

Міністерство освіти і науки України
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Навчально-науковий інститут «Українська інженерно-педагогічна академія»
Кафедра автоматизації, метрології та енергоефективних технологій

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

магістра

на тему

Аналіз результатів нерівноточних вимірів із застосуванням обробки методом

агрегування рангів

(тема кваліфікаційної роботи)

Виконав: студент 2 курсу, групи ДЕА-ІВ23мг
спеціальності : 175 Інформаційно-вимірювальні технології

(шифр і назва напрямку підготовки, спеціальності)

_____ / Микола ТИЩЕНКО

(підпис)

(ім'я та прізвище)

Керівник _____ / Олена БЛИЗНИЧЕНКО

(підпис)

(ім'я та прізвище)

Рецензент _____ / Антон СКОРКІН

(підпис)

(ім'я та прізвище)

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри _____ / Геннадій КАНЮК

(підпис)

(ім'я та прізвище)

Нормоконтроль _____ / Євгеній КЛЮЧКА

(підпис)

(ім'я та прізвище)

Секретар ЕК _____ / Євгеній КЛЮЧКА

(підпис)

(ім'я та прізвище)

Харків – 2024 рік

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В. Н. КАРАЗІНА
НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ «УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-
ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ»**

Кафедра автоматизації, метрології та енергоефективних технологій

Спеціальність 175 Інформаційно-вимірювальні технології

Освітньо-професійна програма «Якість, стандартизація та сертифікація»

ЗАТВЕРДЖУЮ

Завідувач кафедри

(підпис)

д.т.н., проф. Геннадій КАНЮК

«___» _____ 2024 р.

ЗАВДАННЯ

на кваліфікаційну роботу (дипломну роботу/дипломний проєкт)

другого (магістерського) рівня вищої освіти

здобувачу (ці) вищої освіти _____ Миколі ТИЩЕНКУ

(ім'я, прізвище)

1. Тема «Аналіз результатів нерівноточних вимірів із застосуванням обробки методом агрегування рангів»

затверджена наказом по академії № 4801-5/3704 від 21.11.2024 р.

2. Термін здачі закінченої роботи «05» грудня 2024 р.

3. Вихідні дані до роботи/проєкту : Закони України, Постанови Верховної Ради, Постанови Кабінету Міністрів, теоретичні та практичні розробки вітчизняних та зарубіжних авторів за темою роботи, періодичні видання, статистичні дані, галузева нормативна документація, технологічна документація.

4. Зміст роботи/проєкту (перелік питань, що їх належить розробити): Вступ. 1. Нерівноточні вимірювання та методи їх обробки. 2. Метод середнього зваженого. 3. Метод IF&PA. Висновки.

5. Перелік графічного матеріалу (презентаційний матеріал): 1. Ціль, об'єкт, предмет та задачі дослідження 2. Форма закону нормального розподілу зі стандартними параметрами 3. графік густини ймовірності випадкової величини 4. Рівнодисперсні вимірювання в умовах повторюваності 5. Нерівнодисперсні вимірювання 6. Схема отримання оцінок методами IF&PA та середнього зваженого 7. Метрологічні характеристики експериментального обладнання 8. Лабораторний макет 9. Подання результатів вимірювань 10. Результати вимірів 11. Схема вхідних та вихідних

параметрів 12. Етапи формування з безперервних дискретних значень діапазону RAV
13. Етапи знаходження найкращої оцінки методом IF&PA 14. Результати вимірів,
отримані методом IF&PA 15. Подання результатів вимірювань. Висновки.

6. Консультант:

Розділ	Консультант	Підпис, дата		Оцінка (бали)
		Завдання видав	Завдання прийняв	

7. Дата видачі завдання «2» вересня 2024 р.

Керівник роботи _____ Олена БЛИЗНИЧЕНКО
(підпис) (ім'я, прізвище)

Завдання прийняв до виконання _____ Микола ТИЩЕНКО
(підпис) (ім'я, прізвище)

КАЛЕНДАРНИЙ ПЛАН-ГРАФІК
виконання кваліфікаційної роботи
(дипломної роботи/дипломного проєкту)

№ з/п	Назва етапів роботи та питань, які мають бути розроблені відповідно до завдання	Термін виконання	Позначки керівника про виконання завдань
1	Вступ	02.09.2024 – 05.09.2024	
2	Нерівноточні вимірювання та методи їх обробки	06.09.2024 – 15.10.2024	
3	Метод середнього зваженого	16.10.2024 – 05.11.2024	
4	Проведення експерименту	06.11.2024 – 10.11.2024	
5	Метод IF&PA	11.11.2024 – 25.11.2024	
6	Висновки	26.11.2024 – 01.12.2024	
7	Оформлення пояснювальної записки та презентації	02.12.2024 – 05.12.2024	

Здобувач (ка) вищої освіти _____ Микола ТИЩЕНКО
(підпис) (ім'я, прізвище)

Нормоконтроль _____ Євгеній КЛЮЧКА
(підпис) (ім'я, прізвище)

РЕФЕРАТ

Пояснювальна записка дипломної роботи складає: 86 сторінок, 15 рисунків, 10 таблиць, 23 переліки посилань.

Ключові слова: НЕРІВНОТОЧНІ ВИМІРИ, БАГАТОРАЗОВІ ВИМІРИ, АГРЕГУВАННЯ РАНГІВ, КОМПЛЕКСУВАННЯ ІНТЕРВАЛЬНИХ ДАНИХ, РОБАСТНІСТЬ, ТОЧНІСТЬ

Об'єктом дослідження є метод опрацювання результатів нерівноточних вимірювань IF&PA.

Мета роботи – провести порівняльний аналіз результатів нерівноточних вимірювань напруги змінного струму, отриманих за допомогою кількох екземплярів однотипних засобів вимірювань, опрацьованих методами середнього зваженого та IF&PA та виробити науково-практичні рекомендації для використання методу агрегування.

У процесі дослідження було проведено аналіз сучасної літератури та стандартизованих методів у галузі обробки результатів нерівноточних вимірів; проведено вимірювання напруги змінного струму за допомогою п'яти цифрових вольтметрів В7-38М у трьох точках діапазону на межі 8; отримані дані були опрацьовані методами середнього зваженого та IF&PA з оцінюванням точності; проведено порівняльний аналіз результатів, отриманих методами середнього виваженого та IF&PA.

В результаті проведених досліджень підтверджено доцільність застосування методу IF&PA для обробки нерівноточних вимірів.

Область застосування: метрологічне забезпечення єдності вимірів, міжлабораторні звірення, обробка результатів вимірів, оцінка невизначеності вимірів.

ABSTRACT

An explaining message consists of: 86 pages, 15 pictures, 10 tables, 23 lists of references.

Keywords: NON-UNIFORM MEASUREMENTS, MULTIPLE MEASUREMENTS, RANK AGGREGATION, INTERVAL DATA COMPLEXATION, ROBUSTNESS, ACCURACY

The object of the study is the method of processing the results of non-uniform measurements IF&PA.

The purpose of the work is to conduct a comparative analysis of the results of non-uniform measurements of alternating current voltage obtained using several copies of the same type of measuring instruments, processed by the weighted average and IF&PA methods, and to develop scientific and practical recommendations for using the aggregation method.

In the process of the study, an analysis of modern literature and standardized methods in the field of processing the results of non-uniform measurements was conducted; AC voltage was measured using five digital voltmeters B7-38M at three points of the range at the limit of 8; the obtained data were processed by the weighted average and IF&PA methods with accuracy assessment; a comparative analysis of the results obtained by the weighted average and IF&PA methods was conducted.

As a result of the conducted studies, the feasibility of using the IF&PA method for processing non-uniform measurements was confirmed.

Scope: metrological assurance of measurement uniformity, interlaboratory comparisons, processing of measurement results, assessment of measurement uncertainty.

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК СКРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ	6
ВСТУП.....	7
РОЗДІЛ 1 НЕРІВНОТОЧНІ ВИМІРЮВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ ОБРОБКИ...	9
1.1 Точність вимірів	9
1.2 Рівноточні та нерівноточні вимірювання.....	14
Висновки до першого розділу	19
РОЗДІЛ 2 МЕТОД СЕРЕДНЬОГО ЗВАЖЕНОГО	21
Висновки до другого розділу.....	37
РОЗДІЛ 3 МЕТОД IF&PA	39
3.1 Параметричні та непараметричні методи оцінки результатів нерівноточних вимірювань	43
3.2 Алгоритм та випробування методу IF&PA	48
Висновки до третього розділу	80
ВИСНОВОК	82
ПЕРЕЛІК ПОСЛАНЬ	84

ПЕРЕЛІК СКРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ

ВВ – вимірювана величина

ЗВ - засіб вимірювань

ЗНР – закону нормального розподілу

МХ - метрологічна характеристика

РВ - результати вимірювань

СКВ - середнє квадратичне відхилення вибірки

ФВ - фізичної величини

RAV – range of actual values

ВСТУП

Результати спостережень називаються рівнорозсіяними (рівноточними), якщо вони є незалежними, однаково розподіленими випадковими величинами і виходять при вимірюваннях, які проводять один спостерігач або група спостерігачів; за допомогою тих самих методів і засобів вимірювань; у постійних умовах довкілля.

Порушення хоча б однієї з перерахованих умов призводить до ситуації нерівноточних (або нерівнодисперсних) вимірів. І тут актуальним є розвиток і аналіз застосованості спеціальних методів обробки результатів вимірів.

Мета роботи – дослідити і провести порівняльний аналіз результатів нерівноточних вимірювань напруги змінного струму, отриманих за допомогою кількох екземплярів однотипних засобів вимірювань, опрацьованих методами середнього зваженого та IF&PA.

Мета роботи може бути досягнута при вирішенні таких задач дослідження:

1. Підбір і аналіз сучасних інформаційних джерел щодо проблеми, що досліджується, а саме стандартизованих методів у галузі обробки результатів нерівноточних вимірів.
2. Проведення експериментального вимірювання напруги змінного струму за допомогою п'яти цифрових вольтметрів В7-38М у трьох точках діапазону на межі 8 В.
3. Опрацювання та аналіз результатів експериментальних досліджень за допомогою різних методів : методу середнього зваженого та методу IF&PA з оцінюванням точності.
4. Обґрунтування доцільності і ефективності методу IF&PA для обробки нерівноточних вимірювань і виробітка науково-практичних рекомендацій із застосування методу IF&PA для забезпечення високої точності вимірювань при вирішенні практичних завдань в умовах виробництва.

В результаті проведених досліджень підтверджено доцільність застосування методу IF&PA для обробки нерівноточних вимірів.

РОЗДІЛ 1

НЕРІВНОТОЧНІ ВИМІРЮВАННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ ОБРОБКИ

1.1 Точність вимірів

Будь-який вимір, спрямоване експериментальне визначення значення величини, характеризується точністю. Точність - це ступінь близькості результату аналізу до справжнього (опорного) значення [1].

Виражається точність середньо квадратичним відхиленням, довірчими межами похибки, стандартною невизначеністю вимірювань, сумарною стандартною та розширеною невизначеністю.

Характеристикою точності, зокрема, є такі оцінки, як похибка і невизначеність вимірів, засновані на ймовірнісній моделі: вони завжди виявляються по-різному, з певною ймовірністю, що можна порівняти з генерацією випадкових чисел.

З Постулату теорії похибок впливає, що результати прямих вимірів та їх випадкові похибки за великої кількості підпорядковуються закону нормального розподілу. На малюнку 1 представлено форму закону нормального розподілу зі стандартними параметрами (ЗНР).

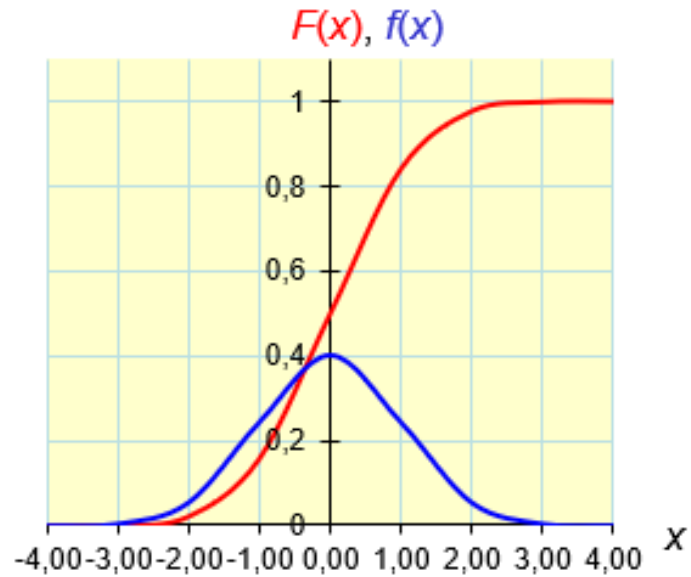


Рис. 1.1 Форма закону нормального розподілу зі стандартними параметрами

$$\mu = 0 \text{ та } \sigma = 1.$$

Нормальний розподіл має параметри μ та σ :
інтегральна форма :

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx, \quad (1.1)$$

диференційна форма :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.2)$$

де $\sigma = \sqrt{D}$ – середнє квадратичне відхилення,
 D – дисперсія випадкової величини;
 μ – математичне очікування випадкової величини.

У формулах (1.1) і (1.2) використовують параметри середнього квадратичного відхилення σ і математичного очікування μ для генеральної сукупності – безлічі всіх об'єктів, що підлягають виміру.

Оброблювані результати вимірювань (РВ) беруть з вибірки, яка є частиною генеральної сукупності обсягу n .

Аналогами μ і σ для вибірки є середнє арифметичне вибірки (координата центру розподілу) і середнє квадратичне відхилення вибірки (СКВ) S :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad (1.3)$$

де x_i - значення вхідної величини в i -тій точці вимірювань;

i – порядковий номер точки вимірів, $i = 1, \dots, n$;

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad (1.4)$$

де x_i - значення вхідної величини в i -тій точці вимірювань;

$\bar{x}$ – середнє арифметичне значення n незалежних вимірів;

i – порядковий номер точки вимірів, $i = 1, \dots, n$;

Оцінки числових характеристик законів розподілу (центру розподілу та СКВ) називають точковими.

Ці оцінки є випадковими величинами та залежать від обсягу вибірки та виду закону розподілу.

У зв'язку з цим оцінки повинні мати наступні властивості:

1 Спроможність:

точність результатів вимірювань підвищується зі збільшенням обсягу вибірки n . За формулою

$$D(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad (1.5)$$

можна помітити, як дисперсія випадкової величини зменшується із збільшенням числа вимірів n . Таким чином, оцінка величини x називається заможною, якщо $D(\bar{x}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;

2. Незміщеність:

при обчисленні оцінки $\bar{x}$ не з'являється додаткова систематична похибка, а оцінка $E(\bar{x})$ збігається з вимірюваним значенням, тобто $E(\bar{x}) = x$.

3. Ефективність:

Визначаються за допомогою нерівності Рао-Крамера для незміщених оцінок:

$$D(\bar{x}) \geq \left[n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \ln f\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} \right)^2 f\left(\frac{y}{x}\right) dx \right]^{-1} = D^* \quad (1.6)$$

де $f(y/x)$ – щільність ймовірності випадкового вектора $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ при фіксованому значенні x оцінюваної випадкової величини X .

Таким чином, дисперсія оцінки $\bar{x}$ не може бути меншою за деяку величину D^* , яка залежить від закону розподілу результатів досвіду та обсягу вибірки. Отже, D^* - це мінімально можлива дисперсія, яку можна досягти за заданого закону розподілу ВВ.

Для незміщених оцінок величина

$$D(\bar{x}) \geq \left[n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \ln f\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} \right)^2 f\left(\frac{y}{x}\right) dx \right]^{-1} = D^* \quad (1.7)$$

називається ефективністю цієї оцінки.

Ефективною називається оцінка, для якої $e(\bar{x}) = 1$. Для всіх інших оцінок ефективність є позитивним правильним дробом.

Якщо $e(\bar{x}) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$, то оцінка $\bar{x}$ називається асимптотично ефективною.

Властивість ефективності дозволяє порівнювати між собою оцінки, знайдені у різний спосіб, за кількістю вимірювань n , необхідного для досягнення однакової дисперсії оцінки.

Як правило, кожному закону розподілу помилок вимірів відповідає певний вид ефективної оцінки $\bar{x}$ і, отже, спосіб її знаходження.

Наприклад, для нормального закону розподілу середньоарифметична оцінка є ефективною. У такому разі

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(y-x)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (1.8)$$

З врахуванням

$$\frac{\partial \ln f\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial \ln \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}}{\partial x} - \frac{\partial \ln \frac{1}{2\sigma^2}(y-x)^2}{\partial x} = \frac{2(y-x)}{2\sigma^2} = \frac{y-x}{\sigma^2}, \quad (1.9)$$

мінімально можлива дисперсія має вид

$$D^* = \left[n \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{(y-x)^2}{\sigma^4} \right)^2 f\left(\frac{y}{x}\right) dx \right]^{-1} = \left(n \frac{\sigma^2}{\sigma^4} \right)^{-1} = \frac{\sigma^2}{n}. \quad (1.10)$$

Підставляючи знайдені дисперсії $D(\bar{x})$ та D^* у формулу (1.7), отримуємо

$$e(\bar{x}) = \frac{D^*}{D(\bar{x})} = 1 \quad (1.11)$$

для закону розподілу. Так, при законах розподілу, відмінних від нормального, ефективність $e(\bar{x}) < 1$.

1.2 Рівноточні та нерівноточні вимірювання

Відповідно до прийнятої в метрології класифікації, вимірювання за характером точності поділяються на

- рівноточні;
- нерівноточні.

Відповідно до [2], рівноточні виміри – це ряд вимірів будь-якої величини, виконаних однаковими за точністю засобами вимірів в тих самих умовах з однаковою ретельністю. У чинній редакції нормативних документів визначення рівноточності та нерівноточності було виключено. Так, посилаючись на чинні документи, ці види вимірювань можна охарактеризувати з певною точністю в умовах повторюваності.

До умов повторюваності відносять:

- використовуваний метод вимірювань;
- засоби вимірювань;
- умови навколишнього середовища;
- кількість операторів;
- проміжок часу між вимірами [3].

Термін «рівноточні» виміри не зовсім коректним, у цій роботі використовуються визначення «рівнодисперсних» і «нерівнодисперсних» вимірів.

Вимірювання розподіляють за різними класами. Зокрема, рівноточні та нерівноточні вимірювання класифікують за точністю. Як відомо, точність вимірів – це близькість виміряного значення до справжнього значення вимірюваної величини [3]. Іншими словами, точність відбиває близькість до нуля похибки результату вимірів. Отже, характеристикою точності у вимірах є похибка, як одна з точкових оцінок.

На рис. 1.2 представлено графік густини ймовірності випадкової величини з такими оцінками, як похибка $\pm \Delta$ та стандартне відхилення σ .

