

УДК 517.982

М. И. ОСТРОВСКИЙ

**ПОДПРОСТРАНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ
ФУНКЦИОНАЛЫ БАЗИСОВ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ**

Будем пользоваться терминологией книг [1—3].

1. Определение 1. Пусть X — банахово пространство с (безусловным) базисом. Подпространство $M \subset X^*$, не обязательно замкнутое, назовем (безусловно) базисным, если оно содержит все биортогональные функционалы некоторого (безусловного) базиса в X .

Теорема 1. Пусть X — нереклексивное банахово пространство с безусловным базисом. Тогда в X^* найдется базисное подпространство, не являющееся безусловно базисным.

Доказательство. Пусть $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ — безусловный базис в пространстве X . Рассмотрим отдельно случаи, когда базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ является ограниченно полным и когда нет.

В первом случае, согласно [1, с. 9], пространство X после эквивалентной перенормировки является сопряженным к $N = [x_i^*]_{i=1}^{\infty} \subset X^*$ в естественной двойственности. (Квадратными скобками обозначаем замыкание линейной оболочки).

Ясно, что пространство N является нереплексивным банаховым пространством с натягивающим безусловным базисом. В силу известных результатов Джеймса [1, с. 9, 22] этот базис не является ограниченно полным, и пространство N содержит последовательность блоков

$$m_i = \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} a_k x_k^*, \quad \|m_i\| = 1,$$

эквивалентную каноническому базису пространства c_0 . Пусть векторы

$$m_i^* = \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} b_k x_k \text{ таковы, что } m_i^*(m_i) = 1 \text{ и } \sup_i \|m_i^*\| = C < \infty.$$

Нетрудно видеть, что оператор $P: N \rightarrow N$, определенный равенством

$$P(m) = \sum_{i=1}^{\infty} m_i^*(m) m_i, \text{ является оператором проектирования на подпространство, изоморфное } c_0.$$

Используя рассуждения работы [4], нетрудно построить натягивающий базис $\{q_i\}_{i=1}^{\infty}$ в $\ker P$. Будем иметь $X = (\{q_i\}_{i=1}^{\infty})^* \oplus (\{m_i\}_{i=1}^{\infty})^*$.

Ясно, что второе слагаемое изоморфно l_1 .

Напомним, что для любого ординала α через $c(\alpha)$ обозначается пространство непрерывных функций на множестве всех ординалов, не превосходящих α , снабженном порядковой топологией. Для счетного ординала α имеем $(c(\alpha))^* = l_1$ и $c(\alpha)$ имеет натягивающий базис [5, с. 177, 213; 1, с. 10].

Пусть $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторый натягивающий базис в пространстве $L := c(\omega^{\omega^2})$ и пусть $\{s_i^*\}_{i=1}^{\infty} \subset l_1$ — его биортогональные функционалы. Система

$$\{q_i^*\}_{i=1}^{\infty} \cup \{s_i^*\}_{i=1}^{\infty} \quad (1)$$

после ее произвольной перенумерации с сохранением порядка внутри каждой из последовательностей образует ограниченно полный базис в X [1, с. 9]. Пусть $M \subset X^*$ — замыкание линейной оболочки биортогональных функционалов базиса (1). Из того, что базис (1) является ограниченно полным, вытекает, что M не содержит собственных замкнутых тотальных подпространств. Ясно также, что M изоморфно $[q_i]_{i=1}^{\infty} \oplus L$.

Очевидно, что M является базисным подпространством. Покажем, что M не является безусловно базисным. Предположим противное, пусть $\{u_i\}_{i=1}^{\infty}$ — безусловный базис в X , биортогональные функционалы $\{u_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ которого содержатся в M . Из сделанного выше замечания вытекает, что $M = [u_i^*]_{i=1}^{\infty}$ и, следовательно, M имеет безусловный базис. С другой стороны, в силу теоремы Марэ — Розенталя (см. [3, с. 737]), в L , а, следовательно, и в M найдется нормированная слабо сходящаяся к нулю последовательность, не содержащая безусловных подпоследовательностей. В пространстве с безусловным базисом это невозможно [1, с. 7, 19]. Тем самым в случае, когда базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ ограниченно полон, теорема доказана.

Пусть базис $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ не является ограниченно полным. Обозначим через N замыкание линейной оболочки биортогональных функционалов этого базиса. Нетрудно видеть, что в этом случае найдется функционал $x^{**} \in X^{**}$, для которого $x^{**}|_N \neq 0$ и подпространство $M = \ker x^{**} \cap N$ является тогальным подпространством в X^* . Подпространство $M \subset X^*$ является базисным в силу теоремы 3 из [6], но не является безусловно базисным¹. Теорема доказана.

2. Определение 2. Подпространство $M \subset X^*$ называется нормирующим, если найдется такое $c > 0$, что

$$\forall x \in X \sup_{0 \neq f \in M} |f(x)| / \|f\| \geq c \|x\|.$$

Замечание. Известно², что для сепарабельных банаховых пространств класс нормирующих подпространств совпадает с классом подпространств, содержащих биортогональные функционалы нелинейных операторных базисов.

