

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ В.Н.КАРАЗІНА

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДЛЯ СТУДЕНТІВ 1 КУРСУ ЕКОЛОГІЧНОГО
ФАКУЛЬТЕТУ (семестр 1, модулі 1 – 2)**

Харків - 2009

УДК 51 (075.8)

ББК 22.1я73

Л 63

*Друкується за рішенням вченої ради механіко-математичного факультету
Харківського національного університету імені В.Н.Каразіна
(протокол №8 від 18 вересня 2009 року)*

Рецензенти: кандидат фіз.-мат. наук, доцент Анощенко О.О.

Кандидат фіз.-мат. наук, доцент Горох В.П.

Л 63

Вища математика: Методичні вказівки для студентів-екологів 1 курсу екологічного факультету (семестр 1, модулі 1 – 2)/

Укладачі: Лисиця В.Т., Якуба М.О. – Х.: ХНУ імені В.Н.Каразіна, 2009. – 80 с.

Дане видання є збірником практичних завдань з вищої математики для студентів-екологів 1 курсу.

У збірнику наведено необхідні теоретичні відомості, приклади контрольних робіт, надано індивідуальні завдання та приклади їх рішення для проведення модульного контролю знань студентів.

Мета збірника – дати студентам можливість більш якісно засвоїти програмний курс вищої математики та підготуватися до складання заліків за кредитно-модульною системою оцінювання знань.

УДК 51 (075.8)

ББК 22.1я73

© Харківський національний університет
імені В.Н.Каразіна, 2009

© Лисиця В.Т., Якуба М.О., 2009

ЗМІСТ

	Стор.
Вступ	4
Модуль 1.....	5
<i>Програма модуля 1.....</i>	<i>5</i>
<i>Зразки варіантів контрольної роботи.....</i>	<i>5</i>
<i>Індивідуальне завдання.....</i>	<i>7</i>
<i>Необхідні теоретичні відомості.....</i>	<i>11</i>
<i>Зразок виконання індивідуального завдання.....</i>	<i>23</i>
Модуль 2.....	31
<i>Програма модуля 2.....</i>	<i>31</i>
<i>Зразки варіантів контрольної роботи.....</i>	<i>31</i>
<i>Індивідуальне завдання.....</i>	<i>33</i>
<i>Необхідні теоретичні відомості.....</i>	<i>39</i>
<i>Зразок виконання індивідуального завдання.....</i>	<i>47</i>
Задачі для самостійної підготовки.....	56
Відповіді до задач для самостійної підготовки.....	75
Література.....	79

ВСТУП

Еволюція сучасної науки характеризується глибоким проникненням математики у різні сфери наукової думки – від гуманітарних дисциплін (соціологія, прикладна лінгвістика) до дисциплін природно-наукового напрямку (геологія, екологія, медицина, біологія, хімія). Студентам-екологам особливо необхідна серйозна математична підготовка, за допомогою якої можна більш глибоко досліджувати екологічні проблеми, використовувати математичні моделі на практиці.

Дані методичні вказівки складені у відповідності з програмою з вищої математики для студентів першого курсу екологічного факультету спеціальності “екологія” і охоплюють матеріал першого семестру. Матеріал першого семестру розбито на два логічно завершених модуля. До кожного модуля наведено теоретичні питання, які входять до програми курсу “Вища математика” і відповідають даному модулю. В методичних вказівках дано приклади контрольних робіт, наведено індивідуальні завдання та зразки виконання індивідуальних завдань до кожного модуля.

Для успішного складання модуля студентам необхідно написати контрольну роботу, захистити індивідуальне завдання та написати підсумкову модульну контрольну роботу.

В методичних вказівках пропонуються задачі для самостійної підготовки, до більшості з яких надано відповіді.

МОДУЛЬ 1

Програма модуля 1

1. Множини і дії над ними. Числові множини. Дійсні числа і числова вісь. Декартові координати на площині, у просторі та їх застосування до найпростіших задач аналітичної геометрії. Криволінійні координати.

2. Визначники другого та третього порядку. Розв'язання лінійних алгебраїчних систем рівнянь.

3. Лінійні операції над векторами. Колінеарні та компланарні вектори. Скалярний і векторний добуток векторів. Мішаний добуток векторів.

4. Рівняння лінії на площині. Пряма лінія на площині. Кут між двома прямими, умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.

Зразки варіантів контрольної роботи

Варіант №1

1. Написати рівняння кола, яке проходить через точку $B(2; -1)$, а його центр знаходиться в точці $A(-1; 3)$.

2. Дано вершини трикутника ABC : $A(2; 3; 6)$, $B(3; -2; 1)$, $C(0; 4; 3)$.

Знайти:

а) координати середини сторони BC ;

б) координати точки перетину медіан трикутника.

3. Знайти декартові координати точки A , якщо її полярні координати є

$(5; \frac{2}{3}\pi)$.

Варіант №2

1. Знайти координати центра та радіус кола, заданого рівнянням:

$$x^2 + y^2 - 5x + 3y - 2 = 0$$

2. Дано вершини трикутника A , C та середина M сторони BC : $A(-2; 1; 5)$, $C(4; 2; 1)$, $M(0; 4; 3)$.

Знайти:

а) третю вершину В трикутника ABC;

б) координати точки перетину медіан.

3. Знайти полярні координати точки А, якщо її декартові координати є $(\frac{5}{2}; \frac{5\sqrt{3}}{2})$.

Варіант №3

1. Написати рівняння кола, яке дотикається осі Оу, а його центр знаходиться в точці А(-2; 5).

2. Дано три послідовні вершини А, В, С паралелограма ABCD: А(2; 3; 6), В(3; -2; 1), С(0; 4; 3).

Знайти:

а) координати вершини D;

б) координати точки перетину діагоналей.

3. Знайти полярні координати точки А, якщо дано її декартові координати: $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2})$.

Варіант №4

1. Написати рівняння кола, для якого відрізок АВ буде діаметром: А(3; -2), В(-1; 6).

2. Дано три послідовні вершини трапеції ABCD: А(1; -2; 3), В(-3; 4; 2), С(2; -1; 1). Відомо, що ВС та AD – основи трапеції і $AD=3 \cdot BC$.

Знайти:

а) координати вершини D;

б) координати точки перетину діагоналей трапеції.

3. Знайти циліндричні координати точки А, якщо її дано її декартові координати: (3; -3; 4).

Варіант №5

1. Написати рівняння кола, центр якого знаходиться у першій чверті, його радіус дорівнює 5, а коло дотикається осі Ox у точці $(3; 0)$.

2. Дано вершини $A(3; 2; -2)$, $B(-1; 1; 3)$ паралелограма $ABCD$ та середина $E(4; -1; 2)$ сторони CD .

Знайти:

а) координати точки перетину діагоналей паралелограма;

б) координати вершин C і D .

3. Знайти декартові координати точки, якщо дано її циліндричні координати: $(4; \frac{\pi}{4}; 7)$.

Індивідуальне завдання.

I. Знайти центр та радіус сфери:

1. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 4y + 5z - 2 = 0$.

2. $x^2 + y^2 + z^2 + 5x - 6y + z - 3 = 0$.

3. $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + 5z + 1 = 0$.

4. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 3y - z - 5 = 0$.

5. $x^2 + y^2 + z^2 - x + 5y + 4z + 2 = 0$.

6. $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 2y + 7z + 3 = 0$.

7. $x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y + z - 2 = 0$.

8. $x^2 + y^2 + z^2 - 5x + y + 6z + 4 = 0$.

9. $x^2 + y^2 + z^2 - 9x + 2y - 3z + 5 = 0$.

10. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 5z - 3 = 0$.

11. $x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 3y + z + 4 = 0$.

12. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 5y + 5z + 5 = 0$.

13. $x^2 + y^2 + z^2 - 7x + y - 4z - 2 = 0$.

14. $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 7y + 3z - 3 = 0$.

15. $x^2 + y^2 + z^2 + 3x + 6y + 3z + 1 = 0$.

16. $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + y - 3z + 5 = 0$.

17. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y + 5z + 7 = 0$.

18. $x^2 + y^2 + z^2 - x + 8y + 3z - 4 = 0$.

19. $x^2 + y^2 + z^2 + x + 6y - 5z + 5 = 0$.

20. $x^2 + y^2 + z^2 - 5x + 3y + 2z - 1 = 0$.

21. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 7y + z + 5 = 0$.

22. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 5y - z - 1 = 0$.

23. $x^2 + y^2 + z^2 + 7x - y + 5z + 4 = 0$.

24. $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 4y + 9z + 6 = 0$.

25. $x^2 + y^2 + z^2 + 6x + y - 5z - 7 = 0$.

26. $x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 2y + 5z + \frac{1}{2} = 0$.

$$27. x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 5y - 3z + \frac{11}{2} = 0. \quad 28. x^2 + y^2 + z^2 + x - 3y + 6z + \frac{21}{2} = 0.$$

$$29. x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 6y + z + \frac{5}{2} = 0. \quad 30. x^2 + y^2 + z^2 + 5x - y - 4z + \frac{13}{2} = 0.$$

II. Дано вершини піраміди A, B, C, D. Точка F – точка перетину медіан грані BCD, точка E – середина ребра AD, точка G – середина ребра BC. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AG}$; б) косинус кута CAB; в) об'єм піраміди ABCD; г) площу грані ABC; д) висоту DH піраміди ABCD, яка опущена на грань ABC; е) вектор $\vec{a}$, який перпендикулярний векторам $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, має довжину 1 і такий, що трійка векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\vec{a}$ – права.

1. A(3; 2; -1), B(1; 3; 1), C(1; 3; 2), D(3; 0; 4).
2. A(5; 4; 3), B(3; 2; 2), C(2; 1; 0), D(4; 2; 4).
3. A(3; 0; 4), B(6; 3; 2), C(-2; -1; 1), D(5; 3; -2).
4. A(-2; 2; 4), B(-3; 5; 2), C(4; 6; 1), D(3; 1; 2).
5. A(4; -2; 1), B(2; -3; 2), C(3; 2; 1), D(3; 4; -2).
6. A(4; 4; -2), B(2; 5; 0), C(2; 5; 1), D(4; 2; 3).
7. A(6; 6; 2), B(4; 4; 1), C(3; 3; -1), D(5; 4; 3).
8. A(4; 2; 3), B(7; 5; 1), C(-1; 1; 0), D(6; 5; -3).
9. A(-1; 4; 3), B(-2; 7; 1), C(5; 8; 0), D(4; 3; 1).
10. A(5; 0; 0), B(3; -1; 1), C(4; 4; 0), D(4; 6; -3).
11. A(2; 5; 0), B(0; 6; 2), C(0; 6; 3), D(2; 3; 5).
12. A(4; 7; 4), B(2; 5; 3), C(1; 4; 1), D(3; 5; 5).
13. A(2; 3; 5), B(5; 6; 3), C(-3; 2; 2), D(4; 6; -1).
14. A(-3; 5; 5), B(-4; 8; 3), C(3; 9; 2), D(2; 4; 3).
15. A(3; 1; 2), B(1; 0; 3), C(2; 5; 2), D(2; 7; -1).
16. A(5; 0; 2), B(3; 1; 4), C(3; 1; 5), D(5; -2; 7).
17. A(7; 2; 6), B(5; 0; 5), C(4; -1; 3), D(6; 0; 7).
18. A(5; -2; 7), B(8; 1; 5), C(0; -3; 4), D(7; 1; 1).
19. A(0; 0; 7), B(-1; 3; 5), C(6; 4; 4), D(5; -1; 5).

20. A(6; -4; 4), B(4; -5; 5), C(5; 0; 4), D(5; 2; 1).
21. A(0; 4; 0), B(-2; 5; 2), C(-2; 5; 3), D(0; 2; 5).
22. A(2; 6; 4), B(0; 4; 3), C(-1; 3; 1), D(1; 4; 5).
23. A(0; 2; 5), B(3; 5; 3), C(-5; 1; 2), D(2; 5; -1).
24. A(-5; 4; 5), B(-6; 7; 3), C(1; 8; 2), D(0; 3; 3).
25. A(1; 0; 2), B(-1; -1; 3), C(0; 4; 2), D(0; 6; -1).
26. A(-3; 5; -2), B(-5; 6; 0), C(-5; 6; 1), D(-1; 3; 3).
27. A(-1; 7; 2), B(-3; 5; 1), C(-4; 4; -1), D(-2; 5; 3).
28. A(-3; 3; 3), B(0; 6; 1), C(-8; 2; 0), D(-1; 6; -3).
29. A(-8; 5; 3), B(-9; 8; 1), C(-2; 9; 0), D(-3; 4; 1).
30. A(-2; 1; 0), B(-4; 0; 1), C(-3; 5; 0), D(-3; 7; -3).

III. Вирішити систему рівнянь:

а) за допомогою правила Крамера;

б) методом Гауса.

$$1. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 3. \end{cases} \quad 9. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = -4. \end{cases} \quad 11. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases} \quad 12. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2, \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases} \quad 14. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 5. \end{cases} \quad 15. \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -6, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases} \quad 17. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -4. \end{cases} \quad 18. \begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases} \quad 20. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases} \quad 21. \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2, \\ -x_1 - x_2 - x_3 = -1. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -4. \end{cases} \quad 23. \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3. \end{cases} \quad 24. \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases} \quad 26. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -13, \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 19, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -15. \end{cases} \quad 27. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 19, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -3, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -3. \end{cases} \quad 29. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -6, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases} \quad 30. \begin{cases} -2x_1 - x_2 + 3x_3 = -9, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 = -1. \end{cases}$$

IV. Дано вершини трикутника ABC. Знайти:

а) рівняння сторони BC; б) рівняння висоти AD; в) рівняння медіани AM;
г) довжини сторін трикутника, довжину медіани AM та висоти AD; д) площу трикутника; е) зробити рисунок.

1. A(-3; -2), B(0; 10), C(6; 2). 2. A(1; 1), B(4; 13), C(10; 5). 3. A(0; 3), B(3; 15), C(9; 7). 4. A(-2; 0), B(1; 12), C(7; 4). 5. A(2; -1), B(5; 11), C(11; 3). 6. A(3; -3), B(6; 9), C(12; 1). 7. A(-1; 2), B(2; 14), C(8; 6). 8. A(9; -14), B(8; 8), C(14; 0).

9. A(-4; 5), B(-1; 17), C(5; 9). 10. A(4; 4), B(7; 16), C(13; 8). 11. A(-4; 0), B(-1; 12), C(5; 4). 12. A(0; 3), B(3; 15), C(9; 7). 13. A(-1; 5), B(2; 17), C(8; 9). 14. A(-3; 2), B(0; 14), C(6; 6). 15. A(1; 1), B(4; 13), C(10; 5). 16. A(2; -1), B(5; 11), C(11; 3). 17. A(-2; 4), B(1; 16), C(7; 8). 18. A(8; -12), B(7; 10), C(13; 2). 19. A(-5; 7), B(-2; 19), C(4; 11). 20. A(2; 2), B(2; 14), C(11; 6). 21. A(0; -1), B(3; 11), C(9; 3). 22. A(4; -2), B(7; 10), C(13; 2). 23. A(3; -4), B(8; 8), C(14; 0). 24. A(1; 1), B(4; 13), C(10; 5). 25. A(11; -15), B(10; 7), C(16; -1). 26. A(-1; -3), B(2; 9), C(8; 1). 27. A(3; 0), B(6; 12), C(12; 4). 28. A(2; 2), B(5; 14), C(11; 6). 29. A(0; -1), B(3; 11), C(9; 3). 30. A(4; -2), B(7; 10), C(13; 2).