Так, при використанні термінів «рівноточні» та «нерівноточні» виміри мають на увазі, що випадкова величина відхиляється від істинного значення $X_{\text{іст}}$ на величину похибки $\pm \Delta$. Результат вимірів у такому разі має вигляд:

$$y = X_{\text{іст}} \pm \Delta. \quad (1.12)$$

У цій роботі метою застосування термінів «рівнодисперсні» та «нерівнодисперсні» вимірювання є відбити міру розсіювання випадкової величини щодо її істинного значення $X_{\text{іст}}$ (математичного очікування). Мірою розсіювання буде стандартне відхилення σ , а результат вимірювань буде записаний як

$$y = X_{\text{іст}} \pm \sigma. \quad (1.13)$$

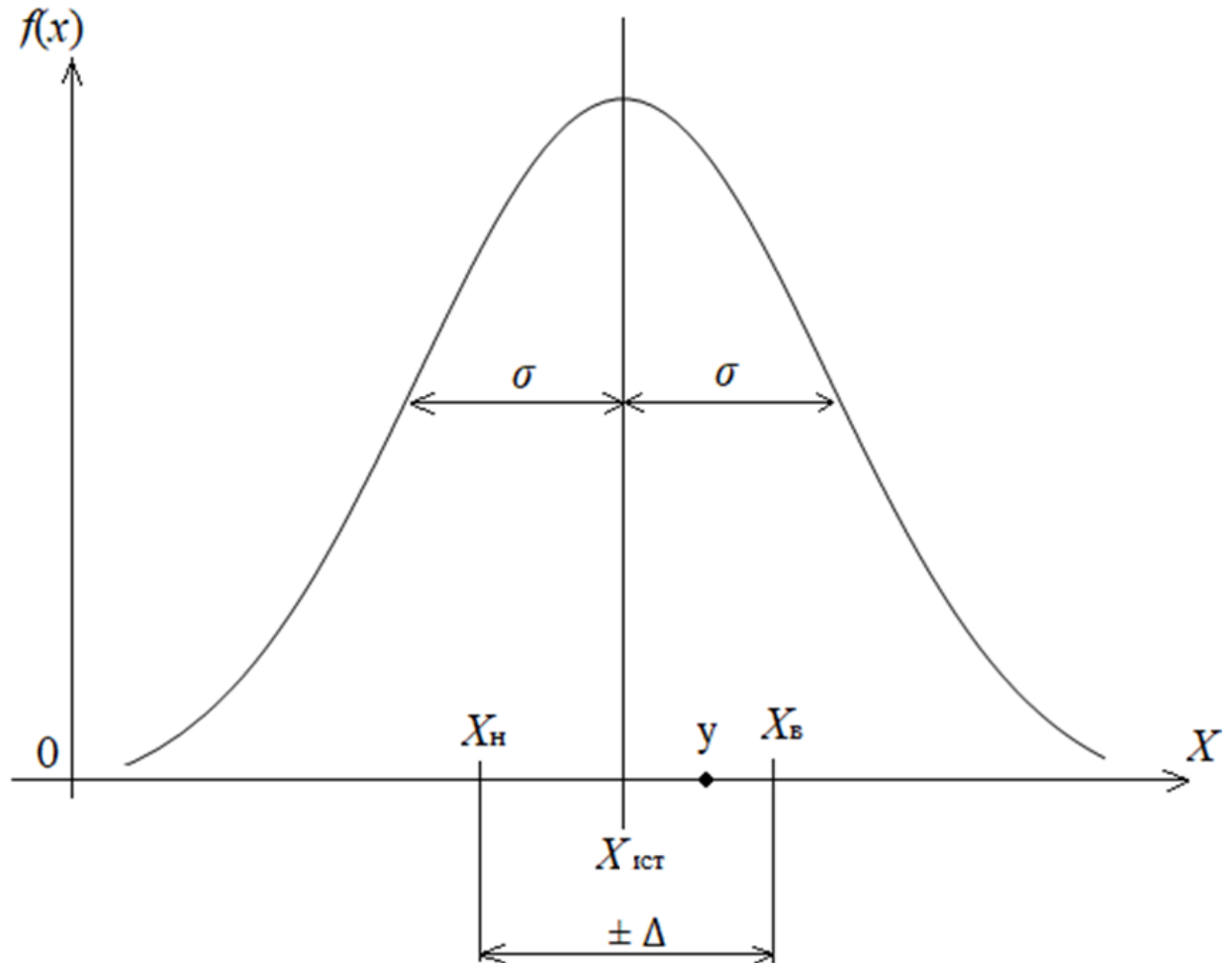


Рис.1.2 Графік густини ймовірності випадкової величини з межами похибки та стандартного відхилення

Як видно з рис. 1.2, такі характеристики, як $\pm \Delta$ та σ мають різні значення величини. Відповідно, у межах даної роботи терміни «рівноточні» і «нерівноточні» виміри замінені на «рівнодисперсні» і «нерівнодисперсні» виміри, що у більшою мірою відбиває властивості, якими мають володіти оцінки результатів вимірів.

Прикладом рівнодисперсних вимірювань можуть бути вимірювання напруги величиною 3 В, згенеровані джерелом сигналу. Вимірювання проводять одним і тим же засобом вимірювань (ЗВ), одним оператором, в

одній лабораторії та в одних і тих самих умовах навколишнього середовища. Проміжок часу між вимірами – мінімально можливий за умов вимірювань.

На рис. 1.3 представлено рівнодисперсні виміри в умовах повторюваності.

Таким чином, при проведенні вимірювань знаходять середньоквадратичне відхилення вимірювань, яке дорівнюватиме прийнятого обсягу вибірки N . Отже, для знаходження найкращої оцінки результатів вимірювань $x_1, \dots, x_n$ може бути застосовано формулу середньоарифметичної вибірки ($\bar{x}$).

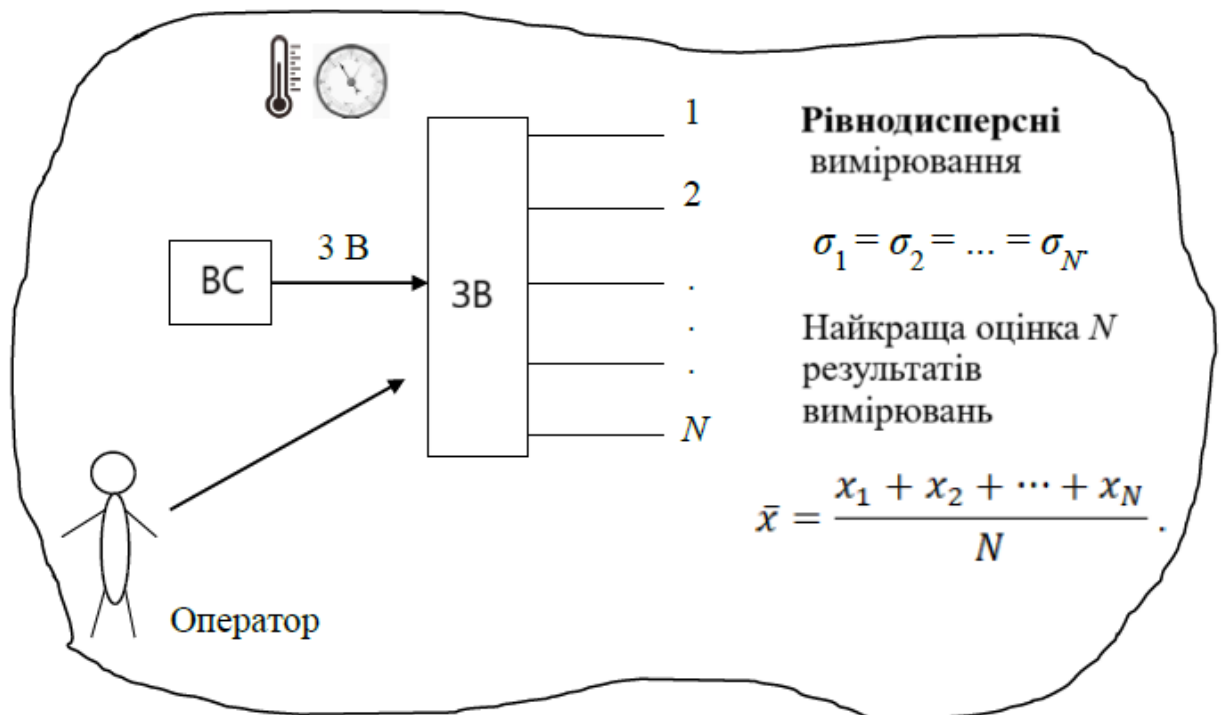


Рисунок 3 – Рівнодисперсні вимірювання в умовах повторюваності

У практиці досліджень часто зустрічаються ситуації, коли необхідно знайти найбільш достовірне значення величини та оцінити його можливі відхилення від справжнього значення на підставі вимірювань, що проводяться

різними експериментаторами, із застосуванням різних засобів та методів вимірювань, у різних лабораторіях чи умовах. Отримані у своїй результати вимірів називаються нерівноточними (чи правильніше – неравнодисперсними).

Нерівноточні вимірювання – це ряд вимірювань будь-якої величини, виконаних засобами вимірювань, що розрізняються по точності, і (або) в різних умовах [2]. У разі необхідно вдаватися до методів обробки результатів нерівноточних (неравнодисперсних) вимірів.

При використанні терміна «нерівноточні виміри» не стоїть завдання відобразити міру розбіжності результатів вимірів від прийнятого значення. Нерівнодисперсні виміри представлені на рис. 1.4.

У разі неравнодисперсних вимірів, очевидно, що внаслідок порушення умов повторюваності така оцінка, як дисперсія випадкової величини σ_i перестав бути однією і тією ж для вибірок N_i , отриманих різними засобами вимірів. Отже, застосувати середнє арифметичне для знаходження найкращої оцінки результатів вимірювань неможливо. У такому разі використовуються різні методи обробки результатів неравнодисперсних вимірів. Часто ряд неравнодисперсних вимірів обробляють з урахуванням ваги окремого виміру w_i , що входить до ряду.

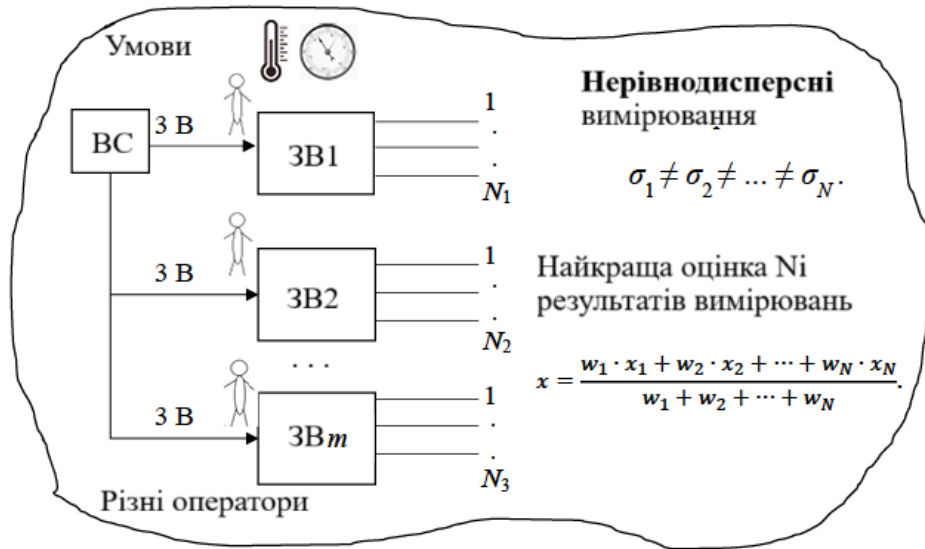


Рис. 4.1 Нерівнодисперсні вимірювання

В даний час існує проблема об'єднання двох або більше незалежних вимірювань однієї і тієї ж фізичної величини (ФВ), тому обробка нерівнодисперсних вимірювань вимагає застосування різних методів, таких як

- метод середнього зваженого;
- метод IF&PA.

Кожен із перерахованих методів буде розглянутий нижче.

Висновки до першого розділу

Перший розділ даної магістерської кваліфікаційної роботи було присвячено аналізу застосованості спеціальних методів обробки результатів нерівноточних вимірів та порівняльному аналізу особливостей та можливостей отримання високої точності результатів нерівноточних вимірювань напруги змінного струму при використанні різних методів.

Проведено підбір і аналіз сучасних інформаційних джерел щодо проблеми, що досліджується, а саме щодо стандартизованих методів у галузі

обробки результатів нерівноточних вимірів. Наведено і обгрунтовано результати аналізу сучасного стану проблеми на можливі напрями її вирішення.

РОЗДІЛ 2

МЕТОД СЕРЕДНЬОГО ЗВАЖЕНОГО

Метод середнього зваженого засновано на розрахунку середнього арифметичного значення набору чисел $x_1, \dots, x_n$, в якому враховані ваги $w_1, \dots, w_n$ кожного з чисел, котрим розраховується середнє значення.

Застосовується даний метод тоді, коли оцінити значення величини неможливо за допомогою застосування середнього арифметичного.

Середнє арифметичне значення має низку недоліків:

1 Неточність набутого значення : середня арифметична порушує властивість робастності (надійності) у статистиці внаслідок впливу значних відхилень. Робастність визначається як властивість статистичного методу, що характеризує незалежний вплив викидів на значення величини, стійкість до перешкод;

2 при застосуванні до змінних, що змінюються циклічно, можуть виникати зрушення по числовому діапазону щодо дійсного середнього значення. Такими змінними може бути фаза, кут. Наприклад, середнє значення між кутами 2° і 360° при розрахунку за прийнятою формулою дорівнюватиме $(2^\circ + 360^\circ)/2 = 181^\circ$. Це число є некоректним із кількох причин:

- кутові заходи визначені для діапазону від 0 до 360° . Так, значення 2 і 360 можна замінити на 2 і 0. Тоді середнє значення дорівнюватиме $(2^\circ + 0^\circ)/2 = 1^\circ$;

- значення 1° буде геометрично ближче до 0° , ніж 181° , відповідно, значення 1° матиме найменшу дисперсію [5].

Таким чином, метод середнього зваженого забезпечує робастність значення величини за умов вимірювань, що виникають, в той час як застосування середнього арифметичного може призвести до грубої похибки.

У цій кваліфікаційній роботі проведено порівняльний аналіз методів обробки результатів нерівноточних вимірювань: середнього зваженого та IF&PA на основі лабораторних вимірювань напруги U змінного струму в наступних точках діапазону на межі 8 (частота $f = 20$ кГц):

$$U1 = 1 \text{ В } (U_{1д} = 0,965404 \text{ В});$$

$$U2 = 5 \text{ В } (U_{2д} = 5,05063 \text{ В});$$

$$U3 = 7 \text{ В } (U_{3д} = 7,02490 \text{ В}),$$

де $U_{ид}$ - умовно-справжнє значення, прийняте в рамках даних вимірювань.

На рис. 2.1 наведено схему отримання оцінок методами IF&PA та середнього зваженого.

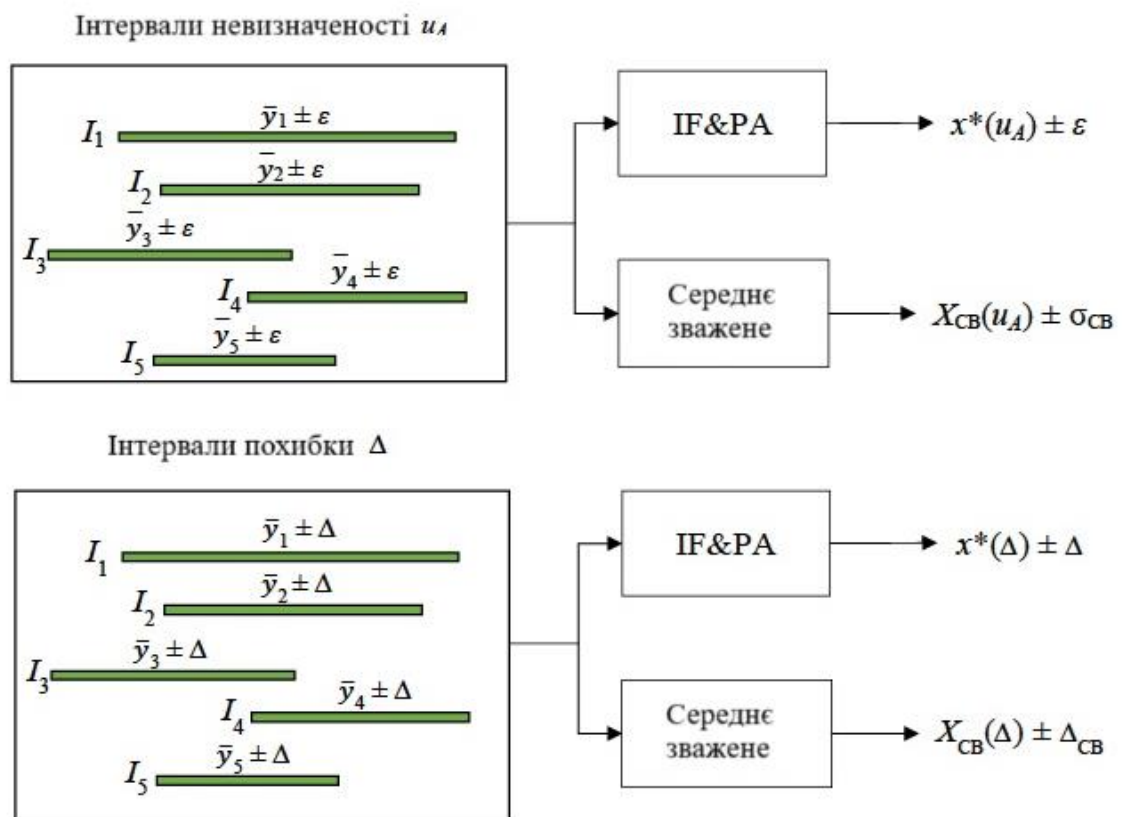


Рис. 2.1 Схема отримання оцінок методами IF&PA та середнього зваженого

Варто зазначити, що одна з умов повторюваності рівнодисперсних вимірювань є порушеною (застосовані різні засоби вимірювань), отже, дані вимірювання будуть визначатися як нерівнодисперсні.

Умовно-справжні значення $U_{\text{ід}}$ були отримані прецизійним мультиметром типу 3458А. Як джерело, що задає напругу, було використано генератор AWG-4110.

Виміряні значення напруги U_i змінного струму були отримані за допомогою п'яти засобів вимірювання одного типу – вольтметрів В7-38М.

На рис. 2.2 представлений зовнішній вигляд мультиметра 3458А.



Рис. 2.2 Зовнішній вигляд мультиметра 3458А

Метрологічні характеристики мультиметра 3458А наведено у табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Метрологічні характеристики мультиметра 3458А

Діапазон	Частота	Роздільна здатність	Межа основної похибки, що допускається
1 В	1 Гц - 10 МГц	0,00001 В	$\pm (7 \cdot 10^{-5} \cdot D_{\text{вим}} + 2 \cdot 10^{-5} \cdot E) \text{ В}$
10 В			

Примітка : $D_{\text{вим}}$ - виміряне значення напруги змінного струму;

E – межа вимірювань.

Таблиця 2.2

Метрологічні характеристики генератора AWG-4110

Найменування величин	Характеристики генераторів для каналів:	
	Канал 1	Канал 2
Форма сигналу	Синусоїдальний, прямокутний, пілкоподібний, імпульсний сигнал, сигнали довільної форми та гаусового шуму	
Діапазон розмаху вихідної напруги з підключеним навантаженням 50 Ом (включено режим «50 Ом»)	Від 2 мВ до 10 В (< 10 МГц) Від 2 мВ до 5 В (> 10 МГц)	Від 2 мВ до 3 В
Діапазон розмаху вихідної напруги без підключення навантаження (ввімкнено режим «High Z»)	Від 4 мВ до 20 В (< 10 МГц) Від 4 мВ до 10 В (> 10 МГц)	Від 4 мВ до 6 В
Межі основної абсолютної похибки установки розмаху вихідної напруги (частота 100 кГц, розмах напруги менше 5 В)	$\pm (0,03 \times U_{уст} + 1 \text{ мВ})$	

Примітка : $U_{уст}$ - розмах вихідної напруги змінного струму, встановленого на генераторі.

На рис. 2.4 представлено зовнішній вигляд вольтметра В7-38М.



Рис. 2.4 Зовнішній вигляд вольтметра В7-38М

Метрологічні характеристики вольтметра В7-38М наведено у табл. 2.3.

Таблиця 2.3

Метрологічні властивості вольтметра В7-38М

Діапазон	Частота	Роздільна здатність	Межа основної похибки, що допускається
8 В	50 Гц - 20 кГц	0,1 мВ	$\pm (0,8 \% \cdot U_{\text{вим}} + 50 \text{ о.м.р.}) \text{ В}$

Примітка : $U_{\text{вим}}$ - виміряне значення напруги змінного струму;
о.м.р. - одиниця молодшого розряду.

З'єднання перерахованих засобів вимірювань та джерела сигналу проводилося на лабораторному макеті, наведеному на рис. 2.5..

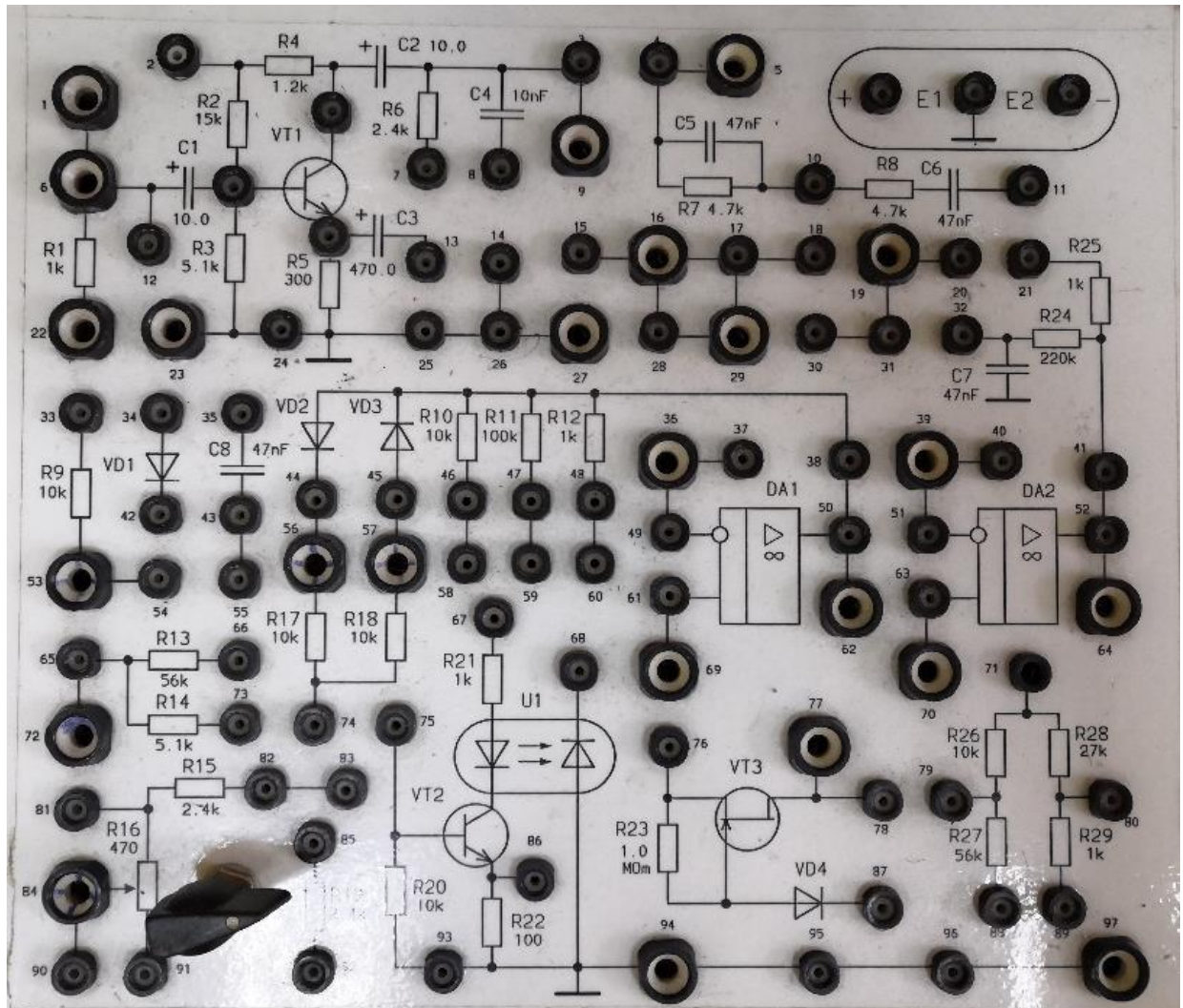


Рис. 2.5 Лабораторний макет для з'єднання джерела та засобів вимірювань у загальну вимірювальну установку

На рис. 2.6 наведено зовнішній вигляд вимірювальної системи для отримання значень напруги $U_{\text{вим}}$ змінного струму.