Определение 3. Подпространство $M \subset X^*$ называется квазибазисным, если найдется последовательность линейных непрерывных конечномерных операторов $v_n: X \rightarrow X$, $n \in N$, такая, что

$$1) \forall x \in X, \lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n(x) - x\| = 0;$$

$$2) \forall n \in N \operatorname{im} v_n^* \subset M, \text{ где } v_n^* \text{ — операторы, сопряженные к } v_n.$$

Замечание. Нетрудно видеть, что класс квазибазисных подпространств совпадает с классом подпространств, содержащих биортогональные функционалы линейных операторных базисов.

Определение 4. Говорят, что банахово пространство X обладает сплошным свойством ограниченной аппроксимации (ССОА), если каждое нормирующее подпространство $M \subset X^*$ является квазибазисным (символически записывается: $X \in \text{ССОА}$).

ССОА (без использования этого термина) впервые рассматривалось Ф. С. Вахер и И. Зингером, и в дальнейшем исследовалось многими авторами (см. [3, с. 776—779, 865]). В настоящей работе мы дополним эти исследования.

Ясно, что из $X \in \text{ССОА}$ следует, что X сепарабельно и что X имеет свойство ограниченной аппроксимации (СОА). Мы будем искать условия, при которых верно и обратное.

Определение 5. Пусть X_1, X_2 — конечномерные подпространства в банаховом пространстве X и $X_1 \subset X_2 \subset X$ и пусть $\lambda > 0$. Пару (X_1, X_2) назовем λ -аппроксимируемой, если существует линейный непрерывный оператор $u: X \rightarrow X_2$ с $\|u\| \leq \lambda$ и $u|_{X_1} = I|_{X_1}$. Последовательность $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^{\infty}$ пар подпространств в X назовем равномерно аппроксимируемой, если найдется такое $0 < \lambda < \infty$, что все пары $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^{\infty}$ являются λ -аппроксимируемыми.

¹ Островский М. И. Регуляризуемость обратных линейных операторов в банаховых пространствах с базисом // Сиб. мат. журн. 1992. 33, № 3. С. 123—130.

² Фонф В. П. Операторные базисы и обобщенные базисы суммирования // Докл. АН УССР. 1986. № 11. С. 16—18.

Определение 6. Пусть U и V — подпространства банахова пространства X . Наклоном подпространства U к подпространству V назовем величину $\delta(U, V) = \inf \{ \|x - y\| : x \in S(U), y \in V \}$.

Пусть M — подпространство в X^* , а $M^\perp := \{x^{**} \in X^{**} : (\forall x^* \in M) (x^{**}(x^*) = 0)\}$. Известно [2, с. 32], что подпространство $M \subset X^*$ является нормирующим тогда и только тогда, когда $\delta(M^\perp, X) > 0$. (Здесь и в дальнейшем мы отождествляем X с его каноническим образом в X^{**})

Обозначим через $\varphi: X^{**} \rightarrow X^{**}/M^\perp$ естественное фактор-отображение. Отметим, что пространство $X^{**}/M^\perp$ естественным образом изометрично M^* . В случае, когда M — нормирующее подпространство, отображение $\varphi|_X$ является изоморфизмом.

Теорема 2. Пусть X — сепарабельное банахово пространство (СБП) с СОА. Для того чтобы нормирующее подпространство $M \subset X^*$ было квазибазисным, необходимо и достаточно, чтобы для любой равномерно аппроксимируемой последовательности пар $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^\infty$ в X последовательность $(\varphi X_1^i, \varphi X_2^i)_{i=1}^\infty$ была равномерно аппроксимируемой в M^* .

Доказательство. Необходимость. Пусть M — квазибазисно и $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^\infty$ — равномерно аппроксимируемая последовательность в X . Пусть $\{v_n\}$ — последовательность операторов, для которой выполнены условия определения 3. В силу теоремы Банаха — Штейнгауза имеем $\sup_n \|v_n\| = \beta < \infty$. Поэтому в последовательности $\{v_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{v_{n_i}\}$, для которой $(\forall x \in X_1^i) (\|v_{n_i}(x) - x\| < \|v_{n_i}\| / \dim X_1^i)$. Стандартными рассуждениями (см. [7]) находим такие операторы $A_i: X \rightarrow X$, что $\|A_i\| \leq 2$ и $(\forall x \in X_1^i) (A_i v_{n_i}(x) = x)$.

Так как последовательность $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^\infty$ — равномерно аппроксимируемая, то для некоторого $\lambda < \infty$ найдется такая последовательность операторов $u_i: X \rightarrow X$, что

$$(\forall i \in \mathbb{N}) (\text{im } u_i \subset X_2^i; \sup \|u_i\| = \lambda < \infty; u_i|_{X_1^i} = I_{X_1^i});$$