Необхідні теоретичні відомості

Декартові координати

Пряма лінія називається **числовою віссю** (або просто **віссю**), якщо на ній вказано додатній напрям, початок координат і вибрано одиницю вимірювання довжин відрізків (масштаб).

Відрізок на осі, обмежений точками А і В, називається **напрямленим**, якщо вказано, яка з його граничних точок є початком, а яка – кінцем. Якщо у напрямленого відрізка початок і кінець співпадають, то він називається **нульовим** напрямленим відрізком.

Позначатимемо напрямлений відрізок з початком у точці А і кінцем у точці В як $\overrightarrow{AB}$. На малюнках напрямлені відрізки зображаються стрілкою (рис. 1).

Кожному напрямленому відрізку ставиться у відповідність його числова характеристика – величина напрямленого відрізка.

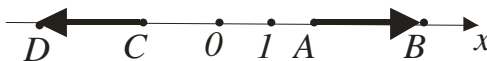


Рис. 1

Величиною напрямленого відрізка $\overrightarrow{AB}$ називається число, рівне довжині відрізка АВ, узятій зі знаком "+", якщо напрям $\overrightarrow{AB}$ співпадає з напрямом осі, і зі знаком "-", якщо напрям $\overrightarrow{AB}$ протилежний напрям осі. Величини усіх нульових напрямлених відрізків вважаються рівними нулю.

Вкажемо додатній напрямок на прямій, початок координат O та одиницю вимірювання. Візьмемо довільну точку M на прямій. **Декартовою координатою** x точки M на прямій називатимемо величину напрямленого відрізка $\overrightarrow{OM}$.

Проведемо на площині дві взаємно перпендикулярні прямі, які перетинаються у точці O . Точка O – початок координат на кожній з прямих. На кожній з цих прямих вкажемо додатній напрям і виберемо однаковий масштаб. Кожна з цих прямих буде тепер числовою віссю. Одну з цих осей назвемо віссю Ox (віссю абсцис), а іншу – віссю Oy (віссю ординат). Ці дві осі утворюють декартову прямокутну систему координат на площині. Називаються ці осі координатними осями (Рис. 2). Нехай тепер M – довільна точка на площині. Позначимо через M_x і M_y проєкції точки M на осі Ox і Oy відповідно.

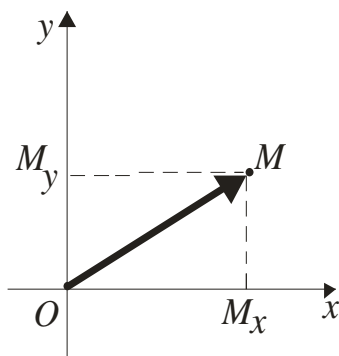


Рис. 2

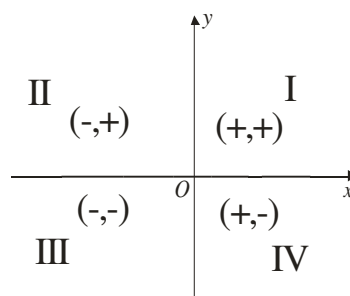


Рис. 3

Декартовими прямокутними координатами x і y точки M на площині називаються величини напрямлених відрізків OM_x і OM_y відповідно (рис. 2). Декартові координати x і y точки M називаються відповідно її **абсцисою** і **ординатою**. Координати точки M записуються поряд з буквеним позначенням точки: $M(x,y)$. При цьому на першому місці записується абсциса точки, а на другому – її ордината. Осі координат розбивають площину на чотири прямі кути – **квадранта**: I, II, III, IV (рис. 3).

Візьмемо в просторі три взаємно перпендикулярні прямі, які перетинаються в одній точці O . Точка O буде початком координат на кожній з осей. На кожній з цих прямих вкажемо додатній напрям і виберемо однаковий

масштаб. Ми отримаємо три осі (координатні осі), одну з яких називають віссю Ox (або віссю *абсцис*), другу – віссю Oy (або віссю *ординат*), третю – віссю Oz (або віссю *аплік*). Ці осі називаються координатними осями і утворюють в просторі *декартову прямокутну систему координат*.

Нехай M – довільна точка простору. Проведемо через точку M площину, паралельну координатній площині yOz . Ця площина перетинає вісь Ox в точці M_x (проекція точки M на вісь Ox). Аналогічно можна отримати проекції точки M на осі Oy і Oz (M_y і M_z відповідно). *Декартовими прямокутними координатами* x , y і z точки у просторі M називатимемо відповідно величини напрямлених відрізків $\overrightarrow{OM_x}$, $\overrightarrow{OM_y}$ і $\overrightarrow{OM_z}$.

Нехай на площині xOy дано дві точки: A_1 з координатами x_1 , y_1 і A_2 з координатами x_2 , y_2 . **Відстань між точками $A_1(x_1, y_1)$ і $A_2(x_2, y_2)$ на площині** у декартовій системі координат обчислюється за формулою:

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

Відстань між точками у просторі у декартовій системі координат обчислюється за формулою: $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$.

Якщо точка M ділить напрямлений відрізок M_1M_2 у відношенні λ (тобто $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$), то координати (x, y, z) точки M обчислюються за формулами:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}, \quad \text{де } (x_1, y_1, z_1) \text{ і } (x_2, y_2, z_2) \text{ є координати}$$

точок M_1 і M_2 відповідно. Ці формули називаються **формулами поділу відрізка у даному відношенні**.

Іноді λ записують у вигляді відношення двох чисел $\lambda = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Тоді формули поділу відрізка у даному відношенні приймають вигляд:

$$x = \frac{\lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad y = \frac{\lambda_2 y_1 + \lambda_1 y_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, \quad z = \frac{\lambda_2 z_1 + \lambda_1 z_2}{\lambda_1 + \lambda_2}.$$

Якщо $\lambda=1$, то точка M ділить відрізок $\overline{M_1M_2}$ навпіл, і тоді попередні формули приймають вигляд: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $z = \frac{z_1 + z_2}{2}$. Вони називаються **формулами поділу відрізка навпіл**.

Кривою (лінією) на площині називається множина точок γ , координати (x, y) яких задовольняють рівняння $\varphi(x, y) = 0$, де $\varphi(x, y)$ - деяка функція двох змінних, і навпаки, будь-яка пара чисел (x, y) , що є рішенням рівняння $\varphi(x, y) = 0$, є координатами деякої точки множини γ . Рівняння $\varphi(x, y) = 0$ називається **рівнянням кривої γ у неявній формі**.

Рівняння кола з центром в точці $M_0(x_0, y_0)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0.$$

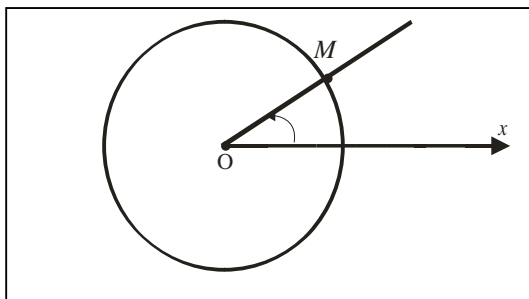
Поверхнею у просторі називається множина точок F , координати (x, y, z) яких задовольняють рівняння $\varphi(x, y, z) = 0$, де $\varphi(x, y, z)$ - деяка функція трьох змінних, і навпаки, будь-яке рішення (x, y, z) рівняння $\varphi(x, y, z) = 0$ є координатами деякої точки множини F .

Рівняння $\varphi(x, y, z) = 0$ називається **рівнянням поверхні у неявній формі**.

Рівняння сфери з центром в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і радіусом R має вигляд:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0.$$

Криволінійні координати



Полярні координати на площині вводяться таким чином. Виберемо на площині деяку точку O (поліус) і деякий, що виходить з неї, промінь Ox (рис. 4). Крім того, вкажемо одиницю масштабу.

Рис. 4

Полярними координатами точки M називаються два числа ρ і φ , перше з яких (полярний радіус ρ) дорівнює відстані точки M від поліуса O , а друге

(полярний кут φ) – кут, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки промінь Ox до співпадання з променем OM .

Точку M з полярними координатами ρ і φ позначають символом $M(\rho, \varphi)$. Для того, щоб відповідність між відмінними від полюса точками площини і парами полярних координат (ρ, φ) була взаємна однозначною, звичайно вважають, що ρ і φ змінюються в наступних межах: $0 \leq \rho < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Циліндричні координати у просторі вводяться таким чином. Виберемо на фіксованій площині α деяку точку O і промінь Ox , що виходить з цієї точки (рис. 5). Крім того, розглянемо вісь Oz , що проходить через O перпендикулярно до площини α . Нехай M – будь-яка точка простору, M' – проекція цієї точки на площину α , а M_z – проекція M на вісь Oz .

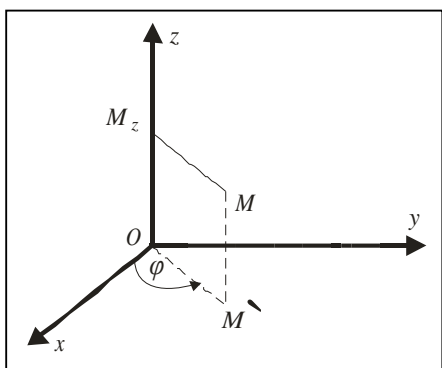


Рис. 5

Циліндричними координатами точки M називаються три числа: ρ , φ і z , перші два з яких (ρ і φ) є полярними координатами точки M' в площині α щодо полюса O і полярної осі Ox , а число z є величина направленого відрізка OM_z .

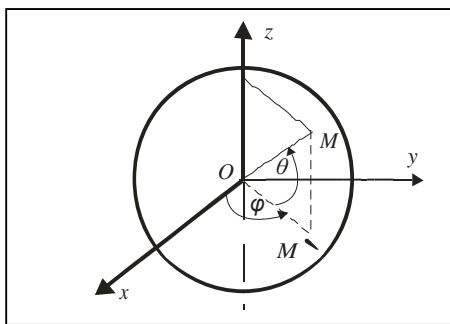


Рис. 6

Нехай M – будь-яка відмінна від O точка простору, M' – її проекція на площину α , ρ – відстань M від O . Нехай далі, θ – кут, який утворює напрямлений відрізок OM з віссю Oz , а φ – кут, на який потрібно повернути проти годинникової стрілки вісь l (якщо дивитися на вісь l з боку додатного напрямку осі Oz) до співпадання з променем OM' . Кути θ

і φ називають широтою і довготою відповідно. **Сферичними координатами** точки M називають три числа: ρ , φ і θ .

Матриці та визначники

Прямокутну таблицю з чисел, яка містить m рядків та n стовпчиків, називають **матрицею**. Зазвичай для позначення матриці використовують

круглі дужки і записується вона у вигляді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} називаються **елементами матриці**, індекси i та j вказують на місце розташування елемента a_{ij} : i – номер рядка, j – номер стовпчика, у якому стоїть елемент a_{ij} . Якщо $m = n$, то така матриця називається **квадратною**.

Добутком матриць $A(m \times n)$ та $B(n \times k)$ називається матриця $C(m \times k)$, елементи якої мають вигляд: $c_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}$. Позначається добуток матриць таким чином: $C(m \times k) = A(m \times n) \circ B(n \times k)$.

Добутком матриці A на число α називається матриця $C = \alpha A$, елементами якої є числа $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Сумою матриць A та B однакових розмірів $(m \times n)$ називається матриця $C = A + B$, елементами якої є числа $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Якщо A, B, C – матриці, α, β – числа, тоді мають місце наступні рівності:

$$1) A + B = B + A; \quad 2) A + (B + C) = (A + B) + C;$$

$$1) \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B; \quad 4) (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A;$$

$$5) A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C; \quad 6) A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C;$$

$$7) (A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C.$$

Визначником другого порядку матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ називається число, яке дорівнює $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Визначник матриці A позначається як $\det A$ і записується у прямих дужках у вигляді таблиці: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Визначником третього порядку матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ називається

число:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Вектори

Вектором називається напрямлений відрізок (рис. 7).

Абсолютною величиною (або **модулем**) вектора називається довжина відрізка, що зображає вектор. Абсолютна величина вектора $\mathbf{a}$ позначається $|\mathbf{a}|$. Абсолютна величина вектора $\overrightarrow{AB}$ також позначається $|\overrightarrow{AB}|$.

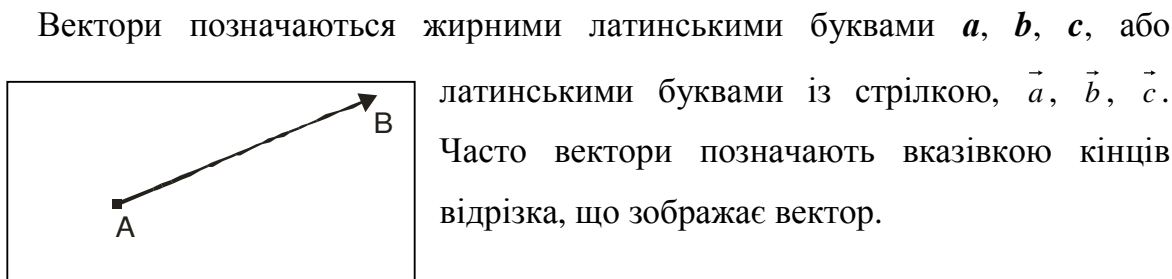


Рис. 7

Наприклад, вектор на рис. 7 можна позначити $\overrightarrow{AB}$. При такому способі позначення вектора, точка A називається початком, а точка B – кінцем вектора. При позначенні вектора за допомогою кінців, що його зображають, на першому місці завжди ставиться початок вектора.

Вектор, у якого початок і кінець співпадають, тобто вектор $\overrightarrow{AA}$, називатимемо **нульовим вектором** і позначатимемо $\vec{0}$.

Нехай вектор $\mathbf{a}$ має початком точку $A_1(x_1, y_1)$, а кінцем — точку $A_2(x_2, y_2)$ (у просторі, відповідно, точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ і $A_2(x_2, y_2, z_2)$), A_{1x} , A_{1y} і A_{2x} , A_{2y} (у просторі A_{1x}, A_{1y}, A_{1z} і A_{2x}, A_{2y}, A_{2z}) – проекції точок A_1 і A_2 на осі координат Ox , Oy (у просторі на осі Ox , Oy , Oz). Величини напрямлених відрізків $\overrightarrow{A_{1x}A_{2x}}$, $\overrightarrow{A_{1y}A_{2y}}$ (у просторі $\overrightarrow{A_{1x}A_{2x}}$, $\overrightarrow{A_{1y}A_{2y}}$, $\overrightarrow{A_{1z}A_{2z}}$) називаються **координатами вектора $\mathbf{a}$** .

