

K-14038
17265849

K-14038

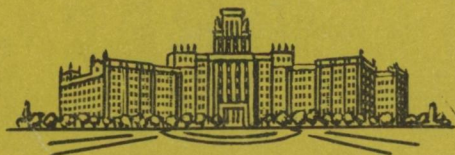
ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА



№ 67

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Выпуск 36

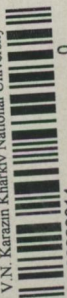


ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

1971

75 коп.

V.N. Karazin Kharkiv National University



00289614

0

МИНИСТЕРСТВО
ВЫШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР

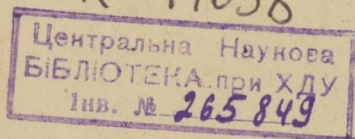
ВЕСТНИК ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 67

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

ВЫПУСК 36

K-14038



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ХАРЬКОВСКОГО ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
Харьков 1971

В сборник включены работы, посвященные вопросам общей теории дифференциальных уравнений, теории инвариантных операторных узлов, теории позиционных оперативов, прикладным задачам, связанным со стохастическими дифференциальными уравнениями, и построению некоторого алгоритма, относящегося к развитию популяций.

Редакционная коллегия: член-корр. АН УССР *Н. И. Ахиезер* (ответственный редактор), акад. *В. А. Марченко*, акад. *А. В. Погорелов*, доц. *А. А. Янцевич* (ответственный секретарь).

Адрес редакционной коллегии: г. Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, университет.

О полноте системы решений Флоке линейных дифференциальных уравнений первого порядка с запаздываниями, кратными периоду коэффициентов

В. П. Гуларий, Н. А. Кулеско, В. И. Мацаев,
Ю. А. Палант

Решениями Флоке линейного дифференциального уравнения с периодическими коэффициентами называются решения, являющиеся собственными и присоединенными функциями оператора сдвига на наименьший общий период коэффициентов.

Мы указываем достаточные условия полноты системы решений Флоке уравнения с запаздываниями, кратными периоду коэффициентов в пространстве всех решений этого уравнения в равномерной метрике на любом конечном интервале. При этом используется метод, изложенный в [1—3].

Теорема. Пусть ω -периодические коэффициенты уравнения

$$y(t) = \sum_{k=0}^n p_k(t) y(t - k\omega) \quad (1)$$

удовлетворяют условиям

- 1) $p_k(t) \in L[0, \omega]$ ($k = 0, 1, \dots, n$),
- 2) $p_n(t) \geq 0$ (≤ 0), на любом интервале $p_n(t) > 0$ (< 0) на множестве положительной меры. Тогда система решений Флоке уравнения (1) полна в пространстве всех решений этого уравнения на $(0, \infty)$ в топологии равномерной сходимости на каждом компактном множестве.

Доказательство. Если решение $y(t)$ уравнения (1) является собственной функцией оператора сдвига, т. е.

$$y(t - \omega) = \mu y(t), \quad (2)$$

то оно удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$y'(t) = \sum_{k=0}^n \mu^k p_k(t) y(t)$$

и, следовательно, имеет вид

$$y(t) = \exp \sum_{k=0}^n \mu^k \int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi.$$

Из (2) вытекает, что μ должно удовлетворять уравнению

$$D(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \mu \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \mu^k \bar{p}_k \right\} - 1 = 0. \quad (3)$$

Здесь

$$\bar{p}_k = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} p_k(\xi) d\xi.$$

Если $D(\mu)$ имеет r -кратный корень μ_j , то существует цепочка из r решений Флоке уравнения (1), являющихся собственной функцией и присоединенными к ней функциями оператора сдвига, принадлежащими собственному значению μ_j . При этом наибольшая кратность корня функции $D(\mu)$ ограничена числом, зависящим от n . Чтобы не затруднять изложения, мы ограничимся случаем простого спектра.

Семейство функций

$$y(t, \mu) = \exp \sum_{k=0}^n \mu^k \int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi$$

включает систему решений Флоке при $\mu = \mu_j$, где μ_j — корни функции $D(\mu)$.

Рассмотрим произвольный линейный функционал в пространстве непрерывных на $[t_0, t_0 + n\omega]$ функций

$$F[f] = \int_{t_0}^{t_0+n\omega} f(t) d\sigma(t). \quad (4)$$

Здесь t_0 — точка, в которой существуют

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} p_n(\xi) d\xi}{\Delta t} \neq 0; \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} p_k(\xi) d\xi}{\Delta t} \neq \infty \quad (5)$$

(эти условия выполняются на плотном множестве), $\sigma(t)$ — функция ограниченной вариации, непрерывная слева в каждой точке интервала $(t_0, t_0 + n\omega)$. Пусть функционал (4) равен нулю на всех решениях Флоке. Тогда

$$\begin{aligned} K(\mu) &= \mu^{n-1} F[y(t, \mu)] = \mu^{n-1} \int_{t_0}^{t_0+n\omega} \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \mu^k \int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi \right\} d\sigma(t) = \\ &= \mu^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_0+j\omega}^{t_0+(j+1)\omega} \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \mu^k \int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi \right\} d\sigma(t) = \\ &= \mu^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \exp \left\{ j\omega \sum_{k=0}^n \mu^k \bar{p}_k \right\} \int_{t_0}^{t_0+\omega} \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \mu^k \int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi \right\} d\sigma(t + j\omega) = \end{aligned}$$

целая функция порядка не выше n , имеющая среди своих корней все корни $D(\mu)$. Представим $K(\mu)$ в виде

$$K(\mu) = D(\mu) \Psi(\mu) + \Phi(\mu),$$

где

$$\Phi(\mu) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu^{n-1-j} \int_{t_0}^{t_0+\omega} \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \mu^k \int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi \right\} d\sigma(t + j\omega),$$

$\Psi(\mu)$ — целая функция. $\Phi(\mu)$ среди своих корней имеет все корни $D(\mu)$. Поэтому $F(\mu) = \frac{\Phi(\mu)}{D(\mu)}$ — целая функция не выше

n -го порядка. Оценим ее рост на лучах $\mu = \rho e^{\frac{is\pi}{2n}}$ ($s = 0, 1, \dots, 4n-1$). Для этого докажем следующую лемму:

Лемма. Пусть функции $b_k(t)$ удовлетворяют условиям $b_k(t) \in L_{[A, B]}$, существуют

$$\frac{d}{dt} \int_t^B b_k(\xi) d\xi \Big|_{t=B} \neq \infty \quad (k = 0, \dots, n),$$

$$\frac{d}{dt} \int_t^B b_n(\xi) d\xi \Big|_{t=B} > 0,$$

$\gamma(t)$ — функция ограниченной вариации на $[A, B]$, тогда на лучах $\arg \mu = \frac{2\pi m}{n}$

$$а) I(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \int_A^B \exp \left\{ - \sum_{k=0}^n \mu^k \int_t^B b_k(\xi) d\xi \right\} d\gamma(t) = 0(1);$$

б) если сверх того $\text{var } \gamma(t)$ имеет производную в точке B , то

$$\int_A^B \exp \left\{ - \sum_{k=0}^n \mu^k \int_t^B b_k(\xi) d\xi \right\} d\gamma(t) = 0 \left(\frac{|\ln |\mu||}{|\mu|^n} \right), \quad |\mu| \rightarrow +\infty.$$

Доказательство. Пусть $\mu = \rho e^{\frac{2\pi im}{n}}$;

$$а) |I(\mu)| \leq \int_A^B \exp \left\{ -\rho^n \int_t^B b_n(\xi) d\xi - \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \cos \frac{2\pi mk}{n} \int_t^B b_k(\xi) d\xi \right\} \times$$

$$\times |d\gamma(t)| = \int_A^B \exp \left\{ -\rho^n \int_t^B b_n(\xi) d\xi \left[1 + \sum_{k=0}^{n-1} \rho^{k-n} \cos \frac{2\pi mk}{n} \times \right. \right.$$

$$\times \left[\frac{\int_t^B b_k(\xi) d\xi}{\int_t^B b_n(\xi) d\xi} \right] \Bigg\} |d\gamma(t)| \leq \\ \leq \int_A^B \exp \left\{ -\frac{1}{2} \rho^n \int_t^B b_n(\xi) d\xi \right\} |d\gamma(t)| = 0(1);$$

б) пусть t_p определяется из условия $\int_{B-t_p}^B b_n(\xi) d\xi = \frac{2n \ln \rho}{\rho^n}$ (при достаточно большом ρ). Разобьем $I(\mu)$ на два интеграла:

$$I\left(\rho e^{\frac{2\pi i m}{n}}\right) = \int_A^{B-t_p} \exp \left\{ -\rho^n \int_t^B b_n(\xi) d\xi - \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \cos \frac{2\pi m k}{n} \int_t^B b_k(\xi) d\xi \right\} \times \\ \times d\gamma(t) + \int_{B-t_p}^B \exp \left\{ -\rho^n \int_t^B b_n(\xi) d\xi - \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \cos \frac{2\pi m k}{n} \times \right. \\ \left. \times \int_t^B b_k(\xi) d\xi \right\} d\gamma(t);$$

$$\left| I\left(\rho e^{\frac{2\pi i m}{n}}\right) \right| \leq C \exp \left\{ -\frac{1}{2} \rho^n \int_{B-t_p}^B b_n(\xi) d\xi \right\} + \\ + C \operatorname{var}_{B-t_p < t < B} \gamma(t) \leq \frac{C}{\rho^n} + C t_p = 0\left(\frac{\ln \rho}{\rho^n}\right),$$

так как

$$t_p = 0\left(\frac{\ln \rho}{\rho^n}\right),$$

что и завершает доказательство леммы.

Перейдем к оценке функции $F(\mu)$. По условию, функция $p_n(t)$ не меняет знака. Пусть, например, $p_n(t) \geq 0$ (случай $p_n(t) \leq 0$ рассматривается аналогично),

1) $s = 4m$;

$$\Phi\left(\rho e^{\frac{is\pi}{2n}}\right) = \Phi\left(\rho e^{\frac{2\pi i m}{n}}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{n-1-j} e^{\frac{2\pi i m(n-1-j)}{n}} \times \\ \times \int_{t_0}^{t_0+\omega} \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \rho^k e^{\frac{2\pi i k m}{n}} \int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi \right\} d\sigma(t + j\omega) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{n-1-j} e^{\frac{2\pi i m(n-1-j)}{n}} \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \rho^k e^{\frac{2\pi i k m}{n}} \omega \bar{\rho}_k \right\} \times \\ \times \int_{t_0}^{t_0+\omega} \exp \left\{ - \sum_{k=0}^n \rho^k e^{\frac{2\pi i k m}{n}} \int_t^{t_0+\omega} \rho_k(\xi) d\xi \right\} d\sigma(t+j\omega).$$

Из леммы имеем

$$\left| \Phi \left(\rho e^{\frac{2\pi i m}{n}} \right) \right| = 0 (\rho^{n-1}) \exp \left\{ \rho^n \omega \bar{\rho}_n + \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \omega \bar{\rho}_k \cos \frac{2\pi m k}{n} \right\},$$

$$(\rho \rightarrow +\infty)$$

$$\left| D \left(\rho e^{\frac{2\pi i m}{n}} \right) \right| \approx \rho \exp \left\{ \rho^n \omega \bar{\rho}_n + \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k \omega \bar{\rho}_k \cos \frac{2\pi m k}{n} \right\}.$$

Следовательно,

$$\left| F \left(\rho e^{\frac{2\pi i m}{n}} \right) \right| = 0 (\rho^{n-2}) \quad (\rho \rightarrow +\infty),$$

$$2) \ s = 4m + 2;$$

$$\Phi \left(\rho e^{\frac{i(2m+1)\pi}{n}} \right) = \sum_{j=0}^{n-1} \rho^{n-1-j} e^{\frac{i(2m+1)(n-1-j)\pi}{n}} \int_{t_0}^{t_0+\omega} \exp \left\{ - \rho^n \int_t^t \rho_n(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{n-1} \rho^k e^{\frac{i(2m+1)k\pi}{n}} \int_{t_0}^t \rho_k(\xi) d\xi \right\} d\sigma(t+j\omega),$$

т. е.

$$\left| \Phi \left(\rho e^{\frac{i(2m+1)\pi}{n}} \right) \right| = 0 (\rho^{n-1}), \quad \rho \rightarrow +\infty,$$

$$D \left(\rho e^{\frac{i(2m+1)\pi}{n}} \right) \rightarrow -1, \quad \rho \rightarrow +\infty.$$

Поэтому

$$\left| F \left(\rho e^{\frac{i(2m+1)\pi}{n}} \right) \right| = 0 (\rho^{n-1}), \quad \rho \rightarrow +\infty.$$

$$3) \ s = 2m + 1;$$

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left| F \left(\rho e^{\frac{i(2m+1)\pi}{2n}} \right) \right|}{\rho^n} \leq \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\left| \ln \left| \Phi \left(\rho e^{\frac{i(2m+1)\pi}{2n}} \right) \right| \right|}{\rho^n} + \\ + \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\left| \ln \left| D \left(\rho e^{\frac{i(2m+1)\pi}{2n}} \right) \right| \right|}{\rho^n} \leq 2 \lim_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\rho^{n-1}}{\rho^n} = 0.$$

Применяя принцип Фрагмена — Линделефа к функции $F(\mu)$, $\mu = re^{i\theta}$ в углах $\frac{m\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{(m+1)\pi}{n}$ ($m = 0, 1, \dots, 2n-1$), находим, что в каждом из этих углов функция $F(\mu)$ растет не быстрее полинома, так как она растет не быстрее полинома на сторонах этих углов и ее индикатор на лучах $\theta = \frac{(2m+1)\pi}{n}$ не превышает нуля. Так как $|F(\mu)| = O(\mu^{n-2})$ при $\mu \rightarrow +\infty$, то

$$F(\mu) \equiv \sum_{k=0}^{n-2} c_k \mu^k.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Phi(\mu) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mu^{n-1-j} \int_{t_0}^{t_0+\omega} \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \mu^k \int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi \right\} d\sigma(t+j\omega) \equiv \\ &\equiv \sum_{j=0}^{n-2} c_j \mu^j \left\{ \mu \exp \left[\omega \sum_{k=0}^n \mu^k \bar{p}_k \right] - 1 \right\}. \end{aligned}$$

Перенормировав $\sigma(t)$ в точках $k\omega$ ($k = 1, \dots, n-1$), получим

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(\mu) &= \sum_{j=0}^{n-1} \mu^{n-1-j} \int_{t_0}^{t_0+\omega} \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \mu^k \int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi \right\} d\tilde{\sigma}(t+j\omega) = \\ &= \Phi(\mu) - \sum_{j=0}^{n-2} c_j \mu^j \left\{ \mu \exp \left[\omega \sum_{k=0}^n \mu^k \bar{p}_k \right] - 1 \right\} \equiv 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Установим, что отсюда следует $\tilde{\sigma}(t+j\omega) = \text{const}$. Для этого достаточно доказать, что

$$\sum_{j=0}^{n-1} \mu^{n-1-j} \int_{t_0}^{\alpha} \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \mu^k \int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi \right\} d\tilde{\sigma}(t+j\omega) = 0$$

для любого α [$\alpha \in (t_0, t_0 + \omega)$].

Предположим сначала, что в точке α существуют конечные производные функций $\int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi$, $\text{var } \sigma(t+j\omega)$ и $\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t p_n(\xi) d\xi|_{t=\alpha} \neq 0$ (эти условия выполняются на плотном множестве).

Изучим функцию $f_\alpha(\mu)$

$$f_\alpha(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \mu^{n-1-j} \int_{t_0}^{\alpha} \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \mu^k \int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi \right\} d\tilde{\sigma}(t+j\omega). \quad (7)$$

Используя (6), имеем

$$f_\alpha(\mu) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \mu^{n-1-j} \int_{t_0+\omega}^{\alpha} \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \mu^k \int_{t_0}^t p_k(\xi) d\xi \right\} d\tilde{\sigma}(t+j\omega), \quad (8)$$

$f_\alpha(\mu)$ — целая функция не выше n -го порядка. Оценим ее на лучах $\theta_s = \frac{s\pi}{2n}$ ($s = 0, 1, \dots, 4n - 1$). Тогда, по лемме, используя представление (7), имеем

$$\left| f_\alpha \left(\rho e^{\frac{2\pi i m}{n}} \right) \right| = O \left(\frac{\ln \rho}{\rho} \right),$$

а учитывая представление (8), —

$$\left| f_\alpha \left(\rho e^{\frac{(2m+1)i\pi}{n}} \right) \right| = O \left(\frac{\ln \rho}{\rho} \right).$$

На лучах $\theta = \frac{\pi(2m+1)}{2n}$

$$\overline{\lim}_{\rho \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f_\alpha(\rho e^{i\theta})|}{\rho^n} \leq 0.$$

Применяя принцип Фрагмена — Линделефа к функции $f_\alpha(\mu)$ в каждом из углов $\frac{m\pi}{n} \leq \theta \leq \frac{(m+1)\pi}{n}$ ($m = 0, 1, \dots, 2n - 1$), получаем, что $f_\alpha(\mu)$ ограничена во всей плоскости, следовательно, по теореме Лиувилля, это константа, но так как $f_\alpha(\mu) \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow +\infty$, то

$$f_\alpha(\mu) = \sum_{j=0}^{n-1} \mu^{n-j-1} \int_{t_0}^{\alpha} \exp \left\{ \sum_{k=0}^n \mu^k \int_a^t p_k(\xi) d\xi \right\} d\tilde{\sigma}(t + j\omega) \equiv 0. \quad (9)$$

Отсюда

$$f_\alpha(0) = \int_{t_0}^{\alpha} d\tilde{\sigma}(t + (n-1)\omega) = 0$$

на плотном множестве значений α , т. е. $\tilde{\sigma}(t + (n-1)\omega) = \text{const.}$ Деля (9) на μ и полагая $\mu = 0$ достаточное количество раз, получим, что

$$\int_{t_0}^{\alpha} d\tilde{\sigma}(t + j\omega) = 0 \quad (j = 0, 1, \dots, n-1),$$

т. е. линейный функционал, аннулирующийся на всех решениях Флоке, равен нулю тождественно. Отсюда следует, что система решений Флоке уравнения (1) полна в пространстве $C_{[t_0, t_0+n\omega]}$, т. е. всякую непрерывную функцию можно с любой точностью равномерно приблизить линейной комбинацией решений Флоке. Так как условия, наложенные на коэффициенты уравнения, гарантируют существование, единственность и непрерывную зависимость решения от начальной функции, то произвольное решение уравнения можно с любой точностью приблизить линейной комбинацией решений Флоке на любом сегменте $[t_0, T]$ ($t_0 > T$).

Это завершает доказательство теоремы, ибо всякий компакт из $(0, \infty)$ можно погрузить в $[t_0, T]$, где в точке t_0 выполнено условие (5).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, 1956.
2. Н. А. Кулеско, Б. Я. Левин. К теории Флоке для дифференциальных уравнений с отклонениями, кратными периоду коэффициентов. Материалы Второй Всесоюзной межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Черновцы, 1968, стр. 89—90.
3. Н. А. Кулеско. О полноте системы решений Флоке уравнений нейтрального типа. «Матем. заметки», 3, № 3, 1968, стр. 297—306.

БЕЗУСЛОВНО КОРРЕКТНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ

В. М. Борок

Рассмотрим решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + Q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t) = 0,$$

$$x \in R^m, \quad t \in [0, T] \quad (1)$$

при краевых условиях

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(x, T) = u_m(x), \quad x \in R^m. \quad (2)$$

Здесь $P(s)$ и $Q(s)$ — полиномы относительно $s_1, \dots, s_m$ с постоянными коэффициентами, $u_0(x)$ и $u_m(x)$ — заданные функции.

Задачу (1)—(2) будем называть безусловно корректной, если существует такое число $l \geq 0$, что при любых заданных функциях $u_0(x)$ и $u_m(x)$, обладающих непрерывными производными до порядка l , задача имеет одно и только одно решение $u(x, t)$, и это решение непрерывно зависит от краевых функций $u_0(x)$ и $u_m(x)$ в следующем смысле: если последовательности $u_{0k}(x)$ и $u_{mk}(x)$ при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю равномерно на любом компакте в R^m вместе со всеми своими производными до порядка l , то соответствующая последовательность решений $u_k(x, t)$ при каждом $t \in [0, T]$ также равномерно на любом компакте в R^m стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$.

Целью настоящей статьи является установление критерия (в терминах полиномов $P(s)$ и $Q(s)$) того, что задача (1)—(2) является безусловно корректной.

Теорема*. Для того, чтобы задача (1)—(2) была безусловно корректна, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (1) имело вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^m A_k \frac{\partial}{\partial x_k} + B \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{k=1}^m A_k \frac{\partial}{\partial x_k} + C \right) u(x, t) = 0, \quad (3)$$

где A_i , $i = 1, \dots, m$ — произвольные вещественные, а B и C — комплексные постоянные, $T(B - C) \neq 2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Доказательство. Необходимость. В [2] введено понятие определителя $\Delta(s)$ краевой задачи в бесконечном слое $R^m \times [0, T]$ для системы линейных уравнений в частных производных и, в зависимости от многообразия нулей $\Delta(s)$, установлены классы единственности решения такой задачи. В частности, показано, что если $\Delta(s)$ имеет нули, то краевая задача при нулевых краевых условиях имеет ненулевые решения. Таким образом, в случае безусловно корректной задачи (1)—(2) ее определитель $\Delta(s)$ нигде не обращается в нуль, поскольку однородная безусловно корректная задача имеет лишь решение $u(x, t) \equiv 0$. Как следует из данного в [2] определения, определитель $\Delta(s)$ краевой задачи (1)—(2) имеет вид

$$\Delta(s) = \begin{cases} \exp \left\{ -\frac{T}{2} P(-is) \right\} \frac{\text{sh} [T \sqrt{D(s)}]}{\sqrt{D(s)}}, & \text{если } D(s) \neq 0 \\ T \exp \left\{ -\frac{T}{2} P(-is) \right\}, & \text{если } D(s) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где $D(s) \equiv \frac{1}{4} P^2(-is) - Q(-is)$.

Из (4) видно, что если при всех значениях s $\Delta(s) \neq 0$, то

$$D(s) \equiv D = \text{const} \neq -k^2 \pi^2 T^{-2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Тогда из определения $D(s)$ получаем $Q(s) \equiv \frac{1}{4} P^2(s) - D$, и, следовательно, (1) имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) + \sqrt{D} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) - \sqrt{D} \right) u(x, t) = 0. \quad (1')$$

Приведенный порядок [3] уравнения (1') совпадает, очевидно, со степенью p_0 полинома $P(s)$ по совокупности переменных. Докажем, что $p_0 \leq 1$.

Обозначим

$$Q^0(s, t) = \exp \left\{ -\frac{t}{2} P(is) \right\} \frac{\text{sh} [(T-t) \sqrt{D}]}{\text{sh} [T \sqrt{D}]}; \quad (6)$$

$$Q^T(s, t) = \exp \left\{ \frac{T-t}{2} P(is) \right\} \frac{\text{sh} [t \sqrt{D}]}{\text{sh} [T \sqrt{D}]} \quad (6')$$

* Этот результат был анонсирован в [1].

(при $D = 0$ следует отношения в правых частях (6) и (6') заменить соответственно на $\frac{T-t}{T}$ и $\frac{t}{T}$).

Покажем, что в наших предположениях при любом $t \in [0, T]$ существуют постоянные $C_1 > 0$ и $C_2 > 0$ такие, что при всех $\sigma \in R^m$ справедлива оценка

$$|Q^0(\sigma, t)| \leq C_1(1 + |\sigma|)^{c_2}. \quad (7)$$

Допуская противное, при некотором $t_0 \in [0, T]$ и любом $k \geq 0$ найдем $\sigma_k \in R^m$ такое, что

$$|Q^0(\sigma_k, t_0)| \geq k(1 + |\sigma_k|)^k. \quad (8)$$

Положим $u_{0k}(x) = \varepsilon_k \exp\{i(\sigma_k, x)\}$, $\varepsilon_k = \frac{1}{k(1 + |\sigma_k|)^k}$, $u_{Tk}(x) \equiv 0$.

Очевидно, последовательности $u_{0k}(x)$ и $u_{Tk}(x)$ при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю равномерно на любом компакте в R^m ; то же верно и для их производных любого фиксированного порядка. Решение $u_k(x, t)$ соответствующей задачи (1)–(2) имеет вид

$$u_k(x, t) = Q^0(\sigma_k, t) u_{0k}(x).$$

Из (8) следует, что $|u_k(x, t_0)| \geq 1$, что противоречит условию теоремы. Тем самым (7) установлено. Аналогично доказывается, что при любом $t \in [0, T]$ существуют постоянные c_1 и c_2 такие, что

$$|Q^T(\sigma, t)| \leq c_1(1 + |\sigma|)^{c_2}, \quad \sigma \in R^m. \quad (7')$$

Оценки (7) и (7') показывают, что функции $Q^0(\sigma, t)$ и $Q^T(\sigma, t)$, рассматриваемые как обобщенные, например, над основным пространством $S([4])$, при каждом фиксированном $t \in [0, T]$ являются преобразованием Фурье (обобщенных) функций $G_0(x, t)$ и $G_T(x, t)$, причем

$$G_0(x, t) = T_0\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) g_0(x, t),$$

$$G_T(x, t) = T_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right) g_1(x, t),$$

где $T_0\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ и $T_1\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$ — некоторые (вообще говоря, зависящие от t) полиномы от операторов дифференцирования, $g_0(x, t)$ и $g_1(x, t)$ — непрерывные функции от x .