Введем операторы $T_i = u_i A_i v_{n_i}$. Для них имеем

$$T_i|_{X_1^i} = I_{X_1^i}; \quad (2)$$

$$\text{im } T_i \subset X_2^i; \quad (3)$$

$$\text{im } T_i^* = \text{im } v_{n_i}^* A_i^* u_i^* \subset \text{im } v_{n_i}^* \subset M; \quad (4)$$

$$\|T_i\| \leq 2\lambda\beta. \quad (5)$$

Условия (3) и (4) означают, что операторы T_i можно представить в виде $T_i(x) = \sum_{k=1}^{n(i)} f_k^i(x) x_k^i$ с $x_k^i \in X_2^i$, $f_k^i \in M$. Введем операторы $R_i: M^* \rightarrow M^*$ равенствами $R_i(m^*) = \sum_{k=1}^{n(i)} m^*(f_k^i) \varphi(x_k^i)$. Легко видеть, что операторы R_i являются $\sigma(M^*, M)$ -непрерывными, а также, что множество $\varphi(B(X))$ (где $B(X)$ — единичный шар пространства X) $\sigma(M^*, M)$ — плотно в шаре некоторого ненулевого радиуса пространства

M^* [2, с.32]. Отсюда и из (5) вытекает, что R_i — равномерно ограниченные операторы в M^* . Из (2) вытекает, что $R_i|_{\varphi X_1^i} = I_{\varphi X_1^i}$, а из

(3) — что $\text{im } R_i \subset \varphi X_2^i$. Необходимость доказана.

Достаточность. Если X имеет СОА и сепарабельно, то очевидно, что можно найти такую последовательность $\{X_i^i\}_{i=1}^\infty$ подпространств в X , что $X^1 \subset X^2 \subset \dots \subset X^n \subset \dots$; $\text{cl}(\bigcup_{n=1}^\infty X^n) = X$ и пары

$(X_1^i, X_2^i) = (X^i, X^{i+1})$ образуют равномерно аппроксимируемую последовательность. По предположению, пары $(\varphi X_1^i, \varphi X_2^i)$ образуют равномерно аппроксимируемую последовательность в M^* . Пусть $R_i: M^* \rightarrow M^*$ — операторы, для которых $\sup_i \|R_i\| < \infty$; $\text{im } R_i \subset \varphi X_2^i$; $R_i|_{\varphi X_1^i} = I_{\varphi X_1^i}$.

Лемма 1 [7, с. 494]. Пусть L и N — банаховы пространства и $\dim N < \infty$. Пусть F — конечномерное подпространство в L^* , Q — оператор из L^* в N , $\varepsilon > 0$. Тогда найдется слабо* непрерывный оператор R из L^* в N , такой, что $R|_F = Q|_F$ и $\|R\| \leq \|Q\| (1 + \varepsilon)$.

В силу этой леммы операторы R_i можно, без ущерба общности, считать слабо* непрерывными, т. е. имеющими вид

$$R_i(m^*) = \sum_{k=1}^{n(i)} m^*(f_k^i) \varphi x_k^i,$$

где $f_k^i \in M$; $x_k^i \in X_2^i$. Введем операторы $T_i: X \rightarrow X$ равенствами $T_i(x) = \sum_{k=1}^{n(i)} f_k^i(x) x_k^i$. Для них будем иметь

$$\sup_i \|T_i\| < \infty; \quad (6)$$

$$T_i|_{X_1^i} = I_{X_1^i}; \quad (7)$$

$$\text{im } T_i^* \subset M. \quad (8)$$

Из (6), (7) и того, что $\text{cl}(\bigcup_{n=1}^\infty X^n) = X$ следует, что $(\forall x \in X) (\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(x) - x\| = 0)$.

Отсюда и из (8) получаем, что M — квазибазисное подпространство. Теорема доказана.

Из этой теоремы можно вывести следующий результат работы [8].
Следствие. Если X — СБП с СОА, M — нормирующее подпространство в X^* , то для того чтобы M было квазибазисным, достаточно, чтобы нашлось такое дополнение Y к подпространству $M^\perp$ в X^{**} , что $Y \supset X$.

Доказательство. Покажем, что в этом случае для подпространства $M \subset X^*$ выполнено условие теоремы 2. Пусть Y — дополнение к $M^\perp$ в X^{**} , для которого $Y \supset X$. Сужение отображения φ на Y является изоморфизмом. Поэтому достаточно показать, что последовательность пар $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^\infty$; $X_1^i \subset X_2^i \subset X$, являющаяся равномерно аппроксимируемой в X , является равномерно аппроксимируемой и в Y . Это же непосредственно вытекает из рассмотрения вторых

сопряженных тех операторов, которые осуществляют аппроксимацию пар $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^\infty$ в X .

Замечания. 1) Условие следствия не является необходимым для квазибазисности M^1 .

2) Без требования $Y \supset X$ сформулированное в следствии утверждение неверно (см. замечание после теоремы 3).

Теорема 2 сводит задачу характеристики ССОА к такой: для каких СБП X с СОА в X^{**} можно найти слабо* замкнутое подпространство H с $\delta(H, X) > 0$ и такое, что факторизацией по нему некоторая равномерно аппроксимируемая в X последовательность переходит в последовательность, не являющуюся равномерно аппроксимируемой в X^{**}/H . Мы изложим один из подходов к решению этой задачи.