Величини напрямлених відрізків мають вигляд: $A_{1x}A_{2x} = x_2 - x_1$, $A_{1y}A_{2y} = y_2 - y_1$ (у просторі $A_{1x}A_{2x} = x_2 - x_1$, $A_{1y}A_{2y} = y_2 - y_1$, $A_{1z}A_{2z} = z_2 - z_1$). Координати вектора $\mathbf{a}$ позначаються як a_1 , a_2 (у просторі a_1 , a_2 , a_3). Із зазначеного вище витікає, що: $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ (у просторі $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$). Координати вектора записують поруч з позначенням вектора: $\mathbf{a}(a_1, a_2)$, або $\mathbf{a}=(a_1, a_2)$ (у просторі $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, або $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$).

З формули, що виражає відстань між двома точками через їх координати, витікає, що абсолютна величина вектора з початком у точці $A_1(x_1, y_1)$ і кінцем у точці $A_2(x_2, y_2)$ дорівнює $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (у разі простору $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$). Через координати a_1 , a_2 модуль вектора виражається формулою: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ (у просторі – формулою $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$).

Сумою векторів $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ і $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ називається вектор $\mathbf{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, тобто $\mathbf{a}(a_1, a_2) + \mathbf{b}(b_1, b_2) = \mathbf{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ (у просторі $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3) + \mathbf{b}(b_1, b_2, b_3) = \mathbf{c}(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$).

Різницею векторів $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ і $\mathbf{b}(b_1, b_2)$ називається такий вектор $\mathbf{c}(c_1, c_2)$, який у сумі з вектором $\mathbf{b}$ дає вектор $\mathbf{a}$: $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$.

Добутком вектора $\mathbf{a}(a_1, a_2)$ і числа α називається вектор $\alpha\mathbf{a}(\alpha a_1, \alpha a_2)$ (у просторі $\alpha\mathbf{a}(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3)$).

Два вектори називаються **колінеарними**, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Вектори ***a*** і ***b*** колінеарні тоді і тільки тоді, коли їх відповідні координати пропорційні.

Вектори в просторі називаються **компланарними**, якщо вони паралельні одній площині. Якщо вектори не паралельні одній площині, то вони називаються **некомпланарними**.

Скалярним добутком векторів ***a***(a_1, a_2) і ***b***(b_1, b_2), заданих у декартовій системі, називається число $a_1b_1 + a_2b_2$ (у просторі скалярний добуток векторів ***a***(a_1, a_2, a_3) і ***b***(b_1, b_2, b_3) визначається аналогічно: $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$). Для скалярного добутку векторів вживаються записи: ***a*·*b***, (***a***, ***b***) <***a***, ***b***>.

Для будь-яких векторів ***a***, ***b***, ***c*** і будь-якого числа α виконуються рівності:
 а) <***a***, ***b***> = <***b***, ***a***>; б) <***a***+***b***, ***c***> = <***a***, ***c***>+<***b***, ***c***>; в) < α ***a***, ***b***> = α <***a***, ***b***>.

Скалярний добуток векторів дорівнює добутку їх абсолютних величин на косинус кута між ними: <***a***, ***b***>=|***a***|·|***b***|·cos α .

З останньої формули виходить, що вектори ***a*** і ***b*** перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Косинус кута між ненульовими векторами можна обчислити за формулою:

cos α = <***a***, ***b***>:(|***a***||***b***|). Якщо вектори ***a*** і ***b*** задані в координатах, тоді ця формула

приймає вигляд: $\cos \varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$. Для векторів у просторі ця

формула набуває вигляд: $\cos \varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$.

Векторним добутком вектора ***a***(a_1, a_2, a_3) на вектор ***b***(b_1, b_2, b_3) називається вектор: ***c*** ($a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1$) .

Векторний добуток векторів ***a*** і ***b*** позначатимемо як [***a***, ***b***].

Відзначимо, що векторний добуток можна записати у вигляді:

$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3$, де, $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ і $\vec{e}_3$ – одиничні вектори, направлені по осях координат. Це можна представити у вигляді

символьного визначника: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$, у першому рядку якого замість

чисел стоять одиничні вектори.

Нехай $\mathbf{a}(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b}(b_1, b_2, b_3)$ і $\mathbf{c}(c_1, c_2, c_3)$ – довільні вектори, α – довільне дійсне число. Тоді для векторного добутку виконуються такі властивості:

а) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}]$; б) $[\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \alpha\mathbf{b}] = \alpha[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; в) $[\mathbf{a} + \mathbf{c}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{c}, \mathbf{b}]$;

г) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$ тоді і тільки тоді, коли вектори $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ – колінеарні.

Абсолютною величиною векторного добутку двох векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$ є площа паралелограма, побудованого на векторах $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$.

Змішаним (векторно-скалярним) добутком векторів $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$ називається число $\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle$, тобто скалярний добуток вектора $\mathbf{a}$ на векторний добуток $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$.

Якщо скористаємося означенням скалярного і векторного добутків, то ми безпосередньо можемо знайти, що:

$$\langle \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \rangle = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Абсолютна величина змішаного добутку $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ і $\mathbf{c}$, відкладених з однієї точки.

Вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарні тоді і тільки тоді, коли їх змішаний добуток дорівнює нулю.

Пряма лінія на площині

У декартовій системі координат пряма задається рівнянням першого ступеня: $a_1x + a_2y + c = 0$, де a_1, a_2 – сталі величини, які одночасно не дорівнюють нулю (тобто $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$). І навпаки, всяке рівняння першого ступеня у декартовій системі координат є рівнянням прямої (при $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$). Це рівняння називається **загальним рівнянням прямої**. Вектор $\vec{N}(a_1, a_2)$ є вектором, який перпендикулярний даній прямій. Він називається **вектором нормалі прямої**.

Напрямним вектором прямої називається будь-який ненульовий вектор, колінеарний цій прямій. В загальній декартовій системі координат рівняння прямої l , що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ з напрямним вектором $\vec{a} = (a_1, a_2)$, має вигляд: $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}$. Це рівняння називається **канонічним рівнянням прямої**.

Рівняння прямої, що проходить через дві точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$, має вигляд: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

Рівняння прямої, яка відсікає на осях координат відрізки a і b , має вигляд:

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$. Це рівняння називається **рівнянням прямої у відрізках**.

Кутом нахилу прямої l до осі Ox називається кут α , на який потрібно повернути вісь Ox проти годинникової стрілки так, щоб вона співпала з прямою l або була їй паралельна. Тангенс кута нахилу прямої до осі Ox називається **кутовим коефіцієнтом прямої** і позначається як $k = \operatorname{tg} \alpha$.

Рівняння прямої l , що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k , в декартовій системі координат має вигляд: $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Рівняння вигляду $x = x(t), y = y(t)$ називаються **параметричними рівняннями кривої**, якщо кожному значенню параметра t відповідає деяка

точка кривої з координатами $(x(t), y(t))$ і навпаки, для кожної точки кривої знайдеться такий параметр t , що $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Якщо пряма l проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і паралельна вектору $\vec{a} = (a_1, a_2)$, то її параметричні рівняння мають вигляд: $x = x_0 + a_1 t$, $y = y_0 + a_2 t$.

Рівняння $ax + by + c = 0$ прямої називається **нормальним**, якщо нормальний вектор до цієї прямої є одиничний, тобто якщо $a^2 + b^2 = 1$.

Якщо дана пряма $ax + by + c = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0)$, то **відстань** від точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямої обчислюється за формулою: $d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Кутом α між прямими, які перетинаються, називатимемо менший з суміжних кутів, утворених цими прямими. Якщо суміжні кути рівні, то ці прямі перпендикулярні і $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Якщо прямі паралельні або співпадають, то кутом між ними буде $\alpha = 0$.

Нехай дві прямі задано загальними рівняннями: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Тоді косинус кута між прямими можна знайти за формулою:

$$\cos \alpha = \left| \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \right|.$$

Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох прямих буде рівність $\cos \alpha = 0$, але це виконується тоді і тільки тоді, коли $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$.

Якщо прямі задано рівняннями з кутовими коефіцієнтами k_1, k_2 , то тангенс кута між цими прямими знаходиться за формулою: $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} \right|$. У цьому випадку умова паралельності прямих має вигляд $k_1 = k_2$, а умова перпендикулярності має вигляд $k_1 k_2 = -1$.

Зразок виконання індивідуального завдання

I. Знайти центр та радіус сфери: $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$.

Спочатку треба виділити повні квадрати по кожній із змінних. Тобто, треба переписати дане рівняння у вигляді: $x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2by + b^2 + z^2 + 2cz + c^2 - a^2 - b^2 - c^2 + d = 0$. Останнє рівняння ми можемо записати так: $(x+a)^2 + (y+b)^2 + (z+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$. Якщо $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$, то ми маємо сферу з центром у точці з координатами $(-a; -b; -c)$ і з радіусом $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$. Якщо $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$, тоді координати тільки однієї точки $(-a; -b; -c)$ задовольняють рівнянню сфери. Іноді кажуть, що ми маємо сферу нульового радіусу. Якщо $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$, то не існує точок у просторі, координати яких задовольняють даному рівнянню. В таких випадках сферу називають уявною.

Приклад.

Дано рівняння сфери: $x^2 + y^2 + z^2 + x - 4y + 9z + 6 = 0$. Перепишемо це рівняння у вигляді: $x^2 + x + \frac{1}{4} + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 9z + \frac{81}{4} - \frac{1}{4} - 4 - \frac{81}{4} + 6 = 0$, або $(x + \frac{1}{2})^2 + (y - 2)^2 + (z + \frac{9}{2})^2 = \frac{37}{2}$. У даному прикладі ми маємо сферу з центром у точці з координатами $(-\frac{1}{2}; 2; -\frac{9}{2})$ та з радіусом $r = \sqrt{\frac{37}{2}}$.

II. Дано вершини піраміди $A(1; 3; 2)$, $B(-2; 0; 1)$, $C(3; -2; 0)$, $D(2; -2; 1)$. Точка F – точка перетину медіан грані BCD, точка E – середина ребра AD, точка G – середина ребра BC. Знайти:

а) координати векторів $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{AG}$; б) косинус кута CAB; в) об'єм піраміди ABCD; г) площу грані ABC; д) висоту DH піраміди ABCD, яка опущена на грань ABC; е) вектор $\vec{a}$, який перпендикулярний векторам $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ має довжину 1 і такий, що трійка векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\vec{a}$ – права.

Рішення.

а) Для того, щоб знайти координати векторів $\overrightarrow{AG}$ та $\overrightarrow{EG}$, знайдемо координати точок Е та G, які є серединами відрізків AD та BC відповідно.

Координати середини відрізка AD знаходимо за формулами: $x_E = \frac{x_A + x_D}{2}$,

$$y_E = \frac{y_A + y_D}{2}, \quad z_E = \frac{z_A + z_D}{2}. \quad \text{Тобто,} \quad x_E = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}, \quad y_E = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}, \quad z_E = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Подібним чином знаходимо координати точки G як середини відрізка BC:

$$x_G = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_G = \frac{0-2}{2} = -1, \quad z_G = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Координати вектора $\overrightarrow{AG}$ знайдемо за наступною формулою:

$$\overrightarrow{AG} = (x_G - x_A; y_G - y_A; z_G - z_A) = \left(\frac{1}{2} - 1; -1 - 3; \frac{1}{2} - 2\right) = \left(-\frac{1}{2}; -4; -\frac{3}{2}\right). \quad \text{Таким же чином}$$

$$\text{знаходимо } \overrightarrow{EG} = (x_G - x_E; y_G - y_E; z_G - z_E) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}; -1 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = \left(-1; -\frac{3}{2}; -1\right).$$

Вектор $\overrightarrow{AF}$ знаходимо як суму: $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$. Оскільки точка F – точка перетину медіан трикутника BCD, то $\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DG}$. Знаходимо

$$\overrightarrow{AD} = (x_D - x_A; y_D - y_A; z_D - z_A) = (2 - 1; -2 - 3; 1 - 2) = (1; -5; -1),$$

$$\overrightarrow{DG} = (x_G - x_D; y_G - y_D; z_G - z_D) = \left(\frac{1}{2} - 2; -1 + 2; \frac{1}{2} - 1\right) = \left(-\frac{3}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right),$$

$$\overrightarrow{DF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\left(-\frac{3}{2}; 1; -\frac{1}{2}\right) = \left(-1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right). \quad \text{Тепер остаточно знаходимо}$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = (1; -5; -1) + \left(-1; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right) = \left(0; -\frac{13}{3}; -\frac{4}{3}\right).$$

б) Косинус кута САВ дорівнює косинусу кута між векторами $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AB}$. Знайдемо координати векторів:

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A; z_C - z_A) = (3 - 1; -2 - 3; 0 - 2) = (2; -5; -2),$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-2 - 1; 0 - 3; 1 - 2) = (-3; -3; -1). \quad \text{Косинус кута між}$$

двома векторами $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ та $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ можна знайти за формулою:

$$\cos \alpha = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}. \quad \text{Використовуючи останню формулу, знайдемо}$$

косинус кута між векторами $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AB}$, тобто косинус кута CAB :

$$\cos \angle CAB = \frac{2 \cdot (-3) + (-5) \cdot (-3) + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{12}{\sqrt{627}}.$$

в) Об'єм піраміди $ABCD$ дорівнює $\frac{1}{6}$ частині від об'єма паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$. Об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю визначника

$$\begin{vmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 2 & -5 & -2 \\ 1 & -5 & -1 \end{vmatrix} = (-3)(-5)(-1) + (-3)(-2) \cdot 1 + 2(-5)(-1) - (-1)(-5) \cdot 1 - (-2)(-5)(-3) - (-3) \cdot 2 \cdot (-1) = 20.$$

Таким чином, об'єм піраміди $V_{\text{піраміди}} = \frac{20}{6} = \frac{10}{3}$.

г) Площа грані ABC дорівнює половині модуля векторного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Якщо $\vec{d} = [\vec{a}; \vec{b}]$, де $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ та $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, то координати вектора $\vec{d}$ знаходяться за формулою:

$$\vec{d} = (a_2b_3 - a_3b_2; a_3b_1 - a_1b_3; a_1b_2 - a_2b_1). \quad \text{Знаходимо}$$

$$\vec{d} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = ((-3) \cdot (-2) - (-1) \cdot (-5); (-1) \cdot 2 - (-2) \cdot (-3); (-3) \cdot (-5) - (-3) \cdot 2) = (1; -6; 21).$$

Таким чином, площа грані ABC буде: $S_{ABC} = \frac{\sqrt{1^2 + (-8)^2 + (21)^2}}{2} = \frac{\sqrt{506}}{2}$.

д) Висота DH піраміди $ABCD$ дорівнює висоті паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ та $\overrightarrow{AD}$. Висоту цього паралелепіпеда ми можемо знайти як відношення об'єму паралелепіпеда до площі основи, побудованої на векторах $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$. Об'єм паралелепіпеда знайдено у п.в), а площа основи у п.г) (модуль векторного добутку векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$). Таким чином $DH = \frac{20}{\sqrt{506}}$.

е) Вектор, який перпендикулярний векторам $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$ і утворює разом з ними праву трійку, є векторний добуток векторів $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$: $\vec{d} = [\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}] = (1; -6; 21)$. Якщо поділимо вектор $\vec{d}$ на його довжину, то отримаємо необхідний вектор $\vec{a} = (\frac{1}{\sqrt{506}}; \frac{-6}{\sqrt{506}}; \frac{21}{\sqrt{506}})$.