Покажем, что $g_0(x, t)$ и $g_1(x, t)$ — финитные функции по x . Допуская, что $g_0(x, t)$ при $t = t_0 \in [0, T]$ не финитна, найдем последовательность x_k , $|x_k| \rightarrow \infty$, $g_0(x_k, t_0) \neq 0$. Построим последовательность $\psi_k(x)$ следующим образом: $\psi_k(x)$ — обладающая непрерывными производными до порядка M финитная функция

с носителем внутри единичного шара с центром в точке — x_k и такая, что

$$\int g_0(-x, t_0) T_0^* \left(-\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial x_m} \right) \psi_k(x) dx = 1, \quad (9)$$

где $T_0^* \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m} \right)$ — формально сопряженное дифференциальное выражение.

Ряд $\sum_1^\infty D^{(j)} \psi_k(x)$, очевидно, при $|j| \leq M$ сходится равномерно на любом компакте в R^m . Пусть

$$\hat{u}_0(x) = \sum_1^\infty \psi_k(x), \quad u_{0j}(x) = \sum_{j+1}^\infty \psi_k(x).$$

Функции $u_{0j}(x)$ обладают производными до порядка M и вместе с этими производными при $j \rightarrow \infty$ стремятся к нулю равномерно на любом компакте в R^m . Пусть $u_j(x, t)$ — решение уравнения (1) при краевых условиях $u_0(x) = u_{0j}(x)$, $u_T(x) \equiv 0$. Если M достаточно велико, то, по условию, $u_j(x, t)$ равномерно на любом компакте в R^m стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$ (при любом $t \in [0, T]$). Но, очевидно,

$$u_j(x, t) = u(x, t) - \sum_1^j \hat{u}_k(x, t),$$

где $\hat{u}_k(x, t)$ — решение уравнения (1) при краевых условиях $u_0(x) = \psi_k(x)$, $u_T(x) \equiv 0$, а $u(x, t)$ — решение того же уравнения при $u_0(x) = \hat{u}_0(x)$, $u_T(x) \equiv 0$. Если $F\{\cdot\}$ означает преобразование Фурье, то, как легко видеть,

$$F\{\hat{u}_k(x, t)\} = Q^0(\sigma, t) F\{\psi_k(x)\},$$

откуда

$$\hat{u}_k(x, t) = \int g_0(x - \xi, t) T_0^* \left(-\frac{\partial}{\partial \xi_1}, \dots, -\frac{\partial}{\partial \xi_m} \right) \psi_k(\xi) d\xi. \quad (10)$$

Из (9) и (10) видно, что $\hat{u}_k(0, t_0) = 1$ и потому $|u_j(0, t_0)| \rightarrow \infty$, что невозможно. Итак, $g_0(x, t)$ — финитная функция. Аналогично, $g_1(x, t)$ финитна. Но тогда $Q^0(s, t)$ и $Q^T(s, t)$ — целые функции не выше первого порядка роста, т. е. $p_0 \leq 1$. Итак,

$$\frac{1}{2} P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \equiv \sum_{k=1}^m A_k \frac{\partial}{\partial x_k} + A_0. \quad (11)$$

Теперь из (6) имеем

$$Q^0(s, t) = q_0(t) \exp \left\{ -it \sum_{k=1}^m A_k s_k \right\},$$

откуда, в силу оценки (7), следует, что все числа A_k , $k = 1, \dots, m$ вещественны.

Подставляя (11) в (1'), приходим к (3), где $B = A_0 + \sqrt{D}$, $C = A_0 - \sqrt{D}$. Условие (5) равносильно тому, что $T(B - C) \neq \neq 2k\pi i$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, что и заканчивает доказательство первой половины теоремы.

Достаточность. Нетрудно проверить, что краевая задача (3)—(2) имеет лишь решение при $B \neq C$:

$$u(x, t) = [e^{-BT} - e^{-CT}]^{-1} \{ [e^{-BT-Ct} - e^{-CT-Bt}] u_0(x_1 - A_1 t, \dots, x_m - A_m t) + [e^{-Bt} - e^{-Ct}] u_T(x_1 + A_1(T - t), \dots, x_m + A_m(T - t)) \};$$

при $B = C$:

$$u(x, t) = \frac{T-t}{T} e^{-Ct} u_0(x_1 - A_1 t, \dots, x_m - A_m t) + \frac{t}{T} e^{C(T-t)} u_T(x_1 + A_1(T - t), \dots, x_m + A_m(T - t)).$$

Эти формулы дают возможность непосредственно проверить безусловную корректность рассматриваемой задачи. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что, как видно из доказательства, уравнение (1) имеет вид (3) и в более слабом предположении, чем безусловная корректность. А именно, в условиях (2) и в определении безусловной корректности задачи (1)—(2) можно одну из краевых функций ($u_0(x)$ или $u_T(x)$) заменить тождественным нулем.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Борок. Классы корректной разрешимости краевой задачи в бесконечном слое. «Докл. АН СССР», 183, 6, 1968.
2. В. М. Борок. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений. Матем. сб., 79 (121), 2, 1969.
3. В. М. Борок. Приведение линейной системы уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к системе нормального типа. «Докл. АН СССР», 115 (1), 1957.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. Обобщенные функции и действия над ними, М., 1958.

К ТЕОРЕМЕ СУШКЕВИЧА—РИСА. II*

Л. М. Глушкин

Серия работ автора [1—7] посвящена изучению позиционных операторов, не содержащих собственных идеалов. В частности,

* Первая часть работы опубликована в «Вестнике ХГУ, серия механико-математическая» вып. 35, 1970.

в [1] изучались c -простые π -оперативы — аналог вполне простых полугрупп. Показано, что всякий c -простой π -оператив S является ассоциативом, альтернативом или оперативом Риса над абелевой группой. S имеет вид

$$S = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma, \quad A_\gamma = \bigcup_{i \in I_\gamma, \lambda \in \Lambda_\gamma} (G_0, i\lambda), \quad (34)$$

где $G_0 = GU\{0\}$ — группа с нулем.

Настоящая статья является продолжением работы [1]. В § 4, 5 и 7 описано строение каждого из указанных трех типов оперативов. В § 6 строение c -простого p -оператива в какой-то мере сводится к изучению c -простых π -оперативов. Некоторые результаты исследования сформулированы в заметке [6]. Опушенные здесь определения приведены в [1].

§ 4. Ассоциатив

4.1. Ассоциатив G^n называется n -группой, если он не содержит отличных от G^n левых или правых идеалов [2, 3, 10, 11]. Пусть $G = (G, \cdot)$ — некоторая (бинарная) группа, a — произвольный элемент из G , ψ — автоморфизм группы G такой, что $\psi a = a$, $\psi^{n-1} = \lambda a^{-1}$, где λ_a — внутренний автоморфизм группы $(G, \cdot)$, порожденный элементом $a: \lambda_a x = a^{-1} \cdot x \cdot a$ для всякого $x \in G$. Множество G относительно действия

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = x_1 \cdot \psi x_2 \cdot \psi^2 x_3 \cdot \dots \cdot \psi^{n-2} x_{n-1} \cdot a \cdot x_n \quad (35)$$

является, как нетрудно проверить, n -группой. Обозначим эту n -группу через $G^n = \langle G, \cdot, a, \psi \rangle$. Всякая n -группа изоморфна некоторой n -группе $\langle G, \cdot, a, \psi \rangle$ [2, 3, 10, 11].

Пусть $G^n = \langle G, \cdot, a, \psi \rangle$ и $F^n = \langle F, *, b, \varphi \rangle$ — две n -группы, k — элемент из F , η — изоморфизм группы $(G, \cdot)$ на $(F, *)$ такой, что $\eta a = \left(\prod_{j=2}^{n-1} \varphi^{j-2} k \right) \cdot b \cdot k$, $\varphi = \lambda_{\varphi k} \eta \psi \eta^{-1} **$. Отображение $f = f_{k, \eta}$

$$f(x) = k \cdot \eta(x)$$

является изоморфизмом n -группы G^n на F^n [3]; всякий изоморфизм n -группы G^n на F^n является одним из отображений $f_{k, \eta}$.

Ассоциатив $G_0^n = G^n \cup \{0\}$, где G^n — n -группа, а 0 — нуль, назовем n -группой с нулем (ср. с п. 1.7).

4.2. Пусть $\Gamma = \{1, 2, \dots, t\}$; $B = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma \times \Lambda_\gamma$; $G_0 = GU\{0\}$ — группа с нулем (п. 1.7); $G^{l+1} = \langle G, \cdot, a, \psi \rangle$ — $(l+1)$ -группа; $n = lt + 1$; $S = G \circ B$ — множество типа (34); $P = (p_{\lambda i})$ — регулярная ΛI -матрица над полугруппой $G_0 = GU\{0\}$ (см. п. 1.6,

* Т. е. действие в группе G обозначается через $x \cdot y$.

** $\prod_{i=s}^t z_i = z_s z_{s+1} \dots z_t$.

1.7), для которой из $p_{\lambda i} \neq 0$, $\lambda \in \Lambda_\gamma$, следует $i \in I_{\gamma'}$, где $\gamma' = \gamma + 1$ либо $\gamma = t$, $\gamma' = 1$.

На множестве S определим n -арную операцию: если $y_i = (x_j, i_j x_j)$ — произвольные элементы из S , то

$$P_{j=1}^n y_j = (z_1 + z_2 + \dots + z_l + z_{l+1}, i_1 x_n),$$

где при $y_1 \in A_k$

$$z_1 = \prod_{j=1}^{t-k+1} (x_j \cdot p_{x_j i_{j+1}}), \quad z_{l+1} = \left\{ \prod_{j=n-k}^{n-1} (x_j \cdot p_{x_j i_{j+1}}) \right\} \cdot x_n,$$

$$z_v = \prod_{j=t\nu-k+2}^{t(v+1)-k+1} (x_j \cdot p_{x_j i_{j+1}}) \quad (2 \leq v \leq l).$$

Обозначим полученный таким образом оператив через $S = S(G^{l+1}, B, p_{\lambda i})$.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что оператив $S(G^{l+1}, B, p_{\lambda i})$ является ассоциативом. Из п. 1.7 следует, что он c -прост.

Теорема. *Всякий c -простой ассоциатив с нулем изоморфен некоторому оперативу $S(G^{l+1}, B, p_{\lambda i})$.*

Доказательство теоремы дано ниже в п. 4.4.

4.2.1. Действие в ассоциативе S п. 4.2 можно записать, не используя понятия n -группы. Пусть ψ и a — те же, что и в п. 4.1; α^* — целая часть числа $\frac{1}{t}(\alpha - 2)$. Тогда

$$[P_{j=1}^n y_j] = \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} \psi^{(j+k)^*} (x_j \cdot p_{x_j i_{j+1}}) \right\} \cdot a \cdot x_n,$$

4.3. Если S — c_1 -простой ассоциатив, то в п. 4.2 квазидиagonalь B превращается в декартово произведение $I \times \Lambda$. Тогда $t = 1$, $l = n - 1$; из п. 2.3, 4.1, 4.2 следует, что S имеет вид

$$S = \bigcup_{i \in I, \lambda \in \Lambda} (G_0, i\lambda), \quad (36)$$

а действие в нем определяется формулой

$$P_{j=1}^n (x_j, i_j x_j) = ((x_1 \cdot p_{x_1 i_2}) + (x_2 \cdot p_{x_2 i_3}) + \dots + (x_{n-1} \cdot p_{x_{n-1} i_n}) + x_n, i_1 x_n). \quad (37)$$

Если $p_{x_i} \neq 0$ (напомню, что матрица P регулярна — см. п. 1.7, 4.2), то в силу (37) и п. 4.1 относительно действия в S подмножество (G, ix) является n -группой, изоморфной n -группе G^n , а (G_0, ix) — n -группой с нулем, изоморфной G_0^n .

4.3.1. Из п. 2.3. вытекает, что всякий c -простой ассоциатив без нуля изоморфен подоперативу всех ненулевых элементов некоторого c -простого ассоциатива с нулем.

Если S — c -простой ассоциатив без нуля, то всякое подмножество (G, ix) (см. п. 4.3) является, как нетрудно проверить, n -группой. Из п. 2.3, 4.3 вытекает следующая теорема.

Теорема. *Всякий c -простой ассоциатив без нуля является прямоугольной связкой изоморфных между собой n -групп.*

При $n = 2$ эта теорема доказана А. К. Сушкевичем [8].

4.3.2. Теорема. *Пусть S — ассоциатив, не содержащий отличных от S левых идеалов и содержащий минимальный правый идеал. Тогда $S = G \times I$, где G — n -группа, и для любых $(x_j, i_j) \in S$*

$$(x_1, i_1)(x_2, i_2) \dots (x_n, i_n) = (x_1 + x_2 + \dots + x_n, i_n).$$

Доказательство непосредственно следует из п. 4.2, 4.3, 3.7.1. Нужно лишь ввести обозначения $(x \cdot p_{x,i}, ix_1) = (x, i)$.

Строение таких ассоциативов рассмотрено в работе [9].

4.3.3. c -простой оператив S называется c_2 -простым, если всякий его левый или правый идеал является двусторонним идеалом. Из п. 1.6, 2.2 следует, что всякий c_2 -простой p -оператив имеет вид

$$S = G_0 \circ \Gamma = U_{\Gamma \in \Gamma} (G_0, \gamma), \quad (38)$$

т. е. каждое из множеств I_γ, Λ_γ содержит точно по одному элементу. Иначе говоря, c -простой p -оператив c_2 -прост тогда и только тогда, когда каждый его биидеал [4—6] является двусторонним идеалом. Элементами матриц $p_k(v_k, v'_{k+1})$ c_2 -простого π -оператива в силу п. 3.7.3. можно сделать лишь e и 0 .

Пусть S — произвольный c_2 -простой ассоциатив; $y_j = (x_j, \gamma_j)$ — такие его элементы, что $y_1 \in A_\gamma$ и $y_1 y_2 \dots y_n \neq 0$. Из теоремы п. 4.2 следует, что

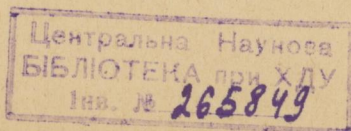
$$[P_{j=1}^n y_j] = \left(\prod_{j=1}^{n-1} \psi^{(j+\gamma)*} x_j \right) \cdot a \cdot x_n.$$

Положим $x_j = e$ при $j \not\equiv 1 \pmod{t}$. Тогда операция в S индуцирует на G_0 $(l+1)$ -арную операцию:

$$\langle x_1 x_{l+1} x_{2l+1} \dots x_n \rangle = [P_{j=1}^n y_j] = \left(\prod_{j=0}^{l-1} \psi^{j-1} x_{jt+1} \right) \cdot a \cdot x_n.$$

Относительно этой операции G_0 является $(l+1)$ -группой с нулем S_γ , изоморфной G_0^{l+1} .

4.4. Перейдем к доказательству теоремы п. 4.2. Пусть S — c -простой ассоциатив. Обозначим, как и в п. 1.3, его различные компоненты через $A_1, A_2, \dots, A_t$, где $n-1 = lt$. Если $A_1 = A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n$ (п. 1.3), то $A_k = A_l$ при $j \equiv k \pmod{t}$ (см. [2, 4]).



Из п. 2.4, 2.11 следует существование таких автоморфизмов ψ_j полугруппы G_0 ($j = 1, 2, \dots, n$; $\psi_{t+1} = \psi$), функций $p_j(x, i)$ и элемента $a \in G$, что при любых $y_j = (x_j, i_j) \in S$, $y_1 \in A_1$

$$[P_{j=1}^n y_j] = x_1 \cdot p_1(x_1, i_2) \cdot \psi_2 x_2 \cdot p_2(x_2, i_3) \dots p_{n-2}(x_{n-2}, i_{n-1}) \cdot \psi_{n-1} x_{n-1} \cdot p_{n-1}(x_{n-1}, i_n) \cdot x_n. \quad (39)$$

В S существуют такие элементы v_j , что $v_1 v_2 \dots v_n \neq 0$, $v_1 \in A_1$, $v_j \in (G, m_j \psi_j)$. Если $u_1 = (e, m_{t+1} \psi_1)$, $u_n = (e, m_n \psi_{t+1})$, $u = u_1 v_2 \dots v_{n-1} u_n$, то в силу (39) $v = u_1 v_2 \dots v_t u v_{t+2} \dots v_{n-1} v_n \neq 0$. Из (3) имеем $v = u_1 v_2 v_3 \dots v_t u_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1} u_n \times \times v_{t+2} \dots v_{n-1} v_n \neq 0$ и, следовательно, $u_1 v_2 v_3 \dots v_t u_1 v_2 \dots v_t v_{t+1} \dots v_{n-t} \neq 0$. Отсюда вытекает существование в S таких элементов $u_j \in (G, m_j \psi_j)$, что

$$u_1 u_2 u_3 \dots u_{n-1} u_n \neq 0, u_{j+t} = u_j \quad (j = 1, 2, \dots, n-t).$$

В силу п. 3.7.2, 3.7.3 можно считать, что

$$\psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_t = \varepsilon, p_j(\psi_j, m_{j+1}) = e, \quad (40)$$

где ε — тождественный автоморфизм группы G , e — ее единица.

Заметим, что $I_\alpha \cap I_\gamma = \emptyset$ и $\Lambda_\alpha \cap \Lambda_\gamma = \emptyset$ при $\alpha \neq \gamma$, $\alpha, \gamma = 1, 2, \dots, t$.

Поскольку для функции $p_k(x, i)$ при $k = 1, 2, \dots, t$ значения аргументов x, i пробегает множества Λ_k, I_{k+1} , а для функции $p_t(x, i)$ — множества Λ_t, I_1 , можно обозначить $p_{xi} = p_k(x, i)$ ($k = 1, 2, \dots, t$). В силу п. 1.3 из $p_{xi} \neq 0$ следует $x \in \Lambda_j, i \in I_{j+1}$ или $x \in \Lambda_i, i \in I_1$. Пусть f_j — такие элементы из S , что $f_1 f_2 \dots f_{k-1} y_1 f_{k+1} \dots f_n \neq 0$. Из (3) имеем

$$f_1 f_2 \dots f_{k-1} (y_1 y_2 \dots y_n) f_{k+1} \dots f_n = f_1 \dots f_{k-1} y_1 \dots y_n f_{k+1} \dots f_n. \quad (41)$$

Отсюда в силу (39), (40), (3) при $k = t+1$, $f_1 \in A_1$ следует:

$$\psi \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} \psi_j x_j \cdot p_j(x_j, i_{j+1}) \right\} \cdot \psi a \cdot \psi x_n = \left\{ \prod_{j=1}^{n-t-1} \psi_{t+j} x_j \cdot p_{t+j}(x_j, i_{j+1}) \right\} \times \\ \times a \cdot \left\{ \prod_{j=n-t}^{n-1} \psi_{t+j+1-n} x_j \cdot p_{t+j+1-n}(x_j, i_{j+1}) \right\}.$$

Фиксируя здесь $x_j = \psi_j$, $i_j = m_j$, $x_j = e$ при всех (или некоторых) j и учитывая (40), получим

$$\psi a = a, p_{j+t}(x, i) = \psi p_j(x, i), \\ \psi \psi_I = \begin{cases} \psi_{j+t} & \text{при } j \leq n-t-1, \\ \lambda_a^{-1} \psi_{j+t+1-n} & \text{при } j \geq n-t. \end{cases}$$

Вместе с (40) это дает $\psi_{st+j} = \psi^s$ ($0 \leq s < l$, $1 \leq j \leq t$), $p_{st+j}(x, i) = \psi^s p_{xi}$, $\psi^l = \lambda_a^{-1}$. Отсюда и из (39) вытекают при $k = 1$ фор-

мулы п. 4.2.1. Для того, чтобы доказать их справедливость при произвольном k , остается лишь воспользоваться соотношениями (40), (41).

4.5. Пусть $S = S(G^{l+1}, B, p_{\lambda i})$ и $S' = S(F^{l+1}, B', p'_{\lambda' i'})$ — два c -простых ассоциатива, $G^{l+1} = \langle G, \cdot, a, \psi \rangle$, $F^{l+1} = \langle F, *, a', \psi' \rangle$; $f_{k, \gamma} = f$ — изоморфизм $(l+1)$ -группы G^{l+1} на F^{l+1} (п. 4.1); $B = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_{\gamma} \times \Lambda_{\gamma}$, $B' = \bigcup_{\gamma' \in \Gamma'} I'_{\gamma'} \times \Lambda'_{\gamma'}$; ω, χ, ξ — взаимно-однозначные отображения множеств Γ, I, Λ на Γ', I', Λ' такие, что из $i' = \chi i \in I'_{\gamma'}$, $\lambda' = \xi \lambda \in \Lambda'_{\delta'}$ всегда следует $\delta' = \gamma' = \omega \gamma$; c_i, d_{λ} — элементы из F . Пусть далее для любых $i \in I, \lambda \in \Lambda$

$$p'_{\lambda' i'} = \begin{cases} d_{\lambda} * \eta p_{\lambda i} * \psi' c_i, & \text{если } \lambda \in \Lambda_t, i \in I_1, \\ d_{\lambda} * p_{\lambda i} * c_i, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В силу п. 3.7, 3.7.1, 4.1 отображение

$$\varphi(x, ix) = (c_i^{-1} * f x * d_x^{-1}, i' x')$$

является изоморфизмом оператива S на S' .

4.5.1. Пусть $S = S(G^{t+1}, B, p_{\lambda i})$, $S_r = S(G^{t+1}, B_r, p_{\lambda i})$ — два c -простых ассоциатива: $B = \bigcup_{k=1}^t I_k \times \Lambda_k$, $B_r = \bigcup_{k=1}^t I_{\gamma_k} \times \Lambda_{\gamma_k}$, где $\gamma_k = k+r$ при $k \leq t-r$ и $\gamma_k = k+r+1-t$ при $k+r > t$. Иначе говоря, ассоциатив S_r получен из S циклической перестановкой компонент A_k . Для всякого $(x, ix) \in A_k$ обозначим $\varphi_r(x, ix) = (x, ix)$, если $k \leq r$, и $\varphi_r(x, ix) = (\psi x, ix)$, если $k > r$. Из п. 3.7.2 и 4.2 следует, что φ_r является изоморфизмом S на S_r .

4.6. Теорема. Всякий изоморфизм c -простого ассоциатива S на ассоциатив S' можно представить в виде суперпозиции изоморфизмов п. 4.5 — 4.5.1.

Доказательство. Пусть $B = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_{\gamma} \times \Lambda_{\gamma}$, $B' = \bigcup_{\gamma' \in \Gamma'} I'_{\gamma'} \times \Lambda'_{\gamma'}$; φ — изоморфизм c -простого ассоциатива $S = S(G^{t+1}, B, p_{\lambda i})$ на $S' = S(F^{t+1}, B', p'_{\lambda' i'})$; e и e' — единицы групп G и F . Множества (G_0, ix) , $R_i, L_{\lambda}, A_{\gamma}$ (см. п. 1.6) являются минимальными биидеалами (соответственно правыми, левыми и двусторонними идеалами) оператива S . Поэтому соответствие $\varphi(G_0, ix) = (F_0, i' x')$ устанавливает взаимно-однозначные отображения ω, γ, ξ множеств $\Gamma, I = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} I_{\gamma}, \Lambda = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \Lambda_{\gamma}$ на $\Gamma', I' = \bigcup_{\gamma' \in \Gamma'} I'_{\gamma'}, \Lambda' = \bigcup_{\gamma' \in \Gamma'} \Lambda'_{\gamma'}$ такие, что из $i' = \chi i \in I'_{\gamma'}$, $\lambda' = \xi \lambda \in \Lambda'_{\delta'}$ всегда следует $\gamma' = \delta' = \omega \gamma$.

С помощью изоморфизма φ_1 п. 4.5.1 можно предварительно преобразовать оператив S' так, чтобы в определении действия п. 4.2 множество I'_1 (где $1' = \omega 1$) играло ту же роль, что и множество I_1 для оператива S .

Из п. 4.2 при $i' = \chi i$, $\lambda' = \xi \lambda$ следует, что $p_{\lambda i} = 0 \leftrightarrow p'_{\lambda' i'} = 0$. Отсюда, из $\omega 1 = 1'$, $|\Gamma| = |\Gamma'|$ и п. 4.2 вытекает $\omega \gamma + 1 = \omega(\gamma + 1)$ при $\gamma = 1, 2, \dots, t-1$.

Для каждого $\alpha = 1, 2, \dots, t$ зафиксируем пару индексов $m_\alpha \in I_\alpha$, $\mu_\alpha \in \Lambda_\alpha$. В силу п. 4.2 существуют элементы $u_i^\alpha \in S$ такие, что при любых $x, y \in G_0$, $i \in I_\alpha$, $\lambda \in \Lambda_\alpha$

$$(x, m_1 \mu_1) u_2^1 \dots u_{n-1}^1 (y, m_1 \mu_1) = (xy, m_1 \mu_1)$$

$$(x, ix) = (e, i \mu_1) u_2^1 \dots u_{n-1}^1 (x, m_1 \mu_1) u_2^1 \dots u_{n-1}^1 (e, m_1 x) \quad (\alpha = 1) \quad (42)$$

$$(x, ix) = (e, i \mu_\alpha) u_2^\alpha \dots u_{n-\alpha-1}^\alpha (x, m_1 \mu_1) u_{n-\alpha+1}^\alpha \dots u_{n-1}^\alpha (e, m_\alpha \lambda) \quad (\alpha > 1).$$

Обозначив $\varphi(x, m_1 \mu_1) = (fx, m' \mu')$, получим из (42) и п. 4.2

$$f(x \cdot y) = fx * a * fy,$$

$$\varphi(x, i\lambda) = (c_i * fx * d_\lambda, i' \lambda').$$

где $a, c_i, d_\lambda \in F$. Отображение $\eta(x) = fx * a$ является, очевидно, изоморфизмом полугруппы G_0 на F_0 .