Определение 7. Пусть задано некоторое отображение $f: N \rightarrow (0, +\infty)$. Последовательность $(Z_1^i, Z_2^i)_{i=1}^\infty$ пар конечномерных подпространств в банаховом пространстве Z , для которых $Z_1^i \subset Z_2^i$, назовем f -аппроксимируемой, если найдется такая последовательность линейных непрерывных операторов $u_i: Z \rightarrow Z_2^i$, что $u_i|_{Z_1^i} = I_{Z_1^i}$ и $\sup_i (\|u_i\|/f(i)) < \infty$.

Предложение. Пусть H — слабо* замкнутое подпространство в X^{**} и $\delta(H, X) > 0$. Обозначим через φ фактор-отображение $\varphi: X^{**} \rightarrow X^{**}/H$. Предположим, что в X найдется такая равномерно аппроксимируемая последовательность $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^\infty$, что для некоторой последовательности $(Y_1^i, Y_2^i)_{i=1}^\infty$ пар подпространств в X^{**} выполнены условия

$$\varphi X_1^i = \varphi Y_1^i; \quad \varphi X_2^i = \varphi Y_2^i; \quad (9)$$

$$(\forall i \in N) (\delta(Y_2^i, H) > 0), \quad (10)$$

и, кроме того, последовательность $(Y_1^i, Y_2^i)_{i=1}^\infty$ не является f -аппроксимируемой в X^{**} для функции $f(i) = 1/\delta(Y_2^i, H)$.

Тогда подпространство $H_\perp \subset X^*$ (где $H_\perp := \{x^* \in X^*: (\forall x^{**} \in H) (x^{**}(x^*) = 0)\}$) является нормирующим не квазибазисным подпространством.

Доказательство. Предположим противное и воспользуемся теоремой 2. Из нее вытекает, что последовательность пар $(\varphi X_1^i, \varphi X_2^i)_{i=1}^\infty$ является равномерно аппроксимируемой в X^{**}/H . Это означает, что для некоторого $0 < \lambda < \infty$ найдутся такие операторы $u_i: X^{**}/H \rightarrow \varphi X_2^i$, что

$$u_i|_{\varphi X_1^i} = I_{\varphi X_1^i} \quad (11)$$

¹ Вахер Ф. С., Пличко А. Н. Свойство ограниченной аппроксимации и линейная конечномерная регуляризуемость // Укр. мат. журн. 1981. 33, № 2. С. 167—171.

и $\|u_i\| \leq \lambda$. Рассмотрим операторы $v_i: X^{**} \rightarrow Y_2^i$, определенные равенствами $v_i = (\varphi|_{Y_2^i})^{-1} u_i \varphi$. Эти операторы определены корректно, так как, во-первых, $\text{im } u_i \subset \varphi X_2^i = \varphi Y_2^i$, и, во-вторых, из $\delta(Y_2^i, H) > 0$ вытекает, что оператор, обратный к $\varphi|_{Y_2^i}$, существует. Легко видеть, что $\|(\varphi|_{Y_2^i})^{-1}\| = f(i)$. Поэтому $(\forall i \in N) (\|v_i\| \leq \lambda f(i))$.

Кроме того, из (9) и (11) вытекает, что $v_i|_{Y_1^i} = I_{Y_1^i}$. Мы пришли в противоречие с тем, что последовательность пар $(Y_1^i, Y_2^i)_{i=1}^\infty$ не является f -аппроксимируемой. Предложение доказано.

Проверка выполнимости условий предложения в конкретных ситуациях является довольно трудоемкой. Поэтому представляет интерес следующий критерий.

Теорема 3. Пусть в X^{**} существует рефлексивное недополняемое подпространство Y , изоморфное дополняемому подпространству Z в X , и такое, что $\delta(Y, X) > 0$. Тогда $X \in \text{ССОА}$.

Доказательство. Пусть $T: Y \rightarrow Z$ — изоморфизм. Рассмотрим в X^{**} подпространство $H = \{y - Ty: y \in Y\}$. Проверим, что для него выполнены все условия предложения с $f(i) \equiv C > 0$.

Так как $\delta(X, Y) > 0$, то подпространство H изоморфно Y и, следовательно, рефлексивно. Поэтому, в силу теоремы Крейна — Шмульяна, пространство H является слабо* замкнутым. Легко видеть, что $(H, X) > 0$ и, следовательно, [2, с. 29 — 34], подпространство $M := H_\perp \subset X^*$ является нормирующим.

Очевидно, что мы можем ограничиться случаем, когда X является СБП с СОА. В этом случае и Z является СБП с СОА. Пусть $Z^1 \subset \subset Z^2 \subset \dots \subset Z^n \subset \dots$ — такая последовательность конечномерных подпространств в Z , что

$$\text{cl} \left(\bigcup_{n=1}^\infty Z^n \right) = Z \quad (12)$$

и последовательность пар (Z^i, Z^{i+1}) является равномерно аппроксимируемой в Z , а, следовательно, и равномерно аппроксимируемой в X .

Введем следующие последовательности подпространств: $X_1^i = Z^i$, $X_2^i = Z^{i+1}$, $Y_1^i = T^{-1}Z^i$, $Y_2^i = T^{-1}Z^{i+1}$.