III. Вирішити систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

а) за допомогою правила Крамера;

б) методом Гауса.

Рішення.

а) Формули Крамера мають вигляд: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$; $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$, де Δ – визначник матриці коефіцієнтів при невідомих у даній системі рівнянь, Δ_i – визначник матриці, отриманої з матриці коефіцієнтів шляхом зміни стовпчика коефіцієнтів при i -тому невідомому на стовпчик вільних коефіцієнтів.

Знайдемо усі визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot (-4) - (-4) \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1) \cdot 2 = -3;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot (-4) - (-4) \cdot 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot 2 - (-3) \cdot (-1) \cdot 5 = -3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot (-4) - (-4) \cdot 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \cdot 2 - (-3) \cdot 2 \cdot 2 = -3;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \cdot 5 - 5 \cdot 2 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) \cdot 2 = 0.$$

Звідки знаходимо, що: $x_1 = \frac{-3}{-3} = 1$; $x_2 = \frac{-3}{-3} = 1$; $x_3 = \frac{0}{-3} = 0$.

б) Метод Гауса інколи ще називають методом послідовного виключення невідомих. Випишемо коефіцієнти, які стоять біля невідомих, та вільні коефіцієнти, у вигляді матриці:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & | & 5 \\ 1 & 2 & -3 & | & 3 \\ 3 & -1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}. \text{ Поміняємо місцями першу та другу строчки матриці:}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 3 \\ 2 & 3 & -4 & | & 5 \\ 3 & -1 & 2 & | & 2 \end{pmatrix}. \text{ Помножимо першу строчку спочатку на } (-2) \text{ і додамо до другої}$$

строчки, потім першу строчку помножимо на (-3) і додамо до третьої строчки.

$$\text{Тоді матриця матиме наступний вигляд: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 3 \\ 0 & -1 & 2 & | & -1 \\ 0 & -7 & 11 & | & -7 \end{pmatrix}. \text{ Тепер помножимо}$$

другу строчку на (-7) та додамо до третьої строчки. Ми отримаємо матрицю:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & | & 3 \\ 0 & -1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 0 & -3 & | & 0 \end{pmatrix}. \text{ Тепер систему рівнянь ми можемо записати у вигляді:}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 3, \\ -x_2 + 2x_3 = -1, \\ -3x_3 = 0. \end{cases} \quad \text{З останнього рівняння системи знаходимо, що } x_3 = 0.$$

Підставимо це значення у перше та друге рівняння. З другого рівняння знаходимо, що $x_2 = 1$, тоді з першого рівняння знаходимо, що $x_1 = 1$. Таким чином, маємо відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.

IV. Дано вершини трикутника ABC: A(1; -1), B(-2; 1), C(3; 5). Знайти:

- а) рівняння сторони BC; б) рівняння висоти AD; в) рівняння медіани AM;
- г) довжини сторін трикутника, довжину медіани AM та висоти AD;
- д) площу трикутника; е) зробити малюнок.

Рішення.

Зробимо рисунок до задачі (рис.8).

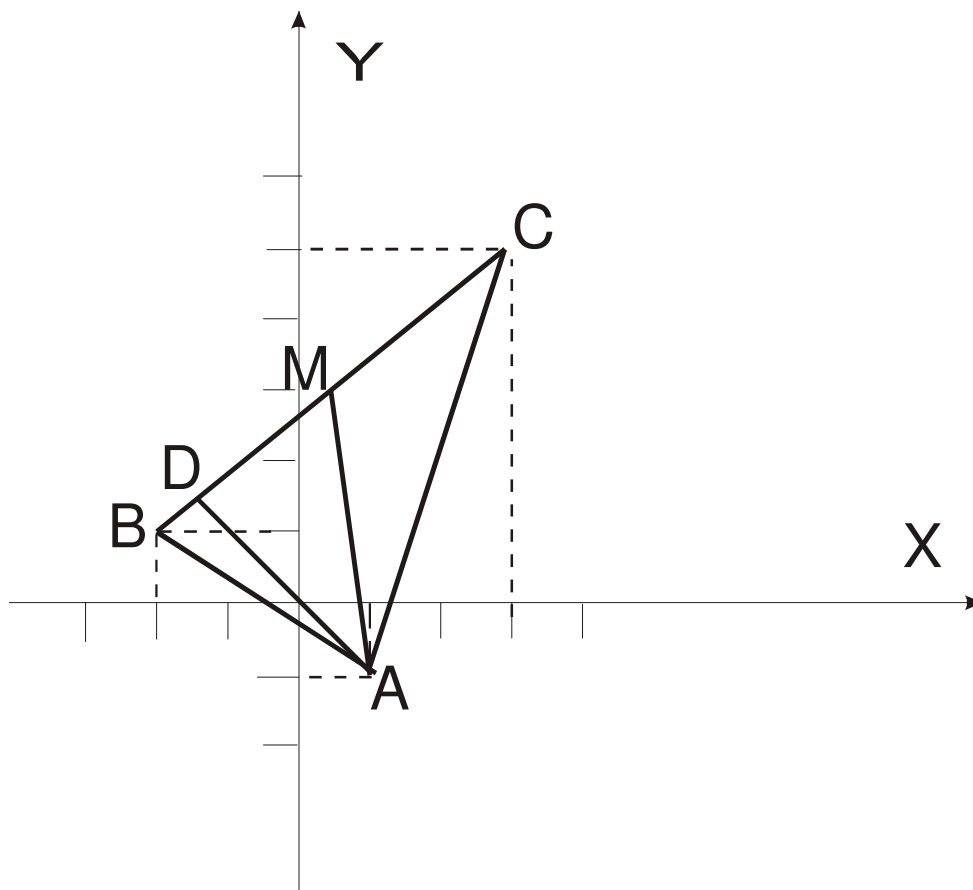


Рис. 8

а) Рівняння сторони BC знайдемо за формулою рівняння прямої, яка проходить через дві точки: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$. Візьмемо, наприклад, $(x_1; y_1)$ – координати точки B, $(x_2; y_2)$ – координати точки C. Тоді рівняння сторони BC матиме вигляд: $\frac{x+2}{3+2} = \frac{y-1}{5-1}$. З цього рівняння отримуємо загальне рівняння прямої BC: $4x - 5y + 13 = 0$.

б) Оскільки висота AD перпендикулярна до сторони BC, то вона паралельна нормальному векторові прямої BC, тобто векторові $\vec{N}(4; -5)$. Рівняння висоти AD знайдемо за формулою канонічного рівняння прямої:

$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{l_2}$. У цій формулі візьмемо $(x_1; y_1)$ – координати точки А, $(l_1; l_2)$ –

координати вектора $\vec{N}$. Рівняння висоти AD матиме такий вигляд: $\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-5}$.

в) Оскільки AM – медіана трикутника, то точка М – середина відрізка ВС. Знайдемо координати точки М за формулою для знаходження координат середини відрізка: $x_M = \frac{x_B + x_C}{2}; y_M = \frac{y_B + y_C}{2}$. У нашому випадку

$x_M = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}; y_M = \frac{1+5}{2} = 3$. Точка М має координати $(\frac{1}{2}; 3)$. Рівняння медіани

AM запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві точки (див. п. а)):

$\frac{x-1}{\frac{1}{2}-1} = \frac{y+1}{3+1}$. Після перетворень отримуємо загальне рівняння медіани AM:

$$8x + y - 7 = 0.$$

г) Довжини сторін трикутника ABC та медіани AM знайдемо за формулою відстані між двома точками:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Тоді:

$$|AB| = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{13};$$

$$|BC| = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{41};$$

$$|AC| = \sqrt{(1-3)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{40};$$

$$|AM| = \sqrt{(1+2)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{16,25}.$$

Довжину висоти AD знайдемо за формулою відстані від точки до прямої:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \text{ де } (x_0; y_0) - \text{координати точки, } Ax + By + C = 0 - \text{загальне}$$

рівняння прямої, до якої шукається відстань. Загальне рівняння прямої BC було знайдено раніше: $4x - 5y + 13 = 0$. Знаходимо відстань від точки А до прямої BC

за вказаною формулою и отримаємо: $AD = \frac{|4 \cdot 1 - 5 \cdot (-1) + 13|}{\sqrt{4^2 + 5^2}} = \frac{22}{\sqrt{41}} = \frac{22\sqrt{41}}{41}$.

д) Площу трикутника ABC знайдемо за формулою: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}a \cdot h$, де a – довжина основи трикутника, h – довжина висоти, проведеної до цієї основи.

Таким чином, знаходимо площу трикутника: $S_{\Delta} = \frac{1}{2}|BC| \cdot |AD| = \frac{1}{2}\sqrt{41} \cdot \frac{22\sqrt{41}}{41} = 11$.

МОДУЛЬ 2

Програма модуля 2

1. Рівняння поверхні та рівняння лінії у просторі. Рівняння площини. Рівняння прямої у просторі.
2. Канонічні рівняння еліпсу, гіперболи і параболи.
3. Поняття про функцію однієї дійсної змінної. Основні елементарні функції та їх графіки. Складена та обернена функції.
4. Означення границі функції та послідовності. Односторонні границі. Нескінченно малі та нескінченно великі. Основні теореми про нескінченно малі. Основні теореми про границі. Визначні границі.

Зразки варіантів контрольної роботи

Варіант №1

1. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; 3; -1)$ та паралельна вектору $\vec{l} = (-1; 2; 0)$.
2. Визначити взаємне розташування даних площин. Знайти кут між першою та другою площинами:
 $x + 2y + 3z - 2 = 0$; $2x + 3y + 4z - 5 = 0$; $x - y + 7 = 0$.
3. Знайти координати фокусів, рівняння відповідних директрис, ексцентриситет кривої $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ та побудувати криву.

Варіант №2

1. Написати рівняння прямої, яка проходить через точки $A(3; -5; 1)$ та $B(1; -3; 2)$.
2. Визначити взаємне розташування даних площин. Знайти кут між другою та третьою площинами:
 $2x + 5y - 4z = 0$; $7x + y + z - 20 = 0$; $3x + 2y - z - 8 = 0$.

3. Знайти координати фокусів, рівняння відповідних директрис, ексцентриситет кривої $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{4} = -1$ та побудувати криву.

Варіант №3

1. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(2; 3; 0)$ та перпендикулярна площині $3x + 2y - z = 0$.

2. Визначити взаємне розташування даних площин. Знайти кут між першою та другою площинами:

$$x - y - 2z + 1 = 0; 3x + 5y + z - 4 = 0; 2x - 2y - 4z + 1 = 0.$$

3. Знайти координати фокусів, рівняння відповідних директрис, ексцентриситет кривої $\frac{x^2}{32} - \frac{y^2}{4} = 1$ та побудувати криву.

Варіант №4

1. Написати рівняння прямої, яка відтинає на осях Ox та Oy відрізки, які дорівнюють відповідно 3 та -5 .

2. Визначити взаємне розташування даних площин. Знайти кут між другою та третьою площинами:

$$2x + 3y - z + 1 = 0; 4x + 6y + z - 5 = 0; 3x - 2y - 7 = 0.$$

3. Знайти координати фокусів, рівняння відповідних директрис, ексцентриситет кривої $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20} = 1$ та побудувати криву.

Варіант №5

1. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(3; -2; 1)$ та паралельна вектору $\vec{a}(2; 1; -1)$.

2. Визначити взаємне розташування даних площин. Знайти кут між першою та третьою площинами:

$$x + 2y + 3z - 2 = 0; 2x + 5y - z + 4 = 0; x - y - 2 = 0.$$

3. Знайти координати фокуса, рівняння директриси, параметри кривої $y = \frac{3}{4}x^2$ та побудувати криву.

Індивідуальне завдання.

I. Дано точки $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$ та вектори $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$. Знайти:

- а) рівняння прямої, яка проходить через точки А і В;
- б) рівняння прямої, яка паралельна вектору $\vec{a}$ та проходить через точку С;
- в) рівняння площини, яка проходить через точки А, В і С;
- г) рівняння площини, яка проходить через точку А і паралельна векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$;
- д) рівняння площини, яка перпендикулярна відріzkу ВС та проходить через точку С;
- е) ортогональну проекцію точки D на площину, що проходить через точки А, В та С.

1. $A(3; 2; -1)$, $B(1; 3; 1)$, $C(1; 3; 2)$, $D(3; 0; 4)$, $\vec{a}(1; 2; -2)$, $\vec{b}(3; 0; 4)$.
2. $A(5; 4; 3)$, $B(3; 2; 2)$, $C(2; 1; 0)$, $D(4; 2; 4)$, $\vec{a}(2; -1; 2)$, $\vec{b}(1; 1; -1)$.
3. $A(3; 0; 4)$, $B(6; 3; 2)$, $C(-2; -1; 1)$, $D(5; 3; -2)$, $\vec{a}(3; 1; 2)$, $\vec{b}(-1; 2; -1)$.
4. $A(-2; 2; 4)$, $B(-3; 5; 2)$, $C(4; 6; 1)$, $D(3; 1; 2)$, $\vec{a}(4; 0; 3)$, $\vec{b}(2, 1, 3)$.
5. $A(4; -2; 1)$, $B(2; -3; 2)$, $C(3; 2; 1)$, $D(3; 4; -2)$, $\vec{a}(3; 1; -1)$, $\vec{b}(2; 0; 1)$.
6. $A(4; 4; -2)$, $B(2; 5; 0)$, $C(2; 5; 1)$, $D(4; 2; 3)$, $\vec{a}(5; 1; -1)$, $\vec{b}(2; 2; -1)$.
7. $A(6; 6; 2)$, $B(4; 4; 1)$, $C(3; 3; -1)$, $D(5; 4; 3)$, $\vec{a}(3; 0; 4)$, $\vec{b}(2; -1; 2)$.
8. $A(4; 2; 3)$, $B(7; 5; 1)$, $C(-1; 1; 0)$, $D(6; 5; -3)$, $\vec{a}(-1; 1; 1)$, $\vec{b}(2; 1; 1)$.
9. $A(-1; 4; 3)$, $B(-2; 7; 1)$, $C(5; 8; 0)$, $D(4; 3; 1)$, $\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(3; -1; 2)$.
10. $A(5; 0; 0)$, $B(3; -1; 1)$, $C(4; 4; 0)$, $D(4; 6; -3)$, $\vec{a}(3; -1; 3)$, $\vec{b}(1; 1; -1)$.
11. $A(2; 5; 0)$, $B(0; 6; 2)$, $C(0; 6; 3)$, $D(2; 3; 5)$, $\vec{a}(2; 2; 1)$, $\vec{b}(-1; 3; 3)$.