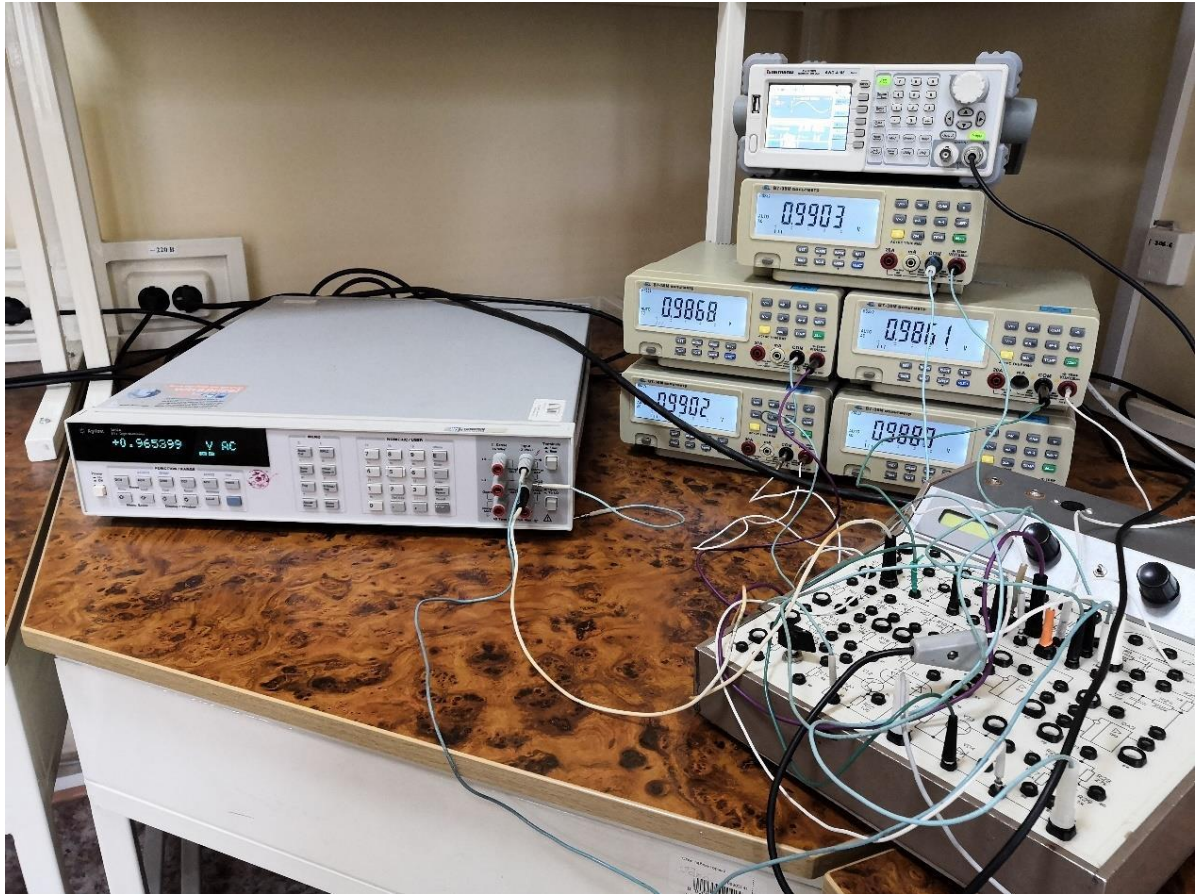


Рис. 2.6 Зовнішній вигляд вимірювальної установки для отримання значень напруги $U_{\text{вим}}$ змінного струму

У даній магістерській кваліфікаційній роботі проведено порівняльний аналіз точності методів середнього зваженого та IF&PA за двома характеристиками:

1. У разі оцінювання з інтервалами невизначеності за типом A:

$\varepsilon = \sigma_{\text{СВ}}$ – для методу середнього зваженого ;

ε – для методу IF&PA;

2. У разі оцінювання з інтервалами максимально похибки, що допускається:

$\varepsilon = \Delta_{\text{СВ}}$ – для методу середнього зваженого;

$\varepsilon = \Delta$ – для методу IF&PA.

Результати вимірювань будуть записані як:

$$(X \pm \varepsilon),$$

де $X = X_{\text{СВ}}$ – оцінка, отримана методом середнього зваженого;

$X = x^*$ - оцінка, отримана методом IF&PA.

При розрахунку середньозваженої оцінки $X_{\text{СВ}}$ за наведеними нижче формулами (2.1) - (2.6) за σ прийнято невизначеність за типом А - u_A .

При проведенні вимірювань величини U п'ятьма засобами вимірів одного типу $n = 10$ разів були отримані наступні результати:

$$\text{ЗВ1: } x = x_1 \pm \varepsilon_1;$$

$$\text{ЗВ2: } x = x_2 \pm \varepsilon_2;$$

$$\text{ЗВ3: } x = x_3 \pm \varepsilon_3;$$

$$\text{ЗВ4: } x = x_4 \pm \varepsilon_4;$$

$$\text{ЗВ5: } x = x_5 \pm \varepsilon_5.$$

Результат $x_1, \dots, x_5$ – є результат (оцінка) кількох багаторазових вимірів екземплярів ЗВ. Тоді x_1 буде середнім всім вимірювань з індексом 1 з відхиленням ε_1 від середнього (аналогічно інших x_i і ε_i , $i = 1, \dots, 5$). Завдання полягає в тому, щоб якнайкраще об'єднати $x_1, \dots, x_5$ для середньозваженої оцінки $X_{\text{СВ}}$.

Слід зазначити, що у разі, коли різницю $|x_1 - x_i|$ між двома вимірами є значно більшою, ніж відхилення ε_1 і ε_i , це свідчить, що у якомусь із вимірів допущено систематичну похибку.

Припустимо, що виміри $x_1, \dots, x_5$ є сумісними, тобто, розбіжність $|x_1 - x_i|$ є трохи більшою, ніж ε_1 і ε_i . Для знаходження узагальненої оцінки

$X_{\text{св}}$ застосування середнього арифметичного значення є неприпустимим, тому що відхилення $\varepsilon_1, \varepsilon_5$ не рівні між собою. На додаток до всього, використання середнього, що визначається як $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)/5$, має на увазі рівну значимість обох вимірювань, тоді як більш точне значення у вибірці повинно мати більше ваги (значущості) [4].

Для вирішення цієї проблеми використовується принцип максимальної ймовірності. Припустимо, що всі виміри підпорядковуються розподілу Гауса, які прагнуть справжнього значення X . Таким чином, ймовірність отримання певного значення x_i дорівнюватиме

$$P_x(x_i) = \frac{1}{\sigma_i} e^{-(x_i - X)^2 / 2\sigma_i^2}, \quad (2.1)$$

де σ_i - відхилення від оцінки;

x_i - середнє значення кожної i -й вибірки;

X - справжнє значення вимірюваної величини.

Аналогічна формула використовується для обчислення ймовірностей $P_x(x_i)$ одержання різними ЗВ певного значення x_i . З формули (12) видно, як ймовірність $P_x(x_i)$ залежить від невідомого істинного X значення.

Для того, щоб знайти загальну ймовірність того, що за допомогою ЗВ буде отримано значення x_i , необхідно помножити отримані ймовірності $P_x(x_i)$ один на одного. Отриманий добуток ймовірностей, позначений як $P_x(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, включатиме експоненційну функцію, експонента якої дорівнюватиме сумі експонент ймовірностей. Добуток $P_x(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ розраховується за формулою

$$\begin{aligned}
P_x(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \\
&= P_x(x_1) \cdot P_x(x_2) \cdot P_x(x_3) \cdot P_x(x_4) \cdot P_x(x_5) = \\
&= \frac{1}{\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5} \cdot e^{-\chi^2/2},
\end{aligned} \tag{2.2}$$

де

$$\chi^2 = \left(\frac{x_1 - X}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{x_2 - X}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{x_3 - X}{\sigma_3}\right)^2 + \left(\frac{x_4 - X}{\sigma_4}\right)^2 + \left(\frac{x_5 - X}{\sigma_5}\right)^2. \tag{2.3}$$

Метод максимальної правдоподібності, який був популяризований Р. Фішером у математичній статистиці, ґрунтується на оцінюванні невідомого параметра шляхом максимізації функції правдоподібності. Так, найкраща оцінка для невідомого значення $X_{\text{СВ}}$ – це значення, у якому отримані оцінки x_i є найімовірнішими. Тобто, найкращою оцінкою для $X_{\text{СВ}}$ є значення, при якому ймовірність є максимальною або еквівалентною мінімальній величині χ^2 , і, щоб знайти найкращу оцінку, необхідно продиференціювати X і прирівняти до нуля:

$$2 \frac{x_1 - X}{\sigma_1} + 2 \frac{x_2 - X}{\sigma_2} + 2 \frac{x_3 - X}{\sigma_3} + 2 \frac{x_4 - X}{\sigma_4} + 2 \frac{x_5 - X}{\sigma_5} = 0. \tag{2.4}$$

Для спрощеної форми рівняння (2.4) можна перетворити, позначивши ваги оцінок:

$$w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}, \quad (2.5)$$

де σ_i - відхилення, що визначається як невизначеність за типом А.

За допомогою даних позначень рівняння (2.4) набуде вигляду:

$$X = X_{\text{св}} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + w_4 x_4 + w_5 x_5}{w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5}. \quad (2.5)$$

Якщо у двох оцінок рівні невизначеності ($\sigma_i = \sigma_j$ і, отже, $w_i = w_j$), то рішення зводиться до знаходження середнього значення:

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}. \quad (2.5)$$

Якщо $w_i \neq w_j$, то оцінка середньозваженого значення $X_{\text{св}}$ не збігається із середнім арифметичним X .

Якщо яке-то із i -го виміру є більш точним, ніж j -ий вимір, його відхилення $\sigma_i < \sigma_j \rightarrow w_i > w_j$, тому найкраща оцінка X є ближчою до x_i , ніж до x_j .

Граничне значення σ_i інтервалів невизначеності i -ої вибірки визначається за формулою

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{w_i}}, \quad (2.6)$$

де w_i - вага i -ої оцінки вимірювання.

Загальний інтервал невизначеності $\varepsilon = \sigma_{\text{CB}}$ середньозваженої оцінки X_{CB} дорівнює зворотному квадратному кореню із суми i -х ваг:

$$\sigma_{\text{CB}} = \frac{1}{\sqrt{\sum w_i}}. \quad (2.67)$$

У табл. 2.4 – табл. 2.6 наведено результати вимірювань напруги U змінного струму та точкові оцінки (невизначеність за типом А та максимально допустима похибка).

Таблиця 2.4

Результати вимірювання напруги U_1 змінного струму

$U_1 = 1 \text{ В } (U_{1\text{д}} = 0,965404 \text{ В})$					
n	ЗВ1	ЗВ2	ЗВ3	ЗВ4	ЗВ5
1	0,9988	0,9910	0,9924	0,9887	0,9930
2	0,9893	0,9925	0,9944	0,9885	0,9938
3	0,9889	0,9909	0,9923	0,9887	0,9930
4	0,9893	0,9924	0,9944	0,9894	0,9931
5	0,9891	0,9910	0,9925	0,9888	0,9929
6	0,9889	0,9909	0,9923	0,9887	0,9931
7	0,9889	0,9912	0,9928	0,9888	0,9935
8	0,9889	0,9912	0,9928	0,9886	0,9932
9	0,9891	0,9914	0,9930	0,9888	0,9931
10	0,9897	0,9911	0,9925	0,9894	0,9932
$X_{\text{ср.}}$	0,9901	0,9914	0,9929	0,9888	0,9932
σ_i	0,0031	0,0006	0,0008	0,0003	0,0003
w_i	106020	2826633	1550654	10416666	13867488

Продовження табл. 2.4

$U_1 = 1 \text{ В} (U_{1д} = 0,965404 \text{ В})$					
n	ЗВ1	ЗВ2	ЗВ3	ЗВ4	ЗВ5
$x_i \cdot w_i$	104970	2802211	1539707	10300416	13773050
$\sum w_i$	28767463				
$X_{CB}, \text{В}$	0,9914				
σ_{CB}	0,0002				
Δ_{CB}	0,0129				

Таблиця 2.5

Результати вимірювань напруги U_2 змінного струму

$U_2 = 5 \text{ В} (U_{2д} = 5,05063 \text{ В})$					
n	ЗВ1	ЗВ2	ЗВ3	ЗВ4	ЗВ5
1	4,9546	4,9593	4,9682	4,9469	4,9734
2	4,9519	4,9562	4,9648	4,9440	4,9704
3	4,9576	4,9627	4,9716	4,9502	4,9768
4	4,9547	4,9594	4,9682	4,9470	4,9734
5	4,9493	4,9532	4,9617	4,9412	4,9674
6	4,9548	4,9595	4,9682	4,9471	4,9736
7	4,9578	4,9627	4,9717	4,9502	4,9769
8	4,9522	4,9563	4,9650	4,9442	4,9705
9	4,9613	4,9664	4,9754	4,9535	4,9804
10	4,9581	4,9630	4,9717	4,9502	4,9770
$X_{сер}$	4,9552	4,9599	4,9687	4,9475	4,9740
σ_i	0,0036	0,0039	0,0041	0,0037	0,0039

Продовження табл. 2.5

$U_2 = 5 \text{ В} (U_{2д} = 5,05063 \text{ В})$					
n	3В1	3В2	3В3	3В4	3В5
w_i	79224	64358	60030	74107	66246
$x_i \cdot w_i$	392576	319211	298268	366643	329509
$\sum w_i$	343967				
$X_{CB}, \text{В}$	4,9604				
σ_{CB}	0,0017				
Δ_{CB}	0,0447				

Таблиця 2.6

Результати вимірювань напруги U_3 змінного струму

$U_3 = 7 \text{ В} (U_{3д} = 7,02490 \text{ В})$					
n	3В1	3В2	3В3	3В4	3В5
1	6,9323	6,9430	6,9536	6,9209	6,9605
2	6,9376	6,9500	6,9596	6,9266	6,9660
3	6,9271	6,9361	6,9476	6,9156	6,9550
4	6,9179	6,9242	6,9371	6,9056	6,9450
5	6,9274	6,9363	6,9476	6,9155	6,9552
6	6,9378	6,9503	6,9597	6,9269	6,9664
7	6,9226	6,9304	6,9424	6,9105	6,9502
8	6,9181	6,9244	6,9370	6,9056	6,9453
9	6,9274	6,9364	6,9478	6,9157	6,9551
10	6,9329	6,9435	6,9539	6,9215	6,9610
$X_{ср}$	6,9281	6,9375	6,9486	6,9164	6,9560
σ_i	0,0072	0,0094	0,0082	0,0077	0,0076

Продовження табл. 2.6

w_i	19510	11394	14871	16963	17143
$x_i \cdot w_i$	135171	79049	103337	117324	119249
$\sum w_i$	79883				
X_{CB}, B	6,9368				
σ_{CB}	0,0035				
Δ_{CB}	0,0605				

Таким чином, в результаті застосування методу середнього виваженого були отримані наступні результати вимірювань, які представлено нижче у табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Подання результатів вимірювань двома характеристиками точності
методом середнього зваженого

Номінали, В	Характеристика точності	
	Невизначеність по типу А (σ_{CB})	Максимально допустима похибка (Δ_{CB})
1	(0,99141 $\pm$ 0,00019) В	(0,991 $\pm$ 0,013) В
5	(4,9604 $\pm$ 0,0017) В	(4,96 $\pm$ 0,05) В
7	(6,937 $\pm$ 0,004) В	(6,94 $\pm$ 0,06) В

Так, метод середньозваженого значення ґрунтується на врахуванні значущості (ваги) кожної з оцінок вимірювань, підвищуючи точність середньозваженої оцінки X_{CB} .

Цей метод має ряд недоліків. По-перше, ґрунтуючись на вимірах напруги U змінного струму одним оператором та різними ЗВ, можна стверджувати, що оцінки $x_1, \dots, x_5$, отримані з різних вибірок (набору вимірних значень), відповідно, мають неоднакові дисперсії ($\sigma_i \neq \sigma_j$). По-друге, для знаходження оцінки $X_{\text{св}}$ метод середнього виваженого застосуємо за умови, що виміри мають нормальний закон розподілу. Таким чином, перед застосуванням методу необхідно припустити гіпотезу про нормальний закон розподілу та перевірити її.

Як правило, вид закону розподілу приймають рівним нормальному, виходячи із загальної практики.

В даний час існує проблема у виборі методу обробки результатів нерівноточних вимірювань, який не залежав би від ряду обмежень. У наступному розділі запропоновано метод обробки таких результатів, що ґрунтується на поєднанні інтервалів з агрегуванням переваг.

Висновки до другого розділу

У другому розділі проведено аналіз застосовуваності методу середнього зваженого та його переваг та недоліків. Обґрунтовано, що метод середнього зваженого забезпечує робастність значення величини за умов вимірювань, що виникають, що є важливим при забезпеченні точності вимірювань.

Розглянуто схеми отримання оцінок методами ІФ&РА та середнього зваженого та проведено їх порівняльний аналіз. Проведено підбір апаратури для проведення експериментальної частини роботи на оцінено її метрологічні характеристики.

Розроблено та виготовлено лабораторний макет для з'єднання джерела та засобів вимірювань у загальну вимірювальну установку при проведенні

експериментальних досліджень. В роботі було проведено вимірювання величини U п'ятьма засобами вимірів одного типу та наведено їх результати.

РОЗДІЛ 3

МЕТОД IF&PA

Метод IF&PA (Interval data fusion with preference aggregation) – це метод обробки набору даних, представлених у вигляді інтервалу для кожного такого набору, призначений для знаходження загального інтервалу (оцінки), який відповідає максимальній кількості заданих інтервалів.

Так, наприклад, можна знайти найкращу оцінку для нерівнодисперсних вимірів, отриманих різними CI, операторами, у різних умовах навколишнього середовища.

Варто зазначити, що цей метод застосовується як до узгоджених, так і до неузгоджених даних.

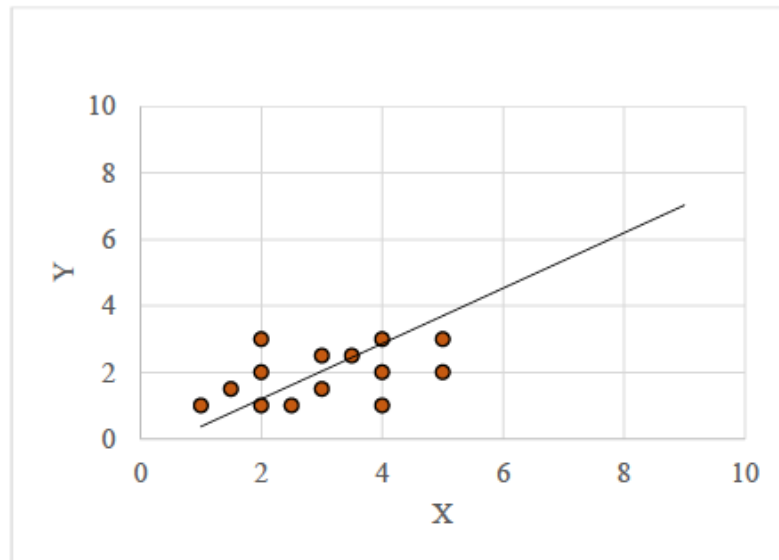
Узгодженими дані вважаються у разі, коли вони мають загальну характеристику, якою максимально відповідають. Тоді можна сказати, що дані мають властивості узгодженості, цілісності та несуперечності. Дані неузгоджені, якщо вони не мають перерахованих властивостей.