Покажем, что последовательность $(Y_1^i, Y_2^i)_{i=1}^\infty$ не является равномерно аппроксимируемой в X^{**} . Действительно, если предположить, что найдутся такие $u_i: X^{**} \rightarrow Y_2^i$, что $\sup_i \|u_i\| < \infty$ и

$$u_i|_{Y_1^i} = I_{Y_1^i}, \quad (13)$$

то, в силу рефлексивности пространства Y , корректно определен оператор $u: X^{**} \rightarrow Y$; $u(x) = \omega - \lim_A u_i(x)$, где A — некоторый ультрафильтр на N . Этот оператор, в силу (12) и (13), будет проектором на Y , что противоречит недополняемости подпространства Y .

То, что для определенных выше объектов выполнены остальные условия предложения, очевидно. Теорема доказана.

Следствие. Существует СБП X с базисом, изометричное своему второму сопряженному, но без ССОА.

Доказательство. Положим $X = (\sum_{i=1}^{\infty} \oplus J)_p$ ($p \neq 1, 2, \infty$), где J — пространство Джеймса (нерефлексивное пространство, имеющее коразмерность 1 в J^{**} и изометричное J^{**} , (см. [1, с. 25])).

Очевидно, что X — тоже пространство с базисом, изометричное своему второму сопряженному. Кроме того, $X^{**} = X \oplus l_p$. В силу известных результатов (см. [9]), в l_p ($p \neq 1, 2, \infty$) найдется недополняемое подпространство, изоморфное l_p . С другой стороны, в X есть дополняемое подпространство, изоморфное l_p . Мы находимся в условиях теоремы 3.

Замечание. Если для пространства X , рассматриваемого в следствии, проводить конструкцию теоремы 3, то подпространство H будет дополняемым в X^{**} .

Действительно, пусть $P: X \rightarrow Z$ — проектор, существующий по условию и пусть $Q: X^{**} \rightarrow X$ — проектор, соответствующий разложению $X^{**} = X \oplus l_p$. Тогда PQ проектирует пространство X^{**} на Z и $PQ|_Y = 0$. Поэтому оператор $(j_{X^{**}} - T^{-1})PQ$ проектирует X^{**} на H .

Условия теоремы 3 не являются необходимыми для того, чтобы СБП X с ССОА не имело ССОА.

Теорема 4. Существует СБП X с базисом, для которого $X^{**} = X \oplus Y$, пространство Y не содержит бесконечномерных подпространств, изоморфных подпространствам в X , но $X \notin$ ССОА.

Доказательство. Нам понадобится полученный в [10] вариант доказательства теоремы Джеймса — Линденштрауса. Нужный нам частный случай конструкции работы [10] состоит в следующем.

Пусть $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ — расширяющаяся последовательность конечномерных подпространств банахова пространства Z и пусть $\text{cl}(\bigcup_{n=0}^{\infty} X_n) = Z$.

Для упрощения дальнейших обозначений будем предполагать, что $X_0 = \{0\}$.

Пусть $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ — последовательность с $x_i \notin X_i$. Для последовательностей $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ с конечным числом ненулевых членов определим норму $\|\cdot\|_i$ следующим образом:

$$2 \| (x_i)_{i=0}^{\infty} \|_j^2 = \sup \left(\sum_{i=1}^{k-1} \| x_{p(i)} - x_{p(i+1)} \|^2 + \| x_{p(k)} \|^2 \right),$$

где $\sup$ берется по всем последовательностям целых чисел $(p(i))_{i=1}^k$ с $0 \leq p(1) < p(2) < \dots < p(k)$.

Полношение пространства всех последовательностей $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ с конечным числом ненулевых членов по этой норме обозначим $J(X_n)$.

Пространство всех асимптотически постоянных последовательностей снабдим полунормой $\|(x_i)_{i=0}^{\infty}\|_{\Omega} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|$ и обозначим $\Omega(X_n)$.

Пространство всех последовательностей $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ с $x_i \notin X_i$, для которых конечна норма

$\|(x_i)_{i=0}^\infty\|_K = \sup_n \|(x_n, \dots, x_n, 0, \dots)\|_J$,
 обозначим через $K(X_n)$. Ясно, что $K(X_n) \supset \Omega(X_n)$.

Теорема 5. [10]. Пусть последовательность $(X_n)_{n=0}^\infty$ такова, как указано выше. Имеем

(I) $\Omega(X_n)$ плотно в $K(X_n)$.

(II) Если $Y = J(X_n)$, то $Y^{**} = K(X_n)$ и Y^{**}/Y изометрично Z .

(III) Если X_n имеют равномерно ограниченные базисные постоянные, то $J(X_n)$ имеет базис.

Вернемся к доказательству теоремы 4. Зафиксируем некоторое $1 < p < 2$. Положим $Z = l_p$, в качестве X_n возьмем линейные оболочки первых n элементов канонического базиса l_p . Введем пространство $X = J(X_n) \oplus l_2$.

То, что X имеет базис, вытекает из части III теоремы 3.

Лемма 2. Пространство X^{**} представимо в виде прямой суммы: $X^{**} = X \oplus l_p$.

