 0, \quad s(\alpha; x) \geqslant 0, \quad s(x; \beta) \geqslant 0,$$

то при любом x $(\alpha < x < \beta)$ имеем

$$s(\alpha; x) = 0 \quad \text{и} \quad f'_+(x) = f'_-(x),$$

так что

$$f'(x)-2c\int_\alpha^x f(\tau)\,d\tau = f'_+(\alpha).$$

Дифференцируя, получим

$$f''(x) - 2cf(x) = 0.$$

Зафиксируем α и обозначим $s(x) = s(\alpha; x)$.

f) *Для того чтобы функция $f(x)$ была выпуклой по отношению к функции v (v удовлетворяет условиям, сформулированным в начале статьи), необходимо, чтобы $s(x)$ была неубывающей.*

Действительно,

$$s(x_2) - s(x_1) = f'_-(x_2) - f'_-(x_1) - 2c\int_{x_1}^{x_2} f(\tau)\,d\tau \geqslant 0 \quad (x_2 > x_1)$$

и, следовательно, $s(x)$ не убывает*.

g) *Функция, выпуклая по отношению к функции v, почти всюду имеет вторую производную.*

Действительно, $s(x)$ не убывает, а $\int_\alpha^x f(\tau)\,d\tau$ — дифференцируемая функция.

h) *Для того чтобы функция $f(x)$ при некотором ρ была гиперболически выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$s_1(x) = f'(x) - \rho^2\int_\alpha^x f(\tau)\,d\tau$$

была неубывающей.

Доказательство. Необходимость следует из f), достаточность докажем аналогично тому, как это проведено в [1] (стр. 80).

Пусть пока $s_1(x)$ — дифференцируемая функция. Дифференцируя, имеем

$$f''(x) - \rho^2 f(x) = s'_1(x).$$

Функция Грина дифференциального оператора $f''(x) - \rho^2 f(x)$, удовлетворяющая граничным условиям $G(x_1, x) = G(x_3, x) = 0$, имеет вид

$$G(\xi, x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}\rho(x_3 - x)\operatorname{sh}\rho(\xi - x_1)}{\rho\operatorname{sh}\rho(x_1 - \xi)} & \xi \leqslant x \\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}\rho(x - x_1)\operatorname{sh}\rho(x_3 - \xi)}{\rho\operatorname{sh}\rho(x_1 - x_3)} & \xi \geqslant x. \end{cases}$$

Решение дифференциального уравнения $f''(x) - \rho^2 f(x) = s'_1(x)$, принимающее в точках x_1 и x_3 значения $f(x_1)$ и $f(x_3)$, имеет вид

$$f(x) = \frac{f(x_1)\operatorname{sh}\rho(x_3 - x) + f(x_3)\operatorname{sh}\rho(x - x_1)}{\operatorname{sh}\rho(x_3 - x_1)} + \int_{x_1}^{x_3} G(\xi, x)\,ds_1(\xi).$$

Но так как $G(\xi, x) < 0$ при $x_1 < \xi$, $x < x_3$ и $s'_1(\xi) \geqslant 0$, то

$$f(x) \leqslant \frac{f(x_1)\operatorname{sh}\rho(x_3 - x) + f(x_3)\operatorname{sh}\rho(x - x_1)}{\operatorname{sh}\rho(x_3 - x_1)}.$$

Если же $s_1(x)$ — недифференцируемая функция, то приближая её неубывающими дифференцируемыми функциями и переходя к пределу, убеждаемся в справедливости h) и в этом случае.

---

* Из того, что $s(x)$ не убывает, следует, что $f(x)$ имеет первую производную всюду, за исключением, быть может, счетного множества точек. Этот результат следует также из b) и теоремы Сакса (см., например [3], стр. 401). Мы, однако, предпочли получить его элементарным путём.