На рис. 3.1 наведено узгоджені та неузгоджені дані на прикладі значень, отриманих у результаті вимірювань величин X та Y .

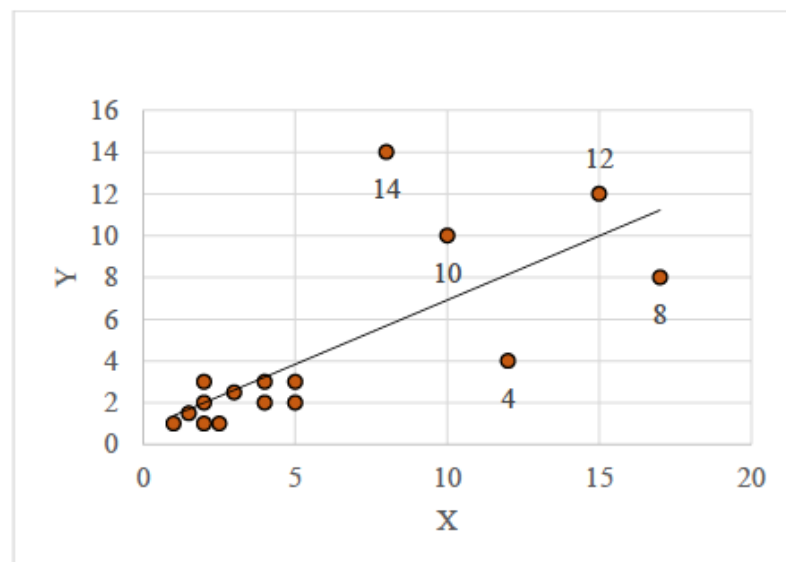
З рис. 3.1 а) видно, що точки близько розташовані одна до одної. Це свідчить, що в отриманих значень спостерігається явна залежність і відповідність з-поміж них певному властивості. Можна припустити, що такою властивістю є залежність властивостей (наявність кореляції).

На рис. 3.1 б) точки з номерами 4, 8, 10, 12, 14 віддалені від загальної залежності, яка спостерігається у більшості значень. Тому дані точки не мають властивості кореляції, що говорить про їх неузгодженість і відсутність загальної ознаки.

Такі виміри також називають спільними та несумісними. Як правило, метод представлення значень на графіці сприяє виявленню властивостей, які мають результати вимірювань.



а)



б)

Рис. 3. 1 Результати вимірів:

а) узгоджені дані;

б) неузгоджені дані

Метод IF&PA ґрунтується на поданні інтервалів слабкими відносинами порядку (ранжуваннями), що належать цим інтервалам.

Можна визначити консенсусне ранжування (оцінку) для набору ранжованих значень, які відповідають початковим інтервалам.

Так, найкраще ранжироване значення має точністю і робастністю (надійністю) вихідних даних після етапу об'єднання інтервалів [5]. Інтервали вважаються простором слабких порядків, викликаним самими інтервалами, їх властивостями та розмірністю.

Основним завданням при знаходженні рішення методом IF&PA є вибір числа значень, що входять до інтервальних даних.

У цьому розділі наводиться поетапний опис алгоритму методу, його термінології, законів, з урахуванням яких розроблено метод, і навіть результати обчислювальних експериментів та його аналіз.

Об'єднання інтервальних даних може застосовуватися у міжлабораторних звіреннях, прогнозуванні значень фундаментальних констант на основі різних вимірних значень, перевірці відповідності, підвищенні точності вимірювальних експериментів.

Результати, отримані методом IF&PA, подані у вигляді інтервалів, можна записати у загальноприйнятому вигляді:

$$x^* = \bar{y}_i \pm \varepsilon_i = y + |\varepsilon_i|, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.1)$$

де x^* - вимірювана величина (середнє значення серед повторних вимірювань);

$\bar{y}_i$ - результат і-го вимірювання величини;

ε_i – точкова оцінка, за яку приймають невизначеність i -го виміру за типом А (ε) або максимально допустиму похибку (Δ) засобу вимірювань, що застосовують;

m – кількість вибірок (засобів вимірів) величини.

За межі невизначеності $\pm \varepsilon$ приймають значення невизначеності вимірювань за типом А, використовуючи формулу для розрахунку середньоквадратичного відхилення:

$$u_A = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}, \quad (3.2)$$

де u_A - невизначеність вимірювань за типом А;

y_i - значення вхідної величини в i -ої точці вимірювань;

$\bar{y}$ - середнє арифметичне значення n повторних вимірювань;

i – порядковий номер точки вимірів, $i = 1, \dots, n$.

Варто зазначити, що інтервали можуть бути не тільки межами невизначеності, але й межами похибки ЗВ:

$$y_i = \bar{y}_i \pm \Delta = y \pm |\Delta|, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.3)$$

де Δ – максимально допустима похибка засобу вимірювань (визначається в паспорті як основна похибка, що допускається, залежно від типу ЗВ).

Межі невизначеності та похибки визначають довжину кожного з інтервалів, а значення визначають їх середину.

3.1 Параметричні та непараметричні методи оцінки результатів нерівноточних вимірювань

Крім розробленого методу IF&PA, існують класичні методи обробки прямих повторних вимірів, описані у різних матеріалах у галузі метрології [6 – 8]. Методи дозволяють знайти сумарне значення як середнє арифметичне та його розширену невизначеність на основі даних вибірки, що належать одній групі вимірювань (наприклад, серія багаторазових вимірювань для заданої величини), де спостереження y_i були отримані одним і тим же оператором, за допомогою тих самих методів та інструментів, в однакових умовах довкілля.

Передбачається, що невизначеність вимірювань (оцінка величини) є незміщеною, тобто, математичне очікування $E(\varepsilon_i) = 0$, а значення невизначеностей кожної з вибірок передбачаються незалежними і мають однакові дисперсії, тобто. $D(\varepsilon_i) = \sigma^2$ для усіх i . Такі спостереження вважають рівнодисперсними, тобто рівномірно розподіленими випадковими величинами [9].

Припустимо, що в інтервалів межі є відсутніми, тобто $\varepsilon_i = 0$.

Тоді оцінка величини y з m рівнянь визначатиметься за формулою

$$y = y_i, \quad i = 1, \quad (3.4)$$

Щоб знайти загальне рішення системи з m рівнянь, використовують наближене значення (оцінку)

$$\bar{y} = f(y_1, y_2, \dots, y_m), \quad (3.5)$$

що задовільно всім m рівнянням. Функція φ має мінімум у точці, де похідна дорівнює нулю, тобто $\frac{d\varphi}{dx} = 2 \sum_{i=1}^m (\bar{y} - y_i)$, звідки і виникає оцінка $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i, \quad (3.6)$$

де $\bar{y}$ це арифметичне середнє результатів вимірів y_i ;

i – порядковий номер точки вимірювань, $i = 1, \dots, m$.

Насправді m рівняння є несумісними, оскільки інтервали завжди мають межі (відхилення від дійсного значення). У такому разі можна перевірити, як інтервали невизначеності впливають на наближену оцінку. Припустимо, що $\varepsilon_i \neq 0$ і підставимо формулу (3.3) у формулу (3.6). Тоді отримаємо

$$\bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y + \varepsilon_i). \quad (3.7)$$

Якщо межі інтервалів $E(\varepsilon_i) = 0$, математичне очікування оцінки (3.7) визначається за формулою

$$\mu = E(y) = E \left[\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (y + \varepsilon_i) \right] = E \left(\frac{my}{m} \right) + E \left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \varepsilon_i \right) = y. \quad (3.8)$$

З (3.8) випливає, що рівняння (3.7) збігається з величиною, що вимірюється y , тобто, оцінка є незміщеною.

Оскільки дисперсія $D(\varepsilon) = E[\varepsilon - E(\varepsilon)]^2$ і $D(a\varepsilon) = a^2 D(\varepsilon)$, якщо $a = \text{const}$, отримаємо дисперсію оцінки:

$$\begin{aligned}
 D(\bar{x}) &= D\left[\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m(y + \varepsilon_i)\right] = D\left(\frac{my}{m}\right) + D\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \varepsilon_i\right) = \\
 &= \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^m D(\varepsilon_i) = \frac{m\sigma^2}{m^2} = \frac{\sigma^2}{m}.
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

Звідси випливає, що дисперсія $D(\bar{x})$ оцінки $\bar{y}$ у $\sqrt{m}$ разів є меншою за стандартне відхилення σ .

Метод IF&PA має властивості точкових оцінок: незміщеність, узгодженість, а також ефективність, які справедливі при нормальному розподілі $N(\mu, \sigma^2)$ результатів вимірювань [10].

Найчастіше виникають ситуації, коли необхідно знайти найбільш наближену оцінку величини та її невизначеність на основі нерівнодисперсних вимірів, коли $D(\varepsilon_i) = \sigma_i^2 \neq D(\varepsilon_i + 1) = \sigma_{i+1}^2$, $i = 1, \dots, m - 1$. У такому разі застосування середнього арифметичного стає некоректним унаслідок нерівних між собою дисперсій.

Обробку даних нерівнодисперсних вимірювань можна застосовувати в таких випадках:

- оцінка ключових порівняльних даних, наданих національним метрологічним інститутом для єдиного еталона, що транспортується [11, 12];
- оцінка невизначеності фундаментальної фізичної константи;
- виявлення некоригованих систематичних похибок вимірювань, що потребує залучення кількох операторів [13];
- міжлабораторні звірення для оцінки компетентності калібрувальних або вимірювальних лабораторій, в яких одні й ті самі виміри виконуються різними лабораторіями, методами [14, 15];
- аналіз даних періодичних калібрувань ЗВ, накопичені за певний період, у яких точність повторних вимірів відрізняється у зв'язку із зміною метрологічних характеристик (МХ) ЗВ у часі.

Таким чином, для знаходження загальної оцінки вимірюваної величини при нерівнодисперсних вимірюваннях застосовують зважене середнє арифметичне з параметрами $N(\mu, \sigma^2)$, де вага результату вимірювання x_i є зворотним квадратом відповідної стандартної невизначеності [16].

Слід зазначити, що метод середнього зваженого може бути застосований у разі, якщо результати вимірювань характеризуються нормальним розподілом ймовірності.

Таким чином, статистичні методи обробки інтервалів мають безліч обмежень на допустимі властивості вхідних інтервалів, такі як

- нормальність (серії) розподілів імовірнісних даних,
- незалежність спостережень,
- умова рівнодисперсності,
- відсутність викидів тощо.

Зазвичай рекомендовано використовувати непараметричні методи, оскільки через менші обмеження є більш надійними, ніж параметричні [20, 21]. Непараметричні методи дозволяють обробляти дані з викидами, малим обсягом вибірок (менше десяти), проте мають значно меншу ефективність у випадках, коли РВ досить добре наближені до нормального розподілу.

Параметричні методи ґрунтуються на застосуванні різних критеріїв для виключення викидів (наприклад, критерій Ст'юдента, критерій Хі-квадрат), дозволяючи провести оцінку таких параметрів, як середнє значення, стандартне відхилення, невизначеність та виключити викиди.

Параметричний метод використовується для перевірки узгодженості РВ у різних лабораторіях за допомогою оцінювання лабораторних невизначеностей, відмінностей у відсотковому співвідношенні, що базуються на обчисленні надійного середнього арифметичного та стандартного відхилення.

Автори в [17] вказують на той факт, що багато з параметричних методів непридатні, так як кількість лабораторій, що беруть участь, як правило, невелика ($m < 10$). Крім цього, виняток викидів може призвести до видалення важливих даних [18].

Метод IF&PA не ґрунтується на статистичних властивостях та не використовує параметричні та непараметричні критерії, націлені на визначення статистичної значущості. Такий підхід називається об'єднанням інтервальних даних, що характеризує його інтервально-орієнтовану специфіку.

Об'єднання даних – це процес спільної обробки даних будь-якого об'єкта, отриманих від кількох джерел (операторів) з метою знаходження серед них більш об'єктивного та достовірного рішення, що відноситься до досліджуваної характеристики.

Під інтервалом об'єднання даних розуміється процедура формування такого інтервалу, який повинен відповідати максимальній кількості заданих початкових інтервалів (необов'язково узгоджених між собою), а також максимально роботним, включаючи значення x^* , яке може служити представником всіх заданих інтервалів.

Інтервал злиття результатів x^* має такі параметри, як середнє арифметичне і зважене середнє y .

Відмінною особливістю запропонованого інтервалу об'єднання даних є представлення інтервалів на реальній лінії відносинами слабких порядків (або ранжуваннями) набору дискретних значень, що належать цим інтервалам. Так, на безлічі речових чисел відношення «більше» і «менше» є відносинами суворого порядку, а «більше або одно» і «менше або одно» – слабого.

Інтервал, який відповідає максимальній кількості заданих початкових інтервалів, дозволяє визначити ранжування консенсусу для набору дискретних

значень. За початковий інтервал приймається інтервал, сформований вимірними значеннями, отриманими одним із засобів засобів вимірювань.

Наступний підрозділ присвячений поясненню застосовуваних визначень та позначень ранжування інтервалів, а також наведено покроковий алгоритм для застосування методу IF&PA.

3.2 Алгоритм та випробування методу IF&PA

Опробування методу IF&PA було здійснено на прикладі вимірювань напруги U змінного струму в ланцюзі за допомогою п'яти засобів вимірювань одного типу (вольтметрів типу В7-38 М) у трьох точках діапазону (1, 5, 7 В) на частоті $f = 20$ кГц по 10 багаторазових вимірювань у кожній, як і в методі середнього зваженого:

$$ЗВ1: y = \bar{y}_1 \pm \varepsilon_1;$$

$$ЗВ2: y = \bar{y}_2 \pm \varepsilon_2;$$

$$ЗВ3: y = \bar{y}_3 \pm \varepsilon_3;$$

$$ЗВ4: y = \bar{y}_4 \pm \varepsilon_4;$$

$$ЗВ5: y = \bar{y}_5 \pm \varepsilon_5.$$

На рис. 3.3 наведено схему входних та вихідних параметрів при проведенні вимірювань.

Тут прийнято позначення :

U_1, U_2, U_3 – номінальні (вимірювані) значення величини напруги змінного струму;

$y_i^1, \dots, y_i^{10}$ – вимірні значення в кожній i -ій точці вимірювань;

$\bar{y}_i$ – середнє значення для i -ої точки вимірювань, що розраховується як середнє арифметичне.

Під час проведення вимірювань за умовно істинні значення було прийнято такі точки:

$$U_1 = 1 \text{ В } (U_{1д} = 0,965404 \text{ В});$$

$$U_2 = 5 \text{ В } (U_{2д} = 5,05063 \text{ В});$$

$$U_3 = 7 \text{ В } (U_{3д} = 7,02490 \text{ В}).$$

Застосування даного методу ґрунтується на ранжируванні m інтервалів $\{I_k\}$, $k = 1, \dots, m$, на дійсній лінії. Кожен інтервал характеризується нижньою межею l_k , верхньою межею u_k та середньою точкою x_k так, що $I_k = [l_k, u_k]; l_k < x_k; x_k = 0,5 \cdot (u_k + l_k); l_k, u_k, x_k \in R$. Інтервал I_k представлено рис. 3.4.

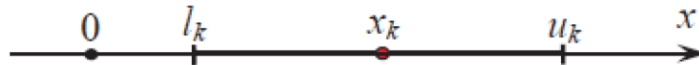


Рис. 3.4 Інтервал I_k на дійсній лінії

Середня точка x_k – це результат кількох вимірів, інтервал невизначеності якої дорівнює $[x_k - 0,5(u_k - l_k), x_k + 0,5(u_k - l_k)] = [x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k]$. У цьому випадку, k -тий інтервал може бути представлений параметрами (x_k, k) .

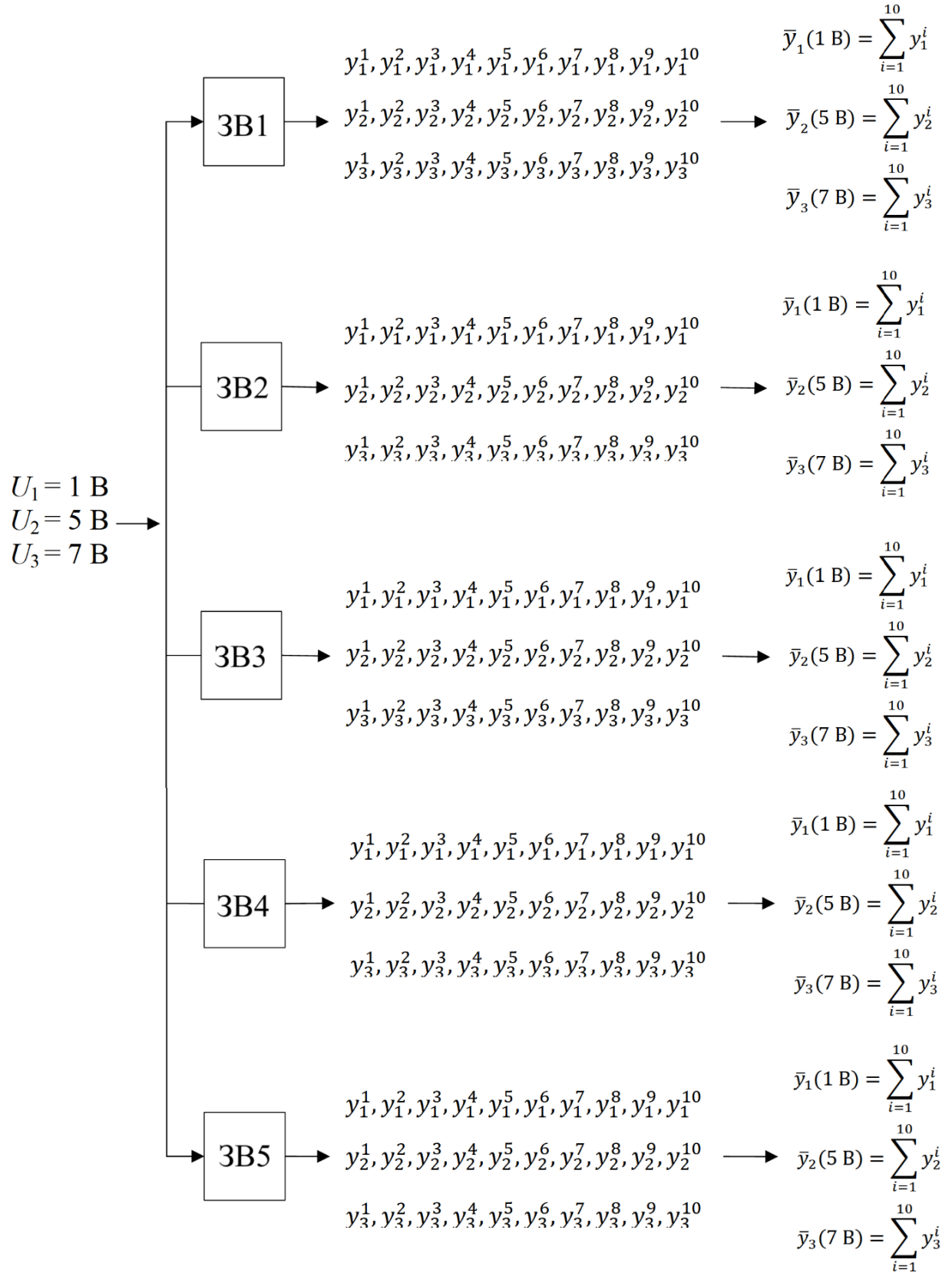


Рис. 3.5 Схема вхідних та вихідних параметрів при проведенні вимірювань

Будь-які два інтервали не обов'язково повинні мати перетин, тобто можуть бути такі два інтервали I_j та I_k , $j \neq k$; $j, k = 1, \dots, m$, що $I_j \cap I_k \neq \emptyset$.

Такі два інтервали називаються несумісними (випадок неузгоджених вимірювань, коли деякі значення сильно розсіяні від загальної кількості значень у вибірці та не мають загальної точки перетину).

Варто зазначити, що метою об'єднання інтервалів є вибір точки x^* на дійсній лінії, яка належить до максимальної кількості інтервалів $\{I_k\}$. Для цього необхідно вибрати мінімальну та максимальну точку та визначити діапазон актуальних значень (range of actual values – RAV)

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\},$$

у якому існує відношення повного порядку $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. a_1 – це мінімальна точка, що знаходиться в інтервалі невизначеності, що дорівнює, як правило, нижній межі l_k ; a_n – це максимальна точка, що знаходиться в інтервалі невизначеності, що дорівнює верхній межі u_k .

Діапазон RAV є об'єднанням інтервалів $\{I_k\}$, охоплює весь діапазон вимірних значень від x_{min} до x_{max} та призначений для подальшого розбиття результату об'єднання на рівні підінтервали.

Так, за допомогою діапазону RAV формується дискретна множина A , починаючи з заданих безперервних інтервалів $\{I_k\}_{k=1}^m$, в три етапи, показаних на рис. 3.6.