12. $A(4; 7; 4)$, $B(2; 5; 3)$, $C(1; 4; 1)$, $D(3; 5; 5)$, $\vec{a}(3; 3; -1)$, $\vec{b}(2; -2; 1)$.
13. $A(2; 3; 5)$, $B(5; 6; 3)$, $C(-3; 2; 2)$, $D(4; 6; -1)$, $\vec{a}(5; 0; -1)$, $\vec{b}(1; 1; 1)$.
14. $A(-3; 5; 5)$, $B(-4; 8; 3)$, $C(3; 9; 2)$, $D(2; 4; 3)$, $\vec{a}(2; -1; -2)$, $\vec{b}(2; 1; 1)$.
15. $A(3; 1; 2)$, $B(1; 0; 3)$, $C(2; 5; 2)$, $D(2; 7; -1)$, $\vec{a}(4; -3; 0)$, $\vec{b}(1; 3; 3)$.
16. $A(5; 0; 2)$, $B(3; 1; 4)$, $C(3; 1; 5)$, $D(5; -2; 7)$, $\vec{a}(3; -1; 2)$, $\vec{b}(5; 0; -1)$.
17. $A(7; 2; 6)$, $B(5; 0; 5)$, $C(4; -1; 3)$, $D(6; 0; 7)$, $\vec{a}(4; -1; 1)$, $\vec{b}(3; 2; -1)$.
18. $A(5; -2; 7)$, $B(8; 1; 5)$, $C(0; -3; 4)$, $D(7; 1; 1)$, $\vec{a}(2; -2; 1)$, $\vec{b}(3; 1; 3)$.
19. $A(0; 0; 7)$, $B(-1; 3; 5)$, $C(6; 4; 4)$, $D(5; -1; 5)$, $\vec{a}(5; 0; 2)$, $\vec{b}(3; 1; 1)$.
20. $A(6; -4; 4)$, $B(4; -5; 5)$, $C(5; 0; 4)$, $D(5; 2; 1)$, $\vec{a}(4; -1; 2)$, $\vec{b}(2; 2; 1)$.
21. $A(0; 4; 0)$, $B(-2; 5; 2)$, $C(-2; 5; 3)$, $D(0; 2; 5)$, $\vec{a}(4; 0; -3)$, $\vec{b}(1; -1; -1)$.
22. $A(2; 6; 4)$, $B(0; 4; 3)$, $C(-1; 3; 1)$, $D(1; 4; 5)$, $\vec{a}(2; 2; 1)$, $\vec{b}(5; 0; 4)$.
23. $A(0; 2; 5)$, $B(3; 5; 3)$, $C(-5; 1; 2)$, $D(2; 5; -1)$, $\vec{a}(-3; -4; 0)$, $\vec{b}(2; -2; 1)$.
24. $A(-5; 4; 5)$, $B(-6; 7; 3)$, $C(1; 8; 2)$, $D(0; 3; 3)$, $\vec{a}(2; -3; 1)$, $\vec{b}(1; 1; -2)$.
25. $A(1; 0; 2)$, $B(-1; -1; 3)$, $C(0; 4; 2)$, $D(0; 6; -1)$, $\vec{a}(4; -3; 1)$, $\vec{b}(3; 1; -2)$.
26. $A(5; 1; 0)$, $B(3; 2; 2)$, $C(3; 2; 3)$, $D(5; -1; 5)$, $\vec{a}(1; 2; -2)$, $\vec{b}(3; 0; 4)$.
27. $A(7; 3; 4)$, $B(5; 1; 3)$, $C(4; 0; 1)$, $D(6; 1; 5)$, $\vec{a}(2; -1; 2)$, $\vec{b}(1; 1; -1)$.
28. $A(3; -1; 5)$, $B(8; 2; 3)$, $C(0; -2; 2)$, $D(7; 2; -1)$, $\vec{a}(3; 1; 2)$, $\vec{b}(-1; 2; -1)$.
29. $A(0; 1; 5)$, $B(-1; 4; 3)$, $C(6; 5; 2)$, $D(5; 0; 3)$, $\vec{a}(4; 0; 3)$, $\vec{b}(2, 1, 3)$.
30. $A(6; -3; 2)$, $B(4; -4; 3)$, $C(5; 1; 2)$, $D(5; 3; -1)$, $\vec{a}(3; 1; -1)$, $\vec{b}(2; 0; 1)$.

II. Для даних кривих знайти:

а) центр кривої (якщо центр існує); б) вершину параболи; в) довжини півосей (якщо півосі існують); г) координати фокусів (або фокуса); д) ексцентриситет; е) рівняння директрис; ж) параметр параболи; з) рівняння асимптот гіперболи; и) зробити малюнок кожної з кривих.

$$1. x^2 + 4y^2 - 6x + 5 = 0, \quad x^2 - 25y^2 - 100y - 75 = 0, \quad y^2 - 4x + 4y + 8 = 0.$$

$$2. 4x^2 + 9y^2 + 18y - 27 = 0, \quad 9x^2 - 4y^2 + 36x = 0, \quad y^2 - 2x - 2y - 3 = 0.$$

3. $9x^2 + y^2 - 18x = 0$, $9x^2 - y^2 + 2y + 8 = 0$, $y^2 + 2x + 6y + 7 = 0$.
4. $9x^2 + 4y^2 + 36x = 0$, $9x^2 - 16y^2 + 64y - 208 = 0$, $x^2 - 4x - 4y = 0$.
5. $x^2 + 4y^2 + 6x + 5 = 0$, $16x^2 - 9y^2 + 36y - 180 = 0$, $x^2 - 6x - 6y + 21 = 0$.
6. $9x^2 + 16y^2 - 36x - 108 = 0$, $9x^2 - 16y^2 - 64y + 80 = 0$, $x^2 + 8x - 2y + 10 = 0$.
7. $16x^2 + 9y^2 + 32x - 128 = 0$, $16x^2 - y^2 - 6y - 25 = 0$, $y^2 + 6x - 8y + 22 = 0$.
8. $4x^2 + 25y^2 - 8x - 96 = 0$, $x^2 - 9y^2 - 36y - 27 = 0$, $y^2 + 2x + 10y + 19 = 0$.
9. $25x^2 + 4y^2 + 50x - 75 = 0$, $x^2 - 16y^2 + 64y - 48 = 0$, $y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$.
10. $x^2 + 25y^2 + 2x - 24 = 0$, $9x^2 - 25y^2 + 50y + 200 = 0$, $y^2 + 4x - 6y + 1 = 0$.
11. $x^2 + 9y^2 + 4x - 5 = 0$, $9x^2 - 4y^2 - 40y - 136 = 0$, $x^2 + 10x - 4y + 13 = 0$.
12. $9x^2 + y^2 - 18x = 0$, $4x^2 - 9y^2 - 54y - 45 = 0$, $x^2 - 10x + 6y + 37 = 0$.
13. $4x^2 + 9y^2 - 8x - 32 = 0$, $25x^2 - 4y^2 + 8y - 104 = 0$, $x^2 + 8x - 2y + 6 = 0$.
14. $4x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$, $25x^2 - y^2 + 100x + 75 = 0$, $x^2 - 4y + 4x + 8 = 0$.
15. $9x^2 + 4y^2 + 18x - 27 = 0$, $4x^2 - 9y^2 - 36y = 0$, $x^2 - 2x - 2y - 3 = 0$.
16. $x^2 + 9y^2 - 18y = 0$, $x^2 - 9y^2 - 2x - 8 = 0$, $x^2 + 2y + 6x + 7 = 0$.
17. $4x^2 + 9y^2 + 36y = 0$, $16x^2 - 9y^2 - 64x + 208 = 0$, $y^2 - 4x - 4y = 0$.
18. $4x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$, $9x^2 - 16y^2 - 36x + 180 = 0$, $y^2 - 6x - 6y + 21 = 0$.
19. $16x^2 + 9y^2 - 36y - 108 = 0$, $16x^2 - 9y^2 + 64x - 80 = 0$, $y^2 + 8y - 2x + 10 = 0$.
20. $9x^2 + 16y^2 + 32y - 128 = 0$, $x^2 - 16y^2 + 6x + 25 = 0$, $x^2 + 6y - 8x + 22 = 0$,
21. $25x^2 + 4y^2 - 8y - 96 = 0$, $9x^2 - y^2 + 36x + 27 = 0$, $x^2 + 2y + 10x + 19 = 0$.
22. $4x^2 + 25y^2 + 50y - 75 = 0$, $16x^2 - y^2 - 64x + 48 = 0$, $x^2 - 2y - 10x + 23 = 0$.
23. $25x^2 + y^2 + 2y - 24 = 0$, $25x^2 - 9y^2 - 50x - 200 = 0$, $x^2 + 4y - 6x + 1 = 0$.
24. $9x^2 + y^2 + 4y - 5 = 0$, $4x^2 - 9y^2 + 40x + 136 = 0$, $y^2 + 10y - 4x + 13 = 0$.
25. $x^2 + 9y^2 - 18y = 0$, $9x^2 - 4y^2 + 54x + 45 = 0$, $y^2 - 10y + 6x + 37 = 0$.
26. $x^2 + 9y^2 + 4x - 5 = 0$, $4x^2 - 9y^2 - 54y - 45 = 0$, $x^2 + 8x - 2y + 6 = 0$.
27. $4x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$, $25x^2 - 4y^2 + 8y - 104 = 0$, $x^2 - 10x + 6y + 37 = 0$.
28. $9x^2 + y^2 - 18x = 0$, $9x^2 - 25y^2 + 50y + 200 = 0$, $y^2 - 2x - 10y + 23 = 0$.
29. $x^2 + 4y^2 + 6x + 5 = 0$, $9x^2 - 16y^2 + 64y - 208 = 0$, $y^2 + 6x - 8y + 22 = 0$.
30. $4x^2 + y^2 + 6y + 5 = 0$, $9x^2 - 16y^2 - 36x + 180 = 0$, $y^2 - 4x - 4y = 0$.

III. Знайти границі:

$$1. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 4x^2 + 1}{5x^5 - x^3 + 2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+1} - 1}{x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 5x^2 + 3}{5x^3 + x^2 - 8}, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x+5} - \sqrt{13-x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 2x}{x^2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x - 1}{7x^2 - 3x + 2}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{10-x} - \sqrt{x+6}}{x - 2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{1 - \cos 2x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 - 3x - 9}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^7 - 5x^5 + 7}{3x^7 + 4x^3 - 2x}, \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{\sqrt{x+13} - \sqrt{5-x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 5x}{\sin^2 x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^3 + 5x^2 + 2}, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{12-x} - \sqrt{x+6}}{x - 3}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 2x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - 2x - 8}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + 2}{2x^3 + 4x^2 + x}, \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{\sqrt{2x+10} - \sqrt{x+7}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \operatorname{tg} 2x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x - 2}{x^3 - 1}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{4x^2 + 3x + 2}, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+12}}{x - 4}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 5x}{3 \operatorname{tg}^2 2x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{2x^2 - 11x + 5}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 2}{x^4 - 2x^3 + 2}, \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{\sqrt{x+6} - \sqrt{2-x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{5x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 + 64}{2x^2 + 9x + 4}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^7 + x + 5}{4x^7 - x^3 + 2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{x^3 + 2x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{5x \sin 3x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 7x + 2}{x^3 - 8}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4x^2 + 5x + 7}{5x^3 + x + 1}, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}{x + 1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 7x}{3x^2}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 8x + 8}{x + 2}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 4x^2 + 1}{x^5 - x^3 + 2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x+1} - 1}{3x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 9x + 6}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^4 - 5x^2 + 3}{2x^4 + x^2 - 8}, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{4}x - 1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{13-x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 2x}{2x^2}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}}{x^2 - 9}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 - 5x - 1}{7x^3 - 3x + 2}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{18-x} - \sqrt{x+14}}{x-2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 4}{2x^2 - 3x - 9}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - 5x^5 + 7}{3x^7 + 4x^3 - 2x}, \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x+4}{\sqrt{x+20} - \sqrt{12-x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{tg} 3x}{\sin^3 x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 + 6x - 45}{x^2 - 9}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 3x + 7}{x^2 + 5x^2 + 2}, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{19-x} - \sqrt{x+13}}{x-3}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin 4x}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + \frac{5}{2}x + 1}{x^2 - 2x - 8}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 3x^2 + 2}{7x^3 + 4x^2 + x}, \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{\sqrt{2x+15} - \sqrt{x+12}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \operatorname{tg} 4x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}}{x^3 - 1}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 5x^2 + 3}{3x^2 + 3x + 2}, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5x-4} - \sqrt{x+12}}{x-4}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \operatorname{tg}^2 5x}{3 \cdot \sin^2 2x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\frac{3}{2}x^2 - 7x - \frac{5}{2}}{2x^2 - 11x + 5}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 2}{3x^4 - 2x^3 + 2}, \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{\sqrt{2x+8} - \sqrt{2-x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{3x}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\frac{1}{4}x^3 + 16}{x^2 + \frac{9}{2}x + 2}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^7 + 3x + 5}{2x^7 - 5x^3 + 2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4-x^2} - 2}{x^3 + 2x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{5x \cdot \operatorname{tg} 3x}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{2}{3}}{2x^3 - 16}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2 + \frac{5}{2}x + \frac{7}{2}}{3x^3 + x + 1}, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+6} - \sqrt{3-x}}{2x+2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 5x}{2 \cdot x^2}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 8x + 8}{\frac{1}{2}x + 1}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - 5x^2 + 1}{7x^5 - x^3 + 2}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+9} - 3}{2 \cdot x}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 3x}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{3x^2 - 9x + 6}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 4x^2 + 3}{5x^3 + x^2 - 8}, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{4x - 16}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{13-x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 2x}{x^2}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 6x - 9}{2x^2 - 18}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 3x - 1}{6x^2 - 5x + 2}, \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{12-x} - \sqrt{x+8}}{3x - 6}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 8x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 14x + 24}{x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^7 - 4x^5 + 7}{7x^7 + 3x^3 - 2x}, \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x + 4}{\sqrt{x+14} - \sqrt{6-x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin 5x}{\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 5}{x^2 - 9}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 4x + 7}{3x^3 + 5x^2 + 2}, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{15-x} - \sqrt{x+9}}{2x - 6}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \cdot \operatorname{tg} 2x}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 9}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^7 - 5x^5 + 7}{3x^7 + 4x^3 - 2x}, \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{12-x} - \sqrt{x+6}}{x - 3}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{1 - \cos 3x}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}}{x^2 - 9}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - 5x^5 + 7}{3x^7 + 4x^3 - 2x}, \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - \sqrt{3-x}}{x + 1}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 2x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 5x + 2}{x^2 - 2x - 8}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^7 + x + 5}{4x^7 - x^3 + 2}, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{4}x - 1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{13-x}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 2x}{3x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{2x^2 - 3x - 9}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^3 + 5x^2 + 2}, \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{\sqrt{2x+10} - \sqrt{x+7}}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^2 5x}{3 \operatorname{tg}^2 2x}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 3x^2 + 2}{2x^3 + 4x^2 + x}, \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{3x+4} - \sqrt{x+12}}{x - 4}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \sin x}{5x}.$$

Необхідні теоретичні відомості

Рівняння площини у просторі

У декартовій системі координат площина задається рівнянням першого ступеня $ax+by+cz+d=0$, де a, b, c – сталі величини, які одночасно не дорівнюють нулю (тобто $a^2+b^2+c^2 \neq 0$). І навпаки, всяке рівняння першого ступеня $ax+by+cz+d=0$ у декартовій системі координат є рівнянням деякої площини (якщо $a^2+b^2+c^2 \neq 0$). Це рівняння називається **загальним рівнянням площини**. Числа a, b, c є координатами вектора нормалі до площини.