С помощью конструкции п. 4.5 при $k = e'$ построим изоморфизм φ_2 ассоциатива S' на некоторый ассоциатив $S_1 = S(\bar{G}^{l+1}, B, \bar{p}_{\lambda i})$, определенный на том же множестве $G \cdot B$, что и S ; при этом $\bar{G}^{l+1} = f_{e, \eta} F^{m+1}$, $\bar{p}_{\lambda i} = \eta p'_{\lambda' i'}$, $\varphi_2 A_1' = A_1$. Для изоморфизма $\varphi_3 = \varphi_2^{-1} \varphi$ при любых $x \in G$, $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$

$$\varphi_3(x, i\lambda) = (x, i\lambda). \quad (43)$$

Из п. 4.2 и (42) для любых $x_i \in G$, $(i, \lambda) \in B$ следует

$$x_1 \cdot \bar{p}_{\lambda_1 i_2} \cdot x_2 \cdot \bar{p}_{\lambda_2 i_3} \cdot \dots \cdot x_t \cdot \bar{p}_{\lambda_t i_{t+1}} \cdot \bar{\psi}(x_{t+1} \cdot \bar{p}_{\lambda_{t+1} i_{t+2}} \dots) \dots =$$

$$= x_1 \cdot p_{\lambda_1 i_2} \cdot x_2 \cdot p_{\lambda_2 i_3} \cdot \dots \cdot x_t \cdot p_{\lambda_t i_{t+1}} \cdot \psi(x_{t+1} \cdot p_{\lambda_{t+1} i_{t+2}} \dots) \dots \quad (44)$$

Здесь через $\bar{\psi}$ и ψ обозначены автоморфизмы, описывающие строение $(l+1)$ -групп $\bar{G}^{l+1}$ и G^{l+1} (п. 4.1). Фиксируя в (4.4) поочередно те или иные x_j, i_j, λ_j , получим $\bar{p}_{\lambda i} = k_\gamma^{-1} \cdot p_{\lambda i} \cdot k_\gamma$ при $\lambda \in \Lambda_\gamma$ ($k_1 = e$, $k_\gamma \in G$). Подставим полученные для $\bar{p}_{\lambda i}$ значения в (47) и положим в (44) $x_j = e$, кроме $x_1, x_{t+1}, x_{2t+1} \dots$. Отображение $f_1 y = y \cdot k$ является в силу (42) и п. 4.1 изоморфизмом $(l+1)$ -группы $\bar{G}^{l+1}$ на G^{l+1} . Из (43) имеем тогда

$$x_1 \cdot p_{\lambda_1 i_2} \cdot k_1 \cdot x_2 \cdot k_1^{-1} \cdot p_{\lambda_2 i_3} \cdot k_2 \cdot x_3 \cdot k_2^{-1} \cdot p_{\lambda_3 i_4} \cdot \dots \cdot x_t \cdot k_{t-1} \cdot$$

$$\cdot p_{\lambda_t i_{t+1}} \cdot \psi(x_{t+1} \cdot p_{\lambda_{t+1} i_{t+2}} \cdot k_1 \cdot x_{t+2} \cdot \dots) \cdot \dots = x_1 \cdot p_{\lambda_1 i_2} \cdot$$

$$\cdot x_2 \cdot p_{\lambda_2 i_3} \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_t \cdot p_{\lambda_t i_{t+1}} \cdot \psi(x_{t+1} \cdot p_{\lambda_{t+1} i_{t+2}} \cdot x_{t+2} \cdot \dots) \cdot \dots$$

Отсюда вытекает, что при $d_\lambda = k_\gamma^{-1}$, $c_i = k_\gamma$, $\eta = e$ ($\lambda \in \Lambda_\gamma$, $i \in I_\gamma$, e — тождественный автоморфизм группы G) изоморфизм п. 4.5 отображает S на S_1 .

Теорема доказана.

4.6.1. Если S — c_1 -простой ассоциатив, то связь между $p_{\lambda i}$ и $p'_{\lambda' i'}$ приобретает вид: $p'_{\lambda' i'} = d_{\lambda} * p_{\lambda i} * \psi' c_i$. Из теоремы п. 4.6 следует, что всякий изоморфизм c_1 -простого ассоциатива имеет вид, описанный в п. 4.5.

§ 5. Альтернатив

5.1. Пусть G — группа, e — ее единица; $S = G \circ B$ — множество типа (34) (см. п. 1.6, 4.2); $n = 2lt + 1$; ψ — автоморфизм, ξ — инверсный автоморфизм полугруппы $G_0 = G \cup \{0\}$, a, c, s, g — элементы из G (g — из центра G) такие, что

$$\phi a = a, \quad \psi^l = \lambda_a^{-1} \quad (45)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi^2 = \lambda_c, \quad \xi \psi = \lambda_s \psi^{-1} \xi, \quad \xi a = \left(\prod_{k=1}^{l-1} \psi^k s \right) \cdot a s, \\ \xi (s c^{-1}) = \psi (c s^{-1}), \quad \xi c = c^{-1}; \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

$$\prod_{k=0}^{l-1} \psi^k g = e; \quad t = 1 \rightarrow g = e. \quad (47)$$

Для произвольного индекса $i \in I$ ($\lambda \in \Lambda$) вместо $i \in I_\gamma$ ($\lambda \in \Lambda_\gamma$) будем писать $\gamma = \gamma_i$ ($\gamma = \gamma_\lambda$). Будем считать, что $\Gamma = \{1, 3, 5, \dots, 2t-1\}$. Пусть далее $P = (p_{\lambda i})$ и $Q = (q_{ik})$ — регулярные $\Lambda\Lambda$ -матрица и II -матрица над полугруппой G_0 (см. п. 1.7) такие, что для любых $i, k \in I$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda$ ($h_j = e$ при $j \neq t$; $h_t = e$)

$$\left. \begin{aligned} p_{\lambda i} \neq 0 \rightarrow \gamma_i + \gamma_\lambda \equiv 0 \pmod{2t}, \\ q_{ik} \neq 0 \rightarrow \gamma_i + \gamma_k \equiv 2 \pmod{2t} \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{\lambda i} &= h_{\gamma_i} c \cdot \xi p_{\lambda i} \\ \xi q_{ik} &= \begin{cases} s^{-1} \cdot \psi q_{ki} \cdot c & \text{при } \gamma_i = 1, \\ q_{ki} \cdot c \cdot h_{\gamma_i} & \text{в остальных случаях} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

Определим на S n -арную операцию: для любых $y_i = (x_j, i_j x_j) \in S$, $y_1 \in A_{2k-1}$

$$[P_{j=1}^n y_j] = \left(\left(\prod_{j=1}^n \psi^{(j+k)*} z_j \right) \cdot a \cdot x_n, i_1 x_n \right), \quad (50)$$

где j^* — целая часть числа $\frac{1}{t} (j-2)$,

$$z_j = x_{2j-1} \cdot p_{x_{2j-1} x_{2j}} \cdot \xi x_{2j} \cdot q_{i_{2j} i_{2j+1}} \quad (1 \leq j \leq lt). \quad (51)$$

Относительно операции (50) — (51) множество (34) является альтернативом (в силу п. 1.7 — c -простым).

5.2. Пусть в (34) $\Gamma = \{1, 2, \dots, 2t\}$, ξ — каноническая инволюция полугруппы $G_0: \xi x = x^{-1}$ при $x \neq 0$, $\xi 0 = 0$; матрицы P и Q вместо (45) — (47) удовлетворяют условиям

$$p_{x\lambda} \neq 0 \rightarrow \gamma_x + 1 = \gamma_\lambda, \quad \gamma_x = 1, 3, \dots, 2t-1,$$

$$q_{ik} \neq 0 \rightarrow \gamma_i + 1 \equiv \gamma_k \pmod{2t}, \quad \gamma_i = 2, 4, \dots, 2t.$$

Действия в S при $y_1 \in A_{2k-1}$ будем определять формулами (50) — (51), а при $y_1 \in A_{2k}$ — формулами

$$P_{j=1}^n y_j = (z, i_1 x_n), \quad \xi z = \left\{ \prod_{j=1}^{lt+1} \psi^{(j+k)*} z_j \right\} \cdot a,$$

$$z_1 = \xi x_n \cdot q_{i_n i_{n-1}} \quad z_{lt+1} = \xi x_2 \cdot p_{x_2 x_1} \cdot \xi x_1,$$

$$z_j = x_{n-2j+3} \cdot p_{x_{n-2j+3} x_{n-2j+2}} \cdot \xi x_{n-2j+2} \cdot q_{i_{n-2j+2} i_{n-2j+1}} \quad (1 < j \leq lt).$$

Относительно определенной таким образом операции множество S является c -простым альтернативом. Проверку этого, как и в п. 5.1, мы опустим.

5.3. **Теорема.** *Всякий c -простой альтернатив с нулем изоморфен одному из оперативов п. 5.1, 5.2.*

Доказательство теоремы дано ниже в п. 5.4 — 5.6.

5.4. Из п. 2.2 следует, что всякий c -простой альтернатив с нулем S имеет вид (34). Пусть

$$A_1 = A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_1 \quad (52)$$

(см. п. 1.3). В работе [4] (см. также [6]) показано, что при некотором t , где $n-1 = 2lt$, либо 1) $\Gamma = \{1, 3, \dots, 2t-1\}$ и $A_j = A_k$ в (52) тогда и только тогда, когда $j \equiv k \pmod{2t}$ или $j+k \equiv \pmod{2t}$; либо 2) $\Gamma = \{1, 2, \dots, 2t\}$ и в (52) $A_j = A_k$ тогда и только тогда, когда $j \equiv k \pmod{2t}$.

Пусть далее $y_s = (x_s, i_s x_s)$ — произвольные элементы из S , $s = 1, 2, \dots, n$; $y_1 \in A_1$, $v_{2s-1} = x_{2s-1}$, $v'_{2s} = x_{2s}$, $v_{2s} = i_{2s}$, $v'_{2s+1} = i_{2s+1}$. Из п. 2.4, 2.11 вытекает существование таких функций $p_i(v_j, v'_{j+1})$, автоморфизмов ψ_{2s+1} полугруппы G_0 ($\psi_{2t+1} = \psi$), ее инверсных автоморфизмов ψ_{2s} ($\psi_{2t} = \xi$), элемента $a \in G$, что

$$[P_{j=1}^n y_j] = \left\{ \prod_{j=1}^{n-1} \psi_j x_j \cdot p_i(v_j, v'_{j+1}) \right\} a \cdot x_n. \quad (53)$$

Пусть $\langle j \rangle$ — наименьший положительный вычет числа j по модулю t . Можно считать (см. п. 3.7.2, 4.4), что

$$\begin{aligned} p_{2j-1}(v_{2j-1}, v_{2j}) &= p_{2j}(m_{2j}, m_{2j+1}) = e, \quad v_{2t+j} = \\ &= v_j, \quad m_{2t+j} = m_j, \quad \psi_1 = \psi_3 = \dots = \psi_{2t-1} = \epsilon. \end{aligned} \quad (54)$$

Как и в п. 4.4, для операции в S вместо (53) получим выра-

жение (50), где автоморфизм ψ и элемент a удовлетворяют условиям (45), и

$$z_j = x_{2j-1} \cdot p_{2j-1}(x_{2j-1}, x_{2j}) \cdot \psi_{2(j)} x_{2j} \cdot p_{2j}(i_{2j}, i_{2j+1}). \quad (55)$$

5.5. Предположим сначала, что разложение (52) удовлетворяет условию 1) п. 5.4. Обозначим $\omega_s = (e, m_s \mu_s)$ и выберем какие-либо элементы f_j , для которых $f_1 f_2 \dots f_{2t-1} y_1 f_{2t+1} \dots f_n \neq 0$. Считая, что $y_1 = (e, m_1 x_1)$, $y_{2t+2} = (e, i_{2t+2} \mu_{2t+2})$, $y_s = \omega_s$ при $s > 2t+2$, имеем из (3) $f_1 f_2 \dots f_{2t-1} (y_1 y_2 \dots y_{2t+2} \omega_{2t+3} \dots \omega_{n-1} \omega_1) \times \times f_{2t+1} \dots f_n = f_1 f_2 \dots f_{2t-1} \omega_1 \omega_{n-1} \dots \omega_{2t+3} y_{2t+3} \dots y_2 y_1 f_{2t+1} \dots f_n$ и вследствие (50), (53), (54) при некотором $b \in G$

$$\begin{aligned} & \xi \{ p_1(x_1, x_2) \cdot \psi_2 x_2 \cdot p_2(i_2, i_3) \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{2t-1} \cdot p_{2t-1}(x_{2t-1}, \\ & x_{2t}) \cdot \xi x_{2t} \cdot p_{2t}(i_{2t}, i_{2t+1}) \cdot \psi x_{2t+1} \cdot \psi p_1(x_{2t+1}, x_{2t+2}) \cdot a \} = \\ & = b \cdot \psi^{-1} \{ p_{2t-1}(x_{2t+2}, x_{2t+1}) \cdot \xi x_{2t+1} \cdot p_{2t}(i_{2t+1}, i_{2t}) \} \cdot \\ & \cdot x_{2t} \cdot p_1(x_{2t}, x_{2t-1}) \cdot \psi_2 x_{2t-1} \cdot \dots \cdot \psi_{2t-2} x_3 \cdot p_{2t-2}(i_3, \\ & i_2) \cdot x_2 \cdot p_{2t-1}(x_2, x_1). \end{aligned} \quad (56)$$

Положим в (56) $x_j = e$ при $j \neq k$; $x_j = \mu_j$, $i_j = m_j$. Обозначая $p_{2t-2j+1}(\mu_{2j}, \mu_{2j-1}) = c_{2j-1}$, $p_{2t-2j}(m_{2j+1}, m_{2j}) = c_{2j}$, $s_k = c_k c_{k-1} \dots c_2 c_1$, $s_{2t-1} = c$, $\psi^{-1} c_{2t} \cdot c = s$ и пользуясь (54), (3), получим $\psi_{2j} = \lambda^{-1} s_{2(t-j)} \xi$ и первые три формулы (46).

Положим теперь в (56) 1) $x_j = e$ при $j \neq 2k$; $x_j = \mu_j$ при $j \neq 2k$, $2k-1$; $i_j = m_j$; 2) $x_j = e$ при $j \neq 2k+1$; $i_j = m_j$ при $j \neq 2k$, $2k+1$; $x_j = \mu_j$. Для некоторых g_t из центра группы G получим ($j = \gamma_x$ и соответственно γ_i):

$$\begin{aligned} p_{2(t-j)+1}(\lambda, x) \cdot s_{2j} &= g_{2j-1} \cdot c \cdot \xi \{ p_{2j-1}(x, \lambda) \cdot s_{2(t-j)} \}, \\ s_{2j}^{-1} \cdot p_{2(t-j)}(k, i) &= g_{2j} \cdot \xi \{ s_{2(t-j)}^{-1} \cdot p_{2j}(i, k) \} \cdot c^{-1}, \\ p_{2t}(k, i) &= \psi \{ s \cdot \xi p_{2t}(i, k) \cdot c^{-1} \}. \end{aligned} \quad (57)$$

Третье тождество (57) дает $p_{2t}(m_{2t+1}, m_{2t}) = \psi(sc^{-1})$. Отсюда и из (57), (51) имеем $e = p_{2t}(m_{2t}, m_{2t+1}) = \psi \{ s \cdot \xi p_{2t}(m_{2t+1}, m_{2t}) \cdot c^{-1} \} = \psi \{ s \cdot \xi \psi(sc^{-1}) \cdot c^{-1} \} = \psi \{ \psi^{-1} \xi(sc^{-1}) \cdot sc^{-1} \} = \xi(sc^{-1}) \cdot \psi(sc^{-1})$.

Полагая в (56) $x_j = \mu_{2t-j+1}$ ($j = 1, 2, \dots, 2t$), $i_j = m_{2t-j+1}$ ($j = 2, 3, \dots, 2t-1$), $x_j = e$ ($j = 1, 2, \dots, 2t-1$), получим $c \cdot \xi c = e$. Тем самым доказаны последние две формулы (46).

Преобразование п. 3.7. позволяет заменить в S матрицы p_j и функции ψ_{2j} : $\psi'_{2j} = \xi$ ($j = 1, 2, \dots, t$), $p'_j(v_j, v'_j) = g_j \cdot p_j(v_j, v'_j)$ при $j < t$, $p'_t(v_t, v'_t) = (g_1 g_2 \dots g_{t-1})^{-1} \cdot p_t(v_t, v'_t)$, $p_i = p'_j$ при $j > t$; $p'_{2j-1}(x, \lambda) \cdot s_{2(t-j)} = p_{x\lambda}$; $s_{2(t-j)}^{-1} \cdot p_{2j}(i, k) = q_{ik}$. Как и в п. 4.4, аргументы функций p'_j пробегают попарно не пересекающиеся множества значений и индекс j в них можно опустить).

Пользуясь (57), (55), получим формулы (49), (51), где $g = g_1 g_2 \dots g_t$. Из (3), (49) — (51) следует $\prod_{k=1}^{t-1} \psi^k(sg) \cdot asg = e$; отсюда и из (46) вытекает (47). Формулы (48) указывают на вид разложения (52).

Окончание доказательства (для $y_1 \in A_{2k-1}$ при $k \neq 1$), как и в п. 4.4.

5.6. Пусть теперь разложение (52) удовлетворяет условию 2) п. 5.4. Тогда в силу п. 3.7.2 можно считать, что $\psi_2 = \psi_4 = \dots = \psi_{2t} = \xi$, где ξ — каноническая инволюция полугруппы G_0 . Обозначим $p_{2s-1}^1(x, \lambda) = p_{x\lambda}$, $p_{2s}^1(i, j) = q_{ij}$ при $s \leq t$ (см. п. 5.5). Формулы (45), (50), (51) остаются при этом справедливыми. Из них и из (3) вытекают остальные соотношения п. 5.2.

5.7. Оператив п. 5.2 не может быть c_1 -простым, поскольку число компонент в нем четно. Оператив S п. 5.1 c_1 -прост, если он имеет вид (36). Из п. 5.4 вытекает

Теорема. *Всякий c_1 -простой альтернатив имеет вид (36). Для любых его элементов $y_i = (x_i, i; x_i)$*

$$[P_{j=1}^n y_j] = \left\{ \prod_{j=1}^l \psi^{j-1}(x_{2j-1} \cdot p_{x_{2j-1}x_{2j}} \xi x_{2j} \cdot q_{i_{2j}i_{2j+1}}) \right\} \cdot a \cdot x_{2n},$$

где $n = 2l + 1$, ψ — автоморфизм. ξ — инверсный автоморфизм группы G , удовлетворяющие условиям (45) — (46). Матрицы $P = (p_{x\lambda})$ и $Q = (q_{ik})$ удовлетворяют при любых $x, \lambda \in \Lambda$, $i, k \in I$ и $d = sc^{-1}$ условиям

$$p_{x\lambda} = c \cdot \xi p_{x\lambda}, \quad q_{ki} = \psi(d \cdot \xi^{-1} q_{ik}).$$

Обозначим через A_{ix} наименьший подоператив c_1 -простого альтернатива S такой, что $A_{ix}^n \neq \{0\}$. Если $p_{xx} = 0$ или $q_{ii} = 0$, то A_{ix} является объединением двух или четырех минимальных биидеалов $(G_0, j\lambda)$ оператива S . Если $p_{xx} \neq 0$ и $q_{ii} \neq 0$, то $A_{ix} = (G, ix)$. В этом случае в силу 5.4 можно считать, что $c = s = e$. Тогда ξ является инволюцией группы G , т. е. $\xi^2 = e$ (ср. с [3], [6]).

5.7.1. Как и в § 2 и 4, нетрудно показать, что всякий c -простой альтернатив S без нуля является подоперативом всех ненулевых элементов некоторого c_1 -простого альтернатива с нулем. Для такого оператива S все (G, ix) являются изоморфными друг другу альтернативами без собственных левых или правых идеалов.

Изоморфизмы c -простых альтернативов мы здесь рассматривать не будем. Это делается так же, как в п. 4.5 — 4.6 (и в § 3 статьи [3]).

5.8. Если $n = 2t + 1$, то в оперативах п. 5.1, 5.2 ψ — тождественный автоморфизм группы G , $a = e$. Кроме того, в оперативе п. 5.1 тождество (51) и последнее условие (50) дают $g =$

$= s = e$. Для матриц Q, P , вместо (53) при любых $i, k \in I, \lambda, \lambda \in \Lambda$ имеем

$$\xi q_{ik} = q_{kl} \cdot c, \quad \xi p_{\lambda\lambda} = c^{-1} \cdot p_{\lambda\lambda}.$$

Для полугруд эти соотношения получены в работе [12].

5.9. Если альтернатив S c_2 -прост (п. 4.3.3.), то он имеет вид (38). Элементами матриц P и Q могут быть теперь лишь e и 0 ; поэтому для c_2 -простого альтернатива п. 5.1 $s = c = e$. Условие (50) принимает вид

$$\xi^2 = e, \quad \xi\psi = \psi^{-1}\xi, \quad \xi a = a.$$

Если $y_k = (x_k, \gamma_k)$ — такие элементы из c_2 -простого альтернатива S , что $y_1 y_2 \dots y_n \neq 0$, $y_1 \in A_a$, то из (54) — (55) следует

$$[P_{k=1}^n y_k] = \prod_{k=1}^l \{\psi^{(\alpha+k)*}(x_{2k-1} \cdot \xi x_{2k})\} \cdot a \cdot x_n.$$

Полагая здесь, как и в п. 4.3.3, $y_j = (e, \gamma_j)$ для всех $y_j \notin A_k$, получим l изоморфных между собой $(2l+1)$ -альтернативов S_k на множестве $G_0 = G \cup \{0\}$ с операциями

$$\langle x_1 x_2 \dots x_{2l+1} \rangle = \left\{ \prod_{k=1}^l \psi^{k-1}(x_{2k-1} \cdot \xi x_{2k}) \right\} \cdot a \cdot x_{2l+1}.$$

Все ненулевые элементы оперативов S обратимы [2, 3].

§ 6. p -оператив

Пусть S — произвольный c -простой p -оператив. По теореме п. 2.2 S имеет вид (34). Из приведенного ниже примера (п. 6.10) видно, что операция в S , в отличие от π -оперативов (§ 3) не приводится к операциям меньшей арности и функциям двух переменных.

В настоящем параграфе (теоремы п. 6.5, 6.8, 6.8.2, 6.9) выяснено дальнейшее строение c -простых p -оперативов. В значительной части оно сводится к изучению c -простых π -оперативов.

6.1. Всюду в настоящем § $y_j = (x_j, i_j x_j)$ — произвольные элементы из c -простого p -оператива S , $y_1 \in A_a$, где a — фиксированный индекс из Γ ; $m = m_a, e_1, e_a, e, r_j, \tau_j, c_{i_j}, d_{mx}, *$ имеют тот же смысл, что и в п. 2.2 — 2.10.

Пусть $y = (x, ix), y' = (x' i' x'), y'' = (x'', i'' x'')$ — какие-либо элементы из S , k — некоторый индекс из J_n . Будем писать $y = y'(k) y''$, если один из элементов x', x'' (и соответственно $i', i''; x', x''$) равен $x(i, x)$, а второй — $e_1(r_k, \tau_k)$.

Обозначим через J множество всех таких индексов $k \in J_n$ для которых существует функция φ_k^a такая, что

$$[P_{j=1}^n y_j] = [P_{j=1}^n y'_j] * \varphi_k^a x_k * [P_{j=1}^n y''_j], \quad (58)$$

где $y'_k(k) y''_k = (e, i_k x_k)$, $y'_j(k) y''_j = y_j$ при $j \neq k$,

Лемма. $J = J_n$.

Доказательство леммы дано ниже в п. 6.3, 6.4. В них предположение о существовании хотя бы одного индекса $k \in J_n \setminus J$ приведет нас к противоречию.

6.3. Как и в п. 2.4, 2.5, можно считать, что $i_1 = m$, $x_n = \mu$ и

$$z = [P_{j=1}^n y_j] = x_1 * d_{mx_1} y_2 y_3 \dots y_{n-1} c_{in\mu} * x_n. \quad (59)$$

Таким образом, $1 \in J$, $n \in J$. Допустим, что $t = \xi_k r \in J$ при некоторых $k \in J_n \setminus J$, $r \in J_n$ (см. п. 1.3). В силу п. 2.1, 2.2.1 существуют элементы

$$c_j \in S, s \in I \quad (60)$$

($s = i_k$ при $r = 1$), $\delta \in \Lambda$ ($\sigma = x_k$ при $r = n$), взаимно-однозначное отображение φ полугруппы G_0 на себя (тождественное при $r = 1$ или $r = n$) такие, что

$$y_k = c_1 c_2 \dots c_{r-1} y c_{r+1} \dots c_n, y = (\varphi x_k, \sigma). \quad (61)$$

Обозначим $z_{k+r-1} = y$, $z_j = y_j$ при $j < k$; $z_j = y_{j-n+1}$ при $j \geq k+n$; $z_j = c_{j-k+1}$ в остальных случаях; $z_{\rho_k n} = (x, i_x)$, $z'_1 = z_{\rho_k 1} z_{\rho_k 2} \dots z_{\rho_k(n-1)} c_{i\mu}$, $z'_2 = d_{mx} z_{\rho_k(n+1)} \dots z_{\rho_k(2n-1)}$.