Існування несумісних інтервалів може призвести до їх розриву, і, щоб виключити можливі розриви, найменшу нижню межу для всіх інтервалів вибирають як нижню межу RAV a_1 :

$$a_1 = \min \{l_k \mid k = 1, \dots, m\}, \quad (3.10)$$

а як верхню межу a_n беруть найбільшу межу для всіх інтервалів:

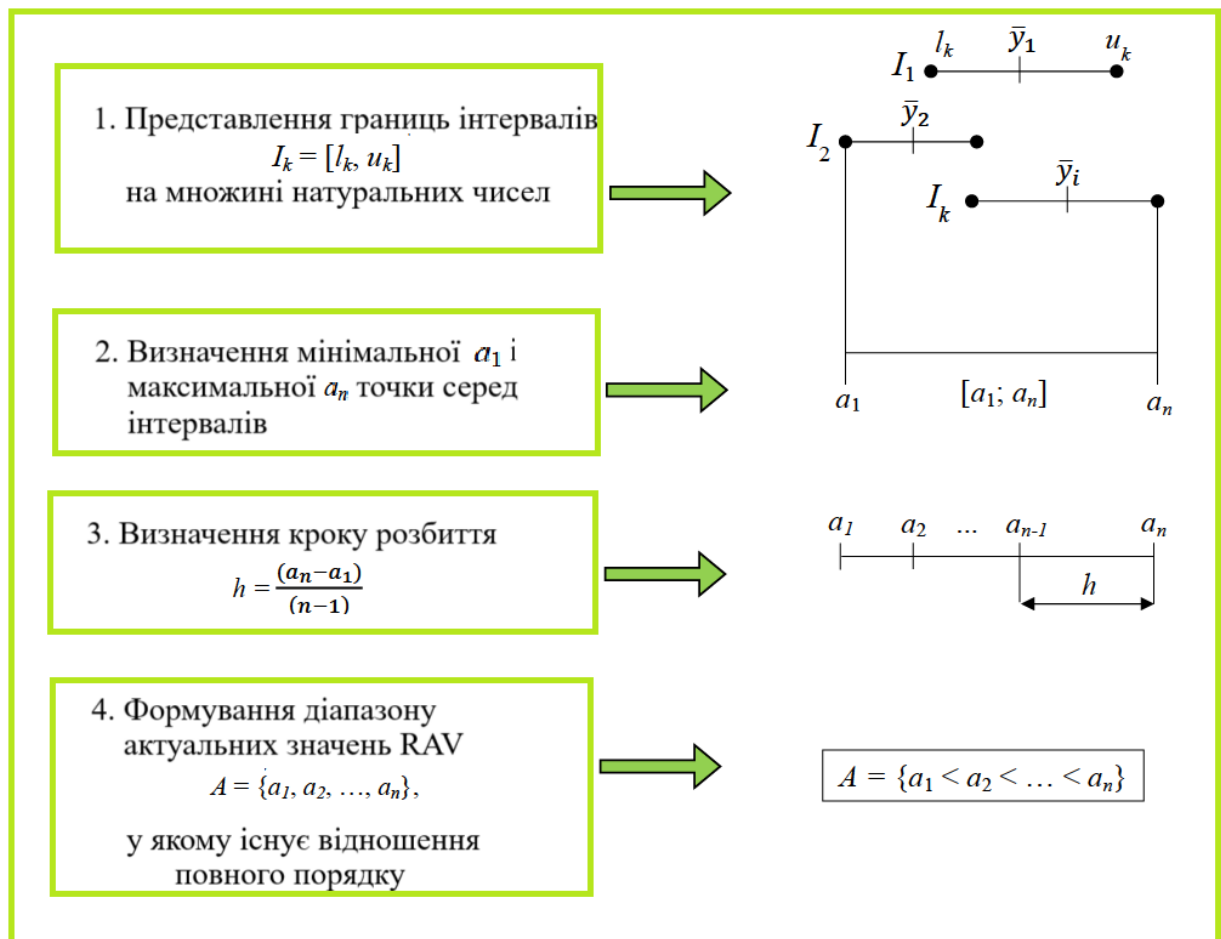


Рис. 3.6 Етапи формування з безперервних дискретних значень діапазону RAV

Для того, щоб згенерувати елементи $a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$, необхідно розділити отриманий інтервал $[a_1, a_n]$ на $n - 1$ рівних підінтервалу довжиною

$$h = (a_n - a_1) / (n - 1). \quad (3.11)$$

Довжина h називатиметься критерієм (або сіткою) поділу. Після поділу критерій визначатиметься за формулою

$$h = |a_i - a_{i-1}|, \quad i = 2, \dots, n, \quad (3.12)$$

і i -ий елемент RAV визначається як

$$a_i = a_{i-1} + h, \quad i = 2, \dots, n.$$

На третьому етапі необхідно вибрати відповідне число n , яке є кількістю елементів множини A і має гарантувати необхідну та достатню точність значень a_i , $i = 1, \dots, n$, і лише одне з них буде прийнято за результат злиття інтервалів x^* .

Тепер множину $A = \{a_1 < a_2 < \dots < a_n\}$ повністю упорядкованих дискретних значень a_i , $i = 1, \dots, n$ можна використовувати для формування ранжирування, яке представляє інтервали $\{I_k\}_{k=1}^m$.

Виявляється, не всі можливі слабкі порядки на множині A можуть представляти інтервали $\{I_k\}_{k=1}^m$. Такі інтервали називають інранжуванням всередині інтервалів.

Для будь-якого інтервалу $\{I_k\}$ множину A можна розглядати як об'єднання двох неперетинних підмножин: підмножини A_k , що включає всі ті

елементи A , які належать інтервалу I_k , і доповнення $\bar{A}_k$, що включає всі інші елементи A , тобто $A = A_k \cup \bar{A}_k$, $A_k \cap \bar{A}_k = \emptyset$, для будь-якого $k = 1, \dots, m$. Дані операції представлені на рис. 3.7.

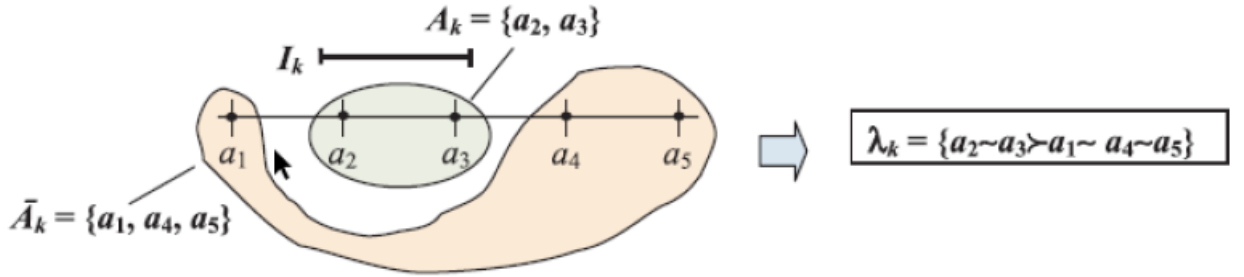


Рис. 3.7 Приклад поділу множини A на два підмножини: A_k та $\bar{A}_k$ на деякому інтервалі I_k і відповідне йому ранжування λ_k

Тоді для будь-якого $k = 1, \dots, m$ деяке k -е ранжування λ_k , що походить від інтервалу I_k і що складається з елементів множини A , має задовольняти наступним умовам для $i, j = 1, \dots, n$:

$$a_i \in A_k \wedge a_j \notin A_k \Rightarrow a_i > a_j; \quad (3.13)$$

$$a_i, a_j \in A_k \vee a_i, a_j \notin A_k \Rightarrow a_i \sim a_j; \quad (3.14)$$

$$a_i \notin A_k \wedge a_j \in A_k \Rightarrow a_i < a_j. \quad (3.15)$$

Ранжування в межах інтервалу формуються відносинами слабких та суворих порядків.

Так, k -е ранжування можна розглядати як таке, що складається з двох еквівалентних класів, які складаються з елементів множин A_k і $\bar{A}_k$. Більше

того, елементи класу A_k є строго кращими від елементів класу $\bar{A}_k$, тобто, завжди $\lambda_k = A_k \succ \bar{A}_k$. Отже, ранжування містить один символ строгого порядку $\succ$ і $n - 2$ символи еквівалентності $\sim$.

Наприклад, одне з можливих ранжування для $n = 5$ може бути $\lambda_k = \{a_2 \sim a_3 \succ a_1 \sim a_4 \sim a_5\}$, яке представлено на рис. 3.7, де $A_k = \{a_2 \sim a_3\}$, $\bar{A}_k = \{a_1 \sim a_4 \sim a_5\}$ і $A_k \succ \bar{A}_k = \{a_2 \sim a_3\} \succ \{a_1 \sim a_4 \sim a_5\}$.

Ряд елементів $\{a_i\}$ множини A є досить монотонним, оскільки $a_i < a_i + 1$ для всіх $i \in N$. Зрозуміло, що клас $A_k \subseteq A$ може включати лише послідовні піделементи A без перепусток, як представлено на рис. 3.5, тобто індекси цих елементів повинні становити числа із натурального ряду. Це означає, що різниця індексів будь-якої пари сусідніх елементів a_i і a_j від A_k може бути більше 1, тобто. виконується така умова:

$$a_i, a_j \in A_k \quad (3.16)$$

де сусідні натуральні числа дорівнюють $j = i + 1$.

Ранжування, яке відповідає рівнянням (3.12) – (3.16), називається інранжуванням. Таким чином, сукупність інтервалів $\{I_k\}$, $k = 1, \dots, m$, може бути представлена профілем переваг $\Lambda\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$, де будь-яке $\lambda_k \in$ інранжуванням.

Процедура об'єднання інтервальних даних методом агрегування переваг застосовна на множині дискретних A значень, отриманих способом, описаним вище, який дозволяє представляти інтервали ранжируваннями. Основні етапи запропонованої процедури IF&PA наведено на рис. 3.8.

Етапи запропонованої процедури IF&PA і полягають у наступному:

Етап 1. Формування діапазону фактичних значень з початкових інтервалів $\{I_k\}$, $k = 1, \dots, m$, обчислення кроку h та розбиття RAV на підінтервали, щоб отримати множину $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, використовуючи рівняння (3.8) - (3.11).

Етап 2. Складання інранжування відповідно до рівнянь (3.12) - (3.16) та формування профілю переваги $\Lambda\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$.

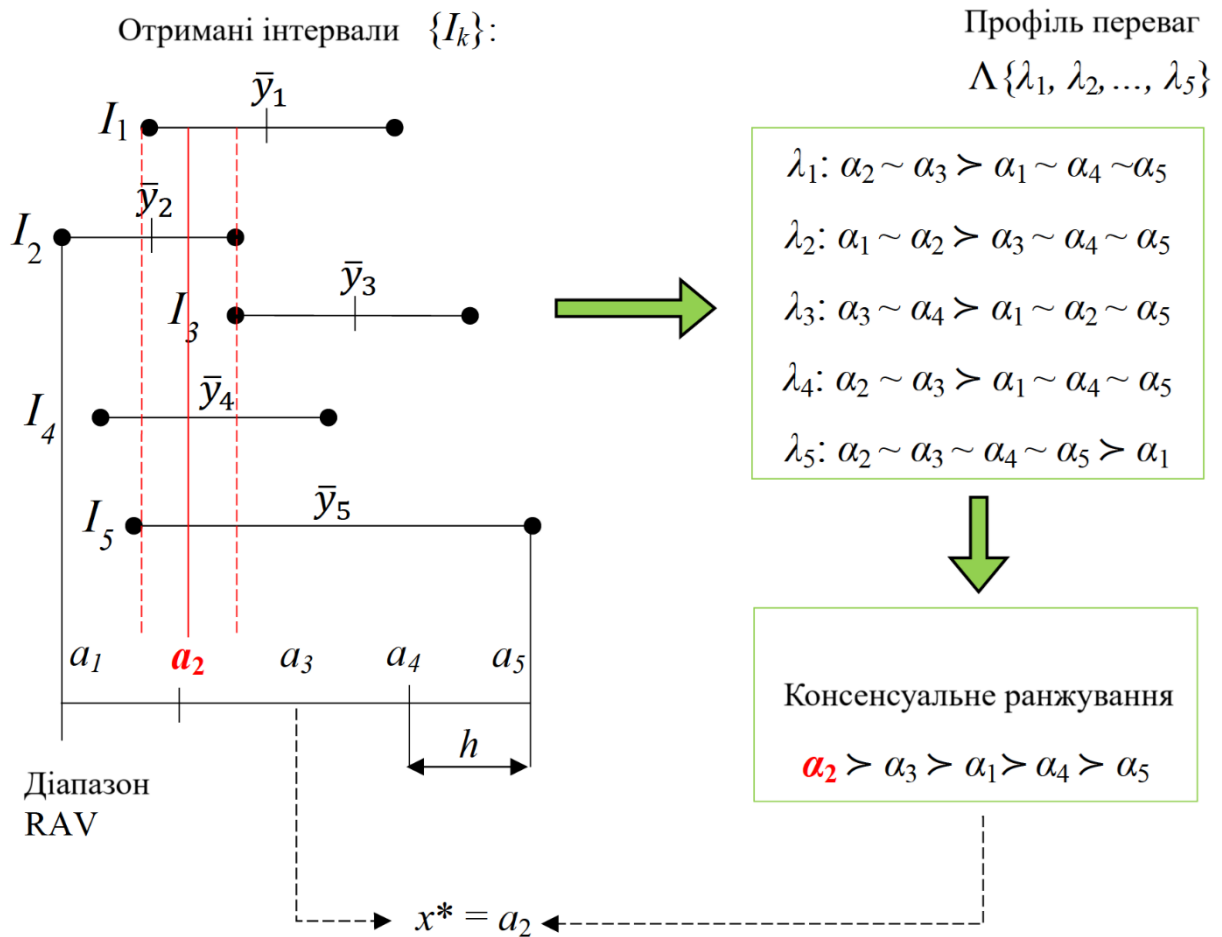


Рис. 3.8 Етапи знаходження найкращої оцінки методом IF&РА

Етап 3. Визначення значення x^* як найкращої альтернативи для консенсусного ранжування для профілю Λ . Для цієї мети може бути використано будь-який алгоритм реалізації деяких правил голосування. У цій кваліфікаційній роботі використовується правило Кемені [19].

Алгоритм знаходить кілька узгоджених ранжування, які мають утворити єдине остаточне консенсусне ранжування. Усі узгоджені ранжирування мають суворий порядок відносин і остаточне консенсусне ранжування є слабким порядком [20].

Етап 4. Визначення найкращої оцінки – знаходження медіани Кемені за допомогою програмного пакета серед Microsoft Visual C#.

Етап 5. Розрахунок невизначеності ε^* значення x^* за формулою

$$\varepsilon^* = (\max_{k=1, \dots, m'} \{I_k \leq x^*\}, \min_{k=1, \dots, m'} \{u_k \geq x^*\}). \quad (3.17)$$

Було запропоновано метод об'єднання інтервальних даних IF&PA на основі представлення інтервалів на реальній лінії за допомогою ранжування на безлічі дискретних значень, що належать цим інтервалам. Численні експерименти показали, що використання найкращого значення в консенсусному ранжируванні гарантує покращену точність та надійність вихідних даних.

Пропонований метод застосовний до інтервальних даних, отриманих у шкалі відносин, який перетворює дані в шкалу порядку, і далі визначається кращий об'єкт агрегування переваг. Тим самим найкращий об'єкт стає точкою на шкалі стосунків. З цього випливає, що перехід від шкали відносин до шкали порядку спрощує представлення вхідних даних, що, своєю чергою, характеризує метод IF&PA як надійний і точний.

У табл. 3.1 наведено обчислення меж невизначеності та похибки для кожного з номінальних значень напруги U змінного струму.

Визначення оцінки проведено за допомогою програмного пакета в середовищі Microsoft Visual C#, що дозволяє знайти рішення медіани Кемені результатів вимірювань з інтервалами невизначеності ε і максимально похибки, що допускається Δ методом IF&PA. Під час проведення експерименту крок розбиття h було обрано від 5 до 10, що дозволяє оцінити точність отриманого результату.

Таким чином, в результаті застосування методів середнього зваженого та IF&PA були отримані наступні оцінки, представлені в табл. 3.2 і табл. 3.3.

Таблиця 3.1

Результати вимірів, отримані методом IF&PA

ЗВ	U, В	Результати повторних вимірів										Серед не значен ня	Межі похибки		Межі невизначеності U_A	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	$\bar{y}$	$\bar{y} - \Delta$	$\bar{y} + \Delta$	$\bar{y} - \varepsilon$	$\bar{y} + \varepsilon$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
ЗВ1	$U_1 = 1 \text{ В}$	0,998 8	0,9893	0,9889	0,9893	0,9891	0,9889	0,9889	0,9889	0,9891	0,9897	0,9901	0,9772	1,0030	0,9870	0,9932
	$U_2 = 5 \text{ В}$	4,954 6	4,9519	4,9576	4,9547	4,9493	4,9548	4,9578	4,9522	4,9613	4,9581	4,9552	4,9106	4,9999	4,9517	4,9588
	$U_3 = 7 \text{ В}$	6,9323	6,9376	6,9271	6,9179	6,9274	6,9378	6,9226	6,9181	6,9274	6,9329	6,9281	6,8677	6,9885	6,9210	6,9353
ЗВ2	$U_1 = 1 \text{ В}$	0,991 0	0,9925	0,9909	0,9924	0,9910	0,9909	0,9912	0,9912	0,9914	0,9911	0,9914	0,9784	1,0043	0,9908	0,9920
	$U_2 = 5 \text{ В}$	4,959 3	4,9562	4,9627	4,9594	4,9532	4,9595	4,9627	4,9563	4,9664	4,9630	4,9599	4,9152	5,0045	4,9559	4,9638
	$U_3 = 7 \text{ В}$	6,943 0	6,9500	6,9361	6,9242	6,9363	6,9503	6,9304	6,9244	6,9364	6,9435	6,9375	6,8770	6,9980	6,9281	6,9468

Продовження табл. 3.1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3B3	$U_1 =$ $=1 \text{ B}$	0,9924	0,9944	0,9923	0,9944	0,9925	0,9923	0,9928	0,9928	0,9930	0,9925	0,9929	0,9800	1,0059	0,9921	0,9937
	$U_2 =$ $=5 \text{ B}$	4,9682	4,9648	4,9716	4,9682	4,9617	4,9682	4,9717	4,9650	4,9754	4,9717	4,9687	4,9239	5,0134	4,9646	4,9727
	$U_3 =$ $=7 \text{ B}$	6,9536	6,9596	6,9476	6,9371	6,9476	6,9597	6,9424	6,9370	6,9478	6,9539	6,9486	6,8880	7,0092	6,9404	6,9568
3B4	$U_1 =$ $=1 \text{ B}$	0,9887	0,9885	0,9887	0,9894	0,9888	0,9887	0,9888	0,9886	0,9888	0,9894	0,9888	0,9759	1,0018	0,9885	0,9891
	$U_2 =$ $=5 \text{ B}$	4,9469	4,9440	4,9502	4,9470	4,9412	4,9471	4,9502	4,9442	4,9535	4,9502	4,9475	4,9029	4,9920	4,9438	4,9511
	$U_3 =$ $=7 \text{ B}$	6,920	6,9266	6,9156	6,9056	6,9155	6,9269	6,9105	6,9056	6,9157	6,9215	6,9164	6,8561	6,9768	6,9088	6,9241
3B5	$U_1 =$ $=1 \text{ B}$	0,9930	0,9938	0,9930	0,9931	0,9929	0,9931	0,9935	0,9932	0,9931	0,9932	0,9932	0,9802	1,0061	0,9929	0,9935
	$U_2 =$ $=5 \text{ B}$	4,9734	4,9704	4,9768	4,9734	4,9674	4,9736	4,9769	4,9705	4,9804	4,9770	4,9740	4,9292	5,0188	4,9701	4,9779
	$U_3 =$ $=7 \text{ B}$	6,9605	6,9660	6,9550	6,9450	6,9552	6,9664	6,9502	6,9453	6,9551	6,9610	6,9560	6,8953	7,0166	6,9483	6,9636

Таблиця 3.2

Подання результатів вимірювань інтервалами невизначеності методами середнього зваженого та IF&PA

Номінали $U_i (U_{id}), \text{В}$	Характеристика точності			
	Метод середнього зваженого	Метод IF&PA (10 розбиття)	Метод IF&PA (7 розбиття)	Метод IF&PA (5 розбиття)
1 (0,96540)	(0,99141 ± 0,00019) В	(0,9930 ± 0,0001) В	-	-
5 (5,05063)	(4,9604 ± 0,0017) В	(4,9703 ± 0,0002) В	(4,9495 ± 0,0016) В	(4,961 ± 0,003) В
7 (7,02490)	(6,937 ± 0,004) В	(6,9453 ± 0,0015) В	(6,9499 ± 0,0016) В	(6,936 ± 0,008) В

Таблиця 3.3

Подання результатів вимірювань інтервалами похибки методами середнього зваженого та IF&PA

Номінали $U_i (U_{id}), \text{В}$	Характеристика точності			
	Метод середнього зваженого	Метод IF&PA (10 розбиття)	Метод IF&PA (7 розбиття)	Метод IF&PA (5 розбиття)
1 (0,96540)	$(0,991 \pm 0,013) \text{ В}$	$(0,996 \pm 0,016) \text{ В}$	$(0,991 \pm 0,011) \text{ В}$	$(0,984 \pm 0,003) \text{ В}$
5 (5,05063)	$(4,96 \pm 0,05) \text{ В}$	$(4,97 \pm 0,04) \text{ В}$	$(4,96 \pm 0,03) \text{ В}$	$(4,932 \pm 0,019) \text{ В}$
7 (7,02490)	$(6,94 \pm 0,06) \text{ В}$	$(6,94 \pm 0,04) \text{ В}$	$(6,94 \pm 0,04) \text{ В}$	$(6,94 \pm 0,04) \text{ В}$

Поетапне знаходження оцінки методом IF&PA з інтервалами максимально похибки, що допускається, і невизначеності нижче на рис. 3. 9 – рис. 3.24.

