ОБ ОДНОЙ ВНУТРЕННЕЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ЛОКАЛЬНО-ПОЛНЫХ БОРНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Ю. Б. Тумаркин

Множество V в отделимом локально выпуклом пространстве (ЛВП) E назовем идеально выпуклым, если для любой ограниченной последовательности $\{x_k\}_1^\infty \subset E$ и любой последовательности комплексных чисел $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $\sum_1^\infty |\alpha_k| \leqslant 1$, для которой ряд $\sum_1^\infty \alpha_k x_k$ сходится к элементу $x \in E^1$, следует что $x \in V$. Очевидно, что идеально выпуклое множество абсолютно выпукло (выпукло и симметрично). Замкнутое абсолютно выпуклое множество идеально выпукло. Примером незамкнутого идеально выпуклого множества может служить открытый единичный шар банахова пространства.

Для банаховых пространств понятие идеально выпуклого множества было введено Е. А. Лифшицем [1]. Им же доказано, что в банаховом пространстве всякое поглощающее идеально выпуклое множество есть окрестность нуля. С помощью этого результата Е. А. Лифшица мы покажем, какое место занимает класс локально полных борнологических пространств в классе бочечных пространств.

Локально полным пространством называется такое локально выпуклое пространство E, в котором всякое ограниченное множество $M \subset E$ содержится в некотором абсолютно выпуклом множестве $N \subset E$, таком, что множество E_N элементов $x \in E$, поглощаемых N, есть банахово пространство с замкнутым единичным шаром N. Всякое секвенциально полное ЛВП локально полно.

Борнологическим пространством называют такое ЛВП E, что любой ограниченный линейный оператор из E в произвольное локально выпуклое пространство непрерывен. В таком пространстве всякое абсолютно выпуклое множество, поглощающее любое ограниченное множество, есть окрестность нуля. Борнологическое пространство является индуктивным пределом нормированных пространств. Локально полное борнологическое пространство — индуктивный предел банаховых пространств (см. [2], стр. 123—125).

Назовем локально выпуклое пространство усиленно бочечным, если в нем всякое поглощающее идеально выпуклое множество есть окрестность нуля. Усиленно бочечное пространство бочечно, т. е. всякое замкнутое абсолютно выпуклое поглощающее множество есть окрестность нуля. Класс усиленно бочечных пространств достаточно широк, на что указывает следующая

Лемма. Индуктивный предел усиленно бочечных пространств есть усиленно бочечное пространство.

Доказательство. Пусть поглощающее идеально выпуклое множество F содержится в локально выпуклом пространстве $E = \lim\limits_{\alpha \in \Lambda} \operatorname{ind} E_\alpha$, E_α — усиленно бочечные пространства. Обозначим вложения $E_\alpha \to E$ через π^α. Тогда для любого $\alpha \in \Lambda$ полный прообраз множества F в $E_\alpha : (\pi^\alpha)^{-1} F$, поглощает все E_α. Покажем, что F — окрестность. Для этого следует показать, что при любом $\alpha \in \Lambda$ $F_\alpha = (\pi^\alpha)^{-1} F$ есть окрестность в E_α. Пусть $\{x_k\}_1^\infty \in F_\alpha$ и $\{x_k\}_1^\infty$ — ограниченное множество в E_α. Если последовательность комплексных чисел $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $\sum\limits_1^\infty |a_k| \leqslant 1$ такова, что $\sum\limits_1^\infty \alpha_k x_k = x_0 \in E_\alpha$, то $\pi^\alpha x_0 = \sum\limits_1^\infty \alpha_k \pi^\alpha x_k \in F$ в силу идеальной выпуклости F. Таким образом, $x_0 \in F_\alpha = (\pi^\alpha)^{-1} F$ и F_α — идеально выпукло в E_α, и потому окрестность в E_α, так как E_α усиленно бочечно.

Из приведенного выше результата Е. А. Лифшица об усиленной бочечности банахова пространства и леммы получаем

Следствие. *Локально полное борнологическое пространство усиленно бочечно.*

Покажем теперь, что класс локально полных борнологических пространств совпадает с классом локально полных усиленно бочечных пространств и таким образом получим новую внутреннюю характеристику локально полных борнологических пространств.

Теорема. *Локально полное локально выпуклое пространство борнологично тогда и только тогда, когда оно усиленно бочечно.*

Доказательство. В силу приведенного выше следствия осталось показать, что усиленно бочечное пространство борнологично, если оно локально полно. Для этого рассмотрим произвольное абсолютно выпуклое множество $K \subset E$, поглощающее любое ограниченное в E множество, и покажем, что оно идеально выпукло. Обозначим $p(x)$, $x \in E$, функционал Минковского множества K. Для всех $x \in K$ выполняется $p(x) \leqslant 1$. Рассмотрим множество $U \subset K$ и $U = \{x : p(x) < 1\}$. Множество U также поглощает любое ограниченное множество в E. Рассмотрим ограниченную последовательность $\{x_k\}_1^\infty \subset U$. Пусть $X \supset \{x_k\}_1^\infty$ абсолютно выпуклое ограниченное множество, такое, что E_X — банахово пространство.

Очевидно, что $\{x_k\}_1^\infty \subset U \cap E_X$, и $U \cap E_X$ окрестность в E_X, так как $U \cap E_X$ поглощает X. Тогда для любой последовательности чисел $\{\alpha_k\}_1^\infty$, $\sum_1^\infty |\alpha_k| \leqslant 1$, $\sum_1^\infty \alpha_k x_k$ сходится в E_X и $\sum_1^\infty \alpha_k x_k = x_0 \in E_X$ в силу полноты E_X. Так как $U \cap E_X$ окрестность в E_X, то $p(x)$ — непрерывная функция на E_X. Поэтому из $p(x_k) < 1$ следует

$$p(x_0) = p\left(\sum_1^\infty \alpha_k x_k\right) \leqslant \sum_1^\infty |\alpha_k| p(x_k) < \sum_1^\infty |\alpha_k| \leqslant 1.$$

Итак, $p(x_0) < 1$, а значит $x_0 \in U$. Таким образом, U идеально выпукло, поглощающее и по определению пространства, окрестность. Тогда K тоже окрестность. Теорема доказана.

Автор выражает благодарность В. Д. Мильману за постановку задачи и полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е. А. Лифшиц. Идеально выпуклые множества. Функциональный анализ и его приложения, 4 № 4, 1970.

2. А. Робертсон, В. Робертсон. Топологические векторные пространства. ИЛ, 1968.

Поступила 25 декабря 1969 г.