Из (2), (59), (60) следует

$$\begin{aligned} y_1 y_2 \dots y_n &= z_1 z_2 \dots z_{k-1} (z_k z_{k+1} \dots z_{k+n-1}) z_{k+n} \dots z_{2n-1} = \\ &= z'_1 * x * z'_2. \end{aligned}$$

Если $\rho_k^{-1}(k+r-1) = n$, то $y = z_{\rho_k n}$; $x = \varphi x_k$; обозначим $\varphi = \psi$, $z'_1 = z'$, $z'_2 = z''$. Если $\rho_k^{-1}(k+r-1) = t < n$, то в силу $t \in j$ и (58) имеем

$$z'_1 = z' * \varphi_i \varphi x_k * z'_2;$$

обозначим $\varphi_i \varphi = \psi$, $z'_3 * z'_2 = z''$; аналогично поступим и при $\rho_k^{-1}(k+r-1) > n$. Во всех случаях

$$y_1 y_2 \dots y_n = z' * \psi x_k * z''.$$

По построению произведений z' , z'' , каждая из переменных x_j, i_j, x_j , за исключением x_k , входит в одно (и только одно) из них точно по одному разу — то ли в виде y_j , то ли в виде c_{mx_j} , $d_{i_j \mu}$. Обозначим $y'_j = (x'_j, i'_j x'_j)$, где $x'_j = x_j$ (соответственно $i'_j = i_j$, $x'_j = x_j$), если переменная x_j (соответственно i_j, x_j) входит

в z' ; в противном случае $x_i = e$ ($i_j = r_j$, $x_i = \tau_j$). Аналогично (по произведению z'') определим элементы $y_i'' = (x_i', i_j'' x_i'')$ и будем писать $z' = z'$ ($y_1', y_2', \dots, y_n'$), $z'' = z''$ ($y_1'', y_2'', \dots, y_n''$), $v_j = (e, r_j \tau_j)$.

Из (61) и п. 2.2 имеем $e_\alpha = e_\alpha * e_\alpha = e_\alpha u_2 \dots u_{n-1} e_\alpha = v' * \phi[u_k] * v''$, где $v' = z'(v_1, v_2, \dots, v_n)$, $v'' = z''(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Следовательно, $v'' \neq 0$. Из п. 2.1 следует, что $v_1 v_2 \dots v_n \neq 0$, а значит, и $\phi e \neq 0$.

Из (61) имеем

$$y_1' y_2' \dots y_n' = z'(y_1', y_2', \dots, y_n') * \phi e * v'',$$

$$y_1'' y_2'' \dots y_n'' = v' * \phi e * z''(y_1'', y_2'', \dots, y_n'')$$

и, обозначая $\phi_k x = (\phi e * v'')^{-1} * \phi x * (v' * \phi e)^{-1}$, получим (58); таким образом, $k \in j$, что противоречит исходному предположению.

6.4. Пусть теперь $\xi_{kjn} \cap j = \emptyset$. Введем следующие обозначения: $T_k = \{k, k+1, \dots, k+n-1\}$; $j^+ = j$, если $j \leq k$; $j^+ = j+n-1$, если $j > k$; C^+ — множество всех индексов $j^+ \in j_{2n-1}$, для которых $j \in C (\subseteq j_n)$; $2J$ — множество всех $j \in j_{2n-1}$ таких, что $\langle j \rangle \in j$ (см. п. 1.3).

Из $\xi_{kjn} \cap j = \emptyset$ следует $\rho_k^{-1} T_k \cap 2j = \emptyset$. Если бы и $\rho_k^{-1} (j_n \setminus j)^+ \cap 2j = \emptyset$, то $\rho_k^{-1} \{j_n \setminus j\}^+ \cup T_k \subseteq j_{2n-1} \setminus 2j$. Но $|(j_n \setminus j)^+ \cup T_k| = 2n - |j| - 1 > 2(n - |j|) = |j_{2n-1} \setminus 2j|$, и это противоречило бы взаимной однозначности отображения ρ_k^{-1} . Следовательно, существует индекс $r \in j_n \setminus j$ такой, что $\rho_k^{-1} r^+ \in 2j$, т. е. $\langle \rho_k^{-1} r^+ \rangle \in j$. Далее, как и в п. 6.3, показываем, что $r \in j$, и снова приходим к противоречию. Таким образом, предположение $j_n \setminus j \neq \emptyset$ неверно.

6.5. Из леммы п. 6.1 следует, что для любых $y_i \in S$ ($y_i \in A_\alpha$)

$$[P_{j=1}^n y_j] = x_1 * p_1 * \varphi_2^\alpha x_{i_2} * p_2 * \varphi_3^\alpha x_{i_3} * p_3 * \dots * \varphi_{n-1}^\alpha x_{i_{n-1}} * p_{n-1} * x_n, \quad (62)$$

где

$$p_s = c_s * y_1^s y_2^s \dots y_n^s, y_k'(k) y_k^2(k) \dots (k) y_k^{n-1} = (e, i_k x_k)$$

(см. п. 6.1), $\varphi_k^\alpha e = e$.

Как и в п. 2.10, можно считать, что все операции $0_\alpha(x, y) = x * y = x \cdot y$ в полугруппе G_0 совпадают между собой.

Введем в S n -арную операцию: для любых $y_i \in S$

$$(y_1 y_{i_2} y_{i_3} \dots y_{i_{n-1}} y_n) = y_1 y_2 \dots y_{n-1} y_n.$$

Полученный таким образом оператив S' называется *подобным* оперативу $S[2, 3]$.

Как и в п. 2.10, 2.11 (см. также п. 4.4, 4.6, 4.7 статьи [3]), можно показать, что все φ_i^α являются автоморфизмами или

инверсными автоморфизмами, а S — ассоциативом, альтернативом или оперативом над абелевой группой (п. 1.2, 1.6).

Нами доказана таким образом следующая

Теорема. *Всякий s -простой p -оператив S либо подобен ассоциативу, либо альтернативу, либо является оперативом над абелевой группой.*

6.6. Пусть S s -простой p -оператив над абелевой группой, $y_j = (x_j, i_j)$ — его произвольные элементы; $v_j = \{i_j, x_j\}$, $v_1 = \{x_1\}$, $v_n = \{i_n\}$. Из (62) имеем

$$[P_{j=1}^n y_j] = x_1 \cdot \psi_2^\alpha x_2 \cdot \psi_3^\alpha x_3 \cdot \dots \cdot \psi_{n-1}^\alpha x_{n-1} \cdot x_n \times \\ \times p(v_1, v_2, \dots, v_n). \quad (63)$$

Обозначим

$$\psi_{n+j-1}^\alpha = \psi_j^\alpha \quad (1 \leq j \leq n-1), \quad F_k = \{1, 2, \dots, k-2, k-1, \dots,$$

$$k+n, k+n+1, \dots, 2n-1\}, \quad v'_k = \{i_k, x_{k+n-1}\},$$

$$p_1 = p(v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v'_k, v_{k+n}, v_{k+n+1}, \dots, v_{2n-1}),$$

$$p_2 = p(v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+n-1}), \quad p_3 = p(v_{\rho k 1}, v_{\rho k 2}, \dots, v_{\rho k n}),$$

$$p_4 = p(v_{\rho k n}, v_{\rho k(n+1)}, \dots, v_{\rho k(2n-1)}).$$

Если $y_1 \in A_\alpha$, $y_k \in A_\gamma$, то из (2) и (63) следует

$$[P_{j=1}^{2n-1} y_j] = \Pi_{j=1}^{k-1} \psi_j^\alpha x_j \cdot \Pi_{j=k+1}^n \psi_j^\alpha x_{j+n-1} \cdot \Pi_{j=k}^{n+k-1} \psi_k^\alpha \psi_{j-k+1}^\gamma x_j \times \\ \times p_1 \cdot \psi_k^\alpha p_2 = \Pi_{j=1}^n \psi_j^\alpha x_{\rho k j} \cdot \Pi_{j=n+1}^{2n-1} \psi_{j-n+1}^\alpha x_{\rho k j} \cdot p_3 \cdot p_4, \quad (64)$$

где $\psi_1^\alpha = \psi_n^\alpha$ — тождественный автоморфизм.

Полагая в (64) все $x_j = e$ и выбирая v_j так, чтобы входящие туда произведения были отличны от нуля, получим

$$p_1 \cdot \psi_k^\alpha p_2 = p_3 \cdot p_4. \quad (65)$$

Отсюда и из (64) при любых $j, k \in J_n$, $\alpha, \gamma \in \Gamma$ ($y_k \in A_\gamma$) вытекает

$$\psi_k^\alpha \psi_j^\gamma = \psi_{\varepsilon kj}^\gamma \quad (j, k \in I_n),$$

$$j \in F_k \rightarrow \psi_j^\alpha = \psi_{\rho kj}^\alpha. \quad (66)$$

Функция p , кроме (65), должна удовлетворять еще одному условию: при любом $k \in J_n$ для всякого v_k найдутся $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_n$ такие, что $p(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$ (иначе оператив S не будет s -простым).

6.7. Пусть $S = U_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ — произвольный s -простой p -оператив, 1 — фиксированный индекс из Γ , $A_1 = A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_1$ (п. 1.3), где A_i — компоненты A_γ (не обязательно различные). В статье

[4] (см. также [6]) показано, что для любых компонент A_j из семейства $\{A_1, A_2, \dots, A_{n-1}\}$

$$A_j A_{j_2} \dots A_{j_n} = \begin{cases} A_j, & \text{если } A_{j_k} = A_{\varepsilon_j k} \text{ при } k \in j_n (A_{\varepsilon_j 1} = A_j), \\ \{0\} & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (67)$$

Таким образом, для каждого $\alpha \in \Gamma$ существует, и притом единственная последовательность $B_\alpha = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ индексов $\beta_j \in \Gamma (\beta_1 = \beta_n = \alpha)$ такая, что $A_\alpha A_{\alpha_2} \dots A_{\alpha_{n-1}} A_{\alpha_n} \neq \{0\}$ в том и только в том случае, когда $\alpha_j = \beta_j$ при $j = 2, 3, \dots, n$.

Определим следующую функцию $\omega(\gamma_j)$ со значениями в G_0 :

$$\omega(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n) = \begin{cases} e, & \text{если } \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} = B_{\gamma_1}, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Относительно операции n -арного умножения подмножеств (п. 1.1) совокупность $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ вместе с $\{0\}$ образует, в силу (67) оператив $\bar{S}$. В статье [4] показано (впрочем, это можно показать и непосредственно, пользуясь (67)), что $\bar{S}$ является p -оперативом, с той же системой подстановок ρ_k , что и для S . Поэтому для любых $\gamma_i \in \Gamma$

$$\omega(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \gamma_{k+n}, \gamma_{k+n+1}, \dots, \gamma_{2n-1}) \cdot \omega(\gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_{k+n-1}) = \omega(\gamma_{\rho_k 1}, \gamma_{\rho_k 2}, \dots, \gamma_{\rho_k n}) \cdot \omega(\gamma_{\rho_k(n+1)}, \dots, \gamma_{\rho_k(2n-1)}).$$

6.8. π -оператив S называется π^* -оперативом [4—6], если $\pi_k \{1, n\} = \{1, n\}$ при любом $k \in I_n$.

Семейство p подстановок ρ_k определяется для данного p -оператива, вообще говоря, не однозначно. Например, для всякого i -простого p -оператива S в работе [4] показано, что, определенный для него в п. 6.7 оператив $\bar{S}$ является π^* -оперативом.

Теорема. Всякий c_2 -простой (п. 4.3.3) p -оператив над абелевой группой является π^* -оперативом, в котором все $\sigma_k = \varepsilon$.

Доказательство. Если $S = U_{\alpha \in \Gamma} G_\alpha - c_2$ -простой p -оператив, то вместо (67), для любых $y_j = (x_j, \gamma_j)$ при $\gamma_1 = \alpha$ имеем

$$[P_{j=1}^n y_j] = x_1 \cdot \psi_2^\alpha x_2 \cdot \psi_3^\alpha x_3 \cdot \dots \cdot \psi_{n-1}^\alpha x_{n-1} \cdot x_n \cdot c_\alpha \times \\ \times \omega(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n), \quad (68)$$

где ω — функция, определенная в п. 6.6, автоморфизмы ψ_k^α подчинены условиям (66) и при $y_i \in A_\gamma$, $P_{j=1}^n y_j \neq 0$

$$\psi_k^\alpha c_\gamma = c_\alpha. \quad (69)$$

Для каждого $k \in j_n$ определим следующую подстановку θ_k множества j_{2n-1} . Если $j \notin T_k$, то $\theta_k j = j$; если $j, j' = \rho_{k'} j \in T_k$ (п. 6.4), $\rho_{k'} j \notin T_k$ при $s = 1, 2, \dots, l-1$, то $\theta_k j = j'$; в остальных случаях

$\theta_k j = \rho_k j$. Пусть далее $p' = \{\theta_k\}_{k=1}^n$. Из п. 6.7 и из (66) — (69) следует, что S является p' -оперативом, а по построению подстановок θ_k — π^* -оперативом, в котором все $\sigma_k = \varepsilon$.

6.8.1. Функцию $\omega(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ можно по теореме п. 3.1 представить в виде произведения функций двух переменных типа $\delta_i(v_j, v_{j+1})$ (п. 3.2) — мы не станем здесь этого делать.

6.8.2. Комбинируя п. 6.5, 6.7, получим теорему:

Теорема. *Всякий c_2 -простой p -оператив либо подобен ассоциативу или альтернативу, либо является π^* -оперативом над абелевой группой.*

Последняя теорема несколько усиливает результат, сформулированный в статье [6] (теорема 3). Описание c_2 -простых π -оперативов дано в п. 4.3.3, 5.9 и ниже в п. 7.1—7.3.

6.9. Пусть $B = U_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma \times A_\gamma$ — квазидиагональ (п. 1.4, 1.5),

$$S = G \circ B = U_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma,$$

$$\tilde{S} = G \circ \Gamma = U_{\gamma \in \Gamma} (G_0, \gamma) —$$

два p -оператива над абелевой группой G . По определению (п. 4.3.3), оператив $\tilde{S}$ c_2 -прост. Для любого $y = (x, ix) \in A_\gamma$ обозначим $\tilde{v} = \{i, x\}$, $\tilde{y} = (x, \gamma)$. Действие в $\tilde{S}$ будем записывать, как и в S , в виде $y_1 y_2 \dots y_n$, к путанице это не приведет.

Назовем S продолжением оператива $\tilde{S}$, если существует функция $\rho = \rho(v_1, v_2, \dots, v_n)$ такая, что для любых $y_i \in S$

$$[y_1 y_2 \dots y_n] = \tilde{y}_1 \tilde{y}_2 \dots \tilde{y}_n \cdot \rho(v_1, v_2, \dots, v_n).$$

Теорема. *Всякий c -простой p -оператив S над абелевой группой является продолжением некоторого c_2 -простого π^* -оператива.*

Доказательство. В силу п. 6.6 действие в S определяется формулой (64). Пусть ω — функция, определенная для оператива S в п. 6.7. Введем на множестве $S = G \circ \Gamma$ n -арную операцию

$$(x_1, \gamma_1) (x_2, \gamma_2) \dots (x_n, \gamma_n) = (x, \alpha),$$

где $\alpha = \gamma_1$ и

$$x = x_1 \cdot \psi_2^{\alpha} x_2 \cdot \psi_3^{\alpha} x_3 \cdot \dots \cdot \psi_{n-1}^{\alpha} x_{n-1} \cdot x_n \cdot \omega(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n).$$

Из п. 6.7, (66) и (69) (при $c_\alpha = e$) следует, что $\tilde{S}$ является p -оперативом с теми же подстановками ρ_k , что и у S . Остается лишь применить теорему п. 6.8.

6.9.1. Если S — c_1 -простой p -оператив над абелевой группой, то $|\Gamma| = 1$. В этом случае оператив $\tilde{S}$ не содержит собственных левых или правых идеалов. Такие оперативы изучены в работах

[3. 4]; они названы там π -коммутативами (см. ниже п. 7. 1). Все их ненулевые элементы обратимы. Из п. 6. 8 вытекает

Теорема. *Всякий c_1 -простой p -оператив над абелевой группой (в частности, всякий c -простой p -оператив без нуля над абелевой группой) является продолжением некоторого π -коммутатива, все ненулевые элементы которого обратимы.*

6. 10. В отличие от π -оперативов, функция p (п. 6. 8), определяющая p -оператив над абелевой группой, вообще говоря, не разложима в произведение функции от двух аргументов. Поэтому (ср. с п. 6. 5, 6. 8. 1) p -оператив над абелевой группой не подобен какому-либо оперативу Риса (п. 1. 7, 3. 1), а следовательно, и π -оперативу.

Приведем пример. Пусть $G = \{1\}$ — единичная группа, $I = \{i, k\}$, $|\Lambda| = 1$, S — кватернарный оператив п. 6. 6, определенный на множестве $G_0 I = \{(1, i), (1, k), 0\}$.

Пусть

$$p(i, i, i) = p(i, k, k) = p(k, i, k) = p(k, k, i) = p(k, k, k) = 1, \quad (70)$$

$$p(i, k, i) = p(i, i, k) = p(k, i, i) = 0, \quad (71)$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 6 & 7 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

($p_1 = p_4 = \varepsilon$). Функция p удовлетворяет условиям п. 6. 6 и, следовательно, S является c -простым p -оперативом, где $p = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$.

Если бы такую функцию p можно было представить в виде $p(i_1, i_2, i_3) = p_1(i_k, i_\varepsilon) \cdot p_2(i_r, i_s)$, из (70) следовало бы $p_1(i_k, i_i) = p_2(i_r, i_s) = 1$, а это противоречило бы (71).

§ 7. π -оператив над абелевой группой

Пусть S произвольный c -простой π -оператив, отличный от ассоциатива или альтернатива. Из п. 2. 11, 3. 1, 3. 8 вытекает, что S является оперативом Риса над абелевой группой (п. 1. 6, 1. 7) и что все $\sigma_k = \varepsilon$. С другой стороны, по теореме п. 6. 8, S является продолжением некоторого c_2 -простого π^* -оператива.

Таким образом, дальнейшее изучение таких оперативов сводится к выяснению строения c_2 -простых π^* -оперативов (п. 7. 1 — 7. 3) и функций $p(v_j)$ — в нашем случае матриц $p_j(v_j, v'_{j+1})$ (п. 7. 4 — 7. 5).

7. 1. Пусть G — абелева группа, Φ — некоторая подгруппа группы ее автоморфизмов; a — элемент из G такой, что $\varphi a = a$ для любого $\varphi \in \Phi$. Построим последовательность $\Psi = \{\psi_j\}_{j=1}^n$ автоморфизмов группы G со свойствами: 1) $\psi_j \in \Phi$ при любом j ; 2) каждый автоморфизм из Φ входит в $\{\psi_j\}_{j=1}^{n-1}$, причем одно и то же число раз; 3) $\psi_1 = \psi_n = \varepsilon$ (ε — единица группы Φ).

Считая, что $\varphi 0 = 0$ для любого $\varphi \in \Phi$, определим на полугруппе $G_0 = G \cup \{0\}$ n -арную операцию: для любых $x_j \in G_0$

$$x_1 x_2 \dots x_n = \prod_{j=1}^n \psi_j x_j \cdot a.$$

Обозначим полученный таким образом оператив через (G_0, n, a, Ψ) ; пусть далее $(G, n, a, \Psi) = (G_0, n, a, \Psi) \setminus \{0\}$.

π -оператив S одновременно c_1 -прост и c_2 -прост тогда и только тогда, когда он не содержит ненулевых односторонних идеалов, отличных от S . Все ненулевые элементы такого оператива S обратимы [2, 3].

π -оператив S называется π -коммутативом, если $x_1 x_2 x_3 \dots x_{n-2} x_{n-1} x_n = x_n x_2 x_3 \dots x_{n-1} x_1$ для любых $x_j \in S$.

Если π -коммутатив S не содержит отличных от S левых или правых идеалов, то S изоморфен некоторому оперативу (G, n, a, Ψ) [2, 3].

7.2. Пусть S — произвольный c_2 -простой π -оператив над абелевой группой G . Из п. 4.3.3, 6.8 следует, что S имеет вид (38) с действием (68). Для любых $\alpha, \gamma \in \Gamma$ обозначим через K_γ^α подмножество j_{n-1} , состоящее из всех таких индексов j , что $\gamma_j = \gamma_\alpha$ в последовательности B_α (п. 6.7). По определению, $1 \in K_\alpha^\alpha$ при любом $\alpha \in \Gamma$.

В каждом классе K_α^α выберем произвольно по одному индексу j_α , $j_1 = 1$. Обозначим $c_1 = a$, $\psi_j^1 = \psi_j$, $\xi_{j_\alpha} = \xi_\alpha$. В силу п. 3.7.2 можно считать, что $\psi_{j_\alpha} = \varepsilon$ при любом $\alpha \in \Gamma$. Из (66), (69) при любых $\alpha \in \Gamma$, $j \in j_n$ следует $c_\alpha = a$, $\psi_j^\alpha = \psi_{\xi_\alpha j}$ и

$$\begin{aligned} \psi_j a &= a, \quad \psi_{\xi_\alpha 1} = \psi_{\xi_\alpha n} = \varepsilon, \\ \bigvee_{k \in K_\gamma^\alpha, \gamma \in \Gamma} \psi_{\xi_\alpha k} \psi_{\xi_\gamma j} &= \psi_{\xi_\alpha \xi_k j}. \end{aligned} \quad (72)$$

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема. Для любых элементов $y_j = (x_j, \alpha_j)$ c_2 -простого π -оператива S над абелевой группой при условиях (72) и $\alpha_1 = \alpha$

$$[P_{j=1}^n y_j] = \prod_{j=1}^n \psi_{\xi_\alpha j} x_j \cdot a \cdot \omega(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n). \quad (73)$$

7.3. В работе [4] показано, что при любых $\alpha, \gamma \in \Gamma$ класс K_γ^α содержит $l = \frac{n-1}{|\Gamma|}$ элементов и

$$k \in K_\gamma^\alpha \rightarrow \xi_k K_\delta^\gamma = K_\delta^\alpha. \quad (74)$$

Для произвольного фиксированного $\alpha \in \Gamma$ обозначим через Ψ_γ^α семейство всех автоморфизмов $\psi_j^\alpha = \psi_{\xi_\alpha j}$, где $j \in K_\gamma^\alpha$; $\Psi_\alpha = \Psi_\alpha^\alpha$. Положим в (73) $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} = B_\alpha$ (п. 6.7), $y_j = (e, \alpha_j)$ при $j \notin K_\alpha^\alpha$. Операция (73) индуцирует на двустороннем идеале (G_0, α) ,

а следовательно, и на полугруппе G_0 $(l+1)$ -арную операцию: если $K_\alpha^a = \{1, j_2, \dots, j_l\}$, $x_{j_s} \in G_0$, то

$$\langle x_1 x_{j_2} \dots x_{j_l} x_n \rangle = [y_1 y_2 \dots y_n] = \prod_{j_a \in K_\alpha^a} \psi_{j_a}^a x_{j_a} \cdot x_n \cdot a.$$

Этот оператив обозначим через S_α (ср. с п. 4.3.3, 5.9). Пусть π^a — семейство подстановок, индуцированных на множестве $K_\alpha^a \cup \{n\}$ подстановками π_k семейства π . В силу (73) S_α является π^a -оперативом над абелевой группой G , одновременно c_1 -простым и c_2 -простым, т. е. оперативом $(G_0, l+1, a, \Psi_\alpha)$ — см. п. 7.1.

Из (68), (74) следует, что при любых $\alpha, \gamma, \delta \in \Gamma$, $\psi_j^a \in \Psi_\gamma^a$

$$\psi_j^a \Psi_\delta^a = \Psi_\delta^a.$$

Полагая здесь $\alpha = 1$, $j = j_\gamma$ (т. е. $\psi_j^a = \varepsilon$), получим $\Psi_\delta^a = \Psi_\delta^1$ при любых $\gamma, \delta \in \Gamma$. (Здесь имеется в виду равенство Ψ_δ^a как семейств, но без учета порядка их членов). Но тогда $\psi_j^a \Psi_\delta^1 = \Psi_\delta^1$ при любых $j \in j_{n-1}$, $\delta \in \Gamma$.

С другой стороны, множество всех автоморфизмов, входящих в $\Psi_\delta^1 = \Psi_\delta$, образует в силу п. 7.1 группу Φ_δ . Из $\psi_j^a \Phi_\delta = \Phi_\delta$ при любых $j \in j_{n-1}$, $\delta \in \Gamma$ следует, что все эти группы совпадают между собой. Каждое семейство Ψ_α является $(l: |\Phi_\alpha|)$ -кратно повторенной группой Φ_α (п. 7.1). Из $\Phi_\alpha = \Phi$ следует, теперь, что семейства Ψ_α , а следовательно, и Ψ_γ^a могут отличаться лишь порядком элементов. Отсюда вытекает теорема (ср. с п. 4.3.3, 5.8).

Теорема. Все π^a -оперативы S_α подобны между собой.

Более точно семейства $\Psi_\gamma^a = \Psi_\gamma^1$ можно выразить через Ψ_1^1 с помощью тождеств (72).

7.4. Перейдем теперь к изучению матриц $p_k(v_k, v'_{k+1})$ для π -оперативов над абелевой группой (п. 1.7, 3.1).