10 розбиттів	
мін	0,9759
макс	1,0061
h	0,0034
a1	0,9759
a2	0,9793
a3	0,9825
a4	0,9860
a5	0,9894
a6	0,9927
a7	0,9961
a8	0,9994
a9	1,0023
a10	1,0061



Етап 1. Формування діапазону
актуальних значень $A = \{a_1, \dots, a_n\}$



Етап 2. Складання профілю переваг
 $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$



$$\lambda_1: a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \sim a_9 > a_1 \sim a_{10}$$

$$\lambda_2: a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \sim a_9 > a_1 \sim a_{10}$$

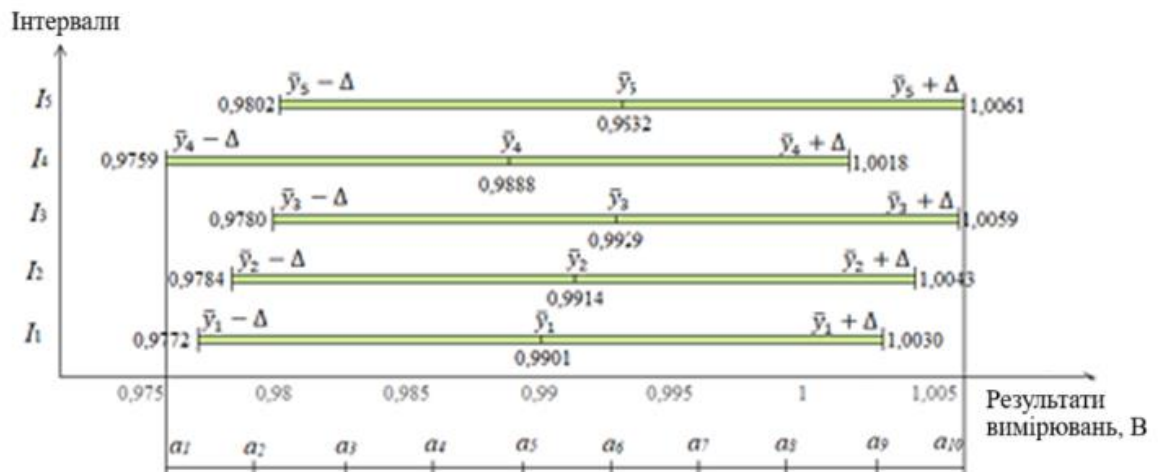
$$\lambda_3: a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \sim a_9 > a_1 \sim a_2 \sim a_{10}$$

$$\lambda_4: a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 > a_9 \sim a_{10}$$

$$\lambda_5: a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \sim a_9 \sim a_{10} > a_1 \sim a_2$$



Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині A



Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консенсусального ранжування:

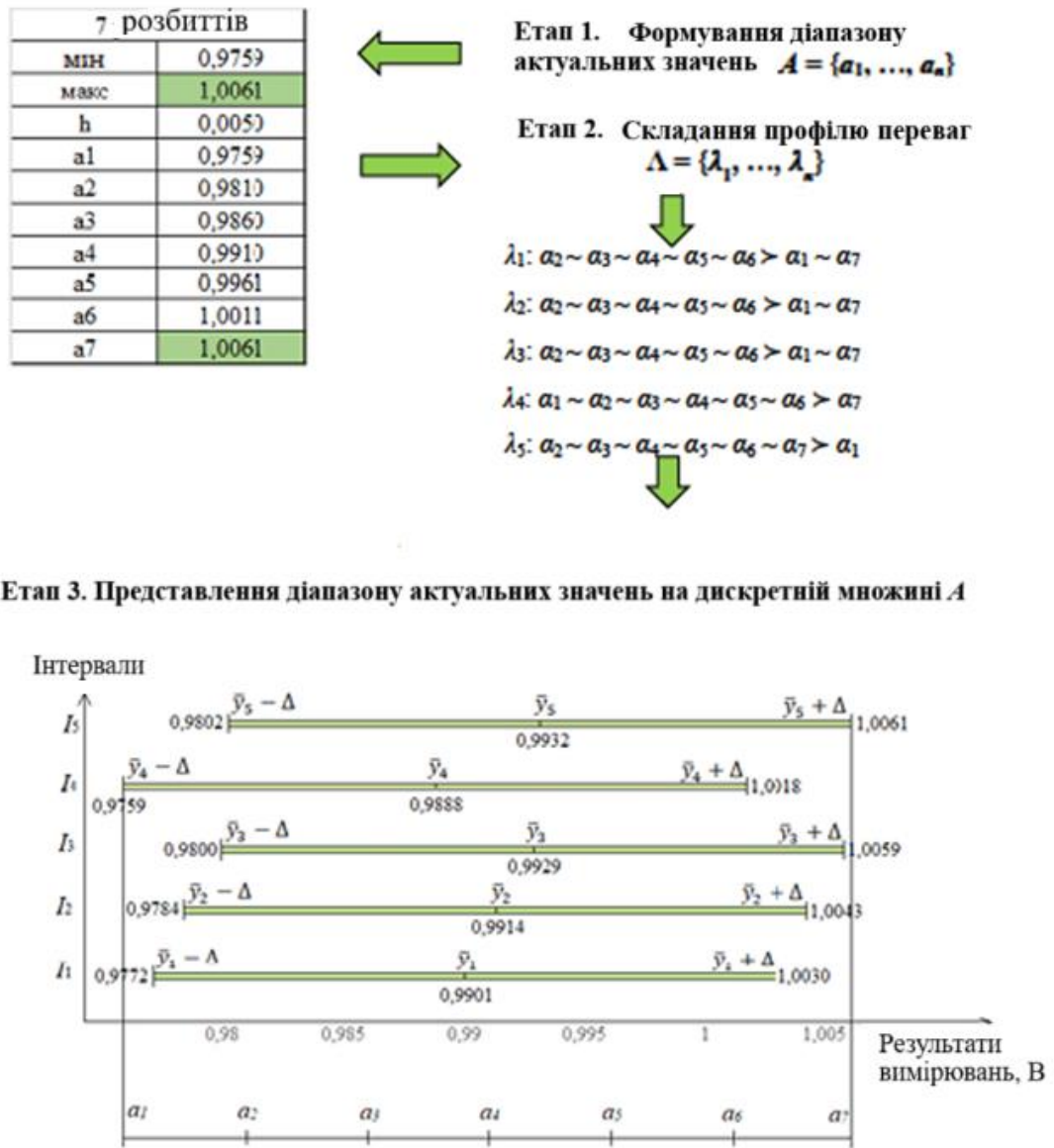
$$a_4 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \sim a_9 > a_2 \sim a_3 \sim a_1 \sim a_5 \sim a_{10}$$

Найкраща оцінка

$$x^* = a_7:$$

$$(0,996 \pm 0,011) \text{ В}$$

Рис. 3.9 - Інтервали похибки для номіналу 1 В (10 розбиттів)



Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консунсуального ранжування:

$$a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 > a_1 \sim a_7$$

Найкраща оцінка

$$x^* = a_4:$$

$$(0,991 \pm 0,011) \text{ В}$$

Рис. 9.10 Інтервали похибки для номіналу 1 В (7 розбиттів)

5 розбиттів	
мін	0,9759
макс	1,0061
h	0,0075
a1	0,9759
a2	0,9835
a3	0,9910
a4	0,9985
a5	1,0061



Етап 1. Формування діапазону актуальних значень $A = \{a_1, \dots, a_n\}$



Етап 2. Складання профілю переваг $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$



$$\lambda_1: a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_1 \sim a_5$$

$$\lambda_2: a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_1 \sim a_5$$

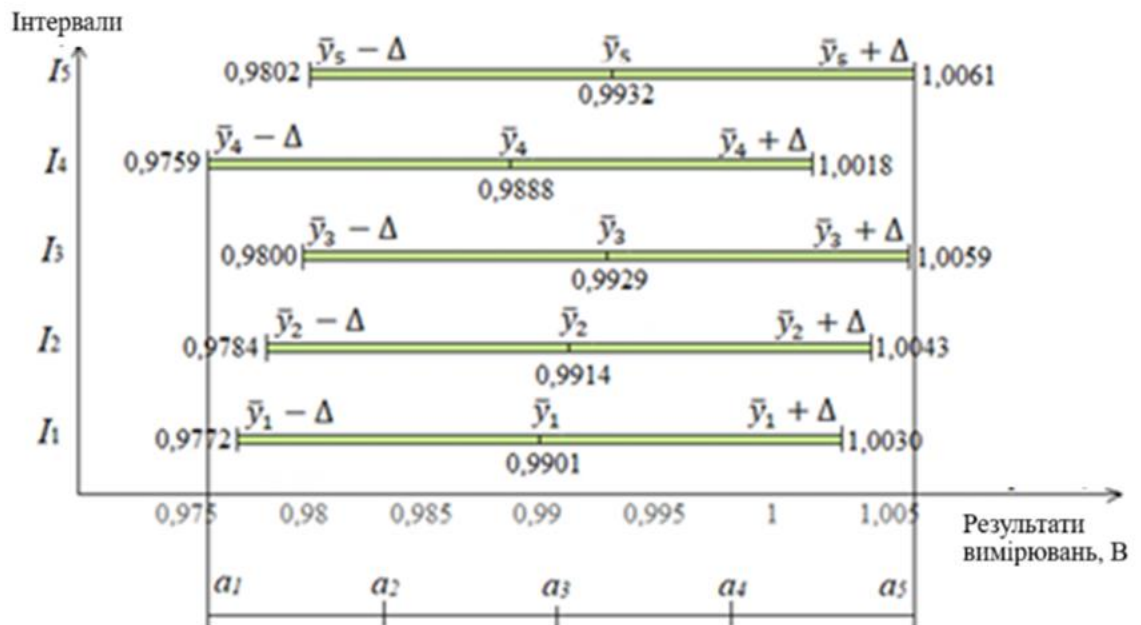
$$\lambda_3: a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_1 \sim a_5$$

$$\lambda_4: a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_5$$

$$\lambda_5: a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 > a_1$$



Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині A



Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консенсусального ранжування:

$$a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_1 \sim a_5$$

Найкраща оцінка

$$x^* = a_3:$$

$$(0,991 \pm 0,011) \text{ В}$$

Рис. 9.11 Інтервали похибки для номіналу 1 В (5 розбиттів)

10 розбиттів	
мін	4,9029
макс	5,0188
h	0,0129
a1	4,9029
a2	4,9157
a3	4,9286
a4	4,9415
a5	4,9544
a6	4,9673
a7	4,9801
a8	4,9930
a9	5,0059
a10	5,0188

← Етап 1. Формування діапазону актуальних значень $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

→ Етап 2. Складання профілю переваг $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$

$$\lambda_1: a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 > a_1 \sim a_9 \sim a_{10}$$

$$\lambda_2: a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 > a_1 \sim a_9 \sim a_{10}$$

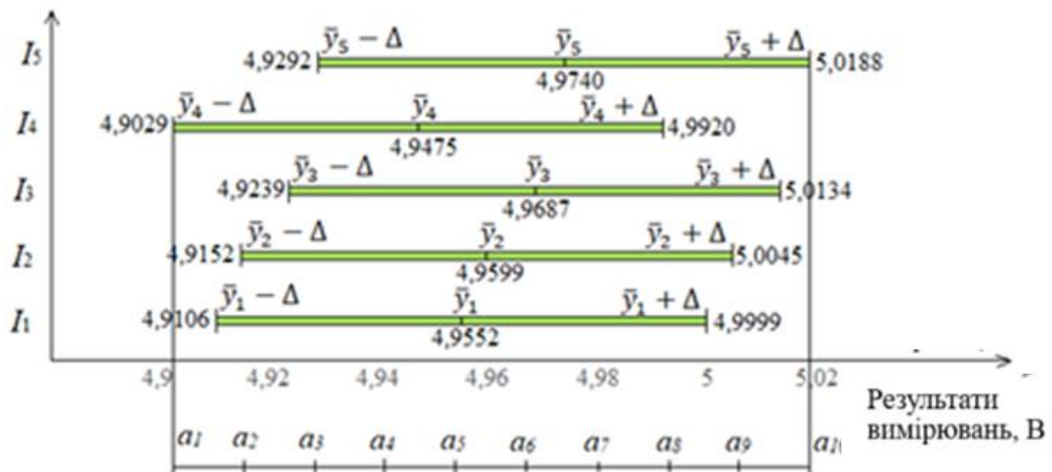
$$\lambda_3: a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \sim a_9 > a_1 \sim a_2 \sim a_{10}$$

$$\lambda_4: a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 > a_8 \sim a_9 \sim a_{10}$$

$$\lambda_5: a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \sim a_9 \sim a_{10} > a_1 \sim a_2 \sim a_3$$

Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині A

Інтервали



Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консенсуального ранжування:

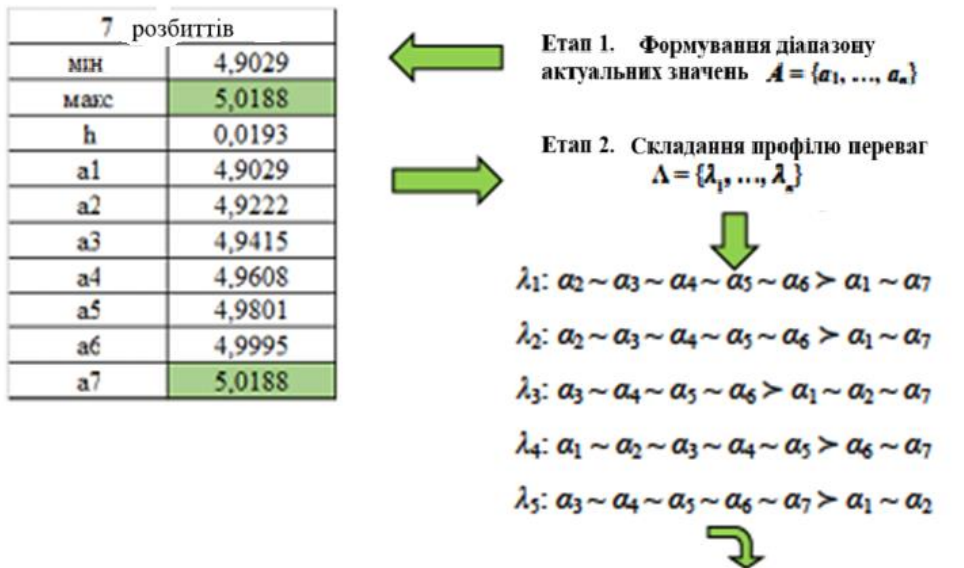
$$a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 > a_3 \sim a_2 \sim a_9 > a_1 \sim a_{10}$$

Найкраща оцінка

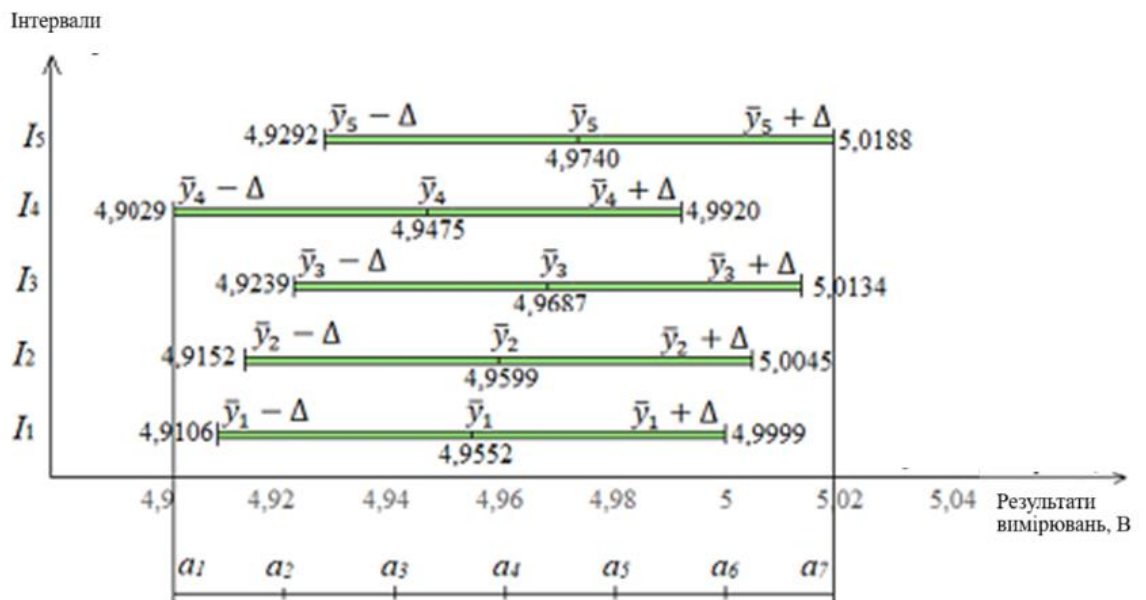
$$x^* = a_6:$$

$$(4,97 \pm 0,03) \text{ В}$$

Рис. 3. 12 Інтервали похибки для номіналу 5 В (10 розбиттів) інтервалами похибки для номіналу 5 В (7 розбиттів)



Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині A



Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консенсуального ранжування:

$$a_3 \sim a_4 \sim a_5 > a_6 > a_2 > a_1 \sim a_7$$

Найкраща оцінка

$$x^* = a_4:$$

$$(4,96 \pm 0,03) \text{ В}$$

Рис. 3. 13 Інтервали похибки для номіналу 5 В (7 розбиттів)

5 розбиттів	
мін	4,9029
макс	5,0188
h	0,0290
a1	4,9029
a2	4,9318
a3	4,9608
a4	4,9898
a5	5,0188



