

И. М. ГЛАЗМАН (Харьков)

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ РЕШЕНИЙ
КЛАССИЧЕСКОЙ ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

В предлагаемой заметке приводится характеристика выпуклой оболочки множества канонических решений степенной проблемы моментов в интервале $(-\infty, +\infty)$ с помощью функций класса Неванлинна (N -функций)*).

1. В дальнейшем используются следующие сведения из теории моментов^{1,2,3,4}.

Пусть N — класс всех N -функций, дополненный функцией $\tau(z) \equiv \infty$, и V — совокупность всех решений $\sigma(t)$ ($\sigma(-\infty) = 0$, $\sigma(t) = \sigma(t-0)$) проблемы моментов

$$s_k = \int_{-\infty}^{+\infty} t^k d\sigma(t) \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

в неопределённом случае.

Совокупность всех решений $\sigma(t)$ даётся формулой**)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z} = \frac{p_0(z) + p_1(z)\tau(z)}{q_0(z) + q_1(z)\tau(z)} \quad (\operatorname{Im} z > 0), \quad (1)$$

где $p_i(z)$, $q_i(z)$ ($i = 0, 1$) — целые трансцендентные функции, построенные по заданным моментам s_k ($k = 0, 1, 2, \dots$), а $\tau(z)$ — произвольная N -функция; формула (1) устанавливает взаимно однозначное соответствие между V и N .

Из соотношений, связывающих $p_i(z)$, $q_i(z)$ ($i = 0, 1$), отметим

$$p_0(z)q_1(z) - q_0(z)p_1(z) \equiv 1, \quad (2)$$

$$q_0(z)\overline{q_1(z)} - q_1(z)\overline{q_0(z)} = (z - \bar{z}) \sum_{k=0}^{\infty} |D_k(z)|^2, \quad (3)$$

где $\{D_k(t)\}_0^\infty$ — последовательность полиномов, полученная ортонормированием последовательности $\{t^k\}_0^\infty$ по метрике, определяемой скалярным произведением $(t^i, t^k) = s_{i+k}$.

Решения $\sigma_\tau(t)$, соответствующие согласно формуле (1) вещественным постоянным $\tau(z) \equiv \tau$ ($-\infty < \tau \leq +\infty$), называются каноническими.

Отметим, что функция $q_1(z)$ не имеет не вещественных нулей, ибо, полагая в (1) $\tau(z) \equiv \infty$, получим

$$\frac{p_1(z)}{q_1(z)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_\infty(t)}{t-z},$$

*) То-есть функций $F(z)$, голоморфных внутри верхней полуплоскости и удовлетворяющих условию $\operatorname{Im} F(z) \geq 0$ при $\operatorname{Im} z > 0$.

**) Эта теорема принадлежит Неванлинна. Её доказательство содержится в статье Н. И. Ахизера из настоящего сборника.

и предположение $q_1(z_0) = 0$ ($\operatorname{Im} z_0 \neq 0$) влечёт $p_1(z_0) = 0$, что противоречит (2). Из последнего обстоятельства и (3) следует, что функция

$$\frac{q_0(z)}{q_1(z)}$$

принадлежит классу N .

2. Условимся называть N -функцию $F(z)$ функцией типа резольвенты, если она допускает представление

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t-z}, \quad (4)$$

где $\mu(t)$ — неубывающая функция с вариацией $\mu(+\infty) - \mu(-\infty) = 1^*$.

Лемма. Для N -функции $F(z)$ типа резольвенты имеет место оценка

$$\frac{\operatorname{Im} F(z)}{\operatorname{Im} z} \geq |F(z)|^2.$$

Для доказательства достаточно использовать представление (4) и неравенство Буняковского:

$$\frac{\operatorname{Im} F(z)}{\operatorname{Im} z} = \frac{1}{z-\bar{z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z-\bar{z}}{|t-z|^2} d\mu(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{|t-z|^2} \geq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{t-z} \right|^2 = |F(z)|^2.$$

Из леммы следует, что если $F(z)$ — N -функция типа резольвенты, то функция

$$\tau(z) = - \left[\frac{1}{F(z)} \nabla z \right]$$

принадлежит классу N , ибо

$$\operatorname{Im} \tau(z) = \frac{\operatorname{Im} F(z) - |F(z)|^2 \operatorname{Im} z}{|F(z)|^2} \geq 0.$$

Определение 1. Совокупность решений проблемы моментов вида

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma_\tau(t) d\mu(\tau),$$

где $\sigma_\tau(t)$ — однопараметрическое семейство канонических решений, а $\mu(\tau)$ — произвольная неубывающая функция с вариацией

$$\mu(+\infty) - \mu(-\infty) = 1,$$

называется выпуклой оболочкой канонических решений.