Якщо $\vec{N}(a, b, c)$ – нормальний вектор площини і $M(x_0, y_0, z_0)$ – точка, яка належить площині, то рівняння цієї площини можна записати у вигляді:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0.$$

Рівняння площини π , що проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ і паралельна двом не колінеарним векторам $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$, у декартовій системі

координат має вигляд:
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Параметричні рівняння площини, що проходить через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ і паралельну двом неколінеарним між собою векторам $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)$ у декартовій системі координат мають вигляд: $x = x_0 + u \cdot a_1 + v \cdot b_1$, $y = y_0 + u \cdot a_2 + v \cdot b_2$, $z = z_0 + u \cdot a_3 + v \cdot b_3$.

Нехай дано три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій. Рівняння площини, що проходить через три точки, які

не лежать на одній прямій, має вигляд:
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Якщо площина не проходить через початок координат і перетинає всі осі загальної декартової системи координат відповідно в точках $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$,

$(0, 0, c)$, то її рівняння, як рівняння площини, що проходить через три точки, можна записати у вигляді: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Це рівняння називається рівнянням площини у відрізках.

Рівняння площини $ax + by + cz + d = 0$ називається **нормальним**, якщо нормальний вектор $\vec{N}(a, b, c)$ цієї площини має одиничну довжину, тобто якщо: $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

Якщо площина задана нормальним рівнянням, то **відстань** ρ від точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до цієї площини обчислюється за формулою: $|ax_0 + by_0 + cz_0 + d| = \rho$.

Часто розглядають величину $\delta = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$, яка називається **відхиленням** точки $M(x_0, y_0, z_0)$ від площини. Очевидно $|\delta| = \rho$. Знак вільного коефіцієнта d вибирають так, щоб початок координат мав від'ємне відхилення.

Пряма у просторі

Рівняння прямої у просторі можна записати як перетин двох площин, тобто у вигляді системи:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0. \end{cases} \quad \text{Ці рівняння іноді називають загальними}$$

рівняннями прямої в просторі.

У декартовій системі координат рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямний вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, мають вигляд:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}. \quad \text{Вони називаються канонічними рівняннями прямої.}$$

Параметричні рівняння прямої у просторі мають вигляд: $x = x_0 + a_1t$,
 $y = y_0 + a_2t$, $z = z_0 + a_3t$.

Рівняння прямої, що проходить через дві різні точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, мають вигляд: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

Взаємне розташування прямих і площин у просторі

Нехай дано дві прямі у просторі: $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{a_2} = \frac{z-z_1}{a_3}$ і

$$\frac{x-x_2}{b_1} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{b_3}. \text{ Позначимо через } \Delta = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Тоді:

1) дані прямі співпадають тоді і тільки тоді, коли всі три вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ і $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ колінеарні;

2) прямі паралельні тоді і тільки тоді, коли вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ колінеарні, але вектор $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ їм не колінеарний;

3) прямі перетинаються тоді і тільки тоді, коли $\Delta=0$, але вектори $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ неколінеарні;

4) прямі мимобіжні тоді й тільки тоді, коли $\Delta \neq 0$.

Нехай дані пряма

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} \text{ і площина } ax+by+cz+d=0.$$

1) Площина і пряма перетинаються тоді й тільки тоді, коли $a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c \cdot a_3 \neq 0$.

2) Площина і пряма паралельні тоді й тільки тоді, коли: $a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c \cdot a_3 = 0$ і $ax_0 + by_0 + cz_0 + d \neq 0$.

3) Пряма лежить у площині тоді й тільки тоді, коли $a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c \cdot a_3 = 0$ і $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$.

Кутом між площинами називається гострий кут між їх нормаллями. Кут між паралельними площинами вважається рівним нулю.

Косинус кута між двома площинами, заданими рівняннями

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, виражається формулою:

$$\cos \alpha = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}.$$

Кутом між двома прямими у просторі називається гострий кут між двома паралельними їм прямими, що проходять через довільну точку простору.

Нехай $\vec{l}(l_1, l_2, l_3)$ і $\vec{m}(m_1, m_2, m_3)$ – напрямні вектори даних прямих. Тоді

$$\cos \alpha = \frac{|l_1m_1 + l_2m_2 + l_3m_3|}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2} \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}}.$$

Кутом між прямою і площиною називається менший з двох кутів між цією прямою і її ортогональною проекцією на цю площину. Якщо ж пряма і площина перпендикулярна, то кут між ними вважається рівним $\frac{\pi}{2}$.

Нехай задана площина π загальним рівнянням $ax + by + cz + d = 0$ і пряма l канонічними рівняннями $\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$.

Косинус кута ψ між вектором $\vec{N}(a, b, c)$, перпендикулярним даній площині, і напрямним вектором $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ даної прямої по абсолютній величині дорівнює синусу кута φ між даною прямою і даною площиною. Значить:

$$\cos \psi = \sin \varphi = \frac{|a \cdot a_1 + b \cdot a_2 + c \cdot a_3|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

Еліпс, гіпербола, парабола

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней яких до двох заданих точок F_1 і F_2 , що називаються **фокусами**, є величина стала.

При певному виборі системи координат рівняння еліпса має вигляд:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Це рівняння називається **нормальним** або **канонічним** рівнянням еліпса.

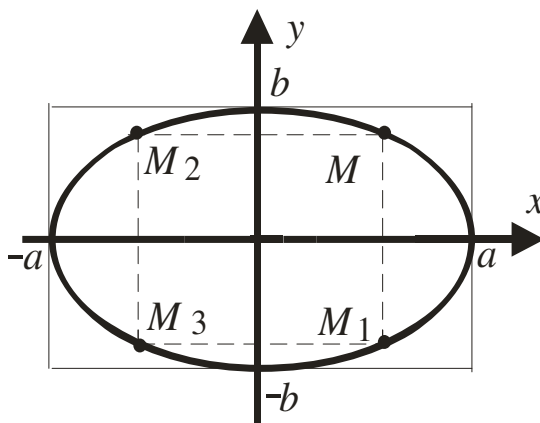


Рис. 9

Еліпс має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії (**головні осі еліпса**) і центр симетрії (**центр еліпса**) (Рис. 9). Іноді осі симетрії еліпса називають **головними осями**. Точки перетину еліпса з осями симетрії називаються **вершинами еліпса**.

Ми також називатимемо **великою** і **малою** осями еліпса прямі, що є осями симетрії еліпса. Якщо еліпс заданий канонічним рівнянням, то при $a > b$ великою віссю буде вісь Ox , а малою – вісь Oy . При $a < b$ великою віссю буде вісь Oy , а малою – Ox . Фокуси еліпса розташовуються на його великій осі.

Відношення $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ називається **чисельним ексцентриситетом**,

або просто **ексцентриситетом** еліпса.

Гіперболою називається геометричне місце точок, різниця відстаней яких до двох заданих точок F_1 і F_2 , які називаються **фокусами**, є величина стала (по абсолютній величині).

При певному виборі системи координат рівняння гіперболи має вигляд:

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Це рівняння називається *нормальним*, або *канонічним* рівнянням гіперболи.

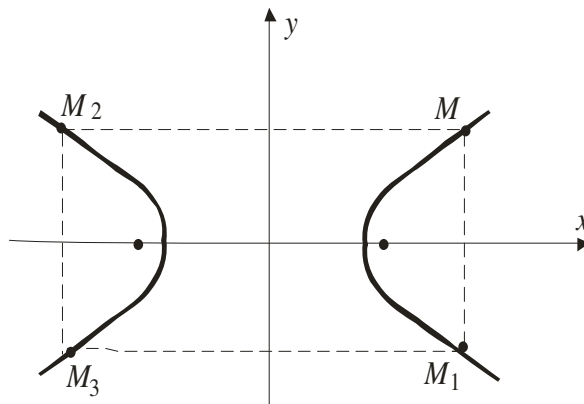


Рис. 10

Гіпербола має дві осі симетрії (*головні осі гіперболи*) і центр симетрії (*центр гіперболи*). Вісь Ox перетинає гіперболу в двох точках: $A_1(a, 0)$ і $A_2(-a, 0)$. Ці точки називаються *вершинами* гіперболи. Вісь Ox називається *дійсною віссю гіперболи*. Вісь Oy не має спільних точок з гіперболою і називається *уявною віссю гіперболи*.

Асимптотою кривої $y = f(x)$ називається пряма l така, що відстань від точки $M(x, f(x))$ до прямої l наближається до нуля при необмеженому віддаленні точки M від початку координат, тобто при $|OM| \rightarrow \infty$.

Прямі $y = \pm \frac{b}{a}x$ є асимптотами гіперболи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Відношення $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ називається *чисельним ексцентриситетом*, або просто *ексцентриситетом* гіперболи.

Параболою називається геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки (яка називається *фокусом*) і даної прямої (яка називається *директрисою*).

При певному виборі системи координат рівняння параболи має вигляд: $y^2 = 2px$. Це рівняння називається **канонічним** рівнянням параболи. Величина p називається параметром параболи. Точка перетину параболи з віссю називається **вершиною параболи** (Рис. 11).

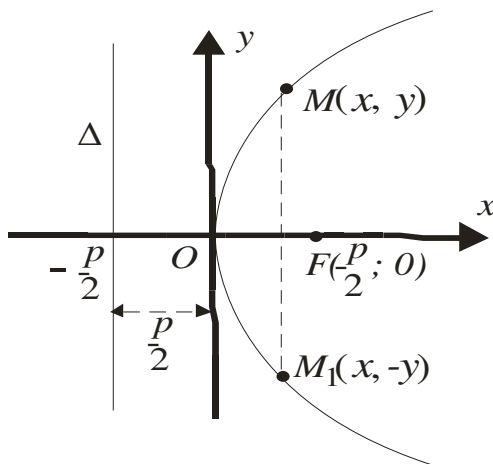


Рис. 11

Функція

Якщо кожному значенню змінної x , що належить деякій області, відповідає одне певне значення іншої змінної y , то y є **функція** від x і в символічному запису має вигляд: $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ і т.д.

Змінна x називається **незалежною змінною** або **аргументом**. Залежність змінних x та y називається **функціональною залежністю**.

Сукупність значень x , для яких визначаються значення функції y в силу правила $f(x)$, називається **областю визначення функції** (або **областю існування функції**).

Зазвичай розглядають три способи задання функції: **аналітичний**, **табличний**, **графічний**.

Функція називається заданою **аналітично**, якщо вона виражена за допомогою формули.

Приклади: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (залежність об'єма кулі V від радіуса R), $N = N_0 e^{kt}$

(залежність кількості населення N від часу t) і т.д.

Залежність середньої річної температури t від висоти h місцевості над рівнем моря, вираженої у кілометрах, було надано у вигляді таблиці:

h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
T	+7,9	+4,6	+0,1	-5,0	-10,7	-16,9	-23,7	-30,8	-38,0

З наведеної таблиці ми можемо кожному значенню висоти h поставити у відповідність значення температури t . Такий спосіб задання функції називається **табличним**.

Залежність між незалежною змінною x та функцією y можна встановити за допомогою графіка функції (Рис. 12):

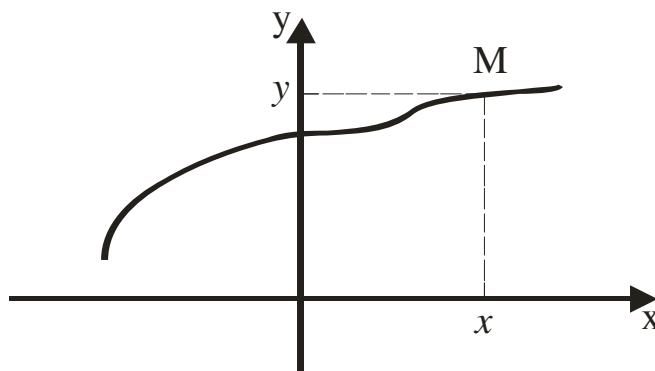


Рис. 12

Тут, щоб для деякого значення аргументу x знайти відповідне значення функції $y(x)$, необхідно на осі Ox відкласти відповідний відрізок (з урахуванням знаку змінної x). Потім з точки x провести перпендикуляр до осі Ox і знайти точку перетину M графіку з цим перпендикуляром. З точки M опустимо перпендикуляр на вісь Oy . Отримаємо точку y на осі Oy . Значення координати точки y і буде відповідним значенням функції $y(x)$.

Цей спосіб задання функції називається **графічним**.

Границя функції

Число A називається **границею функції** $f(x)$ при $x \rightarrow a$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує $\delta(\varepsilon) > 0$ таке, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ як тільки $|x - a| < \delta(\varepsilon)$.

Границя функції позначається таким чином: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$.

Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою** при $x \rightarrow a$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$.

Функція $M(x)$ називається **нескінченно великою** при $x \rightarrow a$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} M(x) = \infty$.

Основні властивості границь:

1. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;
2. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, то $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$;
3. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B \neq 0$, то $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$;
4. $\lim_{x \rightarrow a} \lambda \cdot f(x) = \lambda \cdot A$, де λ – стала величина.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$;
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

Перша чудова границя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Друга чудова границя: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\beta}\right)^{\beta} = e$.

Зразок виконання індивідуального завдання

I. Дано точки $A(2; -3; 1)$, $B(-1; 2; 3)$, $C(-3; 1; 1)$, $D(3; 3; -2)$ та вектори $\vec{a}(3; 0; -4)$, $\vec{b}(2; -1; 2)$. Знайти:

а) рівняння прямої, яка проходить через точки A і B ;

- б) рівняння прямої, яка паралельна вектору $\vec{a}$ та проходить через точку С;
 в) рівняння площини, яка проходить через точки А, В і С;
 г) рівняння площини, яка проходить через точку А і паралельна векторам $\vec{a}, \vec{b}$;
 д) рівняння площини, яка перпендикулярна відрітку ВС та проходить через точку С;
 е) ортогональну проекцію точки D на площину, що проходить через точки А, В та С.

Рішення:

- а) Рівняння прямої, яка проходить через дві точки, мають вигляд:

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. У нашому випадку рівняння шуканої прямої будуть:

$$\frac{x-2}{-1-2} = \frac{y+3}{2+3} = \frac{z-1}{3-1}, \text{ або } \frac{x-2}{-3} = \frac{y+3}{5} = \frac{z-1}{2}.$$

б) Рівняння прямої, яка проходить через дану точку $C(x_0; y_0; z_0)$ і паралельна даному векторові $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$, мають вигляд: $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$.

Таким чином, у нашому випадку: $\frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-4}$.

в) Рівняння площини, яка проходить через три дані точки $A(x_1; y_1; z_1), B(x_2; y_2; z_2), C(x_3; y_3; z_3)$, можна записати у вигляді:

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$. Скористаємось даними нашої задачі і отримаємо

рівняння площини: $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -1-2 & 2+3 & 3-1 \\ -3-2 & 1+3 & 1-1 \end{vmatrix} = 0$, або $\begin{vmatrix} x-2 & y+3 & z-1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

Розкриємо останній визначник:

$$(x-2) \cdot 5 \cdot 0 + (y+3) \cdot 2 \cdot (-5) + (z-1) \cdot (-3) \cdot 4 - (y+3) \cdot (-3) \cdot 0 - (x-2) \cdot 4 \cdot 2 - (z-1) \cdot (-5) \cdot 5 = 0.$$

Приведемо подібні члени і остаточно отримаємо рівняння шуканої площини:

$$8x + 10y - 13z + 27 = 0.$$

г) Рівняння площини, яка проходить через дану точку $A(x_0; y_0; z_0)$ та паралельна даним векторам $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$ і $\vec{b}(b_1; b_2; b_3)$, має вигляд:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{У нашому випадку маємо:} \quad \begin{vmatrix} x - 2 & y + 3 & z - 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриваючи останній визначник та приводячи подібні члени, отримуємо рівняння площини: $4x + 14y + 3z + 31 = 0$.