Пусть k — произвольный индекс из j_n . Может случиться, что $p_{k-1} = p_{k-1}(v_{k-1}, \lambda_k)$, $p_k = \delta_k(i_k, v'_{k+1}) \cdot c(v'_{k+1})$ или $p_{k-1} = \delta_{k-1} \times (v_{k-1}, i_k) \cdot c(v_{k-1})$, $p_k = p_k(\lambda_k, v'_{k+1})$ (см. п. 1.7, 3.1). Множество всех таких индексов k обозначим через C_I . Поскольку $\delta_{k-1}(v_{k-1}, i_k) = \delta_{k-1}(v_{k-1}, \lambda_k)$, $\delta_k(i_k, v'_{k+1}) = \delta_k(\lambda_k, v'_{k+1})$, можно считать, что при $k \in C_I$ ни одна из матриц p_j не зависит от i_k . Аналогично определяется множество C_Λ . Через B_{XX} обозначим множества, определенные в п. 3.1.

Лемма. Для любых $j \in j_n$, $k \in j_{n-1}$ ($X = I$ или Λ)

$$j \in C_X \rightarrow \xi_k j \in C_X,$$

$$k \in B_{\Lambda\Lambda} \rightarrow (k \in C_I \leftrightarrow n \in C_I),$$

$$k \in B_{II} \rightarrow (k \in C_\Lambda \leftrightarrow 1 \in C_\Lambda).$$

Доказательство леммы аналогично п. 3.2, 3.3.

7.5. Если матрица p_1 вырождена (п. 3.1), пользуясь преобразованием п. 3.7.1, ее можно привести к виду $p_1 = \delta_1(\lambda_1, v_2) \cdot c(v_2)$, т. е. перевести индекс 1 в множество C_I . Аналогично, если p_{n-1} вырождена, можно считать, что $n-1 \in C_\Delta$.

В силу п. 3.4—3.4.1 для S выполняется одно из следующих условий:

1) $1 \in C_\Delta$ и $n \in C_I$;

2) матрица p_1 имеет вид $p_1 = p_{\lambda\lambda}$ и не вырождена (п. 3.1); $n \in C_I$.

3) $1 \in C_\Delta$; матрица p_{n-1} имеет вид $p_{n-1} = q_{ij}$ и невырождена.

Рассмотрим каждый из этих случаев. В п. 2.1 статьи [3] показано, что для каждого $k \in j_{n-1}$ существует целое положительное число r такое, что $k \in \xi_k^r\{1, n\}$ (п. 1.3).

В случае 1) из п. 7.4 следует, что $j_{n-1} = C_I \cup C_\Delta$. Иначе говоря, при любом $k \in j_{n-1}$ только одна из переменных i_k, λ_k может являться аргументом для p_{k-1} и p_k .

В случае 2) при $k = \xi_k^r(n)$ из п. 7.4 следует $k \in C_I$. Если же $k = \xi_k^r(1)$, то $p_{k-1} = p_{k-1}(x_{k-1}, x_k)$ или $p_k = p_k(x_k, x_{k+1})$; из п. 6.2 снова следует $k \in C_I$.

Таким образом, $C_I = j_n$, и матрицы p_j не зависят от переменных i_k . Заметим, что по лемме п. 3.3 все неразложимые матрицы $p_k(x_k, x_{k+1})$ выражаются через одну матрицу $p_1 = p_{\lambda\lambda}$ с помощью автоморфизмов ψ_k^a .

Аналогично в случае 3) $C_\Delta = j_n$, матрицы p_k не зависят от аргументов x_k, x_{k+1} ; те из них, которые неразложимы, выражаются через одну матрицу $p_{n-1} = q_{ij}$ с помощью автоморфизмов ψ_k^a .

В частности, отсюда вытекает следующая

Теорема. Пусть S π -оператив над абелевой группой. Его матрицы $p_k(v_k, v_{k+1})$ зависят не более чем от $n-1$ переменных $i_2, i_3, \dots, i_n, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

7.6. В заключение мы приведем описание строения c -простых π^* -оперативов (п. 6.8) над абелевой группой, аналогичное результатам § 4—5. Поскольку всякий ассоциатив или альтернатив также является π^* -оперативом, тем самым мы полностью опишем все c -простые π^* -оперативы.

Пусть S — произвольный c -простой π^* -оператив над абелевой группой G . Для S , вместо леммы п. 7.4, справедливы более жесткие соотношения: при любых $k \in j_{n-1}, j \in j_n \setminus \{1\}$

$$k \in C_\Delta \rightarrow 1 \in C_\Delta; j \in C_I \leftrightarrow n \in C_I. \quad (75)$$

Доказательство их аналогично п. 3.2—3.3.

7.6.1. Предположим сначала, что S удовлетворяет условию 1 п. 7.5. Из (75) следует тогда $C_\Delta = j_{n-1}, C_I = j_n \setminus \{1\}$. Как и в п. 7.4, все матрицы p_j можно записать в виде $p_j = \delta_j(x_j, i_{j+1})$. В силу п. 7.2 операция в S имеет вид (73).

7.6.2. Пусть теперь S удовлетворяет условию 2 п. 7.5. Из (75) следует $C_\Delta = \emptyset$, $C_I = j_n \setminus \{1\}$. Обозначив $p_1(x, \lambda) = p_{x\lambda}$ (см. п. 4.4, 5.5), как и в п. 3.3, 4.4, 5.4, получим $p_k^\alpha(x, \lambda) = \psi_k^\alpha p_{x\lambda}$ при любых $x, \lambda \in \Lambda$. Автоморфизмы ψ_k^α определяются, как и в п. 7.2.

Из $C_\Delta = \emptyset$ следует что $n = 2m + 1$ нечетно и для любых $k \in j_n, j \in j_m$ существует $t \in j_m$ такое, что $\xi_k \{2j - 1, 2j\} = \{2t - 1, 2t\}$. Операцию в S можно теперь для любых $y_l = (x_l, i_l x_l) \in A_{\alpha_j}$ ($\alpha_1 = \alpha$) записать в виде

$$[y_1 y_2 \dots y_n] = \prod_{j=1}^n \psi_{\xi_{\alpha j}} x_j \cdot \prod_{j=1}^m \psi_{\xi_{\alpha(2j-1)}} p_{x_{2j-1} x_{2j}} \cdot a,$$

где элемент $a \in G$ определяется, как и в п. 4.4, 5.4, 7.2.

Если $S = U_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, A_1 — какая-нибудь из его компонент и $A_1 = A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_1$, то из п. 1.3 следует при любых $x, \lambda \in \Lambda$

$$p_{x\lambda} \neq 0 \wedge x \in \Lambda_\alpha \rightarrow \lambda \in \Lambda_{\xi_\alpha}.$$

Если существуют такие r, s , что $A_{2r+1} = A_{2s}$, то как и в п. 5.1, «транспонирование» матрицы $P = (p_{x\lambda})$ приведет к соотношениям типа (49).

7.6.3. Наконец, пусть S удовлетворяет условию 3) п. 7.5. Как и в п. 7.6.2, имеем $C_\Delta = j_{n-1}$, $C_I = \emptyset$, $n = 2m + 1$, $\xi_k \{2j, 2j + 1\} = \{2t, 2t + 1\}$ при любых $k \in j_n, j \in j_m$. Обозначив $p_{n-1} \{i, j\} = q_{ij}$, получим

$$q_{ij} \neq 0 \wedge j \in I_\alpha \rightarrow i \in I_{\xi_\alpha(n-1)},$$

$$[y_1 y_2 \dots y_n] = \prod_{j=1}^n \psi_{\xi_\alpha} j x_j \cdot \prod_{j=1}^m \psi_{\xi_\alpha(2j+1)} q_{i_{2j} i_{2j+1}} \cdot a \quad (y_1 \in A_\alpha).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. М. Г л у с к и н. К теореме Сушкевича-Риса. I. Вестник Харьковск. ун-та, серия мех.-матем., вып. 35, 1970.
2. Л. М. Г л у с к и н. О позиционных оперативах. «Докл. АН СССР», 157, № 4, 1964, стр. 767—770.
3. Л. М. Г л у с к и н. Позиционные оперативы. Матем. сб., 68(110), № 3, 1965, стр. 444—472.
4. Л. М. Г л у с к и н. О простых оперативах. Вестник Харьковск. ун-та, серия мех.-матем., вып. 34, 1969, стр. 38—51.
5. Л. М. Г л у с к и н. Минимальные биидеалы оператива. «Изв. вузов СССР», Математика, № 10(77), 1968, стр. 30—41.
6. Л. М. Г л у с к и н. О позиционных оперативах. «Докл. АН СССР», 182, № 5, 1000—1004, 1970.
7. Л. М. Г л у с к и н. Об оперативах Риса. Исследования по алгебре и анализу. Кишинев, 1970.
8. А. К. Су ш к е в и ч. Теория обобщенных групп. ГНТИ, Харьков-Киев, 1937.
9. Б. Л. Т р п е н о в с к и. За некои n -полугрупи што се унии од групи. Билтен Друшт. матем. и физ. СРМ, 16, 1965, стр. 11—17.

10. E. L. Post. Polyadic groups. Trans. Amer. Math. Soc., 48, № 2, 208—350, 1940.

11. M. Hosszu. On the explicit form of n -group operations. Publ. Math., 10, № 1—4, 87—92, 1963.

12. Л. М. Глускин. Вполне простые полугруды. В сб. «Теория полугрупп и ее приложения», вып. 1. Изд-во Саратовск. ун-та, 1965, стр. 179—197.

ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УЗЛЫ

В. К. Дубовой

§ 1. Введение

1. Все рассматриваемые ниже пространства предполагаются конечномерными линейными пространствами над полем комплексных чисел.

Напомним, что пространство называют унитарным, если в нем определена дефинитная метрика.

Говорят, что в пространстве H определена индефинитная метрика, если каждой паре элементов $f, g \in H$ сопоставляется комплексное число (f, g) , которое удовлетворяет следующим требованиям:

- а) $(f, g) = (\overline{g}, f)^*$;
- б) $(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2, g) = \alpha_1 (f_1, g) + \alpha_2 (f_2, g)$;
- в) если для $f \in H$ $(f, g) = 0$ при всех $g \in H$, то $f = 0$;
- г) существуют такие элементы $f_1, f_2 \in H$, что

$$(f_1, f_1) > 0, (f_2, f_2) < 0.$$

Пространство, в котором определена дефинитная или индефинитная метрика будем называть пространством с метрикой**. Если линейный оператор A действует в пространстве с метрикой, то через A^+ будем обозначать оператор, сопряженный к A .

Определение. Пусть H и E — пространства с метрикой. Рассмотрим линейные операторы $A: H \rightarrow H, K: H \rightarrow E$. Совокупность (A, H, K, E) образует операторный узел, если

$$\frac{1}{i} (A - A^+) = K^+ K, \quad (1.1)$$

при этом оператор K^+ сопряжен к K и действует из H в E .

* Отсюда следует, что (f, f) вещественно для всех $f \in H$.

** Исследованию пространств с индефинитной метрикой посвящены работы [6, 7].

Условие узла (1.1) удобно рассматривать как коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{K} & E \\ \frac{1}{i}(A - A^+) & & \downarrow K^+ \\ & & H \end{array}$$

Пространства $H, E, \Delta_{K^+} = K^+E$ называются соответственно внутренним, внешним, каналовым; операторы A, K — основным и каналовым.

Понятие операторного узла было введено М. С. Бродским и М. С. Лившицем*. Операторные узлы играют важную роль в теории несамосопряженных операторов и открытых систем. В ряде задач, связанных с открытыми системами в пространствах H и E , действуют линейные представления некоторой группы, оставляющие соответствующую открытую систему инвариантной. Условие инвариантности открытой системы приводит к понятию инвариантного операторного узла. В настоящей работе вводится понятие инвариантного операторного узла, даются критерии инвариантности операторных узлов, исследуется возможность разложения инвариантного операторного узла на инвариантные, описываются неразложимые инвариантные операторные узлы для случая нормальных представлений.

Построим по данному операторному узлу $\theta = (A, H, K, E)$ функцию комплексного переменного

$$W_\theta(\lambda) = I - iK(A - \lambda I)^{-1}K^+.$$

Определение. Функция $W_\theta(\lambda)$ называется характеристической оператор-функцией (х.о-ф) узла θ .

Она, очевидно, определена и голоморфна на множестве G_A регулярных точек оператора A , а ее значениями являются линейные операторы, действующие в пространстве E .

Узел $\theta = (A, H, K, E)$ называется простым, если линейная оболочка векторов вида $A^n K^+ g$ ($n = 0, 1, 2, \dots, g \in E$) совпадает со всем H .

2. Пусть H — пространство с метрикой и $\tilde{H}$ — подпространство H . Если требование в) выполняется при $f, g \in \tilde{H}$, то $\tilde{H}$ называют невырожденным подпространством. Очевидно, метрика,

* В статье используется форма записи операторного узла, предложенная Э. М. Жмудем.

определенная в H , индуцирует в этом случае некоторую метрику в $\hat{H}$.

Далее, аннулятором подпространства $H_1 \subset H$ называют такое максимальное подпространство $H_2 \subset H$, что при любых $f_i \in H_i$ ($i = 1, 2$), $(f_1, f_2) = 0$. Может случиться, что $H_1 \cap H_2 \neq \{0\}$. Однако, если H_1 — невырожденное подпространство, то $H_1 \cap H_2 = \{0\}$ и $H = H_1 + H_2$. В этом случае H_2 называют ортогональным дополнением к H_1 и пишут $H = H_1 \oplus H_2$.

Пусть A — оператор, действующий в H . Будем говорить, что невырожденное подпространство $\hat{H} \subset H$ приводит A , если $\hat{H}$ и $H \ominus \hat{H}$ (т. е. ортогональное дополнение к $\hat{H}$) инвариантны относительно A .

Оператор U , действующий в пространстве H , будем называть унитарным, если для любых $f, g \in H$ $(Uf, Ug) = (f, g)$.

3. Представление $g \rightarrow T_g$ произвольной группы G в унитарном пространстве назовем *нормальным*, если у любого инвариантного относительно операторов T_g подпространства инвариантным является и ортогональное дополнение. Структуру нормального представления описывает следующее утверждение.

Лемма (1.1). *Представление $g \rightarrow T_g$ в унитарном пространстве нормально тогда и только тогда, когда*

1) *представление $g \rightarrow T_g$ разлагается в ортогональную сумму неприводимых представлений $g \rightarrow T_g^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$):*

$$T_g = T_g^{(1)} \oplus T_g^{(2)} \oplus \dots \oplus T_g^{(n)}, \quad (1.2)$$

2) *эквивалентные представления, входящие в сумму (1.2), унитарно эквивалентны.*

Из леммы (1.1) и известной леммы Шура легко следует

Лемма (1.2) *Если H — унитарное пространство и оператор C , действующий в H , коммутирует с операторами T_g нормального представления $g \rightarrow T_g$, т. е. $T_g C = C T_g$, то также $T_g C^* = C^* T_g$.*

Всюду в дальнейшем рассматриваются только вполне приводимые представления. Нормальное представление, как легко видеть, вполне приводимо.

Укажем некоторые из используемых обозначений:

D_T — область определения оператора T ;

Δ_T — область значений оператора T ;

$\text{Ker } T$ — множество векторов $f \in D_T$, для которых $Tf = 0$.

§ 2. Критерии инвариантности операторных узлов

Пусть G — произвольная группа. Пространство H , в котором задано представление $u: g \rightarrow u_g, g \in G$, будем рассматривать как модуль над G и обозначать через H_u . Будем говорить также, что модуль H_u порожден представлением $g \rightarrow u_g$. Пространство H , в котором задана пара представлений $\tilde{u}: g \rightarrow \tilde{u}_g, u: g \rightarrow u_g, g \in G$, назовем бимодулем над G и обозначим через $H_{\tilde{u}, u}$. В этом случае можно сказать, что бимодуль $H_{\tilde{u}, u}$ порожден

представлениями $g \rightarrow \tilde{u}_g, g \rightarrow u_g$. Таким образом, если $H_{\tilde{u}, u}$ — бимодуль над G , то $H_{\tilde{u}}$ и H_u — модули над G .

Пусть H'_u и $H''_{\tilde{u}}$ — два модуля над G . Будем говорить, что оператор T действует из модуля H'_u в модуль $H''_{\tilde{u}}$, если $D_T = H', \Delta_T \subset H''$ и для всех $g \in G$

$$\tilde{u}_g T = T u_g.$$

В случае, когда $H' = H'' = H$, будем считать, что T действует в бимодуле $H_{\tilde{u}, u}$. Если к тому же $\tilde{u} = u$, то оператор T будем называть действующим в модуле H_u .

Пусть H_u — модуль над G . Подпространство $\tilde{H} \subset H$ инвариантное относительно представления $g \rightarrow u_g$, назовем подмодулем H_u .

Определение. Операторный узел $(A, H_{\tilde{u}, u}, K, E_v)$, где $H_{\tilde{u}, u}$ — бимодуль над G , а E_v — модуль над G , будем называть инвариантным относительно группы G , если A действует в бимодуле $H_{\tilde{u}, u}$, K действует из модуля H_u в модуль E_v , K^+ действует из модуля E_v в модуль $H_{\tilde{u}}$.

Таким образом, узел $(A, H_{\tilde{u}, u}, K, E_v)$ инвариантен относительно группы G в том и только в том случае, когда выполнены соотношения:

$$\tilde{u}_g A = A u_g, \quad (2.1)$$

$$v_g K = K u_g, \quad (2.2)$$

$$\tilde{u}_g K^+ = K^+ v_g. \quad (2.3)$$

Представления $g \rightarrow \tilde{u}_g, g \rightarrow u_g$ будем называть *внутренними* для инвариантного узла $(A, \tilde{H}_{u,u}, K, E_v)$, а представление $g \rightarrow v_g$ — *внешним*. Инвариантный операторный узел назовем *сильно инвариантным*, если $\tilde{u} = u$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма (2.1). Пусть H_u — модуль над G и K — оператор, действующий из пространства H в пространство E . Если $\text{Ker } K$ — подмодуль H_u , то в $\tilde{E} = \Delta_K$ можно определить такое представление $g \rightarrow v_g, g \in G$, что оператор K будет действовать из модуля H_u в модуль $\tilde{E}_v$; при этом представление $g \rightarrow v_g$ определяется единственным образом по модулю H_u и оператору K .

Доказательство. Существует дополнение к $\text{Ker } K$, являющееся подмодулем H_u . Обозначим его через H^c . Пусть K_1 — суждение K на H^c . Представление $g \rightarrow v_g$ в Δ_K определим, положив

$$v_g|_{\Delta_K} = K_1 u_g K_1^{-1}|_{\Delta_K}.$$

Переписав это соотношение в виде $v_g K = K u_g$, убеждаемся в справедливости леммы.

Теорема (2.1). Если $(A, \tilde{H}_{u,u}, K, E_v)$ — инвариантный относительно группы G операторный узел, то

$$A \text{ и } A^+ \text{ действуют в бимодуле } \tilde{H}_{u,u}, \quad (2.4)$$

$$\text{Ker } K \text{ — подмодуль } H_u, \quad (2.5)$$

$$\Delta_{K^+} \text{ — подмодуль } \tilde{H}_u. \quad (2.6)$$

Пусть $(A, \tilde{H}_{u,u}, K, E)$ — операторный узел, $\tilde{H}_{u,u}$ — бимодуль над G и выполняются условия (2.4)–(2.6). Тогда в пространстве H можно определить такое представление $g \rightarrow v_g, g \in G$, что узел $(A, \tilde{H}_{u,u}, K, E_v)$ будет инвариантен относительно группы G .

Доказательство. Если $(A, \tilde{H}_{u,u}, K, E_v)$ — инвариантный относительно группы G узел, то условия (2.5) и (2.6) следуют соответственно из (2.2) и (2.3). Далее из (2.2) следует $K^+ v_g K = K^+ K u_g$. Учитывая (2.3), получим

$$\tilde{u}_g K^+ K = K^+ K u_g. \quad (2.7)$$

Принимая во внимание условие узла (1.1), перепишем (2.7) в виде

$$\tilde{u}_g (A - A^+) = (A - A^+) u_g. \quad (2.8)$$

Из (2.8) и (2.1) следует (2.4). Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь $(A, H_{u,u}, K, E)$ — операторный узел, удовлетворяющий условиям (2.4)–(2.6). Из (2.5) и леммы (2.1) следует, что на Δ_K можно определить представление $g \rightarrow v_g^{(1)}$, $g \in G$, удовлетворяющее условию

$$v_g^{(1)}K = Ku_g. \quad (2.9)$$

Отсюда, замечая, что из (2.4) следует соотношение

$$\tilde{u}_g K + K = K + Ku_g, \quad (2.10)$$

получаем

$$\tilde{u}_g K + K = K + v_g^{(1)}K.$$

Следовательно,

$$\tilde{u}_g K|_{\Delta_K} = K + v_g^{(1)}|_{\Delta_K} K. \quad (2.11)$$

Из (2.10) следует инвариантность Δ_{K+K} относительно $\tilde{u}_g$. Так как $\Delta_{K+K} \subset \Delta_{K+}$ и Δ_{K+} инвариантно относительно $\tilde{u}_g$, то существует подпространство H^c , инвариантное относительно $\tilde{u}_g$ и такое, что $\Delta_{K+} = \Delta_{K+K} + H^c$. Рассмотрим полный прообраз $H^c : (K^+)^{-1}(H^c) = E^c$. Пусть E_0^c — одно из дополнений к $\text{Ker } K^+$ в E^c . Очевидно, $E_0^c \cap \Delta_K = 0$. Следовательно, E можно представить в виде

$$E = \Delta_K + E_0^c + \tilde{E}, \quad (2.12)$$

где $\tilde{E} \subset \text{Ker } K^+$.

Разложение (2.12) определяет разложение I в E :

$$I = P_1 + P_2 + P_3, \quad (2.13)$$

где P_1 проектирует на Δ_K параллельно $E_0^c + \tilde{E}$, P_2 проектирует на E_0^c параллельно $\Delta_K + \tilde{E}$, P_3 проектирует на $\tilde{E}$ параллельно $\Delta_K + E_0^c$.

Пусть K_1^+ — сужение K^+ на E_0^c . В силу рассуждений, проведенных выше, можно рассмотреть в E_0^c представление $g \rightarrow v_g^{(2)}$,

положив $v_g^{(2)} = (K_1^+)^{-1} \tilde{u}_g K_1^+ P_2$. Отсюда получаем

$$\tilde{u}_g K + P_2 = K + v_g^{(2)} P_2. \quad (2.14)$$

Определим теперь представление $g \rightarrow v_g$, $g \in G$, в E положив $v_g = v_g^{(1)}P_1 + v_g^{(2)}P_2 + v_g^{(3)}P_3$, где $g \rightarrow v_g^{(3)}$ любое представление группы G в $\tilde{E}$ (например, можно положить $v_g^{(3)} = I$ для всех $g \in G$).

Складывая равенства (2.11), (2.14) и замечая, что $K^+P_3 = 0$, $v_gP_3 = P_3v_g$, получаем, $\tilde{u}_gK^+ = K^+v_g$. Так как (2.9) можно переписать в виде $v_gK = Ku_g$, то теорема полностью доказана.

Определение. Операторный узел $(A, H_{u,u}, K, E)$, удовлетворяющий условиям (2.4)–(2.6), будем называть *предынварийным*.

Лемма (2.2). Пусть $\Theta = (A, H_{u,u}, K, E)$ — операторный узел и операторы A и A^+ действуют в бимодуле $H_{u,u}$. Тогда, если Δ_K — невырожденное подпространство пространства E , то узел Θ *предынварийный*.

Доказательство. Справедливы формулы

$$\tilde{u}_gA = Au_g, \quad \tilde{u}_gA^+ = A^+u_g.$$

Отсюда, используя условие узла (1.1), получаем

$$\tilde{u}_gK^+K = K^+Ku_g. \quad (2.15)$$

Так как в данном случае $\text{Ker } K = \text{Ker } K^+K$, $\Delta_{K^+} = \Delta_{K^+K}$, то условия (2.5) и (2.6) следуют из (2.15). Лемма доказана.

Теорема (2.2). Пусть $\Theta = (A, H_u, K, E_v)$ — сильно инвариантный относительно группы G операторный узел и $W_\Theta(\lambda)$ — х.о-ф узла Θ . Тогда справедливо соотношение

$$v_gW_\Theta(\lambda) = W_\Theta(\lambda)v_g, \quad (2.16)$$

т.е. оператор-функция $W_\Theta(\lambda)$ действует в модуле E_v .

Если $\Theta = (A, H, K, E_v)$ — простой операторный узел, E_v — модуль над G и выполнено условие (2.16), то в пространстве H можно определить представление $g \rightarrow u_g$, $g \in G$ такое, что узел (A, H_u, K, E_v) будет сильно инвариантен относительно группы G . Представление $g \rightarrow u_g$ определяется по узлу (A, H, K, E_v) единственным образом.

Доказательство. Если узел $\Theta = (A, H_u, K, E_v)$ сильно инвариантен относительно группы G , то (2.16) следует из условий инвариантности (2.1)–(2.3).

Пусть теперь $\Theta = (A, H, K, E_v)$ — простой операторный узел, х.о-ф которого удовлетворяет соотношению (2.16). Покажем, что в этом случае подпространства $\text{Ker } (A^nK^+)$ ($n = 0$,

1, ...) инвариантны относительно представления $g \rightarrow v_g$. Воспользуемся для этого следующим утверждением (см. также [2], стр. 13—15).