Доказательство. Обозначим через $\{e_i^n\}_{i=1}^n$ векторы канонического базиса в пространстве X_n . Введем векторы $f_i = (0, \dots, 0, e_i^i, e_i^{i+1}, \dots) \in K(X_n)$. Покажем, что последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ эквивалентна каноническому базису пространства l_p . Имеем

$$\left\| \sum_{i=1}^\infty a_i f_i \right\|_K = \left\| (0, a_1 e_1^1, a_1 e_1^2 + a_2 e_2^2, \dots, \sum_{i=1}^n a_i e_i^n, \dots) \right\|_K.$$

Вспомним определение K -нормы и выберем $p(1) = 0$, $p(2) = n$. Имеем

$$\left\| \sum_{i=1}^\infty a_i f_i \right\|_K \geq \left\| \sum_{i=1}^n a_i e_i^n \right\| = \left(\sum_{i=1}^n |a_i|^p \right)^{1/p}.$$

Поскольку это верно для любого n , то

$$\left\| \sum_{i=1}^\infty a_i f_i \right\|_K \geq \left(\sum_{i=1}^\infty |a_i|^p \right)^{1/p}.$$

С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} \left\| \sum a_i f_i \right\|_K &= 2^{-1/2} \sup_{(p(i))} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \left(\sum_{s=p(i)+1}^{p(i+1)} |a_s|^p \right)^{2/p} + \right. \\ &+ \left(\sum_{s=1}^{p(k)} |a_s|^p \right)^{2/p} \Big)^{1/2} \leq 2^{-1/2} \sup_{(p(i))} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{s=p(i)+1}^{p(i+1)} |a_s|^p + \right. \\ &+ \left. \sum_{s=1}^{p(k)} |a_s|^p \right)^{1/p} \leq 2^{1/2} \sup_{(p(k))} \left(\sum_{s=1}^{p(k)} |a_s|^p \right)^{1/p} = \\ &= 2^{1/2} \left(\sum_{s=1}^\infty |a_s|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда и из доказательства теоремы 5 в [10] вытекает, что сужение фактор-отображения $K(X_n) \rightarrow K(X_n)/J(X_n)$ на замыкание линейной оболочки векторов $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ является изоморфизмом. Лемма доказана.

Лемма 3. Любое бесконечномерное подпространство в X содержит подпространство, изоморфное l_2 .

Доказательство. Так как $X = \dot{J}(X_n) \oplus l_2$, то ясно, что достаточно доказать, что любое бесконечномерное подпространство в $\dot{J}(X_n)$ содержит подпространство, изоморфное l_2 .

Нетрудно показать (в этом состоит доказательство части III теоремы 5), что векторы $f_i^n = (0, \dots, 0, e_i^n, 0, \dots)$ образуют базис в $\dot{J}(X_n)$.

Из сепарабельности $(\dot{J}(X_n))^*$ (которая вытекает из $(\dot{J}(X_n))^{**} = \dot{J}(X_n) \oplus l_p$) следует, что в любом бесконечномерном подпространстве в $\dot{J}(X_n)$ можно выделить слабо, но не сильно сходящуюся к нулю последовательность $(x_k)_{k=1}^\infty$. Хорошо известными рассуждениями [1, с. 7] можно показать, что в последовательности (x_k) можно выделить подпоследовательность $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$, которая эквивалентна последовательности вида

$$h_k = \sum_{n=r(k)+1}^{r(k+1)-1} \left(\sum_{i=1}^n a_i^n f_i^n \right).$$

Непосредственно проверяем, что последовательность такого вида эквивалентна каноническому базису пространства l_2 . Лемма доказана.

Лемма 4. $X \notin \text{ССОА}$.

Доказательство. Известно [9], что в l_p ($1 < p < 2$) найдется последовательность конечномерных подпространств W_i , для которых выполнены условия: $\dim W_i = i$; $\sup_i d(W_i, l_2^i) = C < \infty$;

$$(\exists 0 < c_1 \leq c_2 < \infty) (\forall \{w_i\}_{i=1}^\infty; w_i \in W_i) \\ (c_1 (\sum \|w_i\|^p)^{1/p} \leq \|\sum w_i\| \leq c_2 (\sum \|w_i\|^p)^{1/p})$$

и последовательность пар $(W_i, W_i)_{i=1}^\infty$ не является равномерно аппроксимируемой в l_p .

Введем обозначение $W = \text{cl} \lim_{i=1}^\infty W_i$. В силу леммы 2 имеем $X^{**} = X \oplus l_p = \dot{J}(X_n) \oplus l_2 \oplus l_p$. Представим l_2 в виде суммы $l_2 = (\sum_{i=1}^\infty \oplus U_i)_2$, где U_i — пространства, изометричные l_2^i . Пусть $T_i: W_i \rightarrow U_i$ — такие изоморфизмы, что

$$\|T_i\| \leq 1; \|T_i^{-1}\| \leq C. \quad (14)$$

Определим оператор $T: W \rightarrow l_2$ равенством $T((w_i)_{i=1}^\infty) = (T_i w_i)_{i=1}^\infty$. Ясно, что T — ограниченный оператор и что

$$TW_i = U_i. \quad (15)$$

Положим $H = \{x - Tx : x \in W\} \subset X^{**}$. Проверим, что для H выполнены все условия предложения.

То, что H слабо* замкнуто, вытекает из рефлексивности W . Очевидно также, что $\delta(H, X) > 0$. Введем $X_1^i = X_2^i = U_i$; $Y_1^i = Y_2^i = W_i$.