Етап 1. Формування діапазону
актуальних значень $A = \{a_1, \dots, a_n\}$



Етап 2. Складання профілю переваг
 $\Delta = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s\}$



$$\lambda_1: a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_1 \sim a_5$$

$$\lambda_2: a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_1 \sim a_5$$

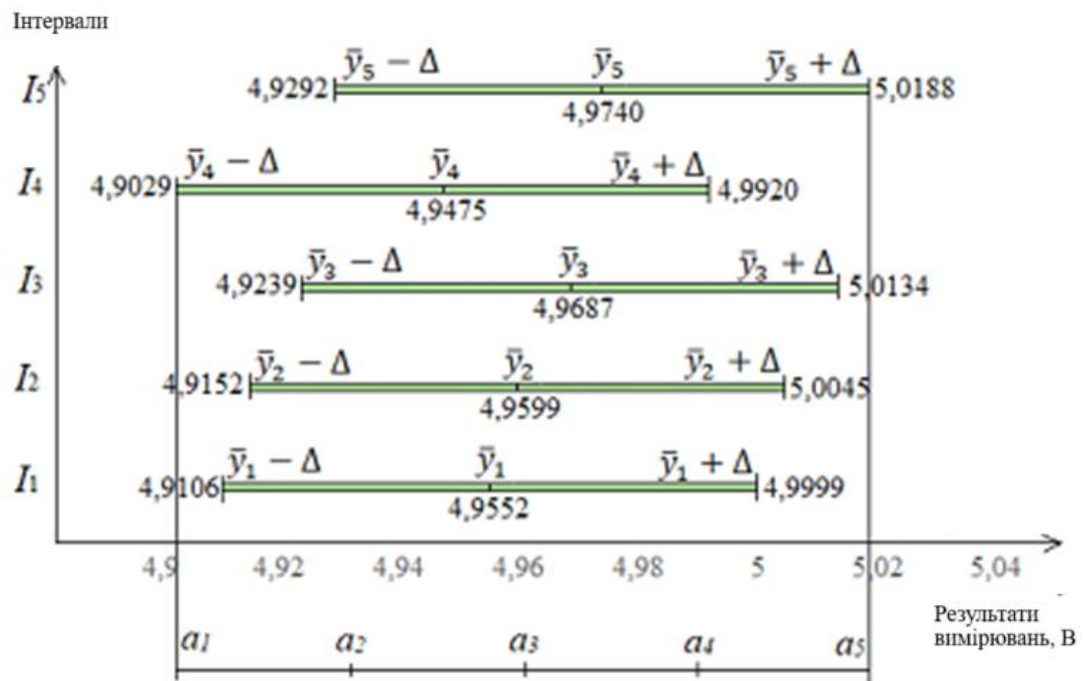
$$\lambda_3: a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_1 \sim a_5$$

$$\lambda_4: a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_5$$

$$\lambda_5: a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 > a_1$$



Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині A



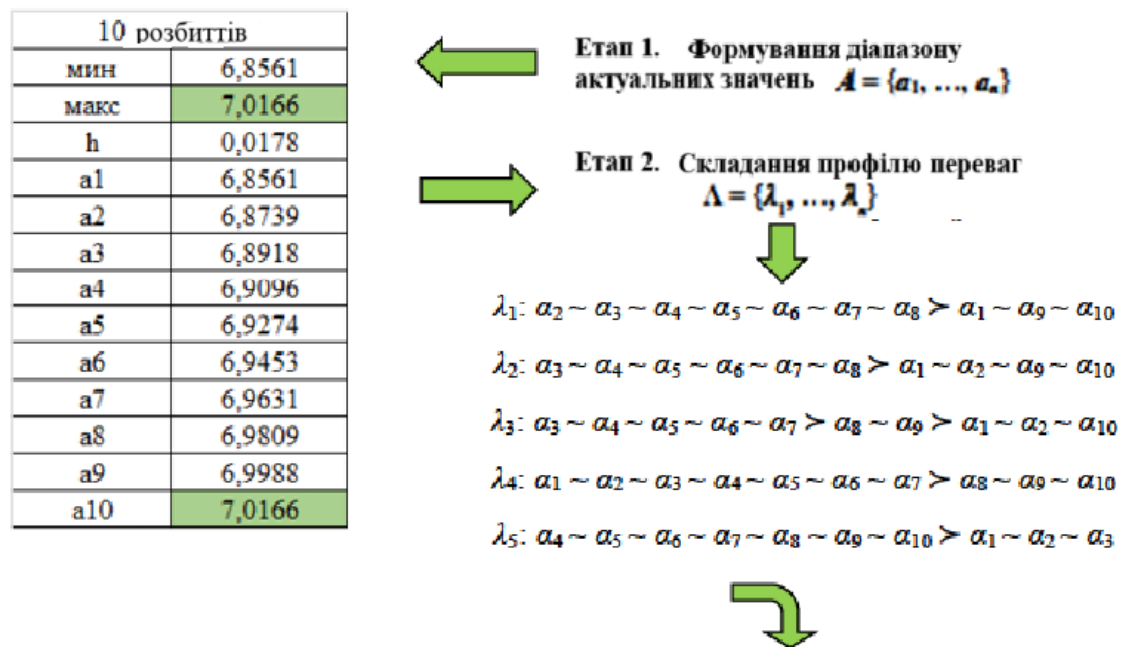
Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консунсального ранжування:

$$a_2 > a_3 > a_4 > a_1 \sim a_5$$

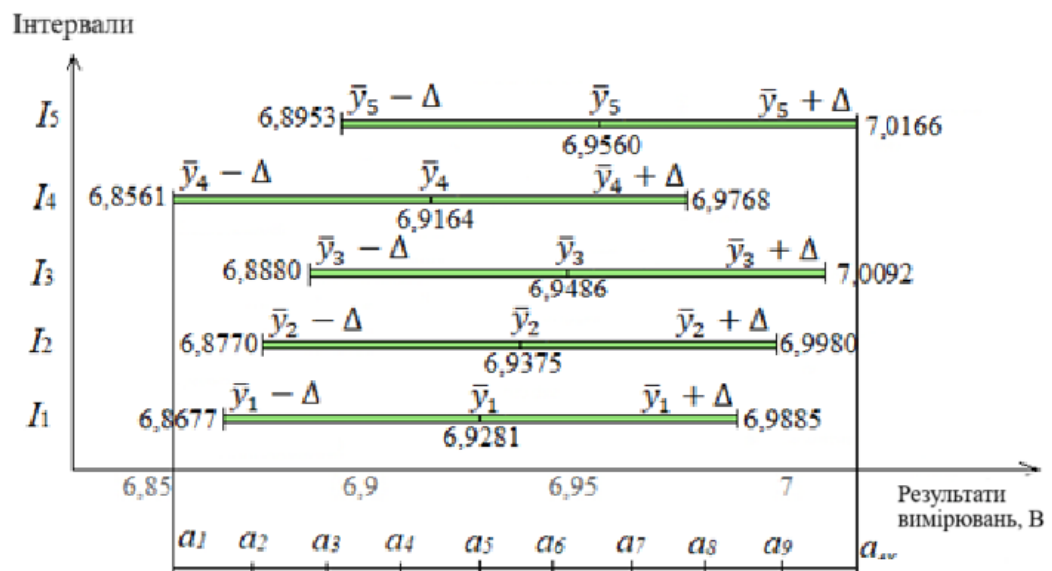
Найкраща оцінка

$$x^* = a_2: (4,93 \pm 0,03) \text{ В}$$

Рис. 3. 14 Інтервали похибки для номіналу 5 В (5 розбиттів)



Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині A

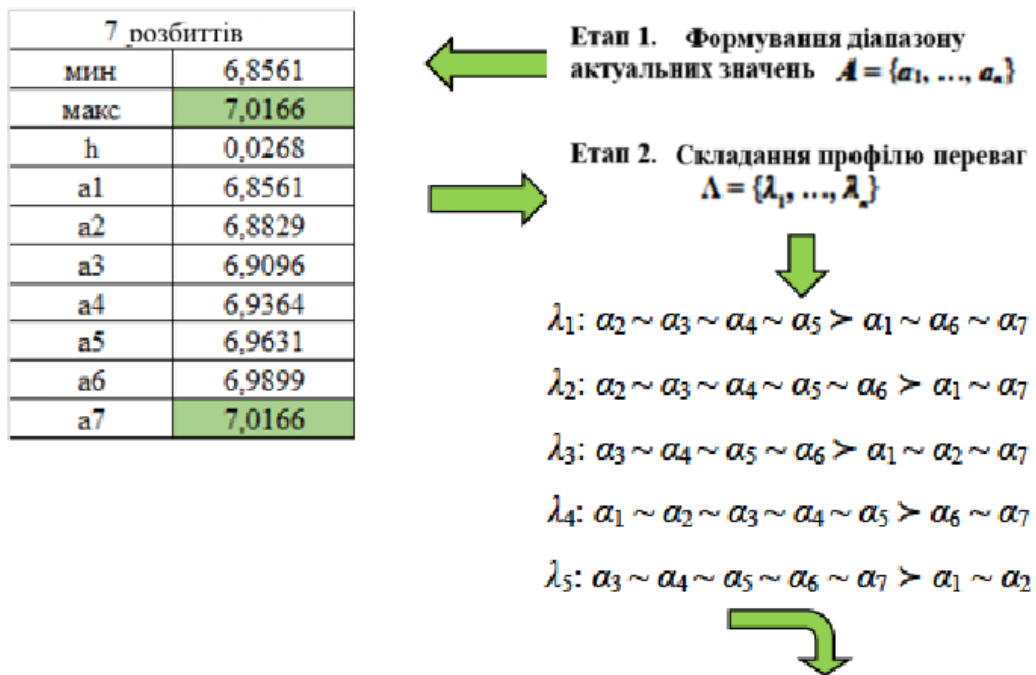


Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консунсального ранжування:

$$a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 > a_3 \sim a_8 > a_2 \sim a_9 > a_1 \sim a_{10}$$

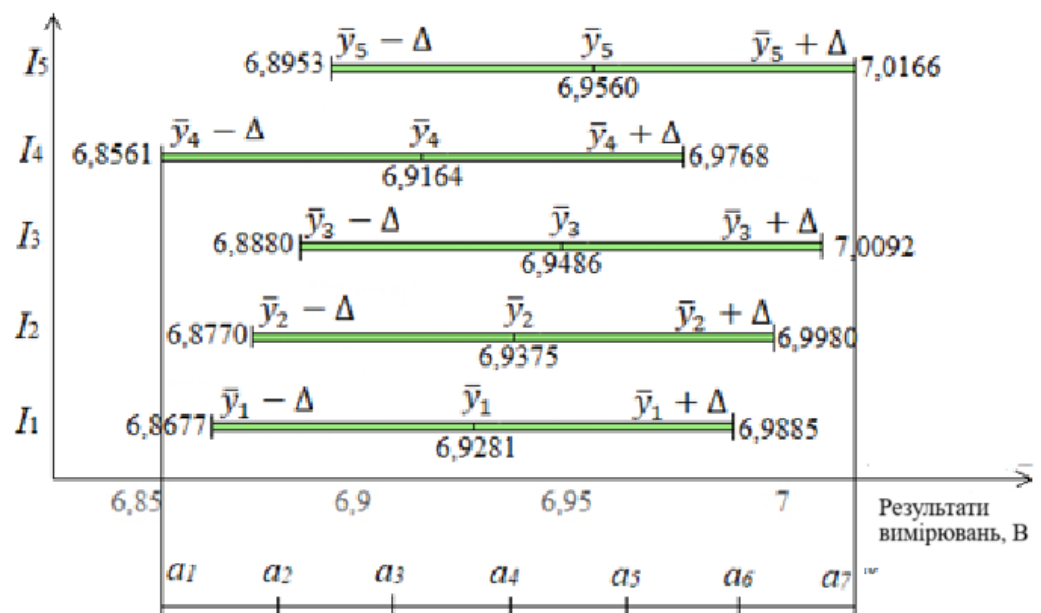
$$\text{Найкраща оцінка } x^* = (a_5/a_6)/2: (6,94 \pm 0,04) \text{ В}$$

Рис. 3. 15 Інтервали похибки для номіналу 7 В (10 розбиттів)



Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині A

Інтервали



Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консунсального ранжування:

$a_3 > a_4 \sim a_5 > a_2 > a_6 > a_1 \sim a_7$
Найкраща оцінка $x^* = a_4: (6,94 \pm 0,04)$ В

Рис. 3. 16 Інтервали похибки для номіналу 7 В (7 розбиттів)

5 розбиттів	
мін	6,8561
макс	7,0166
h	0,0401
a1	6,8561
a2	6,8962
a3	6,9364
a4	6,9765
a5	7,0166



Етап 1. Формування діапазону актуальних значень $A = \{a_1, \dots, a_n\}$



Етап 2. Складання профілю переваг $\Delta = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$



$$\lambda_1: a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_1 \sim a_5$$

$$\lambda_2: a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_1 \sim a_5$$

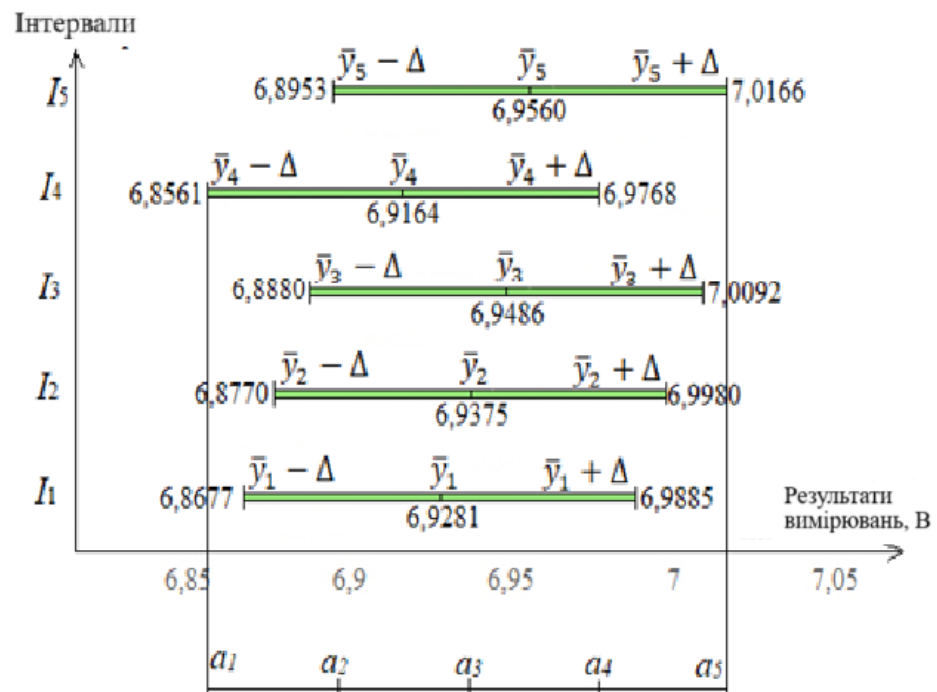
$$\lambda_3: a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_1 \sim a_5$$

$$\lambda_4: a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_5$$

$$\lambda_5: a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 > a_1$$



Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині A



Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консунсального ранжування:

$$a_2 \sim a_3 \sim a_4 > a_1 \sim a_5$$

Найкраща оцінка $x^* = a_3: (6,94 \pm 0,04)$ В

Рис. 3. 17 Інтервали похибки для номіналу 7 В (5 розбиттів)

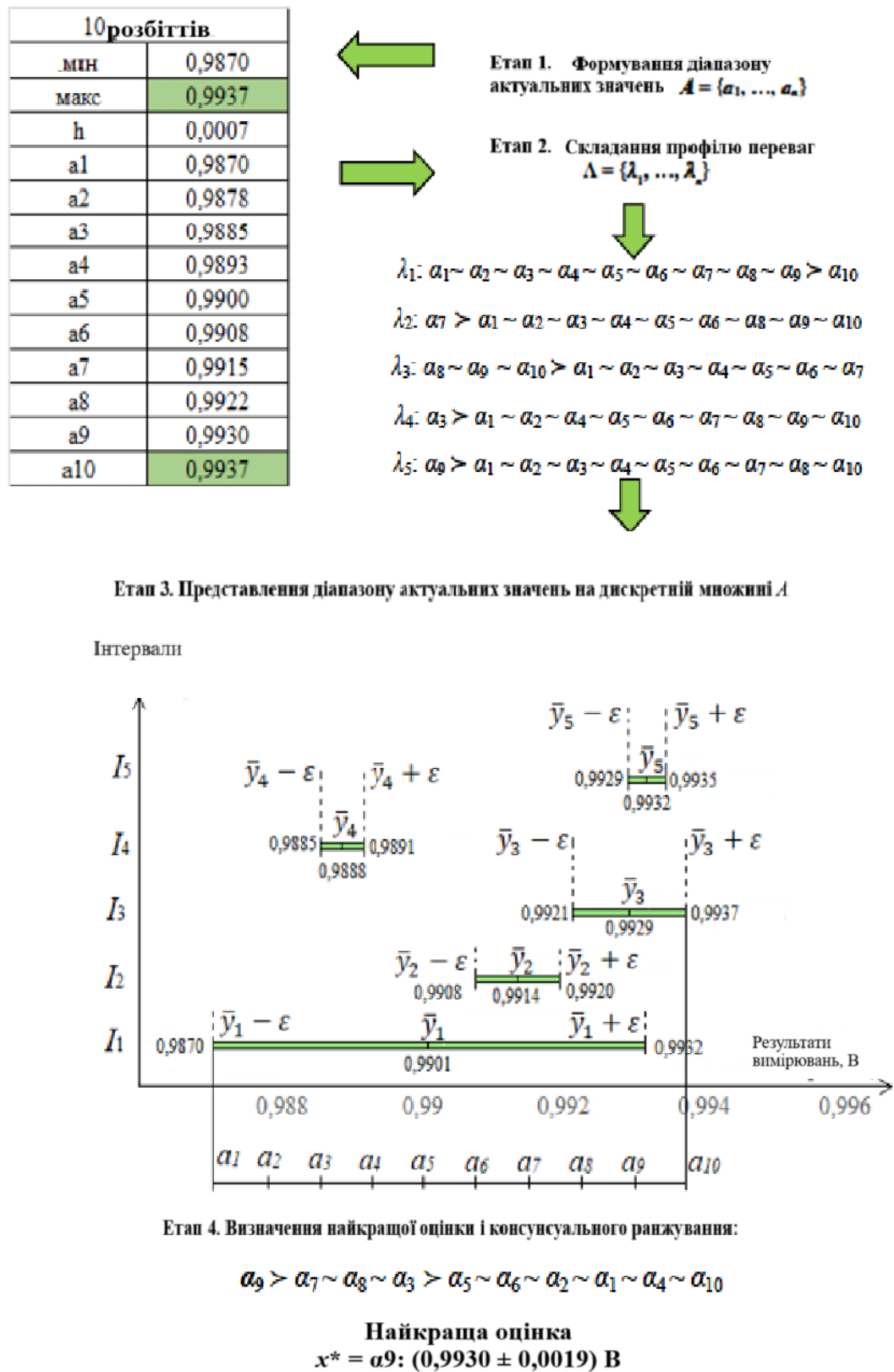


Рис. 3. 18 Інтервали невизначеності для номіналу 1 В (10 розбиттів)

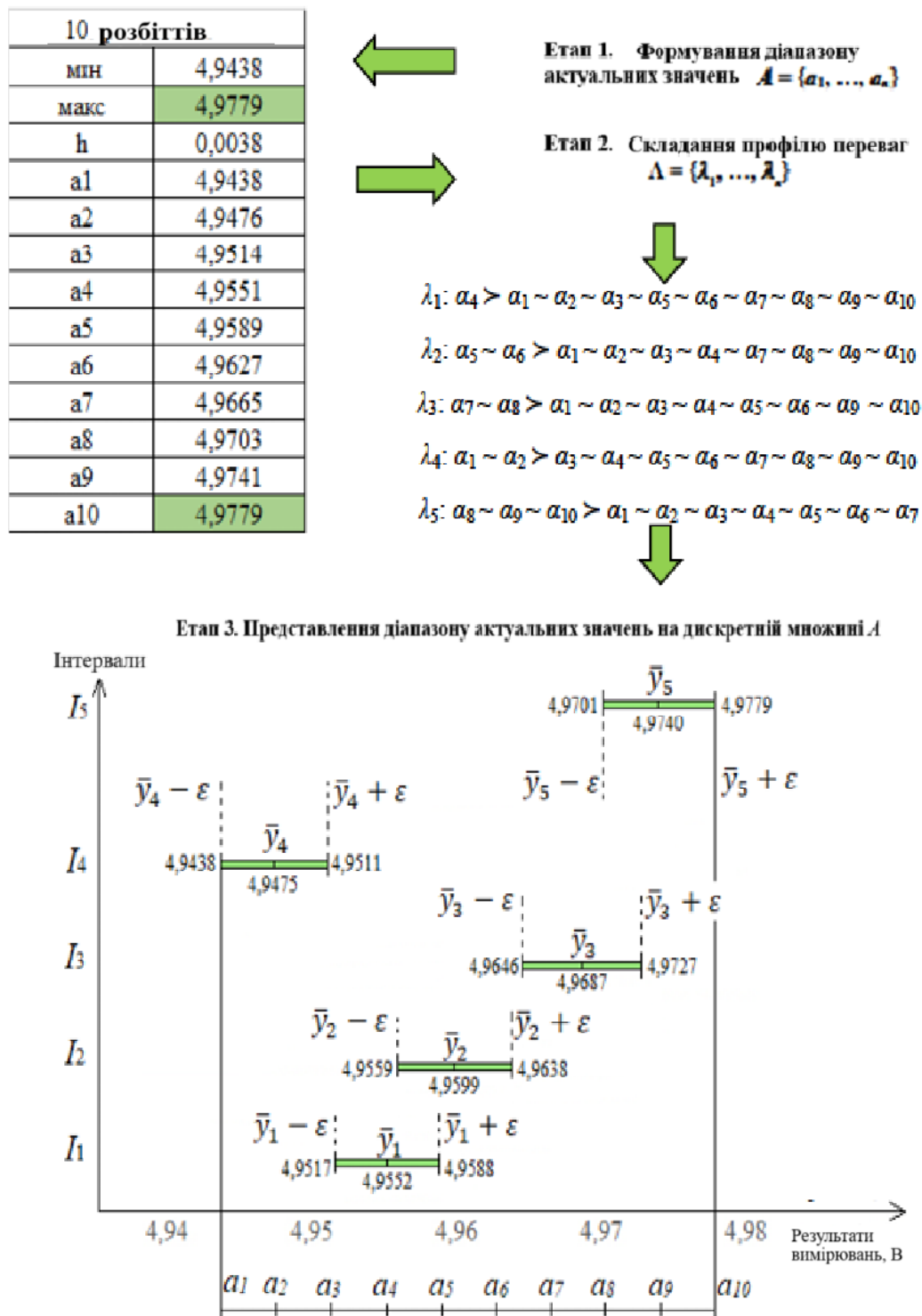


Рис. 3. 19 Інтервали невизначеності для номіналу 5 В (10 розбиттів)

7 розбиттів	
мін	4,9438
макс	4,9779
h	0,0057
a1	4,9438
a2	4,9495
a3	4,9551
a4	4,9608
a5	4,9665
a6	4,9722
a7	4,9779



Етап 1. Формування діапазону актуальних значень $A = \{a_1, \dots, a_n\}$



Етап 2. Складання профілю переваг $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$