Лемма (2. 3). Пусть (A, H, K, E) — операторный узел. Тогда линейная оболочка векторов вида

$$A^n K^+ \psi \quad (n = 0, 1, \dots; \psi \in E)$$

совпадает с линейной оболочкой векторов вида

$$A^{+n} K^+ \psi \quad (n = 0, 1, \dots; \psi \in E).$$

Заметим, что при достаточно большом $|\lambda|$

$$W_\Theta(\lambda) = I + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K A^n K^+}{\lambda^{n+1}}.$$

Поэтому, учитывая (2. 16), получаем

$$v_g K A^n K^+ = K A^n K^+ v_g \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (2. 17)$$

Перепишем (2. 17) в виде

$$v_g K A^m A^n K^+ = K A^m A^n K^+ v_g \quad (n, m = 0, 1, \dots). \quad (2. 18)$$

Фиксируя в (2. 18) n и меняя $m = 0, 1, \dots$, а кроме того, учитывая простоту узла Θ и лемму (2. 3), получаем необходимый результат.

Из леммы (2. 1) следует, что в $\Delta_p = \Delta_{A^p K^+}$ можно определить такое представление $g \rightarrow u_g^{(p)}$, $g \in G$, что

$$u_g^{(p)} A^p K^+ = A^p K^+ v_g \quad (p = 0, 1, \dots) \quad (2. 19)$$

Докажем соотношение

$$u_g^{(p)} \Big|_{\Delta_{pq}} = u_g^{(q)} \Big|_{\Delta_{pq}}, \quad (2. 20)$$

где $\Delta_{pq} = \Delta_p \cap \Delta_q$.

Действительно,

$$v_g K A^m A^p K^+ = K A^m A^p K^+ v_g = K A^m u_g^{(p)} A^p K^+ \quad (m = 0, 1, \dots).$$

То есть

$$v_g K A^m \Big|_{\Delta_p} = K A^m u_g^{(p)} \Big|_{\Delta_p} \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (2. 21)$$

Полагая $p = q$, получим

$$v_g K A^m \Big|_{\Delta_q} = K A^m u_g^{(q)} \Big|_{\Delta_q} \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (2. 22)$$

Если $f \in \Delta_{pq}$, то из (2. 21), (2. 22) следует

$$K A^m u_g^{(p)} f = K A^m u_g^{(q)} f \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (2. 23)$$

Учитывая простоту узла Θ и лемму (2.3), из (2.23) находим

$$u_g^{(p)}f = u_g^{(q)}f, \quad f \in \Delta_{pq}. \quad (2.24)$$

Так как узел Θ прост и $\dim H < \infty$, то существует такое l , что

$$H = \Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_l.$$

Нетрудно видеть, что в H можно определить представление $g \rightarrow u_g$, положив

$$u_g|_{\Delta_p} = u_g^{(p)} \quad (p = 0, 1, \dots, l).$$

Перепишем теперь (2.19) в виде

$$u_g A^p K^+ = A^p K^+ v_p \quad (p = 0, 1, \dots). \quad (2.25)$$

Отсюда

$$u_g A A^p K^+ = A A^p K^+ v_g = A u_g A^p K^+ \quad (p = 0, 1, \dots), \quad (2.26)$$

$$v_g K A^p K^+ = K A^p K^+ v_g = K u_g A^p K^+ \quad (p = 0, 1, \dots). \quad (2.27)$$

В силу простоты узла Θ из (2.26) и (2.27) получаем

$$u_g A = A u_g,$$

$$v_g K = K u_g.$$

Наконец, положив в (2.25) $p = 0$, получим

$$u_g K^+ = K^+ v_g,$$

и теорема полностью доказана.

Следствие. Пусть $\Theta(A, H, K, E_v)$ — простой операторный узел и E_v — модуль над G , порожденный унитарным представлением $g \rightarrow v_g$. Если выполнено соотношение

$$v_g W_\Theta(\lambda) = W_\Theta(\lambda) v_g,$$

то в пространстве H можно определить такое унитарное представление $g \rightarrow u_g$, $g \in G$, что узел (A, H, K, E_v) будет сильно инвариантен относительно группы G , при этом представление $g \rightarrow u_g$ определяется по узлу (A, H, K, E_v) единственным образом.

Доказательство. Используя простоту узла Θ и унитарность представления $g \rightarrow v_g$, нетрудно показать, что представление $g \rightarrow u_g$, полученное при доказательстве теоремы (2.2), унитарно.

§ 3. Сцепление инвариантных операторных узлов

Рассмотрим инвариантные относительно группы G узлы $\Theta_i = (A_i, H_{u^{(i)}, u^{(i)}}^{(i)}, K_i, E_v)$ ($i = 1, 2$) и обозначим через P_1 и P_2

проекторы на $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$ в пространстве $H = H^{(1)} \oplus H^{(2)}$. Итак, P_1 проектирует на $H^{(1)}$ параллельно $H^{(2)}$, а P_2 проектирует на $H^{(2)}$ параллельно $H^{(1)}$.

Введем операторы

$$A = A_1 P_1 + A_2 P_2 + i K_1^+ K_2 P_2, \quad K = K_1 P_1 + K_2 P_2, \quad (3.1)$$

$$\tilde{u}_g = \tilde{u}_g^{(1)} P_1 + \tilde{u}_g^{(2)} P_2, \quad u_g = u_g^{(1)} P_1 + u_g^{(2)} P_2, \quad g \in G,$$

действующие в пространстве H и из H в E соответственно.

Пространства H , E и операторы A , K образуют совместно узел. Действительно, так как

$$K_1^+ K_1 = \frac{1}{i} (A_1 - A_1^+), \quad K_2^+ K_2 = \frac{1}{i} (A_2 - A_2^+),$$

$$A^+ = A_1^+ P_1 + A_2^+ P_2 - i K_2^+ K_1 P_1, \quad K^+ = K_1^+ + K_2^+,$$

то

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} (A - A^+) &= K_1^+ K_1 P_1 + K_2^+ K_2 P_2 + K_1^+ K_2 P_2 + K_2^+ K_1 P_1 = \\ &= (K_1^+ + K_2^+) (K_1 P_1 + K_2 P_2) = K^+ K. \end{aligned}$$

Обозначим через $H_{u,u}^-$ бимодуль, порожденный представлениями $g \rightarrow \tilde{u}_g$, $g \rightarrow u_g$ и докажем, что узел $(A, H_{u,u}^-, K, E_v)$ инвариантен относительно группы G . Действительно, так как узлы Θ_1 и Θ_2 инвариантны, то

$$\begin{aligned} \tilde{u}_g A &= \tilde{u}_g^{(1)} A_1 P_1 + \tilde{u}_g^{(2)} A_2 P_2 + i \tilde{u}_g^{(1)} K_1^+ K_2 P_2 = A_1 u_g^{(1)} P_1 + A_2 u_g^{(2)} P_2 + \\ &+ i K_1^+ v_g K_2 P_2 = A_1 u_g^{(1)} P_1 + A_2 u_g^{(2)} P_2 + i K_1^+ K_2 u_g^{(2)} P_2 = A u_g, \\ v_g K &= v_g K_1 P_1 + v_g K_2 P_2 = K_1 u_g^{(1)} P_1 + K_2 u_g^{(2)} P_2 = K u_g, \\ \tilde{u}_g K^+ &= \tilde{u}_g^{(1)} K_1^+ + \tilde{u}_g^{(2)} K_2^+ = K_1^+ v_g + K_2^+ v_g = K^+ v_g. \end{aligned}$$

Условимся инвариантный узел $\Theta = (A_1 P_1 + A_2 P_2 + i K_1^+ K_2 P_2, H_{u,u}^-, K_1 P_1 + K_2 P_2, E_v)$ называть *сцеплением* инвариантных узлов Θ_1 и Θ_2 и писать $\Theta = \Theta_1 \vee \Theta_2$.

Непосредственная проверка показывает, что справедлива формула

$$(\Theta_1 \vee \Theta_2) \vee \Theta_3 = \Theta_1 \vee (\Theta_2 \vee \Theta_3).$$

Определение. Пусть $H_{u,u}^-$ — бимодуль над G и H — пространство с метрикой. Невырожденное подпространство $\tilde{H}$, от-

личное от нулевого и всего H , назовем *разлагающим* бимодуль $H_{u,u}^-$, если $\tilde{H}$ и $H \ominus \tilde{H}$ являются подмодулями модулей H_u^- и H_u .

Введем теперь понятие проекции инвариантного узла. Пусть $\Theta = (A, H_{u,u}^-, K, E_v)$ — инвариантный относительно группы G узел и подпространство H' разлагает бимодуль $H_{u,u}^-$. Пусть P' проектирует на H' параллельно $H \ominus H'$. Рассмотрим в H' операторы:

$$A'h = P'Ah, \tilde{u}'_g h = P'\tilde{u}'_g h, u'_g h = P'u'_g h, (h \in H').$$

Кроме того, построим отображение $K' = KP'$ пространства H' в E . Так как

$$(A')^+ h = P'A^+ h, K'h = Kh, \quad (h \in H')$$

$$K' + K'h = P'K + Kh = P' \frac{A - A^+}{i} h = \frac{A' - (A')^+}{i} h,$$

то пространства H' , E и операторы A' , K' образуют операторный узел. Обозначим через $H_{u',u'}^-$ бимодуль, порожденный пред-

ставлениями $g \rightarrow \tilde{u}'_g, g \rightarrow u'_g$. Легко видеть, что операторный узел $\Theta' = (A', H_{u',u'}^-, K', E_v)$ инвариантен относительно группы G .

Будем называть узел Θ' *проекцией* узла Θ на подпространство H' и писать $\Theta' = \text{pr}_{H'} \Theta$.

Если $\Theta_1 = (A_1, H_{u^{(1)}, u^{(1)}}^{(1)}, K_1, E_v)$, $\Theta_2 = (A_2, H_{u^{(2)}, u^{(2)}}^{(2)}, K_2, E_v)$ — инвариантные относительно группы G операторные узлы

и $\Theta = \Theta_1 \vee \Theta_2 = (A, H_{u,u}^-, K, E_v)$, то, как показывают формулы (3.1), Θ_1 и Θ_2 являются соответственно проекциями узла Θ на $H^{(1)}$ и $H^{(2)}$, причем $H^{(1)}$ инвариантно относительно A . Обратно, каждый инвариантный узел $\Theta = (A, H_{u,u}^-, K, E_v)$ представляет собой сцепление своих проекций $\Theta_1 = (A_1, H_{u^{(1)}, u^{(1)}}^{(1)}, K_1, E_v)$ и $\Theta_2 = (A_2, H_{u^{(2)}, u^{(2)}}^{(2)}, K_2, E_v)$ на инвариантное относительно A подпространство $H^{(1)}$, разлагающее бимодуль $H_{u,u}^-$, и его ортогональное дополнение $H^{(2)}$.

Определение. Инвариантный узел будем называть *неразложимым*, если он не представим в виде сцепления инвариантных операторных узлов.

Определение. Пусть H — пространство с метрикой и $H_{u,u}^-$ — бимодуль над G . Оператор A , действующий в бимодуле $H_{u,u}^-$ назовем *неразложимым*, если не существует инвариантных относительно A разлагающих бимодуль $H_{u,u}^-$ подпространств.

Из рассуждений, проведенных выше, непосредственно следует **Лемма (3.1)**. Инвариантный узел $(A, H_{u,u}^-, K, E_v)$ неразложим тогда и только тогда, когда его основной оператор неразложим в бимодуле $H_{u,u}^-$.

Замечание 1. Все результаты и определения этого параграфа переносятся на сильно инвариантные операторные узлы. Действительно, для этого в соответствующих местах достаточно положить $\tilde{u} = u$.

Замечание 2. Пусть $\Theta(A, H_{u,u}^-, K, E_v)$ — инвариантный относительно группы G операторный узел, внутреннее пространство которого унитарно. Обозначим через $W_\Theta(\lambda)$ х.о-ф узла Θ . Правильными относительно бимодуля $H_{u,u}^-$ делителями х.о-ф $W_\Theta(\lambda)$ будем называть те и только те правильные делители* х.о-ф $W_\Theta(\lambda)$, которые соответствуют разложению инвариантного узла Θ на инвариантные узлы. В случае, когда Θ — сильно инвариантный узел, т.е. $\tilde{u} = u$, будем говорить о правильных относительно модуля H_u делителях х.о-ф $W_\Theta(\lambda)$.

Из теоремы (2.2) непосредственно следует

Теорема (3.1). Пусть $\Theta(A, H_{u,u}^-, K, E_v)$ — сильно инвариантный относительно группы G операторный узел, внутреннее пространство которого унитарно. Обозначим через $W_\Theta(\lambda)$ х.о-ф узла Θ . Тогда правильный делитель $W_1(\lambda)$ функции $W_\Theta(\lambda)$ является правильным относительно модуля H_u делителем в том и только в том случае, когда оператор-функция $W_1(\lambda)$ действует в модуле E_v .

§ 4. Неразложимые операторы

Лемма (4.1). Пусть H — унитарное пространство и H_u — модуль над G , порожденный нормальным представлением. Пусть A — неразложимый оператор, действующий в модуле H_u . Тогда $A = \lambda I$ и представление $u: g \rightarrow u_g$ неприводимо.

Доказательство. Справедлива формула

$$u_g A = A u_g. \quad (4.1)$$

* Теория правильных делителей х.о-ф. изложена в книге М. С. Бродского [2].

Обозначим через N_λ собственное подпространство оператора A , соответствующее собственному значению λ . Из (4.1) видно, что N_λ инвариантно относительно u_g . Так как представление $g \rightarrow u_g$ нормально, то N_λ приводит операторы u_g . Следовательно, N_λ разлагает модуль H_u . Так как A неразложим, то

$$N_\lambda = H \text{ и } A = \lambda I.$$

Кроме того, отсюда видно, что представление $g \rightarrow u_g$ неприводимо. Лемма доказана.

Теорема (4.1). Пусть (A, H_u, K, E_v) — сильно инвариантный относительно группы G неразложимый операторный узел. Пусть пространство H унитарно, а представление $g \rightarrow u_g$, $g \in G$ нормально. Тогда $A = \lambda I$, представление $g \rightarrow u_g$ неприводимо и либо $\Delta_{K+} = 0$, либо $\Delta_{K+} = H$.

Утверждение следует из леммы (3.1), теоремы (2.1) и леммы (4.1).

Лемма (4.2). Пусть H — унитарное пространство и $H_{u,u}$ бимодуль над G , порожденный нормальными представлениями $g \rightarrow \tilde{u}_g$, $g \rightarrow u_g$. Пусть операторы A и A^* действуют в бимодуле $H_{u,u}$. Тогда, если A — вырожденный неразложимый оператор, то

$A = 0$ и представления $g \rightarrow \tilde{u}_g$, $g \rightarrow u_g$ не имеют общего инвариантного подпространства, отличного от нулевого и всего H .

Доказательство. Справедливы формулы

$$\tilde{u}_g A = A u_g, \quad (4.2)$$

$$\tilde{u}_g A^* = A^* u_g. \quad (4.3)$$

Из (4.2) видно, что $\text{Ker } A$ инвариантно относительно u_g .

Из (4.3) следует, что Δ_{A^*} инвариантно относительно $\tilde{u}_g$. Так как $\text{Ker } A \perp \Delta_{A^*}$ и представления $g \rightarrow \tilde{u}_g$, $g \rightarrow u_g$ нормальны, то $\text{Ker } A$ разлагает бимодуль $H_{u,u}$. Далее $\text{Ker } A \neq 0$. Поэтому $\text{Ker } A = H$ и $A = 0$. Кроме того, легко видеть, что представления $g \rightarrow \tilde{u}_g$, $g \rightarrow u_g$ не имеют общего инвариантного подпространства, отличного от нулевого и всего H . Лемма доказана.

Теорема (4.2). Пусть $(A, H_{u,u}, K, E_v)$ — инвариантный относительно группы G неразложимый операторный узел, основной оператор которого вырожден. Пусть H — унитарное пространство, а представления $g \rightarrow \tilde{u}_g$, $g \rightarrow u_g$ нормальны. Тогда $A = 0$,

представления $g \rightarrow \tilde{u}_g$, $g \rightarrow u_g$ не имеют общего инвариантного подпространства, отличного от нулевого и всего H , и либо $\Delta_{K+} = 0$, либо $\Delta_{K+} = H$.

Утверждение следует из леммы (3.1), теоремы (2.1) и леммы (4.2).

Пусть H — унитарное подпространство и $H_{\sim}^{u,u}$ — бимодуль над G , порожденный нормальными представлениями. Предположим теперь, что неразложимый оператор A , действующий в бимодуле $H_{\sim}^{u,u}$, не вырожден. Тогда из (4.2) следует, что пред-

ставления $g \rightarrow \tilde{u}_g$ и $g \rightarrow u_g$ эквивалентны. Предположим, что и A^* действует в бимодуле $H_{\sim}^{u,u}$ и опишем оператор A для этого

случая, предположив дополнительно, что представления $g \rightarrow \tilde{u}_g$ и $g \rightarrow u_g$ унитарно эквивалентны, т. е.

$$\tilde{u}_g = U u_g U^{-1}, \quad U^* = U^{-1}. \quad (4.4)$$

Из (4.2), (4.3), учитывая (4.4), получаем

$$u_g U^{-1} A = U^{-1} A u_g, \quad (4.5)$$

$$u_g U^{-1} A^* = U^{-1} A^* u_g. \quad (4.6)$$

Используя лемму (1.2), перепишем (4.6) в виде

$$u_g A U = A U u_g. \quad (4.7)$$

Следовательно,

$$u_g A^2 = u_g A U U^{-1} A = A U u_g U^{-1} A = A U U^{-1} A u_g = A^2 u_g. \quad (4.8)$$

Пусть λ — одно из собственных значений оператора A . Тогда λ^2 будет собственным значением A^2 . Рассмотрим собственное подпространство N_{λ^2} оператора A^2 , соответствующее собственному значению λ^2 . Из (4.8) видно, что N_{λ^2} инвариантно относительно u_g . Так как $\tilde{u}_g = A u_g A^{-1}$, то N_{λ^2} инвариантно и относительно $\tilde{u}_g$. Следовательно, N_{λ^2} разлагает бимодуль $H_{\sim}^{u,u}$. Так как оператор A неразложим, то $N_{\lambda^2} = H$ и $A^2 = \lambda^2 I$, т. е. $A = \lambda B$, $B^2 = I$.

Из формулы

$$\tilde{u}_g A u_g A^{-1} = B u_g B^{-1}$$

видно, что разложимость оператора A зависит от существования у оператора B и представления $g \rightarrow u_g$ общего инвариантного подпространства, отличного от нулевого и всего H . Пример показывает, что такого подпространства может и не быть.

Пример. Рассмотрим множество пар $\{f, g\}$, где f и g пробегают унитарное пространство H . Будем считать эти пары элементами ортогональной суммы подпространств $H_1 \oplus H_2$, где $H_1 = H_2 = H$. Образованное этими парами унитарное пространство $H_1 \oplus H_2$ обозначим $\tilde{H}$.

Рассмотрим подпространства $M_1 = \{f, f\}$ и $M_2 = \{f, -f\}$, $f \in H$:

$$\tilde{H} = M_1 \oplus M_2.$$

Зададим представление $g \rightarrow u_g$ некоторой группы G в $\tilde{H}$ следующим образом:

- 1) на M_1 представление $g \rightarrow u_g$ приводимо и нормально,
- 2) на M_2 представление $g \rightarrow u_g$ неприводимо.

Очевидно, представление $g \rightarrow u_g$ нормально в $\tilde{H}$.

Оператор B зададим формулами

$$Bf = f, f \in H_1; Bg = -g, g \in H_2.$$

Очевидно, $B = B^* = B^{-1}$. Положим $\tilde{u}_g = Bu_gB^{-1}$. Таким образом,

$$\tilde{u}_gB = Bu_g, \tilde{u}_gB^* = B^*u_g,$$

и представления $g \rightarrow \tilde{u}_g, g \rightarrow u_g$ нормальны и унитарно эквивалентны. Нетрудно видеть, что оператор B неразложим в бимодуле $\tilde{H}_{u, u}$.

Итак доказана

Теорема (4.3). Пусть H — унитарное пространство и $H_{u, u}$ — бимодуль над G , порожденный нормальными и унитарно эквивалентными представлениями $g \rightarrow \tilde{u}_g, g \rightarrow u_g$. Пусть операторы A и A^* действуют в бимодуле $H_{u, u}$. Тогда, если A — невырожденный неразложимый оператор, то $A = \lambda B, B^2 = I$ и оператор B не имеет с представлением $g \rightarrow u_g$ общего инвариантного подпространства, отличного от нулевого и всего H .

Докажем следующее утверждение.

Теорема (4.4). В условиях и обозначениях теоремы (4.3) либо $B = B^* = B^{-1}$, либо $B^* = SB$ и матрица оператора S в некотором ортонормированном базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} \alpha I & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha} I \end{pmatrix}, \alpha > 0, \alpha \neq 1.$$

При этом $\dim M_\alpha = \dim M_{\frac{1}{\alpha}}$, где M_α и $M_{\frac{1}{\alpha}}$ — собственные подпространства оператора S , отвечающие соответственно собственным значениям α и $\frac{1}{\alpha}$.

Доказательство. Справедливы формулы

$$\tilde{u}_g B = B u_g, \quad B^2 = I,$$

$$\tilde{u}_g = U u_g U^{-1}, \quad U^* = U^{-1}.$$

Введем оператор $C = U^{-1}B$. Очевидно,

$$u_g C = C u_g. \quad (4.9)$$

Используя лемму (1.2), перепишем (4.9) в виде

$$u_g C^* = C^* u_g. \quad (4.10)$$

Из (4.9), (4.10) получаем

$$u_g C^* C = C^* C u_g. \quad (4.11)$$

Пусть $B^* = SB$. Тогда $S = B^*B = C^*C$. Значит,

$$u_g S = S u_g, \quad S > 0. \quad (4.12)$$

Если $B^* \neq B$, то $S \neq I$. В этом случае у оператора S имеется хотя бы одно собственное значение α такое, что $\alpha > 0$ и $\alpha \neq 1$. Пусть M_α — собственное подпространство оператора S , соответствующее собственному значению α .

Из равенств $B^* = SB = B^{*-1} = BS^{-1}$ получаем $SBS = B$. Следовательно, $SB|_{M_\alpha} = \frac{1}{\alpha} B|_{M_\alpha}$. Значит, $S|_{BM_\alpha} = \frac{1}{\alpha} I$ и $BM_\alpha \subset M_{\frac{1}{\alpha}}$. Так как эти же рассуждения можно повторить и в отношении $M_{\frac{1}{\alpha}}$, то получаем

$$BM_\alpha = M_{\frac{1}{\alpha}}, \quad \dim M_\alpha = \dim M_{\frac{1}{\alpha}}.$$

Так как $\alpha \neq 1$, то $M_\alpha \perp M_{\frac{1}{\alpha}}$. Теорема будет доказана, если мы покажем, что $M_\alpha \oplus M_{\frac{1}{\alpha}} = H$.

Из (4.12) следует, что M_α и $M_{\frac{1}{\alpha}}$ инвариантны относительно u_g . Следовательно, $M_\alpha \oplus M_{\frac{1}{\alpha}}$ инвариантно относительно B и u_g .

Из теоремы (4.3) следует тогда

$$H = M_\alpha \oplus M_{\frac{1}{\alpha}}, \quad (4.13)$$

и теорема доказана.

Следствие 1. В условиях и обозначениях теоремы (4.3) либо $A - A^* = 0$, либо $A - A^*$ — невырожденный оператор.

Следствие 2. В условиях и обозначениях теоремы (4.3), если $B^* \neq B$, то $\dim N_1 = \dim N_{-1}$, где N_1 и N_{-1} — собственные подпространства оператора B , соответствующие собственным значениям 1 и -1 .

Доказательство. Допустим, что $\dim N_1 \neq \dim N_{-1}$. Не нарушая общности, предположим, что $\dim N_1 > \dim N_{-1}$. Перепишем (4.13) в виде $M_\alpha \oplus BM_\alpha = H$. Отсюда видно, что $M_\alpha \cap N_1 = 0$. Следовательно, $\dim M_\alpha \leq \dim N_{-1}$. Значит,

$$\dim H = 2 \dim M_\alpha \leq 2 \dim N_{-1} < \dim N_1 + \dim N_{-1} = \dim H,$$

т. е. приходим к противоречию.

Итак, $\dim N_1 = \dim N_{-1}$.

Следствие 3. В условиях и предположениях теоремы (4.3), если $\dim H = 2n + 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), то $B = B^* = B^{-1}$.

§ 5. Предынвариантные операторные узлы, содержащие данные оператор A и бимодуль $H_{\sim}$ и, и

Пусть H — пространство с метрикой, $H_{\sim}$ — бимодуль и операторы A и A^+ действуют в бимодуле $H_{\sim}$. Спрашивается, существуют ли в этом случае пространство E и оператор $K: H \rightarrow E$ такие, что совокупность $(A, H_{\sim}, K, E)$ является предынвариантным операторным узлом. Ниже будет дан утвердительный ответ на этот вопрос. Кроме того, будет полностью описан класс предынвариантных операторных узлов, содержащих данные оператор A и бимодуль $H_{\sim}$. Из теоремы (2.1) следует, что тем самым будет полностью описан класс инвариантных операторных узлов, содержащих данные оператор A и бимодуль $H_{\sim}$.

Докажем вначале несколько вспомогательных утверждений.

Лемма (5.1). Любой оператор A , действующий в пространстве H с метрикой, можно включить в операторный узел.

Доказательство. Пусть $H_1 = \text{Ker}(A - A^+)$ и H_2 — какое-нибудь дополнение к H_1 , т. е. $H = H_1 \dot{+} H_2$. Пусть K — оператор проектирования на H_2 параллельно H_1 . Возьмем в качестве E пространство H_2 ; при этом метрику в E определим следующим образом:

$$(f, g)_E = \left(\frac{1}{i} (A - A^+) f, g \right)_H; \quad f, g \in E.$$

Оператор K можно рассматривать как оператор, действующий из H в E . Нетрудно проверить, что совокупность (A, H, K, E) является операторным узлом. Лемма доказана.

