О некоторых вопросах аппроксимации непрерывных функций на всей вещественной оси (I)

Н. И. Ахиезер

Аппроксимация непрерывной функции многочленами предполагает конечность интервала, на котором функция рассматривается. Аппроксимация тригонометрическими суммами предполагает периодичность аппроксимируемой функции. Если же функция задана на всей оси и не имеет периода, то в качестве аппроксимирующих функций могут быть использованы рациональные дроби или целые трансцендентные функции экспоненциального типа (сокращённо — ц. ф. э. т.). Напомним, что целую функцию $f(z)$ называют ц. ф. э. т., и притом с показателем σ, если

$$\overline{\lim_{|z|\to\infty}} \frac{\log [f(z)]}{|z|} = \sigma.$$

Академик С. Н. Бернштейн (1), который более двадцати лет тому назад впервые поставил вопрос об аппроксимации с помощью ц. ф. э. т., называет эти функции целыми функциями конечной степени. В последнее время С. Н. Бернштейн (2) опубликовал ряд заметок в ДАН относительно наилучшей аппроксимации на всей оси данной функции при помощи ц. ф. э. т. с показателем, не превосходящим данного числа. Этот вопрос трактуется также в моей, находящейся в печати монографии (3).

В одном из своих сообщений С. Н. Бернштейн находит асимптотическое при $T\to\infty$ значение погрешности $E_T[f(x)]$ наилучшего приближения с помощью ц. ф. э. т. с показателем $\leqslant T$ аналитической функции $f(x)$, имеющей полюсы в точках $\pm ic$ $(c>0)$ и вещественной на вещественной оси. А именно, он доказывает, что

$$E_T\left[\frac{\alpha+\beta x}{x^2+c^2}\right]=\frac{e^{-Tc}}{2c^2}\sqrt{\alpha^2+c^2\beta^2} \tag{1}$$

$$E_T\left[\frac{\alpha+\beta x}{(x^2+c^2)^n}\right]\sim\frac{T^{n-1}e^{-Tc}}{2^n(n-1)!\,c^{n+1}}\sqrt{\alpha^2+c^2\beta^2} \tag{2}$$

$$(n=2,\ 3,\ 4,\ldots).$$

Настоящая заметка также посвящена этим соотношениям. Я даю новое доказательство, которое, как мне кажется, не лишено интереса.

Обозначим через G_T совокупность всех ц. ф. э. т. с показателем $\leqslant T$. Я докажу, что при любом $T>0$ и любом натуральном n

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\left|\frac{A}{(x-ic)^n}+\frac{\bar{A}}{(x+ic)^n}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k+b_k x}{(x^2+c^2)^k}-\varphi(x)\right|\geqslant$$

$$\geqslant\frac{|A|}{2^{n-1}c^n}e^{-Tc},\tag{3}$$

где $\varphi(x)$ пробегает G_T, а a_k, b_k — совокупность всех вещественных чисел, причем знак = имеет место только в том случае, когда

$$\frac{A}{(x-ic)^n}+\frac{\bar{A}}{(x+ic)^n}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k+b_k x}{(x^2+c^2)^k}-\varphi(x)=$$

$$=\frac{L}{2}\left\{e^{-iTx-i\delta}\left(\frac{x+ic}{x-ic}\right)^n+e^{iTx+i\delta}\left(\frac{x-ic}{x+ic}\right)^n\right\}\equiv y,$$

где L — положительный, а δ — вещественный параметр (они легко определяются через n, A, c).

Из этого результата немедленно следует (1). Покажем прежде всего, что и асимптотическое равенство (2) является следствием указанного факта.

С этой целью составим выражение:

$$\theta=\frac{1}{2}e^{-iTx}\sum_{k=1}^{n}L_k e^{-i\delta_k}\left(\frac{x+ic}{x-ic}\right)^k,$$

где L_k — положительные, а δ_k — вещественные параметры. Определим эти параметры так, чтобы

$$\theta=\frac{A}{(x-ic)^n}+\Phi(x),$$

где $\Phi(x)$ — целая функция.

Для этого мы должны решить следующую систему уравнений:

$$\frac{1}{2}e^{cT}L_n\, e^{-i\delta_k}(2ic)^n=A,$$

$$\sum_{k=r}^{n}L_k e^{-i\delta_k}\frac{1}{(k-r)!}\frac{d^{k-r}}{dx^{k-r}}\left[e^{-iTx}(x+ic)^k\right]\Bigg|_{x=ic}=0$$

$$(r=n-1,\ n-2,\ldots,\ 1).$$

Если мы положим

$$X_k=L_k e^{-i\delta_k}(2ic)^k(-iT)^k\qquad(k=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

то наша система примет вид:

$$X_n=2Ae^{-cT}(-iT)^n,$$

$$\sum_{k=r}^{n}\left\{1+\varepsilon_k^{(r)}\right\}\frac{1}{(k-r)!}X_k=0 \qquad (r=n-1,\ n-2,\ldots,\ 1),$$

где $\varepsilon_k^{(r)}=0\left(\frac{1}{T}\right)$, когда $T\to\infty$.