$\lambda_1: a_3 > a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7$

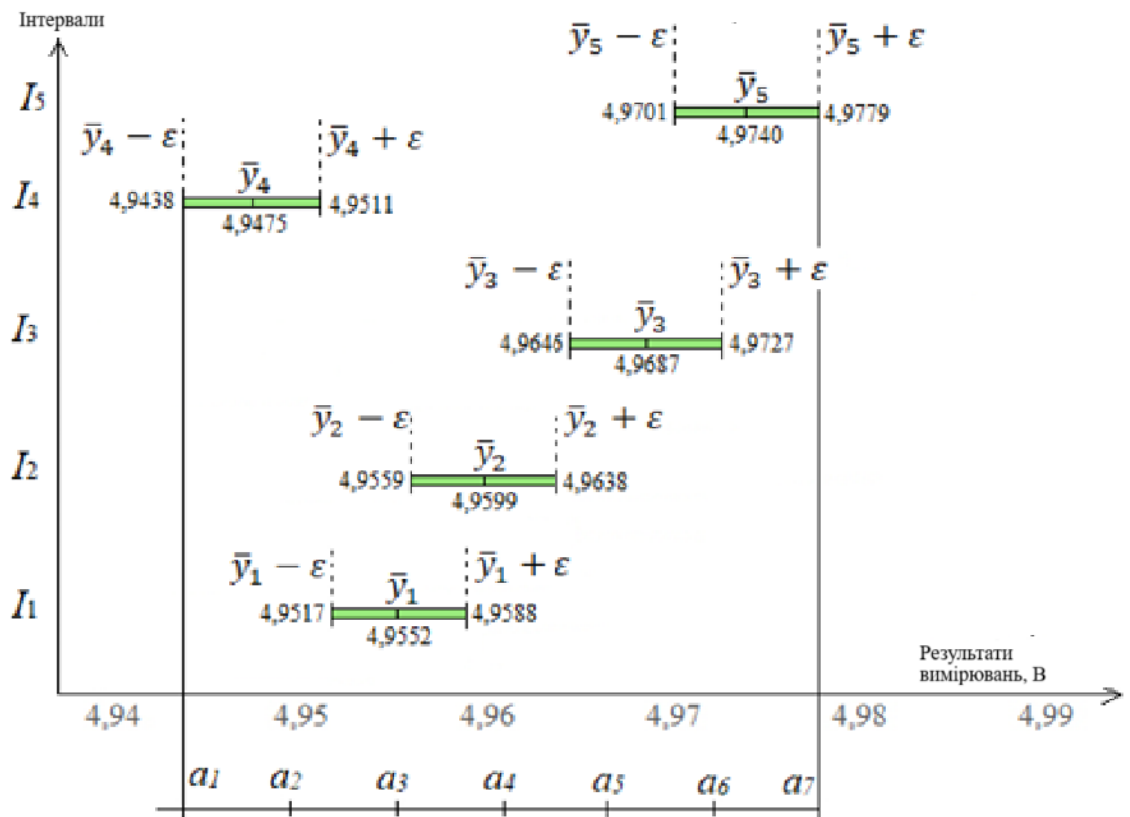
$\lambda_2: a_4 > a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7$

$\lambda_3: a_5 \sim a_6 > a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_7$

$\lambda_4: a_1 \sim a_2 > a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7$

$\lambda_5: a_6 \sim a_7 > a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5$

Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині A



Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консенсуального ранжування:

$a_1 \sim a_2 \sim a_5 > a_4 \sim a_3 \sim a_6 \sim a_7$

Найкраща оцінка $x^* = a_2: (4,95 \pm 0,01) \text{ В}$

Рис. 3. 20 Інтервали невизначеності для номіналу 5 В (7 розбиттів)

5 розбіттів	
мін	4,9438
макс	4,9779
h	0,0085
a1	4,9438
a2	4,9523
a3	4,9608
a4	4,9693
a5	4,9779



Етап 1. Формування діапазону актуальних значень $A = \{a_1, \dots, a_n\}$



Етап 2. Складання профілю переваг $\Delta = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$



$$\lambda_1: a_2 \succ a_1 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5$$

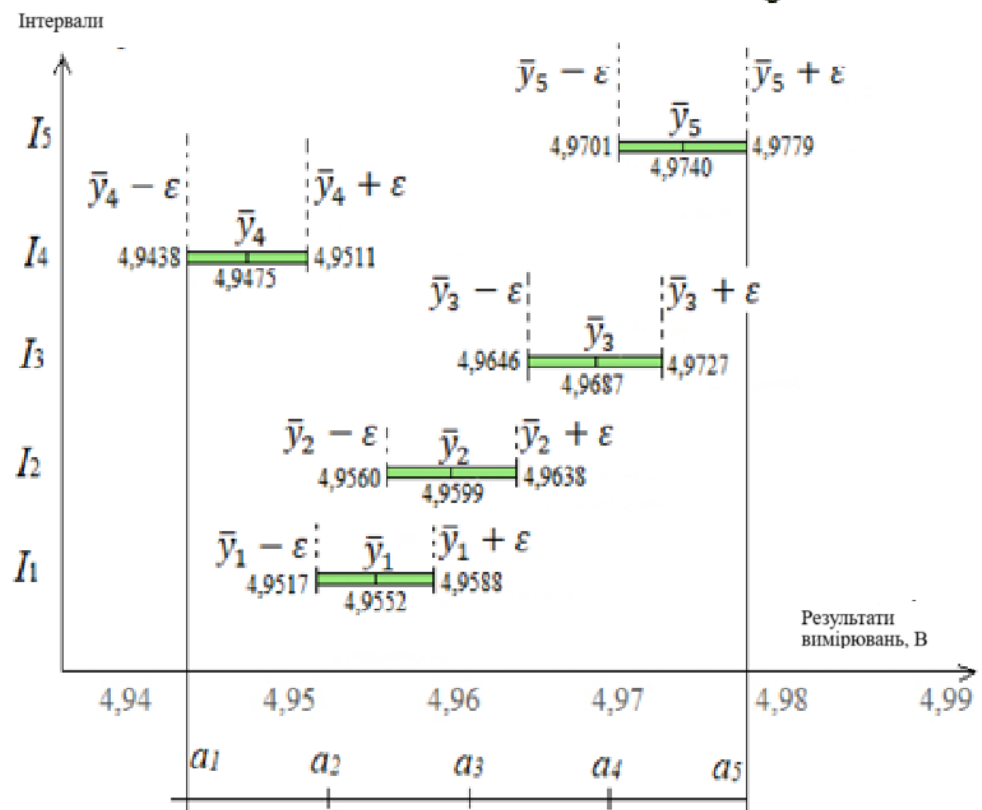
$$\lambda_2: a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5$$

$$\lambda_3: a_4 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_5$$

$$\lambda_4: a_1 \succ a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5$$

$$\lambda_5: a_5 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4$$

Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині Δ



Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консунсального ранжування:

$$a1 \sim a2 \sim a3 \sim a4 \sim a5$$

$$\text{Найкраща оцінка } x^* = a3: (4,96 \pm 0,01) \text{ В}$$

Рис. 3. 21 Інтервали невизначеності для номіналу 5 В (5 розбиттів)

10 розбиттів	
мін	6,9088
макс	6,9636
h	0,0061
a1	6,9088
a2	6,9149
a3	6,9209
a4	6,9270
a5	6,9331
a6	6,9392
a7	6,9453
a8	6,9514
a9	6,9575
a10	6,9636



Етап 1. Формування діапазону
актуальних значень $A = \{a_1, \dots, a_n\}$



Етап 2. Складання профілю переваг
 $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_j\}$



$$\lambda_1: a_4 \sim a_5 > a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \sim a_9 \sim a_{10}$$

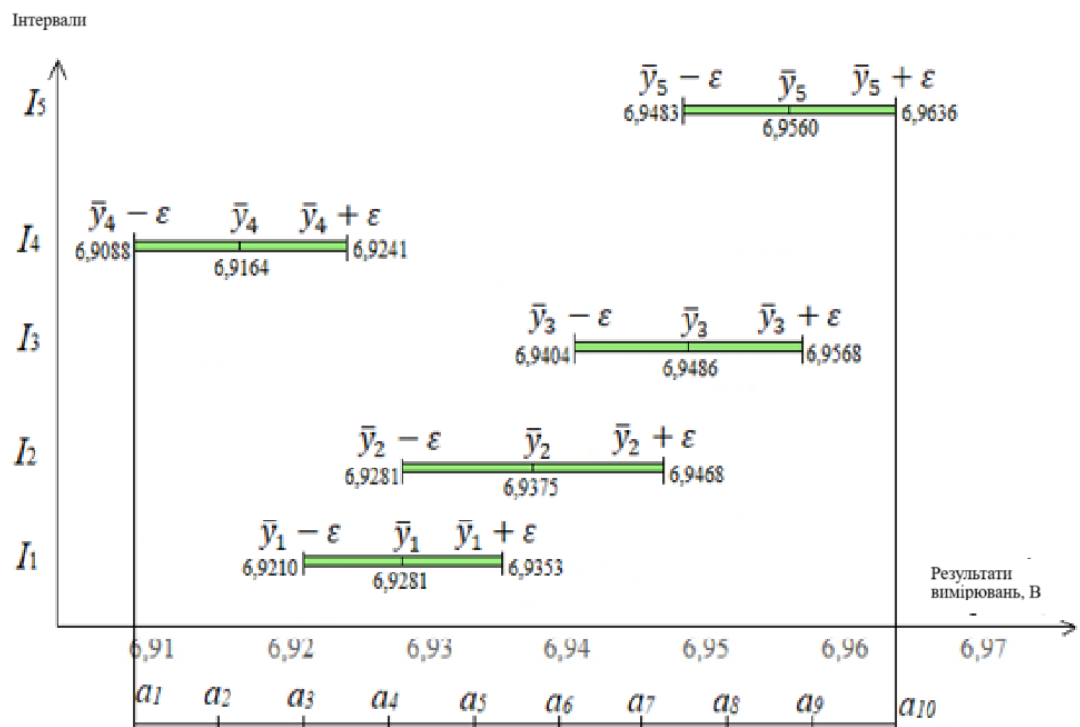
$$\lambda_2: a_5 \sim a_6 \sim a_7 > a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_8 \sim a_9 \sim a_{10}$$

$$\lambda_3: a_7 \sim a_8 > a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_9 \sim a_{10}$$

$$\lambda_4: a_1 \sim a_2 \sim a_3 > a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7 \sim a_8 \sim a_9 \sim a_{10}$$

$$\lambda_5: a_8 \sim a_9 \sim a_{10} > a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7$$

Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині A



Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консенсусального ранжування:

$$a_5 \sim a_7 \sim a_8 > a_4 \sim a_1 \sim a_6 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_9 \sim a_{10}$$

$$\text{Найкраща оцінка } x^* = a_7: (6,945 \pm 0,012) \text{ В}$$

Рис. 3. 22 Інтервали невизначеності для номіналу 7 В (10 розбиттів)

7 розбиттів	
мін	6,9088
макс	6,9636
h	0,0091
a1	6,9088
a2	6,9179
a3	6,9270
a4	6,9362
a5	6,9453
a6	6,9545
a7	6,9636



Етап 1. Формування діапазону актуальних значень $A = \{a_1, \dots, a_n\}$



Етап 2. Складання профілю переваг $\Delta = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$



$\lambda_1: a_3 > a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7$

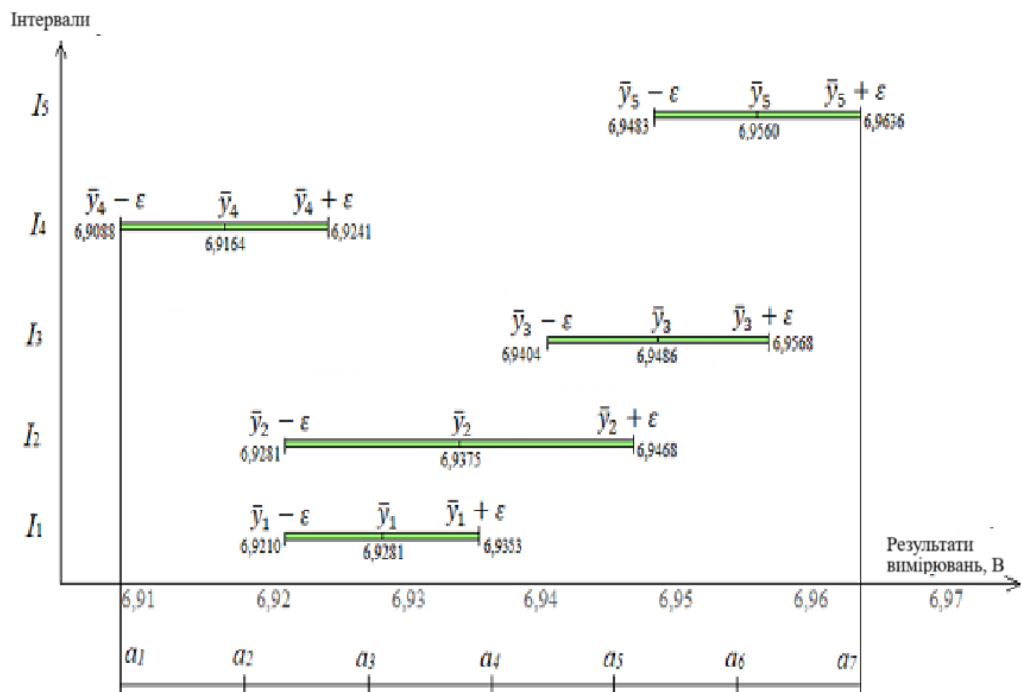
$\lambda_2: a_4 \sim a_5 > a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_6 \sim a_7$

$\lambda_3: a_5 \sim a_6 > a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_7$

$\lambda_4: a_1 \sim a_2 > a_3 \sim a_4 \sim a_5 \sim a_6 \sim a_7$

$\lambda_5: a_6 \sim a_7 > a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5$

Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині Δ



Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консунсального ранжування:

$a_5 \sim a_6 > a_3 \sim a_4 \sim a_1 \sim a_2 \sim a_7$

Найкраща оцінка $x^* = (a_5/a_6)/2: (6,950 \pm 0,012) В$

Рис. 3. 23 Інтервали невизначеності для номіналу 7 В (7 розбиттів)

5 розбиттів	
мін	6,9088
макс	6,9636
h	0,0137
a1	6,9088
a2	6,9225
a3	6,9362
a4	6,9499
a5	6,9636



Етап 1. Формування діапазону актуальних значень $A = \{a_1, \dots, a_n\}$



Етап 2. Складання профілю переваг $\Delta = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$



$\lambda_1: a_2 \succ a_1 \sim a_3 \sim a_4 \sim a_5$

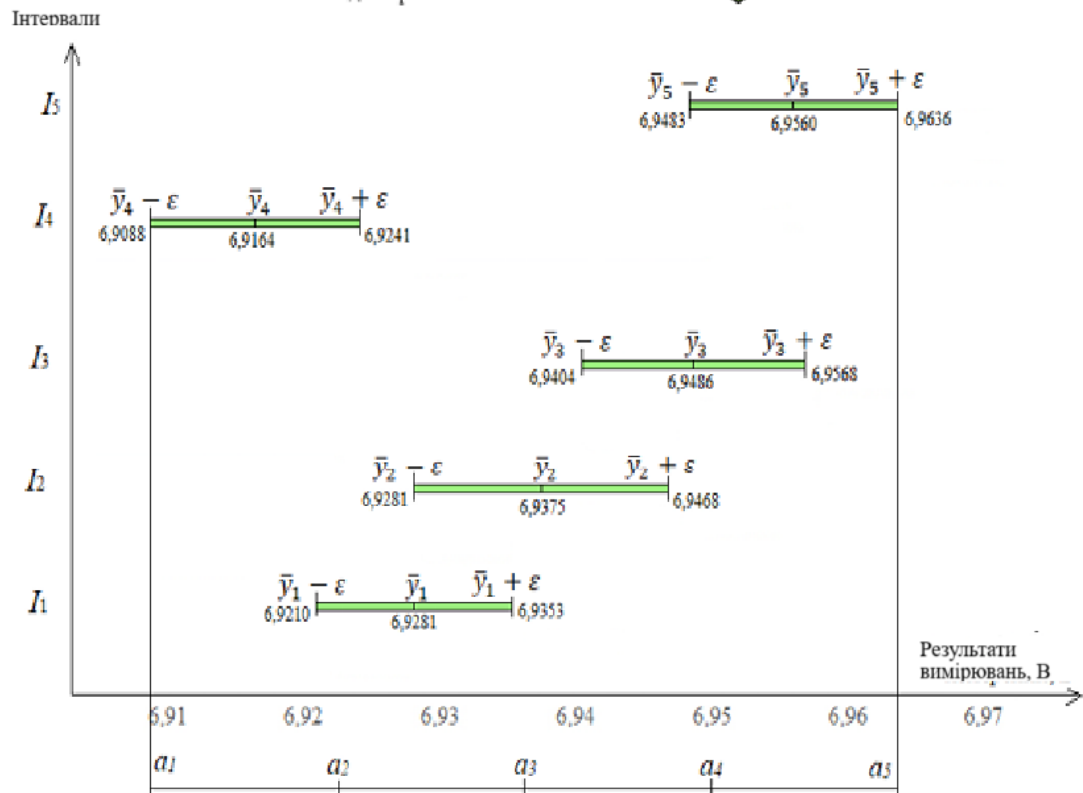
$\lambda_2: a_3 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_4 \sim a_5$

$\lambda_3: a_4 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_3 \sim a_5$

$\lambda_4: a_1 \sim a_2 \succ a_3 \sim a_4 \sim a_5$

$\lambda_5: a_4 \sim a_5 \succ a_1 \sim a_2 \sim a_3$

Етап 3. Представлення діапазону актуальних значень на дискретній множині Δ



Етап 4. Визначення найкращої оцінки і консунсуального ранжування:

$a_2 \sim a_4 \succ a_3 \sim a_1 \sim a_5$

Наилучшая оценка $x^* = (a_2/a_4)/2: (6,936 \pm 0,012) В$

Рис. 3. 24 Інтервали невизначеності для номіналу 7 В (5 розбиттів)

Висновки до третього розділу

У третьому розділі кваліфікаційної магістерської роботи було наведено результати експериментальних досліджень та проведено обробку результатів вимірювань із застосуванням методу IF&PA.

Було обгрунтовано наступне.

1. Оцінки величини з інтервалами невизначеності, отримані методом IF&PA, виявилися ближче розташованими до справжнього значення величини, при цьому інтервали невизначеності значно менші (більше, ніж у 5 разів), ніж інтервали з максимальної похибки, що допускається.

2. Оцінку $(4,9703 \pm 0,0002)$ В величини з номіналом 5 В, представлена інтервалами з невизначеності та отримана методом IF&PA, розташовано ближче до справжнього значення, що дорівнює 5,05063 В.

Інтервал, представлений невизначеністю у методі IF&PA є у вісім разів меншим, отже, оцінка за цим методом має підвищену точність порівняно з методом середнього зваженого.

3. Підвищена точність інтервалів, отриманих методом IF&PA, спостерігається у всіх результатах вимірювань, крім оцінки $(0,99141 \pm 0,00019)$, яку було отримано методом середнього зваженого. Така оцінка має більш високу точність (на величину інтервалу $\pm 0,0001$ В) і її розташовано ближче до умовно істинного значення, яке дорівнює значенню 0,965404 В.

4. У методі IF&PA при розбитті виміряних значень на інтервали з невизначеності інтервал I_4 виявився несумісним з інтервалами I_2 , I_3 , I_5 . Причина такого відхилення може бути обумовленою наявністю систематичної похибки засобу вимірювання ЗВ₄ (одного з використовуваних для вимірювань вольтметрів типу В7-38 М).

5. Слід зазначити, що різниця $|\chi_1 - \chi_i|$ є меншою, ніж відхилення ε_i , це свідчить, що у вимірах систематична складова похибки є відсутньою.

ВИСНОВОК

Магістерську кваліфікаційну роботу було присвячено розвитку і аналізу застосованості спеціальних методів обробки результатів нерівноточних вимірів, дослідженню та порівняльному аналізу особливостей та можливостей отримання високої точності результатів нерівноточних вимірювань напруги змінного струму. Досягнення мети дослідження отримано за допомогою кількох екземплярів однотипних засобів вимірювань, опрацьованих методами середнього зваженого та IF&PA.

У ході виконання роботи вирішено усі поставлені задачі дослідження.

Проведено підбір і аналіз сучасних інформаційних джерел щодо проблеми, що досліджувалося, а саме стандартизованих методів у галузі обробки результатів нерівноточних вимірів. Результати аналізу сучасного стану проблеми на можливі напрями її вирішення наведено у розділі 1 даної роботи.

У експериментальній частині роботи було проведено вимірювання напруги змінного струму за допомогою п'яти цифрових вольтметрів В7-38М у трьох точках діапазону на межі 8 В. Результати експериментальних досліджень було опрацьовано за допомогою різних методів.

Для опрацьовування результатів експериментальних досліджень було застосовано метод середнього зваженого та метод IF&PA з оцінюванням точності.

В роботі було проведено порівняльний аналіз результатів, отриманих вказаними різними методами.

У дослідженні біло показано і обгрунтовано високу ефективність застосування методу IF&PA для обробки нерівноточних вимірювань і підтверджено її доцільність, а також обгрунтовано і вироблено науково-практичні рекомендації із застосування методу IF&PA для забезпечення

високої точності вимірювань при вирішенні практичних завдань в умовах виробництва.