Если (A, H, K, E) — операторный узел, то из условия узла (1.1) следует, что $\dim E \geq \dim H - \dim \operatorname{Ker}(A - A^+)$. Будем называть поэтому операторный узел *минимальным*, если $\dim E = \dim H - \dim \operatorname{Ker}(A - A^+)$. Очевидно узел минимален в том и только в том случае, когда $\Delta_K = E$. Таким образом, при доказательстве леммы (5.1) был указан способ включения произвольного оператора в один из минимальных узлов.

Лемма (5.2). Пусть $\Theta_i = (A, H, K_i, E_i)$ ($i = 1, 2$) — два минимальных операторных узла. Тогда существует такой метрический изоморфизм U пространства E_1 на E_2 , что $UK_1 = K_2$.
Доказательство. Из условия узла (1.1) получаем

$$K_1^+ K_1 = K_2^+ K_2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (K_1 \psi_1, K_1 \psi_2)_{E_1} &= (K_1^+ K_1 \psi_1 \psi_2)_H = (K_2^+ K_2 \psi_1, \psi_2)_H = \\ &= (K_2 \psi_1, K_2 \psi_2)_{E_2}, \quad \psi_1, \psi_2 \in H. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Так как $E_i = \Delta_{K_i}$ ($i = 1, 2$), то из (5.1) следует, что можно определить оператор $U: E_1 \rightarrow E_2$, положив $UK_1 \psi = K_2 \psi$, $\psi \in H$. Кроме того, из (5.1) видно, что U является метрическим изоморфизмом пространства E_1 на E_2 .

Лемма доказана.

Теорема (5.1). Пусть H — пространство с метрикой, $H_{\sim}$ — бимодуль над G и операторы A и A^+ действуют в бимодуле $H_{\sim}$. Тогда минимальный операторный узел $(A, H_{\sim}, K, E)$ *предынвариаентен*.

Доказательство. Так как узел $(A, H_{\sim}, K, E)$ минимален, то $\Delta_K = E$. Утверждение теоремы следует поэтому из леммы (2.2).

Пусть H — пространство с метрикой и $H_{\sim}$ — бимодуль над

G . Подпространство $\tilde{H} \subset H$ будем называть *допустимым*, если $\tilde{H}$ — подмодуль $H_{\sim}$, а аннулятор подпространства $\tilde{H}$ — подмодуль $H_{\sim}$. Далее, оператор T , действующий из пространства H в какое-нибудь пространство E , назовем *допустимым*, если $\operatorname{Ker} T$ — допустимое подпространство.

Лемма 5.3. Пусть $\Theta = (A, H_{\sim}, K, E)$ — операторный узел и операторы A и A^+ действуют в бимодуле $H_{\sim}$. Тогда

узел θ *предынвариа́нтен* в том и только в том случае, когда каналовый оператор K допустим.

Пусть $\theta' = (A', H_{u', u'}^{\sim}, K', E')$, $\theta'' = (A'', H_{u'', u''}^{\sim}, K'', E'')$ — два предынвариа́нтных операторных узла и $H_{u', u'}^{\sim}$, $H_{u'', u''}^{\sim}$ — бимодули над G . Будем говорить, что узел θ' находится к узлу θ'' в отношении M и писать $\theta'' M \theta'$, если $H' = H''$, $A' = A''$, $u' = u''$, $u' = u''$. Отношение M , очевидно, является отношением эквивалентности. Следовательно, множество предынвариа́нтных операторных узлов разбивается на дизъюнктивное множество классов M -эквивалентности.

Операцию, переводящую предынвариа́нтный операторный узел $(A, H_{u, u}^{\sim}, K, E)$ в предынвариа́нтный узел $(A, H_{u, u}^{\sim}, K + 0, E + E')$, где E' — произвольное пространство с метрикой будем называть *тривиальным удлинением*, а обратную к ней операцию — *тривиальным сокращением*.

Пусть $\theta = (A, H_{u, u}^{\sim}, K, E)$ — предынвариа́нтный операторный узел, E' — пространство с метрикой и K' — допустимый оператор, действующий из H в E' . Тогда совокупность $\theta' = (A, H_{u, u}^{\sim}, K + K' + K', E + E' + E'^-)$, где E'^- — пространство, метрика в котором отличается лишь знаком от метрики в E' , является, очевидно, предынвариа́нтным операторным узлом. Операцию, переводящую узел θ в узел θ' , будем называть *нейтральным удлинением*. Если $K' = 0$, то соответствующее нейтральное удлинение назовем *тривиально нейтральным*.

Операцию, переводящую предынвариа́нтный узел $(A, H_{u, u}^{\sim}, K + K' + K', E + E' + E'^-)$, где K и K' — допустимые операторы, в предынвариа́нтный узел $(A, H_{u, u}^{\sim}, K, E)$, назовем *нейтральным сокращением*. Если $K' = 0$, то соответствующее нейтральное сокращение будем называть *тривиально нейтральным*.

Операцию, переводящую предынвариа́нтный узел $(A, H_{u, u}^{\sim}, K, E)$ в предынвариа́нтный узел $(A, H_{u, u}^{\sim}, UK, E')$, где U — произвольный метрический изоморфизм пространства E на E' , будем называть операцией *изоморфизма*.

Заметим, что все приведенные операции не выводят из класса M -эквивалентных операторных узлов. С другой стороны, справедлива

Теорема (5.2). Пусть $\tilde{\theta}_i$ ($i = 1, 2$) — два M -эквивалентных операторных узла. Тогда один из них можно получить из другого при помощи операций изоморфизма, нейтрального удлинения, нейтрального сокращения, тривиального сокращения, тривиального удлинения.

Доказательство. Из леммы (5.2) и теоремы (5.1) следует, что достаточно показать, что любой предынвариантный узел $\theta = (A, H_{u,u}, K, E)$ можно получить из минимального при помощи перечисленных выше операций. Пусть вначале Δ_K — невырожденное подпространство пространства E . Тогда узел θ можно представить в виде

$$\theta = (A, H_{u,u}, K \dot{+} 0, \Delta_K \oplus \tilde{E}). \quad (5.2)$$

Так как узел $\theta' = (A, H_{u,u}, K, \Delta_K)$, очевидно, минимален, то в данном случае, как видно из (5.2), узел θ можно получить из узла θ' при помощи операции тривиального удлинения.

Пусть теперь Δ_K — вырожденное подпространство пространства E . Это значит, что $\Delta_K \cap \text{Ker } K^+ \neq 0$. Пусть $\hat{E} = \Delta_K \cap \text{Ker } K^+$. Заметим, что полный прообраз $\hat{E}, K^{-1}(\hat{E}) = \tilde{H}$, является ядром оператора $K+K$. Так как $\tilde{u}_g K + K = K + K u_g$, то $\tilde{H}$ инвариантно относительно представления $g \rightarrow u_g$. Далее $\text{Ker } K \subset \tilde{H}$ и $\text{Ker } K$ — инвариантно относительно u_g . Поэтому существует такое инвариантное относительно представления $g \rightarrow u_g$ подпространство $\hat{H}$, что

$$\tilde{H} = \text{Ker } K \dot{+} \hat{H}.$$

Пусть H^c — некоторое инвариантное относительно операторов u_g дополнение к $\tilde{H}$. Итак, $H = \text{Ker } K \dot{+} \hat{H} \dot{+} H^c$. Пусть $E^c = K H^c$. Тогда $\Delta_K = \hat{E} \dot{+} E^c$. Нетрудно видеть, что E^c невырожденное подпространство. Обозначим через L ортогональное дополнение к E^c , т. е. $E = E^c \oplus L$. Так как векторы подпространства $\hat{E}$ ортогональны векторам из Δ_K , то $\hat{E} \subset L$. Представим пространство L в виде

$$L = L_+ \oplus L_-,$$

где L_+ и L_- — такие подпространства в L , что для любых ненулевых векторов $f \in L_+, g \in L_-$ имеем $(f, f) > 0, (g, g) < 0$.

Пусть P_+ проектирует на L_+ параллельно $L_- \oplus E^c$, а P_- проектирует на L_- параллельно $L_+ \oplus E^c$.

Введем операторы

$$K_+h = \begin{cases} P_+Kh, & h \in \hat{H}, \\ 0 & h \in \text{Ker } K \dot{+} H^c, \end{cases}$$

$$K_-h = \begin{cases} P_-Kh, & h \in \hat{H}, \\ 0, & h \in \text{Ker } K \dot{+} H^c, \end{cases}$$

$$K_1 = K_+ + K_-, \quad K^c = K - K_1.$$

Очевидно,

$$\Delta_{K_1} = \hat{E}, \quad \Delta_{K^c} = E^c.$$

Если $h_1, h_2 \in \hat{H}$, то

$$(K_+h_1, K_+h_2) = (P_+Kh_1, P_+Kh_2) = (K^+P_+Kh_1, h_2) = \\ = (K^+(I - P_-)Kh_1, h_2) = (K^+Kh_1, h_2) - (P_-Kh_1, P_-Kh_2).$$

Но, если $h \in \hat{H}$, то $K^+Kh = 0$. Таким образом,

$$(K_+h_1, K_+h_2) = -(K_-h_1, K_-h_2), \quad h_1, h_2 \in \hat{H}. \quad (5.3)$$

Обозначим через $\hat{L}_+$ и $\hat{L}_-$ соответственно подпространства $P_+\hat{E}$ и $P_-\hat{E}$. Кроме того, пусть $L_0 = L \ominus (\hat{L}_+ \oplus \hat{L}_-)$. Очевидно, $\Delta_{K_\pm} = L_\pm$. Из (5.3) видно, что существует метрический изоморфизм U пространства $\hat{L}_-$ на $\hat{L}_+$, где $\hat{L}_+$ — пространство, метрика в котором лишь знаком отличается от метрики в $\hat{L}_+$, такой, что $UK_- = K_+$. Таким образом, произведя над узлом θ операцию изоморфизма, получим узел

$$\theta_1 = (A, H_{u,u}^-, \tilde{K} \dot{+} K' \dot{+} K' \dot{+} 0, \tilde{E} \dot{+} E' \dot{+} E'^- \dot{+} E_0),$$

где $E' = \hat{L}_+$, $E'^- = U\hat{L}_-$, $E_0 = L_0$, $\tilde{E} = E^c$, $K' = K_+$, $\tilde{K} = K^c$.

Очевидно, $\tilde{K} \dot{+} \tilde{K} = K^+K = \frac{1}{i}(A - A^+)$ и $\Delta_{\tilde{K}} = \tilde{E}$. Таким образом, совокупность $(A, H_{u,u}^-, \tilde{K}, \tilde{E})$ является минимальным

узлом, который мы обозначим через θ_2 . Из теоремы (5.1) следует, что узел θ_2 предынвариантен. Теорема, очевидно, будет доказана, если мы покажем, что $\theta M\theta_2$. Для этого достаточно

показать, что $\theta_1 M \theta_2$. Если оператор K' допустим, то узел θ_1 M -эквивалентен узлу θ_2 по определению. В противном случае рассмотрим оператор R , действующий из H в некоторое пространство Q с метрикой. Пусть $\text{Ker } R = \text{Ker } K$. Очевидно, оператор R допустим. Совершив над узлом θ_1 операцию нейтрального удлинения, получим предынвариантный узел

$$\theta_3 = (A, H_{u,u}, \tilde{K} \dot{+} K' \dot{+} K' \dot{+} 0 \dot{+} R \dot{+} R, \tilde{E} \dot{+} E' \dot{+} \dot{+} E' \dot{+} E_0 \dot{+} Q \dot{+} Q).$$

Заметим, что $\text{Ker}(K' \dot{+} R) = \text{Ker } K' \cap \text{Ker } R = \text{Ker } K$. Отсюда следует, что оператор $K' \dot{+} R$ допустим. Совершая теперь над узлом θ_3 операции изоморфизма и нейтрального сокращения, получим узел

$$\theta_4 = (A, H_{u,u}, \tilde{K} \dot{+} 0, \tilde{E} \dot{+} E_0).$$

Для доказательства теоремы остается заметить, что узел θ_4 можно получить из узла θ_2 при помощи операции тривиального удлинения.

Следствие. Пусть $\theta = (A, H_{u,u}, K, E)$ — предынвариантный узел и Δ_K — вырожденное подпространство пространства E . Тогда узел θ с помощью операций изоморфизма, нейтрального удлинения и нейтрального сокращения можно привести к виду

$$(A, H_{u,u}, \tilde{K} \dot{+} 0, \tilde{E} \dot{+} E_0),$$

где $(A, H_{u,u}, \tilde{K}, \tilde{E})$ — минимальный узел, при этом $\dim(\tilde{E} \dot{+} \dot{+} E_0) < \dim E$.

Пусть H — пространство с метрикой, $H_{u,u}$ — бимодуль и операторы A и A^+ действуют в бимодуле $H_{u,u}$. Из рассуждений, проведенных выше, следует, что для описания всех предынвариантных операторных узлов, содержащих данные оператор A и бимодуль $H_{u,u}$, достаточно, очевидно, включить оператор A в минимальный узел и воспользоваться теоремами (5.1) и (5.2).

Заметим, что при доказательстве теоремы (5.2) было доказано следующее утверждение.

Теорема (5.3). Любой предынвариантный узел $(A, H_{u,u}^{\sim}, K, E)$ с помощью операции изоморфизма можно привести к виду

$$(A, H_{u,u}^{\sim}, \tilde{K} \dot{+} K' \dot{+} K' \dot{+} 0, \tilde{E} \dot{+} E' \dot{+} E'^{-} \dot{+} E_0), \quad (5.4)$$

где $(A, H_{u,u}^{\sim}, \tilde{K}, \tilde{E})$ — минимальный узел, $\text{Ker } K'$ инвариантно относительно u_g , E' — пространство с дефинитной метрикой и $\Delta_{K'} = E'$.

Следствие. Если внутренние представления для предынвариантного узла $\theta = (A, H_{u,u}^{\sim}, K, E)$ удовлетворяют условию

$$\tilde{u}_g^{\dagger} = u_g^{-1}, \quad (5.5)$$

то оператор K' в представлении (5.4) допустим.

Доказательство. Действительно, в данном случае любое подпространство, инвариантное относительно представления $g \rightarrow u_g$, допустимо.

Теорема (5.4). Пусть внутренние представления для предынвариантного узла $\theta = (A, H_{u,u}^{\sim}, K, E)$, где $H_{u,u}^{\sim}$ — бимодуль над G , удовлетворяют условию (5.5). Тогда в пространстве E можно определить такое унитарное представление $g \rightarrow v_g$, $g \in G$, что узел $(A, H_{u,u}^{\sim}, K, E_v)$ будет инвариантен относительно группы G .

Доказательство. Представим узел θ в виде (5.4). Из леммы (2.1) следует, что в $\tilde{E}$ можно определить такое представление $g \rightarrow \tilde{v}_g$, что

$$\tilde{v}_g \tilde{K} = \tilde{K} u_g.$$

Пусть $K_1 = K' \dot{+} K'$, $E_1 = \Delta_{K_1}$, P_+ — оператор проектирования на E' параллельно $\tilde{E} \dot{+} E'^{-} \dot{+} E_0$, P_- — оператор проектирования на E'^{-} параллельно $\tilde{E} \dot{+} E' \dot{+} E_0$, $J = P_+ - P_-$ и $E_2 = JE_1$. Из следствия теоремы (5.3) получаем, что оператор K_1 допустим. Поэтому из леммы (2.1) следует, что в E_1 можно определить такое представление $g \rightarrow v_g^{(1)}$, что

$$v_g^{(1)} K_1 = K_1 u_g.$$

Далее нетрудно видеть, что оператор $K_1^{\dagger}$ не вырожден на E_2 , при этом $K_1^{\dagger}(E_2)$ — инвариантное относительно представления $g \rightarrow \tilde{u}_g$ подпространство. Таким образом в E_2 можно определить такое представление $g \rightarrow v_g^{(2)}$, что

$$\tilde{v}_g K_1^{\dagger}|_{E_2} = K_1^{\dagger} v_g^{(2)}|_{E_2}.$$

Определим представление $g \rightarrow v_g$ в E , положив

$$v_g = \tilde{v}_g \tilde{P} + v_g^{(1)} P_1 + v_g^{(2)} P_2 + P_0,$$

где $\tilde{P}$ — оператор проектирования на $\tilde{E}$ параллельно $E_1 \dot{+} E_2 \dot{+} E_0$ и P_i — оператор проектирования на E_i параллельно $\tilde{E} \dot{+} E_j \dot{+} E_k$ ($i, j, k = 0, 1, 2; i \neq j, i \neq k, j \neq k$).

Нетрудно показать, что представление $g \rightarrow v_g$ унитарно. Кроме того, в силу определения представления $g \rightarrow v_g$,

$$v_g K = K u_g.$$

Отсюда

$$K^+ v_g^+ = u_g^+ K^+. \quad (5.6)$$

Так как $v_g^+ = v_g^{-1}$, $u_g^+ = \tilde{u}_g^{-1}$, то из (5.6) получаем

$$\tilde{u}_g K^+ = K^+ v_g,$$

и теорема доказана.

Следствие. В условиях и предположениях теоремы (5.4) внешнее представление $g \rightarrow v_g$ может быть взято унитарным, при этом выполняются следующие условия:

1) пространство E разлагается в ортогональную сумму двух подпространств $E_0^c = \tilde{E} \dot{+} E_1 \dot{+} E_2$ и E_0 :

$$E = E_0^c \oplus E_0,$$

причем E_0^c приводит операторы v_g . Кроме того, на E_0^c представление $g \rightarrow v_g$ разлагается в прямую сумму неприводимых представлений, каждое из которых входит либо в представление $g \rightarrow u_g$, либо в $g \rightarrow \tilde{u}_g$, а на E_0 $v_g = I$;

2) подпространство E_0^c приводит $W_\theta(\lambda)$ -х.о.ф. узла θ , при этом $W_\theta(\lambda)|_{E_0} = I$.

Замечание. В случае, когда $\tilde{u} = u$, условие (5.5) означает унитарность внутреннего представления.

Пусть $\theta_i = (A, \underset{u, u}{\sim}, K_i, E_i)$ ($i = 1, 2$) — два предынвариантных операторных узла. Будем говорить, что θ_1 находится в отношении N к узлу θ_2 и писать $\theta_1 N \theta_2$, если один из них может быть получен из другого при помощи операций изоморфизма, нейтрального удлинения и нейтрального сокращения. Очевидно, отношение N является отношением эквивалентности, при этом $N \subset M$. Следовательно, множество предынвариантных операторных узлов разбивается на дизъюнктивное множество классов N -эквивалентности. Под N -минимальным узлом класса N -эквива-

лентности будем понимать тот узел, у которого размерность внешнего пространства минимальна.

Из следствия теоремы (5.2) непосредственно следует

Лемма (5.4). Если $\theta = (A, H_{u,u}^{\sim}, K, E)$ — N -минимальный узел, то подпространство $\Delta_K \subset E$ не вырождено.

Определение. Пусть E — пространство с метрикой. Представим E в виде

$$E = E_+ \oplus E_-,$$

где E_+ и E_- — такие подпространства в E , что для любых ненулевых векторов $f \in E_+$, $g \in E_-$ имеем $(f, f) > 0$, $(g, g) < 0$. Индексом пространства E будем называть пару чисел (m, n) , где $m = \dim E_+$, $n = \dim E_-$. Индексом узла будем называть индекс его внешнего пространства.

Пусть (m_i, n_i) — индексы узлов θ_i ($i = 1, 2$). Будем говорить, что индекс (m_1, n_1) не меньше индекса (m_2, n_2) и писать $(m_1, n_1) \geq (m_2, n_2)$, если $m_1 \geq m_2$, $n_1 \geq n_2$. В частности, если $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, то будем писать $(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$ и считать, что индекс (m_1, n_1) равен индексу (m_2, n_2) .

Из леммы (5.2) следует

Лемма (5.5). Если $\theta_i = (A, H_{u,u}^{\sim}, K_i, E_i)$ ($i = 1, 2$) — два минимальных узла, то индекс узла θ_1 равен индексу узла θ_2 .

Заметим, что из теоремы (5.3) следует

Лемма (5.6). Если $\theta = (A, H_{u,u}^{\sim}, K, E)$ — предынвариантный узел, а $\theta' = (A, H_{u,u}^{\sim}, K', E')$ — минимальный операторный узел, то индекс узла θ не меньше индекса узла θ' .

Теорема (5.5). Предынвариантный узел $\theta = (A, H_{u,u}^{\sim}, K, E)$ N -минимален в том и только в том случае, когда он допускает представление в виде

$$(A, H_{u,u}^{\sim}, \tilde{K} \dot{+} 0, \tilde{E} \dot{\oplus} E_0),$$

где $\theta' = (A, H_{u,u}^{\sim}, \tilde{K}, \tilde{E})$ — минимальный узел, а индекс пространства E_0 равен либо $(m, 0)$ либо $(0, n)$.

Необходимость. Если θ — N -минимальный узел, то по лемме (5.4) его можно представить в виде

$$(A, H_{u,u}^{\sim}, \tilde{K} \dot{+} 0, \tilde{E} \dot{+} E_0), \quad (5.7)$$

где $(A, H_{u,u}^{\sim}, \tilde{K}, \tilde{E})$ — минимальный узел. Если индекс пространства E_0 равен (m, n) , где $m > 0$, $n > 0$, то узел θ допу

скает тривиально нейтральное сокращение, что противоречит его N -минимальности.

Достаточность. Пусть (m, n) — индекс узла θ , а $(\tilde{m}, \tilde{n})$ — узла θ' . Нетрудно видеть, что разность $m - n$ не изменяется при операциях изоморфизма, нейтрального удлинения и нейтрального сокращения. Поэтому, учитывая лемму (5.6), получаем, что сумма $m + n = \dim E$ будет минимальной в классе N -эквивалентности, которому принадлежит узел θ , так как либо $m = \tilde{m}$, либо $n = \tilde{n}$.

Следствие 1. N -минимальный узел определяется по классу N -эквивалентности с точностью до изоморфизма*.

Доказательство. Утверждение следует из представления (5.7) N -минимального узла и леммы (5.2).

Следствие 2. Пусть $\theta_i = (A, \underset{u, u}{N}, K_i, E_i)$ ($i = 1, 2$) — два предынвариантных операторных узла и (m_i, n_i) — индекс узла θ_i . Тогда $\theta_1 N \theta_2$ в том и только в том случае, когда

$$m_1 - n_1 = m_2 - n_2.$$

Полученные в этой статье результаты могут быть применены при исследовании конкретных классов релятивистски-инвариантных семейств операторных узлов и соответствующих им открытых полей. Этому вопросу будет посвящена отдельная статья.

Автор выражает глубокую благодарность своему руководителю М. С. Лившицу за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Лившиц. Операторы, колебания, волны. Изд-во «Наука», 1966.
2. М. С. Бродский. Треугольные и жордановы представления линейных операторов. Изд-во «Наука», 1969.
3. Ч. Кэртис, И. Райнер. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. Изд-во «Наука», 1969.
4. До Хонг Тан. Об эквивалентных операторных узлах. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 7. Изд-во Харьковск. ун-та, 1968.
5. Э. М. Жмудь. Операторные узлы и группы Витта. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 9. Изд-во Харьковск. ун-та, 1969.
6. Ю. П. Гинзбург, И. С. Иохвидов. Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой, УМН, 17,4 106, 1962, 3—56.
7. И. С. Иохвидов, М. Г. Крейн. Спектральная теория операторов в пространстве с индефинитной метрикой. I. Труды Моск. матем. о-ва, 5, 1956, 367—431.

* Постановка этого вопроса и его решение для случая операторных узлов, не подчиненных требованию инвариантности, принадлежит Э. М. Жмудю.

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В БЕСКОНЕЧНОМ СЛОЕ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

И. И. Антыпко

1°. Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} L u(x, t) &\equiv \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - P u(x, t) = 0, \\ u(x, t) &= \{u_1(x, t), \dots, u_n(x, t)\}, \\ x \in R^m, \quad 0 \leq t \leq T, \end{aligned} \quad (1)$$

$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left(P_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)_{i,j=1}^n$ — матрица, элементами которой являются полиномы от $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$ с комплексными коэффициентами.

Решение системы (1) будем искать при краевых условиях

$$\sum_{i=1}^n a_{ki} u_i(x, 0) + \sum_{i=1}^n a_{k, n+i} u_i(x, T) = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (2)$$

где a_{ki} и $a_{k, n+i}$ — комплексные числа.

Ранг матрицы A коэффициентов системы (2) равен n , $A_{1, \dots, n}^{s_1, \dots, s_n}$ — ее базисный минор, $1 \leq s_1 < \dots < s_n \leq 2n$.

Требуется выяснить, какие предположения о росте $u(x, t)$ при $\|x\| \rightarrow \infty$ гарантируют, что решением краевой задачи (1) — (2) может быть лишь функция $u(x, t) \equiv 0$.

В случае, когда краевые условия (2) имеют вид

$$\begin{aligned} u_{k_i}(x, 0) &= 0, \quad 1 \leq k_i \leq n, \quad i = 1, \dots, r, \quad 1 \leq r \leq n-1 \\ u_{m_j}(x, T) &= 0, \quad 1 \leq m_j \leq n, \quad j = 1, \dots, n-r, \end{aligned} \quad (2_0)$$

задача исследована в [1].