д) Якщо площина перпендикулярна векторові $\vec{N} = (a; b; c)$ і проходить через точку $A(x_0; y_0; z_0)$, то її рівняння має вигляд: $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$. За умовою задачі шукана площина перпендикулярна векторові $\vec{BC} = (x_C - x_B; y_C - y_B; z_C - z_B)$ та проходить через точку С. У нашому випадку $\vec{BC} = (-3 + 1; 1 - 2; 1 - 3) = (-2; -1; -2)$. Рівняння площини: $-2(x + 3) - (y - 1) - (z - 1) = 0$, або $2x + y + z + 4 = 0$.

е) Для того, щоб знайти ортогональну проекцію точки D на площину ABC, потрібно провести через точку D пряму, яка перпендикулярна площині ABC і знайти точку перетину цієї прямої з площиною ABC. Знайдена точка і буде шуканою ортогональною проекцією.

Направляючим вектором прямої, яка перпендикулярна площині $ax + by + cz + d = 0$, буде вектор нормалі до цієї площини: $\vec{N} = (a; b; c)$. Як і в п. б) знаходимо рівняння прямої: $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$. Перепишемо це рівняння у параметричному вигляді: $x = a \cdot t + x_0, y = b \cdot t + y_0, z = c \cdot t + z_0$. Підставимо вирази для x, y, z у рівняння площини і отримаємо рівняння для параметра t : $a(at + x_0) + b(bt + y_0) + c(ct + z_0) + d = 0$. З останнього рівняння знаходимо параметр t , що відповідає точці, яка буде проекцією точки D на площину ABC.

Знайдемо проекцію точки D на площину ABC у нашій задачі. Рівняння площини ABC знайдено у п. в): $8x + 10y - 13z + 27 = 0$. Параметричні рівняння

прямої, яка проходить через точку D і перпендикулярна площині ABC, мають вигляд: $x = 8 \cdot t + 3, y = 10 \cdot t + 3, z = -13 \cdot t - 2$. Підставимо значення для x, y, z у рівняння площини ABC: $8(8t + 3) + 10(10t + 3) - 13(-13t - 2) + 27 = 0$. Із останнього рівняння знаходимо: $t = -\frac{107}{324}$. Підставимо знайдений параметр t у параметричні рівняння прямої і знайдемо проекцію точки D на площину ABC: $x = 8 \cdot (-\frac{107}{324}) + 3, y = 10 \cdot (-\frac{107}{324}) + 3, z = -13 \cdot (-\frac{107}{324}) - 2$, або: $x = \frac{29}{81}, y = -\frac{49}{162}, z = \frac{743}{324}$.

II. Для даних кривих 1) $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$, 2) $16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 89 = 0$, 3) $y^2 + 4y - 6x + 10 = 0$ знайти:

а) центр кривої (якщо центр існує); б) вершину параболи; в) довжини півосей (якщо півосі існують); г) координати фокусів (або фокуса); д) ексцентриситет; е) рівняння директрис; ж) параметр параболи; з) рівняння асимптот гіперболи; и) зробити малюнок кожної з кривих.

Рішення.

1) Розглянемо першу криву $4x^2 + 9y^2 - 16x + 54y + 61 = 0$. Виділимо повні квадрати по змінним x та y : $4(x^2 - 4x + 4 - 4) + 9(y^2 + 6y + 9 - 9) + 61 = 0$, або $4(x - 2)^2 + 9(y + 3)^2 - 36 = 0$. Поділимо останнє рівняння на 36. Отримаємо рівняння кривої у вигляді: $\frac{(x - 2)^2}{9} + \frac{(y + 3)^2}{4} = 1$. Це є рівняння еліпса, центр якого знаходиться у точці $(2; -3)$, піввісь, яка паралельна осі Ox , має довжину 3, піввісь, яка паралельна осі Oy , має довжину 2. Фокуси еліпса знаходяться на більшій півосі на відстані $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$ від центра (a – більша, b – менша півосі еліпса). Для нашої кривої знаходимо координати фокусів: $F_1 = (2 + \sqrt{5}; -3)$, $F_2 = (2 - \sqrt{5}; -3)$. Ексцентриситет еліпса знаходимо за формулою: $\varepsilon = \frac{c}{a}$. У нашому випадку $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Директриси еліпса – це прямі, які перпендикулярні більшій півосі a еліпса і знаходяться на відстані $d = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c}$ від

центра еліпса. Таким чином рівняння директрис для нашої кривої: $x = 2 + \frac{9}{\sqrt{5}}$ та $x = 2 - \frac{9}{\sqrt{5}}$. Використовуючи отримані дані, робимо рисунок кривої (Рис. 13).

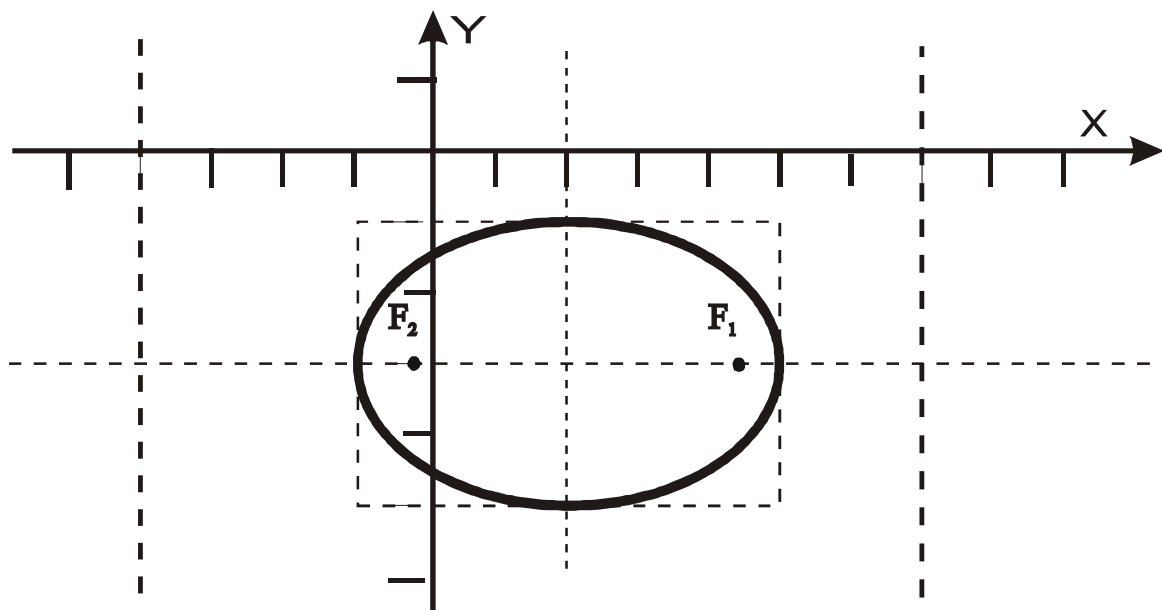


Рис. 13

2) Таким же чином, як і у попередньому випадку, виділимо повні квадрати:
 $16x^2 - 9y^2 + 64x + 18y - 89 = 16(x^2 + 4x + 4 - 4) - 9(y^2 - 2y + 1 - 1) - 89 = 0$, або
 $16(x+2)^2 - 9(y-1)^2 = 144$. Поділимо останнє рівняння на 144 і отримаємо рівняння кривої у вигляді: $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{16} = 1$. Це є рівняння гіперболи, центр якої знаходиться у точці $(-2; 1)$, дійсна піввісь паралельна осі Ox і має довжину 3, уявна піввісь паралельна осі Oy і має довжину 4. Фокуси гіперболи знаходяться на дійсній півосі на відстані $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ від центра гіперболи (a – дійсна, b – уявна півосі гіперболи). Знаходимо координати фокусів нашої гіперболи: $F_1 = (-2 + 5; 1) = (3; 1)$, $F_2 = (-2 - 5; 1) = (-7; 1)$. Ексцентриситет гіперболи знаходимо за формулою: $\varepsilon = \frac{c}{a}$. У нашому випадку $\varepsilon = \frac{5}{3}$. Директриси гіперболи – це прямі, які перпендикулярні дійсній півосі a гіперболи і знаходяться на

відстані $d = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c}$ від центра гіперболи. Таким чином рівняння директрис для нашої кривої: $x = -2 + \frac{9}{5} = -\frac{1}{5}$ та $x = -2 - \frac{9}{5} = -\frac{19}{5}$. Асимптоти гіперболи мають кутові коефіцієнти відповідно $k_1 = \frac{b}{a}$ та $k_2 = -\frac{b}{a}$ і проходять через центр гіперболи. Використовуючи рівняння прямої з даним кутовим коефіцієнтом k , яка проходить через дану точку $(x_0; y_0)$, знаходимо рівняння асимптот даної гіперболи: $y - 1 = \frac{4}{3}(x + 2)$ та $y - 1 = -\frac{4}{3}(x + 2)$. Рівняння асимптот можна привести відповідно до вигляду: $4x - 3y + 11 = 0$ та $4x + 3y + 5 = 0$.

Використовуючи отримані дані, побудуємо криву (Рис. 14).

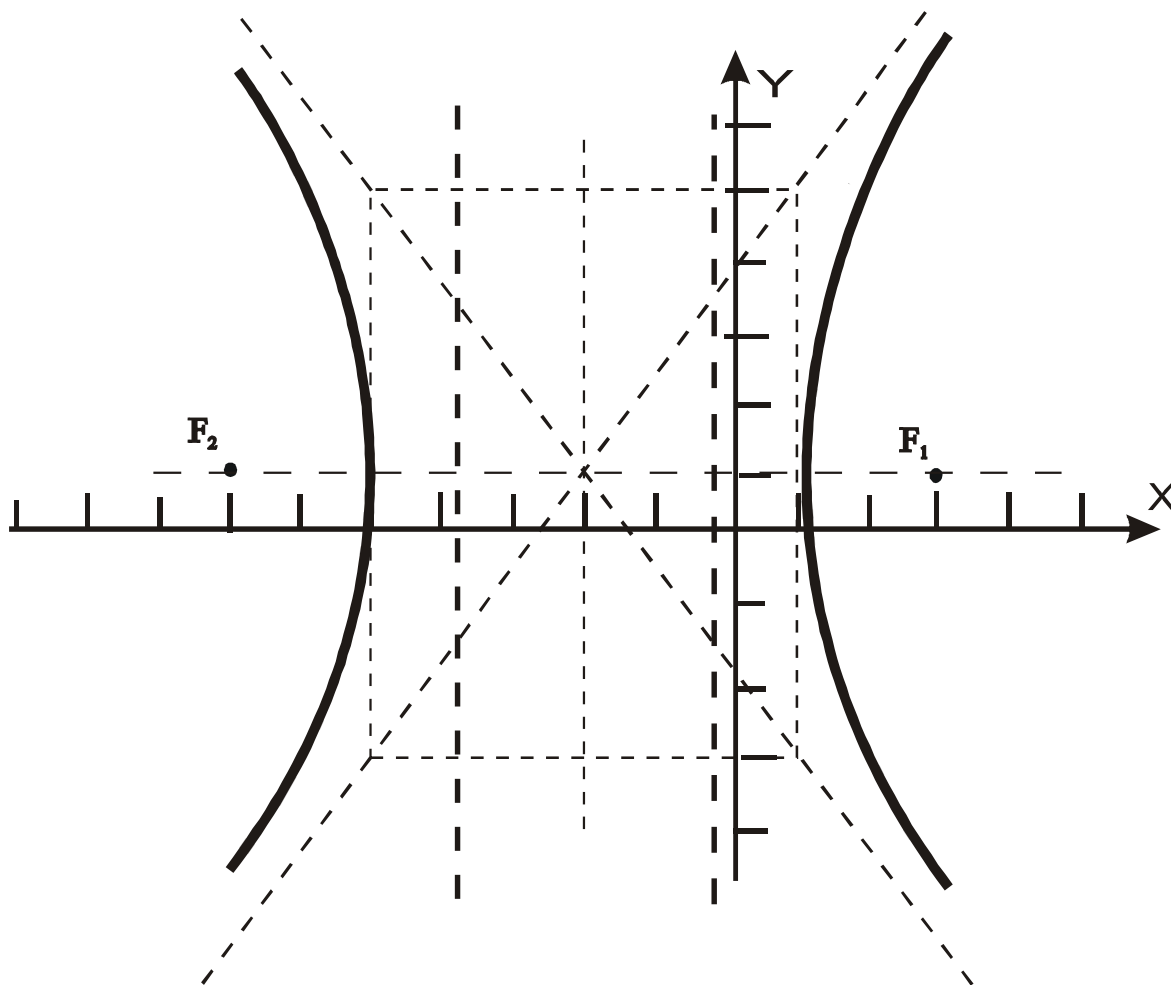


Рис. 14

3) Виділимо повний квадрат по змінній y :
 $y^2 + 4y + 4 - 4 - 6x + 10 = (y + 2)^2 - 6(x - 1) = 0$. Останнє рівняння перепишемо у вигляді: $(y + 2)^2 = 6(x - 1)$. Це є рівняння параболи. Вершина параболи знаходиться у точці $(1; -2)$. Параметр параболи дорівнює 3. Якщо параметр параболи дорівнює p , то фокус параболи знаходиться на відстані $\frac{p}{2}$ від вершини у напрямку гілок параболи. Таким чином, координати фокуса даної параболи будуть $(1 + \frac{3}{2}; -2) = (\frac{5}{2}; -2)$. Директриса перпендикулярна осі параболи і знаходиться на відстані $\frac{p}{2}$ у протилежному напрямку від фокуса. Таким чином, рівняння директриси: $x = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$, рівняння осі параболи: $y = -2$. Ексцентриситет будь якої параболи дорівнює 1.

Використовуючи отримані дані, побудуємо криву (Рис. 15).