Решение этой системы, как легко убедиться, имеет вид:

$$X_k=\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}\left\{1+0\left(\frac{1}{T}\right)\right\}X_n. \qquad (k=1,\ 2,\ldots\ n-1).$$

Поэтому

$$L_k=\frac{|A|}{2^{k-1}c^k}\,\frac{T^{n-k}}{(n-k)!}\,e^{-cT}\left\{1+0\left(\frac{1}{T}\right)\right\} \quad (k=1,\ 2,\ldots,\ n-1)$$

$$L_n=\frac{|A|}{2^{n-1}c^n}\,e^{-cT}. \tag{4}$$

Полагая

$$\frac{L_k}{2}\left\{e^{-iTx-i\delta_k}\left(\frac{x+ic}{x-ic}\right)^k+e^{iTx+i\delta_k}\left(\frac{x-ic}{x+ic}\right)^k\right\}=$$

$$=\frac{A_k}{(x-ic)^k}+\frac{\overline{A}_k}{(x+ic)^k}-\sum_{r=1}^{k}\frac{\alpha_r^{(k)}+\beta_r^{(k)}x}{(x^2+c^2)^r}-\psi_k(x)=$$

$$=f_k(x)-\psi_k(x) \qquad (k=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

причем $A_n=A$, можем написать, что

$$\frac{A}{(x-ic)^n}+\frac{\overline{A}}{(x+ic)^n}-f_1(x)=\sum_{k=2}^{n}f_k(x),$$

откуда

$$\left|E_T\left[\frac{A}{(x-ic)^n}+\frac{\overline{A}}{(x+ic)^n}\right]-E_T\left[f_1(x)\right]\right|\leqslant\sum_{k=2}^{n}E_T\left[f_k(x)\right].$$

Так как

$$E_T\left[f_k(x)\right]=L_k \qquad (k=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

[illegible] в силу (4)

$$E_T\left[\frac{A}{(x-ic)^n}+\frac{\overline{A}}{(x+ic)^n}\right]\sim\frac{|A|}{c}\,\frac{T^{n-1}}{(n-1)!}\,e^{-cT},$$

эквивалентно (2).

Переходим к доказательству неравенства (3). Так как для функции y

$$\max_{-\infty<x<\infty} |y| = L = \frac{|A|}{2^{n-1}c^n} e^{-cT},$$

то остается доказать, что, если $z \neq y$,

$$z = \frac{A}{(x-ic)^n} + \frac{\bar{A}}{(x+ic)^n} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k x + \beta_k}{(x^2+c^2)^k} - \psi(x),$$

где

$$\psi(x) \in G_T \quad \text{и}$$

$$M = \sup_{-\infty<x<\infty} |z|,$$

то

$$M > L.$$

Возьмем множество E всех тех точек ξ верхней половины плоскости x, которые являются критическими точками для функции

$$\sqrt{z^2 - M^2}.$$

В каждой конечной части полуплоскости таких точек ξ будет конечное число. Каждая точка $\xi \in E$ является началом одной или нескольких дуг λ, на которых $z(x)$ вещественна и удовлетворяет неравенству

$$-M \leqslant z(x) \leqslant M.$$

Другим концом каждой из указанных дуг будет либо снова некоторая точка множества E, либо точка, лежащая на границе области $I_x > 0$.

Разрежем верхнюю полуплоскость вдоль дуг λ. Тогда она распадётся на $m \geqslant 1$ областей, одна из которых (назовем её D) будет содержать точку ic. В области D функция

$$\frac{z + \sqrt{z^2 - M^2}}{M} = g(x),$$

где радикал определён так, что $g(ic) = \infty$ однозначна. Далее, при приближении к каждой конечной части границы области D модуль функции $g(x)$ равномерно стремится к единице.

Рассмотрим функцию

$$h(x) = e^{iTx}\left(\frac{x-ic}{x+ic}\right)^n g(x),$$

которая в области D регулярна. Её модуль равномерно стремится к пределу $\leqslant 1$, когда x приближается к любой конечной части границы области D. С другой стороны, если бесконечно удалённая точка является граничной точкой для области D, то в некоторой (принадлежащей D) окрестности этой точки во всяком случае

$$|h(x)| < C,$$

где C — некоторая константа. Действительно, в окрестности бесконечно удалённой точки

$$|g(x)| \leqslant A + B|\psi(x)|,$$

где A, B — некоторые константы. А так как $\psi(x) \in \mathfrak{S}_T$ и ограничена на вещественной оси, то

$$|g(x)| \leqslant A + B_1 e^{Tx''} \qquad (x = x' + ix'',\ x'' > 0)$$

и, значит,

$$|h(x)| \leqslant e^{-Tx''}(A + B_1 e^{Tx''}) = Ae^{-Tx''} + B_1.$$

Теперь применим принцип максимума. В силу этого принципа всюду в D

$$|h(x)| \leqslant 1$$

и, если знак = имеет место в одной внутренней точке, то

$$h(x) \equiv e^{i\alpha}.$$

Беря точку ic, получим поэтому, что

$$\frac{e^{-Tc}\,2\,|A|}{M\,(2c)^n} < 1$$

или

$$\frac{L}{M} < 1,$$

что и требовалось доказать.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Н. Бернштейн. Le problème de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe réel et l'une de ses applications. Bull. Soc. math. de France, t. 52, p. 399—410.

2. С. Н. Бернштейн. О наилучшем приближении непрерывных функций на всей вещественной оси при помощи целых функций данной степени. ДАН, т. 51, №№ 5, 7; т. 52, № 7; т. 54, №№ 2, 6.

3. Н. И. Ахиезер. Лекции по теории аппроксимации. (Фундаментально переработанное издание небольшой монографии, вышедшей в Харькове в 1940 г.).