Так же, как и в [1], доказываются следующие предложения.

i) *Для того чтобы функция $f(x)$ была тригонометрически выпуклой при некотором ρ, необходимо и достаточно, чтобы функция*

$$f'(x)+\rho^2\int_{x_1}^{x} f(\tau)\,d\tau$$

была неубывающей.

j) *Для того чтобы функция $f(x)$ была выпуклой, необходимо и достаточно, чтобы функция $f'(x)$ была неубывающей.*

Мы видим, что тип выпуклости определяется знаком коэффициента при интеграле в равенстве $s(x)=f'(x)+k\int_{x_1}^{x} f(\tau)\,d\tau$. Если функция $f(x)$ выпукла по отношению к функции v, то $s(x)=f'(x)-2c\int_{x_1}^{x} f(\tau)\,d\tau$ неубывающая. Так как для c имеется только три возможности (c может либо равняться нулю, либо быть положительной, либо отрицательной), то, сопоставляя это с вышеизложенным, имеем:

Теорема. *Если функция $f(x)$ выпукла по отношению к функции v определённого вида (функция $v(x)$ предполагается дифференцируемой в окрестности нуля, $v(0)=0$, $v'(x)$ — чётная функция и $v'(x)=1+ cx^2+o(x^2)$), то она либо просто выпукла (если $c=0$), либо тригонометрически выпукла (если $c<0$), либо гиперболически выпукла (если $c>0$).*

Перейдём теперь к построению функций, выпуклых по отношению к функции v. Рассмотрим наиболее сложный случай, когда коэффициент c у функции v положителен.

Заметим, что если $\rho>\sqrt{2c}$, то найдётся некоторое $h_0>0$ такое, что при $0<h_1\leqslant h_2<h_0$ будет выполняться неравенство

$$\frac{v(h_2)}{\operatorname{sh}\rho h_2}\leqslant\frac{v(h_1)}{\operatorname{sh}\rho h_1}. \tag{13}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что в некоторой окрестности нуля

$$\left(\frac{v(x)}{\operatorname{sh}\rho x}\right)'=\frac{\rho}{3\operatorname{sh}^2\rho x}\left[(2c-\rho^2)x^3+o(x^3)\right].$$

Возьмём теперь положительную функцию $f(x)$, выпуклую по отношению к функции $\operatorname{sh}\rho x$. Из определения гиперболической выпуклости следует, что при любом x, принадлежащем рассматриваемому промежутку, найдётся такое $\delta_x>0$, что при $x_1<x<x_3$, $x_3-x_1<\delta_x$ будет справедливо неравенство

$$f(x)\operatorname{sh}\rho(x_3-x_1)\leqslant f(x_1)\operatorname{sh}\rho(x_3-x)+f(x_3)\operatorname{sh}\rho(x-x_1). \tag{14}$$

Покажем, что при любых $x_1<x<x_3$ и $x_3-x_1\leqslant\min(\delta_x;h_0)$ будет справедливо неравенство

$$f(x_1)v(x-x_3)+f(x)v(x_3-x_1)+f(x_3)v(x_1-x)\leqslant 0. \tag{1}$$

Пусть сначала $x_1<x<x_3$, $x_3-x_1<\min(\delta_x;h_0)$ и $x_3-x\geqslant x-x_1$. Так как при этом

$$\frac{v(x_3-x_1)}{\operatorname{sh}\rho(x_3-x_1)}\leqslant\frac{v(x_3-x)}{\operatorname{sh}\rho(x_3-x)}, \tag{15}$$

то, перемножив (14) и (15), получим

$$f(x)\,v(x_3-x_1)\leqslant f(x_1)\,v(x_3-x)+f(x_3)\frac{\operatorname{sh}\rho(x-x_1)\,v(x_3-x)}{\operatorname{sh}\rho(x_3-x)};$$

$$f(x)\,v(x_3-x_1)\leqslant f(x_1)\,v(x_3-x)+f(x_3)\,v(x-x_1)+$$

$$+f(x_3)\,v(x-x_1)\left[\frac{\operatorname{sh}\rho(x-x_1)\,v(x_3-x)}{v(x-x_1)\operatorname{sh}\rho(x_3-x)}-1\right]. \qquad (16)$$

Но при $x_3-x\geqslant x-x_1$ последнее слагаемое неположительно в силу неравенства (13). Поэтому при

$$x_1<x<x_3,\quad x_3-x_1<\min(\delta_x;\,h_0),\quad \text{и}\quad x_3-x\geqslant x-x_1$$

справедливо неравенство (1). Чтобы убедиться в справедливости неравенства (1) при $x_1<x<x_3$, $x_3-x_1<\min(\delta_x;\,h_0)$, $x_3-x\leqslant x-x_1$ и, следовательно, вообще при $x_1<x<x_3$, $x_3-x_1<\min(\delta_x;\,h_0)$, рассмотрим получаемое совершенно аналогично неравенству (16) неравенство

$$f(x)\,v(x_3-x_1)\leqslant f(x_1)\,v(x_3-x)+f(x_3)\,v(x-x_1)+$$

$$+f(x_1)\,v(x_3-x)\left[\frac{\operatorname{sh}\rho(x_3-x)\,v(x-x_1)}{\operatorname{sh}\rho(x-x_1)\,v(x_3-x)}-1\right].$$

В силу неравенства (13) при $x_3-x\leqslant x-x_1$ последнее слагаемое не положительно, тем самым требуемое доказано.