2°. Обозначим

$$\begin{aligned} u_1(x, 0) &= u_1(x), \dots, u_n(x, 0) = u_n(x), \\ u_1(x, T) &= u_{n+1}(x), \dots, u_n(x, T) = u_{2n}(x). \end{aligned} \quad (3)$$

$$N = \{p_i, j = 1, \dots, n; p_i \neq s_i; \{p_i\}_{i=1}^n \cup \{s_i\}_{i=1}^n = \{1, \dots, 2n\}\}.$$

Тогда $u_i(x)$, $i \in \bar{N}$ выражаются однозначно в виде линейных комбинаций $u_i(x)$, $i \in N$:

$$u_i(x) = \sum_{k \in N} \hat{a}_{ik} u_k(x), \quad i \in \bar{N} \quad (4)$$

или

$$\sum_{k=1}^{2n} c_{ik} u_k(x) = 0, \quad i \in \bar{N}, \quad (5)$$

причем $c_{ii} = -1$; $c_{ik} = 0$, $k \in \bar{N}$; $c_{ik} = \hat{a}_{ik}$, $k \in N$.

$C = (C_1 C_2)$ — матрица коэффициентов системы (5),

где $C_1 = (c_{si, k})$, $C_2 = (c_{sj, n+k})$, $i, k = 1, \dots, n$.

Пусть $Q(s, t) = \exp \{tP'(-is)\}$, где $P'(-is)$ — матрица, получающаяся из $P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ транспонированием и заменой каждого $\frac{\partial}{\partial x_k}$ на $-is_k$, $k = 1, \dots, m$. Матрица $Q(s, t)$ — квадратная, порядка n , элементами ее являются целые функции порядка роста не выше p_0 , где p_0 — приведенный порядок системы (1) [2].

Определителем $\Delta(s)$ краевой задачи (1) — (2) назовем определитель квадратной матрицы порядка $2n$

$$X = \begin{pmatrix} I & -R(s) \\ C_2 & C_1 \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица порядка n , $R(s) = Q'(s, T)$, C_1 и C_2 — блоки матрицы C .

Краевую задачу (1) — (2) будем, как и в [1], называть невырожденной, если $\Delta(s) \neq 0$, и вырожденной, если $\Delta(s) \equiv 0$. Если Z — множество нулей функции $\Delta(s)$, то типом невырожденной краевой задачи (1) — (2) назовем число $a = \inf_{s=\tau+i\tau\epsilon Z} \|\tau\|$, где $\|\tau\| =$

$$= (\tau_1^2 + \dots + \tau_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Введем в рассмотрение квадратную матрицу

$$D = (d_{ij})_{i,j=1}^{2n}, \quad \text{где}$$

$$d_{sj, k} = c_{sj, k}, \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, 2n,$$

$$d_{pi, k} = \delta_{pi, k}, \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, 2n.$$

Нетрудно видеть, что

$$\det D = (-1)^n. \quad (6)$$

Рассмотрим прямоугольную $n \times 2n$ -матрицу B , строками которой являются столбцы матрицы D с номерами из N :

$$B = (B_1 B_2),$$

где

$$B_1 = (b_{pi, k}), \quad B_2 = (b_{pj, n+k}), \quad i, k = 1, \dots, n,$$

причем $b_{ii} = 1$; $b_{ik} = 0$, $k \in N$; $b_{ik} = c_{ik}$, $k \in \bar{N}$.

Наконец, обозначим Y квадратную матрицу порядка $2n$, имеющую вид

$$Y = \begin{pmatrix} I & Q(s, T) \\ B_1 & B_2 \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица порядка n .

Основной для дальнейшего является следующая

Лемма. Множества нулей определителей $\Delta(s) = \det X$ и $\det Y$ совпадают.

Доказательство. Пусть V — линейное пространство размерности $2n$, $e_1, \dots, e_{2n}$ — ортонормированный базис этого пространства. Строкам и столбцам матрицы D (линейно независимым в силу (6)) поставим в соответствие векторы из V :

$$\underline{f}_i = \sum_{k=1}^{2n} d_{ik} e_k \quad \text{и} \quad \underline{g}_i = \sum_{k=1}^{2n} d_{ki} e_k,$$

$$i = 1, \dots, 2n.$$

Обозначим L_1 подпространство, натянутое на векторы $\underline{f}_{sj}$, $j = 1, \dots, n$, и L_2 — подпространство, натянутое на векторы $\underline{g}_{pj}$, $j = 1, \dots, n$.

Учитывая структуру матрицы D , отметим, что $(\underline{f}_{sj}, \underline{g}_{pr}) = 0$ для любых $s_j \in N$ и $p_r \in N$, $j = 1, \dots, n$, $r = 1, \dots, n$. Следовательно, L_1 и L_2 взаимно-ортогональны, и так как $\dim L_1 = n$ и $\dim L_2 = n$,

$$L_1 \oplus L_2 = V.$$

Обозначим

$$X^* = \begin{pmatrix} -R(s) & I \\ C_1 & C_2 \end{pmatrix}.$$

Первые n строк матрицы $Y : (I \ Q(s, T))$, как и первые n строк матрицы $X^* : (-R(s) \ I)$, — линейно независимы. Обозначим V_1 подпространство, натянутое на $(-R(s) \ I)$, и V_2 — подпространство, натянутое на $(I \ Q(s, T))$. Нетрудно видеть, что V_1 и V_2 взаимно-ортогональны. Поскольку $\dim V_1 = n$ и $\dim V_2 = n$, то

$$V_1 \oplus V_2 = V.$$

Пусть $\det X^* \neq 0$, т. е. $V_1 + L_1 = V$ или $V_1 \cap L_1 = 0$, а $\det Y = 0$. Тогда размерность подпространства $V_2 + L_2$ меньше $2n$, а следовательно, в пространстве V существует вектор $x \neq 0$, ортогональный подпространству $V_2 + L_2$. Значит, $x \in L_1$ и $x \in V_1$, т. е. $x \in V_1 \cap L_1$, что противоречит условию. Полученное противоречие доказывает, что $V_2 + L_2 = V$ и $\det Y \neq 0$.

Пусть теперь $\det X^* = 0$. Значит, $V_1 \cap L_1 \neq 0$, т. е. существует вектор $y \neq 0$, принадлежащий $V_1 \cap L_1$. Размерность подпространства $V_1 + L_1$ меньше $2n$, поэтому в пространстве V найдется вектор $x \neq 0$ из ортогонального дополнения к подпространству $V_1 + L_1$, т. е. $x \in V_2$ и $x \in L_2$, следовательно, $V_2 \cap L_2 \neq 0$, и $\det Y = 0$. Поскольку $|\det X| = |\det X^*|$, то лемма доказана.

3°. Докажем теорему, связывающую вопрос о единственности решения задачи (1)–(2) с вопросом о существовании решения «сопряженной краевой задачи».

(по отношению к задаче (1)–(2)) будем называть задачу решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = -P^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) v(x, t),$$

$$v(x, t) = \{v_1(x, t), \dots, v_n(x, t)\}, \quad x \in R^m, \quad t \in [0, T] \quad (1')$$

при краевых условиях

$$\hat{v}_i(x) + \sum_{k \in N} \hat{a}_{ki} \hat{v}_k(x) = \varphi_i(x), \quad i \in N, \quad (2')$$

где $\varphi_i(x)$ — заданные функции,

$$\begin{aligned} v_i(x, 0) &= v_i(x), & i &= 1, \dots, n, \\ v_i(x, T) &= v_{n+i}(x), & i &= 1, \dots, n \end{aligned} \quad (7)$$

и

$$\hat{v}_i(x) = -v_i(x), \quad \hat{v}_{n+i}(x) = v_{n+i}(x), \quad (8)$$

$$P^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) = \left(P_{ji} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right) \right)_{j, i=1}^n$$

матрица формально сопряженной системы.

Пусть Φ, F — линейные топологические пространства основных функций [3], E — линейное нормированное пространство, Φ, F, E — соответствующие пространства вектор-функций, и пусть выполнены условия

а) $\Phi \subset F \subset E$, $\Phi \subset E$ плотно

б) если $u \in E'$ и $P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u \in E'$, то для любой основной функции $f \in F$ имеет место равенство

$$\left(P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u, f \right) = \left(u, P^* \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) f \right),$$

$$\left((f, g) = \int_{R^m} \sum_{k=1}^n f_k g_k dx_1 \dots dx_m \right),$$

$$f = \{f_1, \dots, f_n\}, \quad g = \{g_1, \dots, g_n\}.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия а) и б) и, кроме того,
 1) для любых функций $\varphi_i(x) \in \Phi$, $i \in N$, «сопряженная краевая задача» (1')—(2') имеет решение $v(x, t)$, причем при любом $t \in [0, T]$ $v(x, t) \in F$;

2) задача Коши

$$Lu(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, t) \in E'$$

имеет лишь тривиальное решение. Тогда любое решение $u(x, t)$ задачи (1)—(2) такое, что $u(x, t) \in E'$, $t \in [0, T]$ тождественно равно нулю.

Доказательство. Пусть $u(x, t) \in E'$ — решение краевой задачи (1)—(2), $\varphi_i(x) \in \Phi$, $i \in N$ — произвольные функции, $v(x, t) \in F$ — решение задачи (1')—(2'). Тогда

$$\int_0^T (Lu, v) dt = (u(x, T), v(x, T)) - (u(x, 0), v(x, 0)) - \\ - \int_0^T \left(u, \frac{\partial v}{\partial t} + P^*v \right) dt = (u(x, T), v(x, T)) - (u(x, 0), v(x, 0)).$$

Учитывая (3), (4), (7), (8), имеем

$$\sum_{i \in N} (u_i(x), \hat{v}_i(x) + \sum_{k \in N} \hat{a}_{ki} \hat{v}_k(x)) = 0.$$

В силу (2'), произвольности $\varphi_i(x)$, $i \in N$, плотности включения $\Phi \subset E$ получаем $u_i(x) \equiv 0$, $i \in N$. Из (4) следует, что и $u_i(x) \equiv 0$, $i \in \bar{N}$. Из условия 2) теоремы теперь вытекает, что $u(x, t) \equiv 0$, $t \in [0, T]$, $x \in R^m$.

Замечание. Краевые условия (2') «сопряженной краевой задачи» обеспечивают выполнение условий $u(x, 0) \equiv 0$ и $u(x, T) \equiv 0$. Для доказательства теоремы 1 достаточно, чтобы $u(x, 0) \equiv 0$ (или $u(x, T) \equiv 0$).

Если каждое из краевых условий (2) связывает значение решений лишь при $x=0$ или $x=T$, то можно ослабить краевые условия «сопряженной задачи», а именно, потребовать, чтобы

$$\hat{v}_i(x) + \sum_{\substack{k \in N \\ 1 \leq k \leq n}} \hat{a}_{ki} \hat{v}_k(x) = \varphi_i(x), \quad i \in N, \quad 1 \leq i \leq n, \quad (9)$$

$$\hat{v}_i(x) + \sum_{\substack{k \in N \\ n+1 \leq k \leq 2n}} \hat{a}_{ki} \hat{v}_k(x) = 0, \quad i \in N, \quad n+1 \leq i \leq 2n,$$

где $\varphi_i(x)$, $i \in N$ — произвольные фиксированные функции. Именно так обстоит дело при исследовании краевой задачи в [1].

Для выяснения вопроса о выполнении условия 1) теоремы 1 воспользуемся методом преобразования Фурье.

Пусть

$$\Psi = F\{\Phi\}, \quad G = F\{F\},$$

$$y(s, t) = F\{v(x, t)\},$$

$$\hat{y}_i(s) = F\{\hat{v}_i(x)\}, \quad \psi_i(s) = F\{\varphi_i(x)\}, \quad i \in N$$

(символ $F\{\dots\}$ означает преобразование Фурье). Преобразование Фурье переводит «сопряженную краевую задачу» в задачу решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром $s = (s_1, \dots, s_m)$

$$\frac{dy(s, t)}{dt} = -P^*(is)y(s, t) \quad (1'')$$

при краевых условиях

$$\hat{y}_i(s) = \sum_{k \in N} \hat{a}_{ki} \hat{y}_k(s) = \psi_i(s), \quad i \in N, \quad (2'')$$

$P^*(is)$ — матрица, получающаяся из $P^*\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ заменой каждого $\frac{\partial}{\partial x_k}$ на is_k , $k = 1, \dots, m$.

Теорема 2. Решение $y(s, t)$ задачи (1'')—(2'') при любых функциях $\psi_i(s)$, $i \in N$, в (2'') существует при всех s , для которых определитель $\Delta(s)$ краевой задачи (1)—(2) отличен от нуля. Это решение представимо в виде

$$y(s, t) = \sum_{i \in N} \Delta_i(s) [\hat{\Delta}(s)]^{-1} \psi_i(s), \quad (10)$$

где $\Delta_i(s)$ — целые вектор-функции порядка роста не выше p_0 (p_0 — приведенный порядок системы (1)), $\hat{\Delta}(s) = \det Y$.

Доказательство. Запишем решение уравнения (1'') в виде

$$y(s, t) = \exp\{(T-t)P^*(is)\}c(s), \quad (11)$$

а вектор $c(s) = \{c_1(s), \dots, c_n(s)\}$ подберем из условия (2').

Получаем, что

$$\sum_{p=1}^n c_p(s) \left\{ b_{i, n+p} - \sum_{k=1}^n b_{ik} q_{kp}(s) \right\} = \psi_i(s), \quad (12)$$

$i \in N$, b_{ir} ($r = 1, \dots, 2n$) — элементы матрицы B , $q_{kp}(s)$ — элементы матрицы $Q(s, T)$. Полученная система имеет единственное решение, если определитель матрицы

$$\left(b_{i, n+p} - \sum_{k=1}^n b_{ik} q_{kp}(s) \right)_{i \in N}^{p=1, \dots, n}$$

отличен от нуля.

Определитель матрицы $B_2 I - B_1 Q(s, T)$ равен определителю матрицы Y [4], следовательно, система (12) имеет единственное решение, поскольку определитель матрицы Y , как и определитель $\Delta(s)$ краевой задачи (1)–(2), отличен от нуля в силу леммы. Решение системы (12) имеет вид

$$c(s) = Y^{-1} \psi(s),$$

где Y^{-1} — матрица, обратная Y , а $\psi(s)$ — n -мерная вектор-функция с компонентами $\psi_i(s)$, $i \in N$, т. е.

$$c(s) = \sum_{i \in N} d_i(s) [\hat{\Delta}(s)]^{-1} \psi_i(s), \quad (13)$$

где $\hat{\Delta}(s) = \det Y$, $d_i(s)$ — целые вектор-функции порядка роста не выше p_0 .

Подставляя (13) в (11), имеем

$$y(s, t) = \sum_{i \in N} \Delta_i(s) [\hat{\Delta}(s)]^{-1} \psi_i(s),$$

$\Delta_i(s)$ — целые вектор-функции s порядка роста не выше p_0 . Теорема доказана.

Из теоремы 2 следует, что для всех s , для которых $\Delta(s) \neq 0$, решение задачи (1)–(2) можно представить в виде (10). Формула (10) аналогична формуле решения двойственной краевой задачи (1)–(2)₀ [1]. С помощью этой формулы, используя теорему 1, мы точно так же, как в [1], приходим к следующим результатам по единственности решения задачи (1)–(2).

Назовем пространством $M_{\alpha, A}(M_{\alpha, A})$ совокупность функций $f(x)$, удовлетворяющих оценке

$$|f(x)| \leq C_f \exp \{A \|x\|^\alpha\}$$

$$\left(|f(x)| \leq C_f \exp \sum_{i=1}^m A_i |x_i|^\alpha, A = \{A_1, \dots, A_m\} \right),$$

и будем говорить, что задача (1)–(2) имеет решение в пространстве $M_{\alpha, A}(M_{\alpha, A})$, если этому пространству принадлежат все компоненты вектор-функции $u(x, t)$ (при каждом $t \in [0, T]$) и их производные, входящие в (1).

Предложение 1. Если $\alpha = \infty$, то краевая задача (1)–(2) имеет лишь тривиальное решение

в пространстве как угодно быстро растущих функций, если $p_0 < 1$;

в пространстве $M_{\alpha, A}$ при любых $\alpha > 0$ и $A > 0$, если $p_0 = 1$;

в пространстве $M_{\frac{p_0}{p_0-1}, A}$, с некоторым $A > 0$, если $p_0 > 1$.

Предложение 2. Если $0 < a < \infty$, то краевая задача (1)—(2) имеет лишь тривиальное решение в пространстве $M_{1,A}$ с любым $A = \{A_1, \dots, A_m\}$, $\|A\| < a$.

Предложение 3. Если $a = 0$ и $\Delta(s)$ не имеет вещественных нулей, то краевая задача (1)—(2) имеет лишь тривиальное решение в пространстве функций

$$K_\mu = \{k(x), x \in R^m\},$$

удовлетворяющих оценке

$$|k(x)| \leq C_k (1 + \|x\|)^\mu,$$

каким бы ни было $\mu > 0$.

Если решение $u(x, t)$ невырожденной задачи (1)—(2) принадлежит пространству $L_1(R^m)$, то оно тождественно равно нулю. (В роли пространств Φ и F используются пространства типа S [3]).

Найдем теперь классы функций, в которых нарушается единственность решения краевой задачи (1)—(2).

Пусть краевая задача (1)—(2) — невырожденная конечного типа, $0 < a < \infty$. Выберем произвольное число $A > a$. Тогда в области $a \leq \|\tau\| \leq A$, $s = \sigma + i\tau$ существует $s_A \in Z$ такой, что $\Delta(s_A) = 0$. Будем, как и в [1], искать решение задачи (1)—(2) в виде

$$u(x, t) = \exp \{-i(s_A, x)\} z(t).$$

Тогда из (1)—(2) получаем, что

$$z(t) = \exp \{tP(is_A)\} \zeta,$$

а компоненты вектора $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_n\}$ удовлетворяют системе

$$\sum_{j=1}^n \zeta_j \left\{ c_{ij} + \sum_{p=1}^n c_{i, n+p} r_{pj}(s_A) \right\} = 0, \quad (14)$$

$i \in N$, c_{ij} ($j = 1, \dots, 2n$) — элементы матрицы C , $r_{pj}(s)$ — элементы матрицы $R(s)$. Определитель системы (14) — это определитель матрицы $C_1 I + C_2 R(s_A)$, он равен $\det X$ при $s = s_A$. Так как по предположению $\Delta(s_A) = 0$, то система (14) имеет отличные от тождественного нуля решения, удовлетворяющие оценке

$$|u_i(x, t)| \leq |z_i(t)| \exp \left\{ \sum_{i=1}^m A_i |x_i| \right\},$$

где $A_i = |\operatorname{Im} s_A|_i$.

Предложение 4. Если $0 < a < \infty$, то каким бы ни было $A > a$, существует вектор A , $a \leq \|A\| \leq A$, такой, что задача (1)—(2) имеет нетривиальное решение в пространстве $M_{1,A}$. Если, кроме того, известно, что существует $s_a \in Z$, $\|\operatorname{Im} s_a\| = a$, то задача (1)—(2) имеет нетривиальное решение в некотором пространстве $M_{1,A}$, где $\|A\| = a$.

Аналогично устанавливаются теоремы неединственности для краевой задачи (1)–(2) нулевого типа и вырожденной краевой задачи.

Предложение 5. Если $a = 0$, то каким бы ни было $\varepsilon > 0$, задача (1)–(2) имеет нетривиальное решение в пространстве $M_{1,\varepsilon}$. Если $\Delta(s)$ имеет вещественные нули, то задача (1)–(2) имеет нетривиальное решение в пространстве ограниченных функций.

Предложение 6. Пусть $\Delta(s) \equiv 0$, тогда задача (1)–(2) имеет нетривиальное решение

в пространстве $M_{\frac{p_0}{p_0-1}}$ при некотором $A < 0$, если $p_0 > 1$;

в пространстве $M_{\alpha, A}$ при любых $\alpha > 0$ и $A < 0$, если $p_0 = 1$; если $p_0 = 1$ и $s = \sigma (s = \sigma + i\tau)$ и если $p_0 < 1$, то существуют финитные решения $u(x, t) \not\equiv 0$ задачи (1)–(2).

4°. В этом пункте мы исследуем вопрос о том, как изменение краевых условий (2) (коэффициентов матрицы A) может влиять на характер задачи (1)–(2).

Будем рассматривать уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t),$$

$$x \in R^m, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (15)$$

$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ — многочлен с комплексными коэффициентами от $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_m}$, при краевых условиях

$$a_{11}u(x, 0) + a_{12}\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + a_{13}u(x, T) + a_{14}\frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = 0,$$

$$a_{21}u(x, 0) + a_{22}\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + a_{23}u(x, T) + a_{24}\frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = 0, \quad (16)$$

$a_{ik} (i = 1, 2, k = 1, 2, 3, 4)$ — комплексные числа. Ранг матрицы краевых условий равен 2. Нетрудно посчитать, что определитель задачи (15)–(16)

$$\Delta(s) = C^{12} + C^{34} + P^{-\frac{1}{2}}(-is) C^{13} \operatorname{sh} TP^{\frac{1}{2}}(-is) -$$

$$- P^{\frac{1}{2}}(-is) C^{24} \operatorname{sh} TP^{\frac{1}{2}}(-is) + (C^{14} - C^{23}) \operatorname{ch} TP^{\frac{1}{2}}(-is),$$

где $C^{ik}, i = 1, 2, k = 1, 2, 3, 4$ — миноры второго порядка матрицы.

В силу линейной независимости функций $1, \operatorname{ch} z, z^{-1} \operatorname{sh} z, z \operatorname{sh} z$, $\Delta(s) \equiv 0$ в том и только том случае, когда

$$C^{12} = -C^{34}, \quad C^{13} = 0, \quad C^{24} = 0, \quad C^{14} = C^{23}. \quad (17)$$

Минор второго порядка матрицы C , номера столбцов которого не принадлежат N , имеет вид $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$. Рассматривая все-

возможные положения этого минора в матрице C и учитывая (17), получаем, что роль этого минора могут играть миноры C^{12} , C^{14} , C^{23} , C^{34} , краевые условия при этом имеют вид:

$$u(x, 0) - u(x, T) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = 0$$

или

$$u(x, 0) + u(x, T) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} - \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} = 0. \quad (18)$$

Легко видеть, что $\Delta(s) \neq 0$ в том и только в том случае, когда

$$C^{12} \neq -C^{34}, \quad C^{13} = 0, \quad C^{24} = 0, \quad C^{14} = C^{23}. \quad (19)$$

В этом случае миноры C^{13} и C^{24} не могут иметь вид $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$.

В силу (19) получаем, что краевые условия имеют вид

$$\begin{aligned} u(x, 0) - au(x, T) &= 0, \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} + a \frac{\partial u(x, T)}{\partial t} &= 0, \end{aligned} \quad (20)$$

a — любое число, отличное от ± 1 .

Таким образом доказаны теоремы.

Теорема 3. Для того, чтобы краевая задача (15)–(16) была вырожденной, необходимо и достаточно, чтобы краевые условия (16) имели вид (18).

Теорема 4. Краевая задача (15)–(16) имеет бесконечный тип в том и только том случае, если краевые условия (16) имеют вид (20).

Из теоремы 3 и теоремы 4, а также работы [1], в которой изучен только случай локального задания краевых условий (см. (2)), вытекает предположение, что задача (1)–(2) может быть вырожденной только в случае, когда условия (2) являются каноническими. Однако в общем случае это не так, что подтверждает следующий пример: рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial t} &= P_1 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u_1(x, t), \\ \frac{\partial u_2(x, t)}{\partial t} &= P_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u_1(x, t) \end{aligned} \quad (21)$$

при краевых условиях

$$\begin{aligned} au_1(x, 0) - u_2(x, 0) + u_2(x, T) &= 0, \\ bu_1(x, 0) - u_1(x, T) &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

где a и b — любые комплексные числа.

Матрица X задачи (21)—(22) имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -e^{TP_1(-is)} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{P_2(-is)}{P_1(-is)}(e^{TP_1(-is)} - 1) & -1 \\ 0 & 1 & a & -1 \\ -1 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидно, что $\det X \equiv 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Борок. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений. «Матем. сб.», № 6, 1969.
2. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. ГИФМЛ, 1958, стр. 51.
3. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шиллов. Пространства основных и обобщенных функций. ГИФМЛ, 1958.
4. Ф. Р. Гантмахер. Теория матриц. ГИФМЛ, 1967, стр. 59.

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫМИ БЫСТРО- РАСТУЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В. С. Рыжий

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^n u(x, t)}{\partial x^n} + \sum_{k=0}^{n-1} q_k(x) \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k}, \quad (1)$$

где $n \geq 2$, $-\infty < x < \infty$, $0 \leq t < \infty$, $a \neq 0$ — комплексное число, $q_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) — комплекснозначные функции,

$$u(x, 0) = 0. \quad (2)$$

Пусть $q(x) \equiv q_0(x) = v_1(x) + iv_2(x)$. Считая $v_2(x) \neq 0$, установим некоторые классы единственности и близко примыкающие к ним классы неединственности решений задачи (1)—(2). Условия, налагаемые ниже на коэффициент $q(x)$, не ограничивают сверху его порядок роста при $|x| \rightarrow \infty$, а рост остальных коэффициентов подчинен росту $q(x)$. Я. И. Житомирский исследовал случай $v_2(x) \equiv 0$ [1] и случай, когда $v_2(x) \neq 0$ и коэффициенты уравнения (1) имеют «медленный» рост [2].

Будем говорить, что выполняется условие A , если $1^\circ v_1(x)$ и $v_2(x)$ — вещественные дважды непрерывно дифференцируемые функции,

$$2^\circ |q'(x)|^2 |q(x)|^{-(2+\frac{1}{n})} \text{ и } |q''(x)| |q(x)|^{-(1+\frac{1}{n})}$$