Ясно что $(X_1^i, X_2^i)_{i=1}^\infty$ — равномерно аппроксимируемая последовательность пар, а $(Y_1^i, Y_2^i)_{i=1}^\infty$ — нет. Из (15) вытекает, что выполнено условие (9), а из (14) — что выполнено условие (10). При этом $\inf \delta(Y_2^i, H) > 0$. Лемма доказана.

Теорема 4 непосредственно вытекает из лемм 2 — 4.

3. Определение 8. Пусть X — подпространство в банаховом пространстве Z , M — подпространство в X^* . Оно называется ограниченно продолжаемым на Z , если существует изоморфное вложение $\pi: M \rightarrow Z^*$, для которого $(\forall f \in M) (\forall x \in X) ((\pi(f))(x) = f(x))$.

Теорема 6. Пусть СБП X имеет СОА. Для $X \notin \text{ССОА}$ необходимо и достаточно, чтобы нашлось такое банахово пространство Z , содержащее X в качестве подпространства, что подпространство $X^\perp$ недополняемо в Z^* , но в X^* найдется нормирующее подпространство M , ограниченно продолжаемое на Z .

Достаточность доказана в [11]. Нашей целью будет доказательство необходимости. Пусть $X \notin \text{ССОА}$, $M \subset X^*$ — нормирующее подпространство, не являющееся квазibasисным. Введем $Z = M^*$. Ясно, что X естественным образом изоморфно вкладывается в Z и после соответствующей перенормировки X можно считать подпространством Z . При этом M является нормирующим подпространством в X^* , естественным образом ограниченно продолжаемым на Z . Нам остается доказать, что $X^\perp$ недополняемо в Z^* . Предположим противное. В этом случае $M^{**} = Z^*$ представимо в виде $X^\perp \oplus U$, причем U естественным образом изоморфно X^* . Так как $X \in \text{СОА}$, то найдутся такие векторы $\{x_{i,n}\}_{i=1}^{p(n)} \subset X$ и $\{x_{i,n}^*\}_{i=1}^{p(n)} \subset X^*$, что

$$(\forall x \in X) (x = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{p(n)} x_{i,n}^*(x) x_{i,n}).$$

Обозначим через $S: X^* \rightarrow U$ естественный изоморфизм. Введем последовательность операторов $T_n: Z \rightarrow Z$ равенствами

$$T_n(z) = \sum_{i=1}^{p(n)} (Sx_{i,n}^*)(z) x_{i,n}.$$

Эта последовательность равномерно непрерывна и на подпространстве $X \subset Z$ сильно сходится к тождественному оператору. Воспользовавшись леммой 1 и сепарабельностью пространства X , найдем последовательность слабо* непрерывных операторов в $M^* = Z$, которая на X будет сильно сходиться к тождественному оператору. Нетрудно видеть, что это означает квазibasисность подпространства $M \subset X^*$. Теорема доказана.

4. Из процитированного после теоремы 2 результата работы [8] вытекает, что СБП X с СОА, для которого любое нормирующее подпространство $M \subset X^*$ имеет конечную коразмерность, обладает ССОА.

Возникает естественная задача описания класса таких пространств и его сравнения с классом квазирефлексивных СБП с СОА. (Напомним, что банахово пространство X называется квазирефлексивным, если $\dim(X^{**}/X) < \infty$).

Примеры неквазирефлексивных СБП, для которых любое нормирующее подпространство $M \subset X^*$ имеет конечную коразмерность, приведены в работе [12]. Конструкция работы [12] основана на том, что достаточным условием для этого является такое: фактор-пространство X^{**}/X не содержит бесконечномерных подпространств, изоморфных сопряженным. (Доказательство достаточности этого условия очень просто: если M — нормирующее подпространство в X^* , то для $M^\perp \subset X^{**}$ имеем а) $M^\perp$ изоморфно подпространству в X^{**}/X ; б) $M^\perp = (X^*/M)^*$.)

Целью заключительной части настоящей статьи является доказательство того, что сформулированное условие не является необходимым.

Теорема 7. *Существует такое банахово пространство Y с базисом, что фактор-пространство Y^{**}/Y является бесконечномерным рефлексивным СБП, но в Y^* нет нормирующих подпространств бесконечной коразмерности.*

Доказательство. Обратимся к приведенной выше конструкции работы [10]. Зафиксируем некоторое $p > 2$ и возьмем в качестве Z пространство l_p , а в качестве X_n линейные оболочки первых n элементов канонического базиса в l_p . Пусть $Y = J(X_n)$.

Лемма 5. Пространство Y^{**} не содержит подпространств, изоморфных l_p .