Аналогичным путём можно построить выпуклые по отношению к функции v в случае, когда коэффициент c неположителен.

Перейдём теперь к рассмотрению многомерного случая, ограничиваясь, ради упрощения записи, случаем двух переменных.

Определение. Непрерывная функция $u(x;\,y)$ называется субгармонической с весом v в области D, если для любой точки P области D найдётся такое $r_0(P)>0$, что при всех $0<r<r_0(P)$ выполняется соотношение

$$u(P)\leqslant\int_0^{2\pi}u(r;\,\varphi)\,v(r)\,r\,d\varphi, \qquad (17)$$

$r_0(P)$ — своё для каждой точки области, а

$$\frac{1}{v(\rho)}=2\pi\rho+a_3\rho^3+o(\rho^3).$$

Теорема. *Функция u, субгармоническая с весом v в области D, допускает обобщённый параметр Лапласа $\tilde{\Delta}u$, причём $\tilde{\Delta}u+\frac{a_3}{\pi}u\geqslant 0$ всюду в D.*

Доказательство. Интегрируя по ρ в пределах от нуля до некоторого $r<r_0(P)$ обе части неравенства

$$\frac{u(P)}{v(\rho)}\leqslant\int_0^{2\pi}u(\rho;\,\varphi)\,\rho\,d\varphi,$$

имеем

$$u(P)\int_0^r\frac{d\rho}{v(\rho)}\leqslant\int_0^r\int_0^{2\pi}u(\rho;\,\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

или

$$u(P)\left[\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\frac{d\rho}{v(\rho)}-1\right]\leqslant\frac{1}{\pi r^2}\int_0^r\int_0^{2\pi}u(\rho;\,\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi-u(P)$$

и, наконец,

$$\frac{4}{r^2}\left\{\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_0^r\int\limits_0^{2\pi} u(\rho;\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi - u(P)\right\} + \frac{4}{r^2}u(P)\left[1-\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_0^r\frac{d\rho}{v(\rho)}\right] \geqslant 0. \quad (18)$$

Величина

$$\frac{4}{r^2}\left[1-\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_0^r\frac{d\rho}{v(\rho)}\right]$$

стремится к $\frac{a_3}{\pi}$ при $r\to 0$. Отсюда получается, что разность

$$\frac{4}{r^2}\left\{\frac{1}{\pi r^2}\int\limits_0^r\int\limits_0^{2\pi} u(\rho;\varphi)\,\rho\,d\rho\,d\varphi - u(P)\right\}$$

имеет предел при $r\to 0$ (см. [2]).

Таким образом, функция u допускает обобщённый параметр Лапласа $\tilde{\Delta}u$. Так как P — произвольная точка области D, то, переходя к пределу при $r\to 0$ в неравенстве (18), убеждаемся, что всюду в D выполняется неравенство $\tilde{\Delta}u+\frac{a_3}{\pi}u\geqslant 0$. Теорема доказана.

Из последней теоремы явствует, что класс функций, субгармонических с весом v в области D, может быть описан с помощью следующих необходимых и достаточных условий: для каждой внутренней точки P области D найдётся такое $r_0(P)>0$, что для любого круга C_r радиуса $r<r_0(P)$ с центром в точке P решение краевой задачи

$$\begin{cases}\Delta f+\frac{a_3}{\pi}f=0\\ f|_{\Gamma_r}=u|_{\Gamma_r}\quad \Gamma_r\text{ — граница } C_r\end{cases}$$

мажорируется функцией u внутри C_r.

В заключение хочу выразить благодарность профессору Б. Я. Левину за постановку задачи и ценные указания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, Гостехиздат, 1956.
2. И. И. Привалов. Субгармонические функции, ОНТИ, 1937.
3. Е. Титчмарш. Теория функций, Гостехиздат, 1951.