ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА имени А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXX. Серия 4 1964

ОБ УРАВНЕНИИ ЛАПЛАСА $\sum_{k=0}^{n}(\alpha_k t+\beta_k)\, y^{(n-k)}_{(t)}=0$

А. В. Луценко

В работе [1] было, между прочим, указано, что характеристические функции законов распределения Пирсона, допускающих первый абсолютный момент, удовлетворяют уравнению

$$b_0 t\frac{d^2\varphi}{dt^2}+(2b_0+1+ib_1t)\frac{d\varphi}{dt}+(b_1i+ai-b_2t)\varphi=0,$$

где коэффициенты a, b_k те же, что и в уравнении

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+a}{b_0x^2+b_1x+b_2}y$$

для плотностей распределения.

Оказывается, что если

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}y, \tag{1}$$

$$P_m(x)=\sum_{k=0}^{m}a_kx^{m-k},\quad Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^{n-k},\quad m\leqslant n,$$

и $y(x)$ допускает моменты до n-го порядка включительно, то функция

$$\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}y(x)e^{itx}dx$$

удовлетворяет уравнению

$$A_0(t)\varphi^{(n)}+A_1(t)\varphi^{(n-1)}+\ldots+A_n(t)\varphi=0, \tag{2}$$

$$\begin{aligned} A_k(t)&=\frac{tb_ki+(n-k+1)b_{k-1}}{i^{n-k}},\quad b_{-1}=0,\ k=0,1,\ldots,n-m-1\\ A_k(t)&=\frac{tb_ki+(n-k+1)b_{k-1}+a_{k-(n-m)}}{i^{n-k}},\quad k=n-m,\ldots,n.\end{aligned} \tag{3}$$

Обратно, если $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$(\alpha_0t+\beta)\varphi^{(n)}+(\alpha_1t+\beta_1)\varphi^{(n-1)}+\ldots+(\alpha_nt+\beta_n)\varphi=0 \tag{4}$$

с ограниченными производными $\varphi^{(k)}(t)$ $(k=1,2,\ldots,n)$, для которого

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi(t)|\,dt<\infty,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|t\varphi(t)|\,dt<\infty,$$

то функция

$$y(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-itx}dt$$

является решением уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} y,$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}, \quad Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^{n-k},$$

$$b_k = i^{n-k-1} \alpha_k$$

$$a_k = i^{n-k} [\beta_k - (n-k+1) \alpha_{k+1}].$$

При $\alpha_0 \neq 0$ степень многочлена $P_n(x)$ понизится на единицу, если в уравнении (4) выполнить замену

$$Z = \alpha_0 t + \beta_0.$$

Высказанные утверждения легко проверяются как непосредственными вычислениями элементарного характера (интегрирование по частям), так и с помощью соотношений, известных для оператора Фурье и ему обратного.

Замечание 1. Если в уравнении (1) $m \geqslant n$, то уравнение (2) заменится уравнением

$$A_0(t) \varphi^{(m)} + A_1(t) \varphi^{(m-1)} + \ldots + A_m(t) \varphi = 0,$$

$$A_k(t) = \frac{a_k}{i^{m-k}}, \; k = 0, 1, \ldots, m-n-1$$

$$A_k(t) = \frac{tib_{k-(m-n)} + a_k + (m-k+1) b_{k-(m-n)-1}}{i^{m-k}}, \quad k = m-n, \ldots, m,$$

$$b_{-1} = 0.$$

Замечание 2. Из изложенного, в частности, следует, что уравнение Лапласа не может иметь двух линейно независимых решений с конечными производными до n-го порядка включительно, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(t)| \, dt < \infty, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |t\varphi(t)| \, dt < \infty.$$

Приведем два примера использования связи между уравнениями (1), (2).

Пример 1. Уравнению

$$\varphi''' + (t+3) \varphi'' + (3t+9) \varphi' + (7t+3) \varphi = 0 \tag{5}$$

соответствует уравнение

$$y' = -xy.$$

Решению $y = Ce^{-x^2/2}$ последнего уравнения соответствует решение

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-x^2/2} e^{itx} dx = C_1 e^{-t^2/2}$$

уравнения (5).

Пример 2. Уравнению

$$t\varphi'' - 2\varphi' - t\varphi = 0 \tag{6}$$

соответствует уравнение

$$y' = \frac{-4x}{x^2+1} y.$$

Решению

$$y = \frac{C}{(1+x^2)^2}$$

этого уравнения соответствует решение

$$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{(1+x^2)^2} e^{itx} dx = C_1 (1 + |t|) e^{-|t|}$$

уравнения (6).

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. І. Дрінфельд. Про характеристичні функції пірсонових кривих розподілу. «Наук. зап. КДУ», фіз. мат. зб., Київ, 1939.