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ — базисная последовательность в Y^{**} , эквивалентная каноническому базису в l_p . Так как Y^{**} изометрично $K(X_n)$, то f_i можно записывать в виде

$$f_i = (x_0^i, x_1^i, \dots, x_n^i, \dots), \quad (16)$$

где $x_n^i \in X_n$. В силу части I теоремы 5 можно считать последовательности (16) асимптотически постоянными. Пусть $f_1 = (x_0^1, \dots, x_{n_1-1}^1, x_1^1, \dots, x_1^1, \dots)$. Так как последовательность $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ слабо сходится к нулю, то для любого $\varepsilon_2 > 0$ можно найти такое натуральное число m_2 , чтобы для f_{m_2} имело место $\|x_0^{m_2}\| + \dots + \|x_{n_1+1}^{m_2}\| < \varepsilon_2$. Запишем $f_{m_2} = (x_0^{m_2}, \dots, x_{n_2-1}^{m_2}, x^{m_2}, \dots, x^{m_2}, \dots)$. При этом, очевидно, можно считать, что $n_2 - 1 > n_1 + 1$. Пусть $\varepsilon_3 > 0$. Находим такое натуральное число m_3 , чтобы для f_{m_3} имело место $\|x_0^{m_3}\| + \dots + \|x_{n_2+1}^{m_3}\| < \varepsilon_3$. Запишем $f_{m_3} = (x_0^{m_3}, \dots, x_{n_3-1}^{m_3}, x^{m_3}, \dots, x^{m_3}, \dots)$, и т.д.

Последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ выбираем такой, чтобы последовательность

$$\begin{aligned} g_1 &= f_1; \\ g_2 &= (0, \dots, 0, x_{n_1+2}^{m_2}, \dots, x_{n_2-1}^{m_2}, x^{m_2}, \dots); \\ g_3 &= (0, \dots, 0, x_{n_2+2}^{m_3}, \dots, x_{n_3-1}^{m_3}, x^{m_3}, \dots) \\ &\dots \end{aligned}$$

тоже была эквивалентна каноническому базису l_p . В дальнейшем для единообразия обозначений будем считать $m_1 = 1$, $n_0 = -1$.

Пусть $\{p(k, i)\}_{k=1}^{\infty}, i=1, s(k)$ — такой набор целых чисел, что $n_{k-1} + 1 = p(k, 1) < \dots < p(k, s(k)) = n_k$ и

$$\sum_{i=1}^{s(k)-1} \|x_{p(k, i+1)}^{m_k} - x_{p(k, i)}^{m_k}\|^2 \geq \|g_k\|_K^2.$$

Оценим снизу норму $\|\sum a_k g_k\|_K$. Для этого рассмотрим набор $(p(i))$ целых чисел, состоящий из следующих чисел:

$$\begin{aligned} p(1, 1) < p(1, 2) < \dots < p(1, s(1)) < \\ < p(2, 1) < p(2, 2) < \dots < p(2, s(2)) < \dots < \\ < p(r, 1) < p(r, 2) < \dots < p(r, s(r)). \end{aligned}$$

Получим

$$2 \|\sum_{k=1}^r a_k g_k\|_K^2 \geq \sum_{k=1}^r a_k \|g_k\|_K^2.$$

Так как $p > 2$, то мы приходим в противоречие с тем, что последовательность $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ эквивалентна каноническому базису пространства l_p . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 7. Пространство Y имеет базис в силу части III теоремы 5. Из части II теоремы 5 вытекает, что Y^{**}/Y изометрично l_p .

Предположим, что в Y^* найдется нормирующее подпространство M бесконечной коразмерности. Тогда $M^\perp \subset Y^{**}$ изоморфно подпространству в Y^{**}/Y , т.е. подпространству в l_p и, следовательно, [1, с. 53], содержит подпространство, изоморфное l_p , что противоречит лемме 5. Теорема доказана.

Список литературы: 1. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces, I. Berlin, 1977. 188 p. 2. Постуник Ю. И., Пличко А. Н. Теория характеристик подпространств и ее приложения. К., 1980. 216 с. 3. Singer I. Bases in Banach spaces, II. Berlin, 1981. 880 p. 4. Zippin M. A remark on bases and reflexivity in Banach spaces//Isr. J. Math. 1968. 6, № 1. P. 74—79. 5. Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach spaces. Berlin, 1973. 243 p. 6. Доманский Е. Н., Кадец В. М. О базисной регуляризуемости обратных операторов//Сиб. мат. журн. 1988. 29, № 5. С. 104—108. 7. Johnson W. B., Rosenthal H. P., Zippin M. On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces//Isr. J. Math. 1971. 9, № 4. P. 488—506. 8. Менихес Л. Д., Пличко А. Н. Условия линейной и конечномерной регуляризуемости линейных обратных задач//ДАН СССР. 1978. 241, № 5. С. 1027—1030. 9. Bennett G., Dor L. E., Goodman V., Johnson W. B., Newman C. M. On uncomplemented subspaces of L_p , $1 < p < 2$ //Isr. J. Math. 1977. V. 26, № 2. P. 178—187. 10. Bellenot S. F. The J-sum of Banach spaces//J. Funct. Anal. 1982. 48, № 1. P. 95—106. 11. Вахер Ф. С. Свойство ограниченной аппроксимации в сепарабельных банаховых пространствах//ДАН СССР. 1980. 255, № 6. С. 1301—1306. 12. Davis W. J., Johnson W. B. Basic sequences and norming subspaces in non-quasi-reflexive Banach spaces//Isr. J. Math. 1973. 14. P. 353—367.

Поступила в редколлегию 26.11.90