Теорема 1. Для того чтобы решение проблемы моментов $\sigma(t)$ принадлежало выпуклой оболочке канонических решений, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая N -функция $\tau(z)$ в представлении (1) имела вид

$$\tau(z) = \frac{1}{F(v)} + v, \quad (5)$$

*) Для того чтобы N -функция принадлежала к типу резольвенты, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} iyF(iy) = -1 \quad (y = \operatorname{Im} z)$$

где $F(v)$ — произвольная N -функция типа резольвенты от v , а v — функция от z , определяемая равенством

$$v = -\frac{q_0(z)}{q_1(z)},$$

Доказательство. Пусть решение $\sigma(t)$ принадлежит выпуклой оболочке канонических решений.

Положим

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{t-z}$$

и определим функцию $\tau(z)$ равенством

$$w = \frac{p_0(z) + p_1(z)\tau(z)}{q_0(z) + q_1(z)\tau(z)},$$

откуда

$$\tau(z) = \frac{p_0(z) - q_0(z)w}{q_1(z)w - p_1(z)}. \quad (6)$$

Положим, далее,

$$w_\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_\tau(t)}{t-z},$$

где $\sigma_\tau(t)$ — семейство канонических решений.

Заменяя в (6) w согласно равенствам

$$w = \int_{-\infty}^{+\infty} w_\tau d\mu(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_0(z) + p_1(z)\tau}{q_0(z) + q_1(z)\tau} d\mu(\tau),$$

получим

$$\begin{aligned} \tau(z) &= \frac{p_0(z) - q_0(z) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_0(z) + p_1(z)\tau}{q_0(z) + q_1(z)\tau} d\mu(\tau)}{q_1(z) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p_0(z) + p_1(z)\tau}{q_0(z) + q_1(z)\tau} d\mu(\tau) - p_1(z)} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tau d\mu(\tau)}{q_0(z) + q_1(z)\tau}}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{q_0(z) + q_1(z)\tau}} = \frac{1 + vF(v)}{F(v)} = \frac{1}{F(v)} + v, \end{aligned}$$

где

$$F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau - v}.$$

Обращая ход выкладок, получим, что любой функции вида (5) соответствует по формуле (1) решение $\sigma(t)$, принадлежащее выпуклой оболочке канонических решений.

3. Результат п. 2 допускает обобщение на простые³ эрмитовы операторы с индексом дефекта (n, n) ($n < \infty$).

Определение 2. Пусть A — эрмитов оператор с индексом дефекта $(1, 1)$ и $E_i^{(\tau)}$ — однопараметрическое семейство ортогональных

спектральных функций самосопряжённых расширений 1-го рода⁶ $A_\tau (A_\tau \supset A)$. Совокупность обобщённых спектральных функций оператора A вида

$$F_t = \int_{-\infty}^{+\infty} E_t^{(\tau)} d\mu(\tau),$$

где $\mu(\tau)$ — неубывающая функция с вариацией $\mu(+\infty) - \mu(-\infty) = 1$, называется выпуклой оболочкой ортогональных спектральных функций.

Аналогично определяется выпуклая оболочка ортогональных спектральных функций в случае индекса дефекта (n, n) ($n < \infty$).

Использование результатов М. Г. Крейна по теории эрмитовых операторов с индексом дефекта (n, n) ($n < \infty$)⁶ и результатов М. А. Наймарка, относящихся к интегральному представлению положительно определённых операторных функций⁷, позволяет естественным образом перенести теорему 1 на случай индекса дефекта (n, n) ($n < \infty$).

В заключение следует заметить, что если масштабный элемент³ (масштабный базис) эрмитового оператора с индексом дефекта $(1, 1)$ $|(n, n)|$ принадлежит некоторому дефектному подпространству, то функция, соответствующая функции $v = -\frac{q_0(z)}{q_1(z)}$ теоремы 1, совпадает (с точностью до дробно-линейного преобразования) с характеристической функцией (матрицей-функцией) Лившица⁸.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Ахизер и М. Крейн, О некоторых вопросах теории моментов, ГОНТИ — ДНТВУ, Харьков, 1938.
2. Н. И. Ахизер, Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов, «Успехи матем. наук», 1941, вып. IX.
3. М. Крейн, ДАН, 1944, XLIII, № 8, XLIV, № 5, № 6.
4. М. Г. Крейн и М. А. Красносельский, Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов и некоторые их применения к теории ортогональных полиномов и проблеме моментов, «Успехи матем. наук», 1947, т. II, вып. 3 (19).
5. М. А. Наймарк, «Изв. АН СССР», серия матем., 1940, т. 4, № 1, № 3.
6. М. Крейн, ДАН, 1946, LI, № 8.
7. М. А. Наймарк, «Изв. АН СССР», серия матем., 1943, т. 7, № 5.
8. М. С. Лившиц, «Матем. сборник», 1946, т. 19 (61), 2; ДАН, 1947, LVII, № 1.