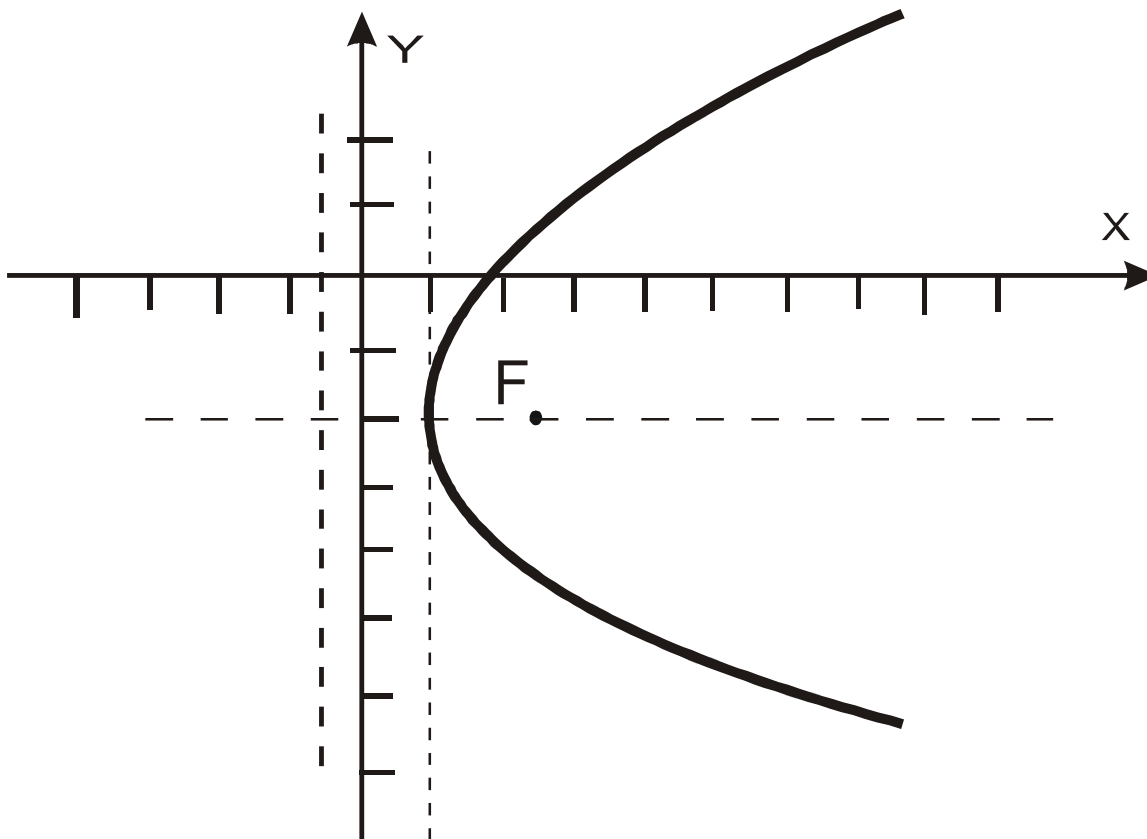


Рис. 15

III. Знайти границі:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 + 3x + 2}; 2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 4x^2 + 1}{5x^4 - x^3 + 2}; 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1}; 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 3x}.$$

Рішення:

1) При $x = -1$ чисельник та знаменник виразу, що стоїть під знаком границі, дорівнює нулю. Тому спочатку треба розкласти чисельник та знаменник на

множники і тоді отримаємо:
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x^2 + 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-3) \cdot (x+1)}{(x+1) \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-3)}{x+2} = -8.$$

2) Оскільки при $x \rightarrow \infty$ чисельник та знаменник виразу під знаком границі нескінченно зростають, то потрібно зробити наступні перетворення:

$$\frac{3x^4 - 4x^2 + 1}{5x^4 - x^3 + 2} = \frac{x^4(3 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4})}{x^4(5 - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4})} = \frac{3 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{5 - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}}. \text{ Враховуючи, що } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{A}{x^\alpha} = 0, \text{ де } A -$$

постійна величина, $\alpha > 0$, остаточно отримуємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 4x^2 + 1}{5x^4 - x^3 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{4}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{5 - \frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^4}} = \frac{3}{5}.$$

3) Якщо підставити $x=1$ у чисельник та знаменник виразу під знаком границі, то отримаємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Перетворимо вираз під знаком

границі:
$$\frac{\sqrt{3x+1} - 2}{x-1} =$$

$$\frac{(\sqrt{3x+1} - 2) \cdot (\sqrt{3x+1} + 2)}{(x-1) \cdot (\sqrt{3x+1} + 2)} = \frac{(3x+1) - 4}{(x-1) \cdot (\sqrt{3x+1} + 2)} = \frac{3(x-1)}{(x-1) \cdot (\sqrt{3x+1} + 2)} = \frac{3}{\sqrt{3x+1} + 2}.$$

Чисельник та знаменник у виразі під знаком границі ми одночасно помножили на вираз $\sqrt{3x+1} + 2$, який є спряженим до виразу $\sqrt{3x+1} - 2$, та скористалися

формулою різниці квадратів: $a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$. Таким чином:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{\sqrt{3x+1}+2} = \frac{3}{4}.$$

4) Оскільки $\cos 0 = 1$, то при підстановці $x = 0$ у чисельник та знаменник виразу під знаком границі отримуємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Скористаємось

формулою $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$. Тоді вираз під знаком границі можна перетворити

наступним чином: $\frac{1 - \cos x}{1 - \cos 3x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{3x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{3x}{2}}$. Враховуючи попередні

перетворення виразу під знаком границі, отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\sin^2 \frac{3x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2}{\left(\frac{3x}{2}\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{3x}{2}}{\frac{3x}{2}}\right)^2}. \quad \text{Скористаємось першою чудовою}$$

границею: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$. Тоді остаточно отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \cos 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\left(\frac{3x}{2}\right)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{9x^2} = \frac{1}{9}.$$

Задачі для самостійної підготовки

Полярні координати на площині. Сферичні і циліндричні координати.

1. Побудувати точки, задані полярними координатами:

$$P_1(2; \frac{\pi}{3}), P_2(1; \frac{\pi}{4}), P_3(3; -\frac{\pi}{2}), P_4(4; \frac{\pi}{2}), P_5(2; \pi).$$

2. Знайти координати точок, симетричних точкам $P_1(1; \frac{\pi}{2})$, $P_2(2; \frac{\pi}{3})$, $P_3(4; \frac{\pi}{4})$, $P_4(3; \frac{2\pi}{3})$, відносно полярної осі.

3. Як розміщені точки, полярні координати яких задовольняють одному з таких рівнянь:

$$\text{а) } \rho = 3; \text{ б) } \rho = a; \text{ в) } \varphi = \frac{\pi}{6}; \text{ г) } \varphi = \frac{\pi}{2}; \text{ д) } \varphi = \varphi_0?$$

4. Дано полярні координати точки: $r = 10, \varphi = 30^\circ$. Знайти її прямокутні координати, якщо полюс – у точці (2; 3), а полярна вісь паралельна додатному напрямку осі Ох.

5. Полюс полярної системи координат збігається з початком декартових прямокутних координат, а полярна вісь – з додатною піввіссю абсцис. Знайти полярні координати точок, якщо відомі їх декартові координати:

$$M_1(0; 5), M_2(-3; 0), M_3(\sqrt{3}; 1), M_4(1; -\sqrt{3}).$$

6. Знайти відстань d між точками, якщо відомі їх полярні координати:

$$r_1 = 3, \varphi_1 = 10^\circ; r_2 = 5, \varphi_2 = 130^\circ.$$

7. Полюс полярної системи координат знаходиться у точці (3; 5). Полярна вісь паралельна додатньому напрямку осі Оу. Знайти полярні координати точок $M_1(9; -1)$, $M_2(5; 5+2\sqrt{3})$.

8. У полярній системі координат дано дві вершини $A(3; \frac{4}{9}\pi)$ і $B(5; \frac{11}{15}\pi)$ паралелограма ABCD, точка перетину діагоналей якого збігається з полюсом. Знайти дві інші вершини цього паралелограма.

9. Одна з вершин трикутника ОАВ збігається з полюсом О, дві інші суть точки $A(5; \frac{\pi}{4})$ і $B(4; \frac{\pi}{12})$. Обчислити площу S цього трикутника.

10. У полярній системі координат дано дві вершини правильного трикутника $A(4; \frac{23}{12}\pi)$ і $B(8; \frac{7\pi}{12})$. Обчислити його площу S .

11. В полярній системі координат дано дві точки $A(8; \frac{4\pi}{3})$ і $B(6; \frac{\pi}{3})$.

Обчислити полярні координати точки C – середини відрізка AB .

12. Знайти циліндричні координати точок по їх прямокутних координатах: $A(4; -3; 2)$, $B(1; -1; -1)$, $C(-4; 0; 5)$, $D(7; 0; -8)$.

13. Промінь OM складає з осями координат Ox , Oy , Oz відповідно кути $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{3\pi}{4}$ і довжина відрізка $|OM| = 2$. Знайти:

- а) прямокутні координати точки M ;
- б) циліндричні координати точки M ;
- в) сферичні координати точки M .

14. Знайти сферичні координати r, φ, Θ точок по їх прямокутним координатам: $A(8; 4; 1)$, $B(2; 2; -1)$, $C(0; -3; 4)$, $D(-1; 1; 1)$, $E(0; 1; 0)$.

15. Знайти прямокутні координати точки, що належить кулі радіуса $r = 1$, якщо відомі її широта $\Theta = 30^\circ$ і довгота $\varphi = 300^\circ$.

Системи лінійних рівнянь

Розв'язати системи лінійних рівнянь, користуючись правилом Крамера:

$$\begin{array}{ll}
 16. \begin{cases} 5x - 3y + z = 2, \\ x + 4y - z = 6, \\ 3x + y + z = 8. \end{cases} & 17. \begin{cases} 3x + 4y - 5z = -11, \\ 2x - y + 3z = -1, \\ x + 2y + 5z = 3. \end{cases} & 18. \begin{cases} x + y - z = 4, \\ 2x - y + 3z = 5, \\ 7x + 2y + 2z = 23. \end{cases} & 19. \begin{cases} 3x + 2y + z = 8, \\ x + 2y + 2z = 3, \\ -x + 4y + z = -6. \end{cases} \\
 20. \begin{cases} x + 3y + 2z = 13, \\ 2x - 3y - z = 0, \\ 3x - 6y - 2z = -5. \end{cases} & 21. \begin{cases} 2x - 3y + 3z = 9, \\ x + 2y - 2z = 8, \\ 3x - 5y + z = -8. \end{cases} & 22. \begin{cases} x + 7y + 2z = 7, \\ x - 5y + 2z = -5, \\ x + y + z = 2. \end{cases} & 23. \begin{cases} x - 2y - 4z = -22, \\ x - y + 3z = 15, \\ 2x + y - z = 1. \end{cases}
 \end{array}$$

$$24. \begin{cases} x+2y+z=4, \\ 3x-5y+3z=1, \\ 2x+7y-z=8. \end{cases} \quad 25. \begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$$

Розв'язати системи лінійних рівнянь, користуючись методом Гауса:

$$31. \begin{cases} x+2y-4z=1, \\ 2x+y-5z=-1, \\ x-y-z=-2. \end{cases} \quad 27. \begin{cases} 2x-y+z=-2, \\ x+2y+3z=-1, \\ x-3y-2z=3. \end{cases} \quad 28. \begin{cases} 3x-y+2z=5, \\ 2x-y-z=2, \\ 4x-2y-2z=-3. \end{cases} \quad 29. \begin{cases} 5x-y+3z=1, \\ x-y+2z=2, \\ 7x-3y+7z=5. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x+y-z=3, \\ 4x+y+z=7, \\ 6x+3y-z=13. \end{cases} \quad 31. \begin{cases} x+y-z=4, \\ 2x-y+2z=-2, \\ 4x+3y-6z=16, \\ 5x+2y-z=10. \end{cases} \quad 32. \begin{cases} x-3y+3z=0, \\ 2x+y-z=0, \end{cases} \quad 33. \begin{cases} x+4y+3z=0, \\ 2x-y+3z=0, \\ 3x+y-5z=0. \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} 2x+y+z=0, \\ x-4y+5z=0, \\ x+2y+3z=0, \\ x-y+4z=0. \end{cases} \quad 35. \begin{cases} x-y+z+t=0, \\ 2x+y-z+2t=3, \\ x+2y-2z+t=3. \end{cases}$$

Вектори

Лінійні операції над векторами

36. За даними векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ побудувати кожний з векторів:

а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $\vec{b}-\vec{a}$; г) $-\vec{a}-\vec{b}$; д) $\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{2}$; е) $\frac{2\vec{b}-3\vec{a}}{2}$;

37. За яких умов вектори $\vec{a}+\vec{b}$ і $\vec{a}-\vec{b}$ будуть колінеарні?

38. Яку умову повинні задовольняти вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, щоб вектор $\vec{a}+\vec{b}$ ділив кут між ними навпіл? (Припускаємо, що всі три вектори зведені до спільного початку).

39. У трикутнику ABC вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, а вектор $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Знайти вектори, що збігаються з медіанами цього трикутника.

40. Нехай $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ – радіуси-вектори трьох послідовних вершин паралелограма ABCD. Знайти радіус-вектор вершини D.

41. Дано правильний шестикутник $OABCDE$ зі стороною $OA=3$. Нехай $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$ – орти векторів $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ відповідно. З'ясувати залежність між векторами $\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$. Записати вектори $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EO}, \overrightarrow{OD}$ і $\overrightarrow{DA}$ через вектори $\vec{m}$ і $\vec{n}$.

42. Дано трапецію $ABCD$ ($BC \parallel AD, AD > BC$) з кутом $\angle BAD = 60^\circ$. Нехай $AB=BC=CD=4$, точки M і N середини сторін BC і CD відповідно. Виразити вектори $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ і $\overrightarrow{BD}$ через вектори $\vec{e}_1$ і $\vec{e}_2$ – орти векторів $\overrightarrow{AD}$ і $\overrightarrow{AB}$.

43. Дано тетраедр $OABC$. Виразити через вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$:

а) вектор $\overrightarrow{OD}$, де D – точка перетину медіан трикутника ABC ; б) вектор $\overrightarrow{DE}$, де точка E ділить напрямний відрізок $\overrightarrow{OC}$ у відношенні $1 : 3$.

44. Довести, що сума векторів, які сполучають центр правильного трикутника з його вершинами, дорівнює $\vec{0}$.

45. Точки K і L – середини сторін BC і CD паралелограма $ABCD$. Виразити вектори $\overrightarrow{BC}$ і $\overrightarrow{CD}$ через вектори $\overrightarrow{AK}$ і $\overrightarrow{AL}$.

Координати вектора. Проекції вектора.

46. Дано вектори $\vec{a} = (1; -3; 2)$, $\vec{b} = (5; 0; 3)$. Обчислити координати векторів $\vec{a} + 2\vec{b}$, $\frac{\vec{a} - \vec{b}}{3}$, $\frac{3\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

47. Дано вектори $\vec{a} = (1; 2)$ і $\vec{b} = (4; 3)$. Розкласти вектор $\vec{m} = (14; 13)$ за базисом $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

48. Дано вектори $\vec{a} = (-1; 0; 2)$, $\vec{b} = (2; 3; 1)$ і $\vec{c} = (0; 4; 3)$. Розкласти вектор $\vec{m} = (5; -2; -6)$ за базисом $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

49. Початок вектора $\vec{a} = (2; -1; 4)$ збігається з точкою $M(0, 2, 3)$. Знайти точку, з якою збігається його кінець.

50. Дано чотири вектори $\vec{a} = (1; 5; 3)$, $\vec{b} = (6; -4; -2)$, $\vec{c} = (0; -5; 7)$ та $\vec{d} = (-20; 27; -35)$. Підібрати числа α, β і γ так, щоб з векторів $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ та $\vec{d}$

можна було утворити замкнену лому лінію, якщо початок кожного наступного вектора збігається з кінцем попереднього.

51. Дано модуль вектора $|\vec{a}| = 7$ і кути, які він утворює з осями координат $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = -120^\circ$. Знайти його проекції на координатній осі.

52. Дано вектори $\vec{a} = (-1; 2; 4)$ та $\vec{b} = (1; 3; 5)$. Визначити проекції на базисні вектори таких векторів:

a) $\vec{a} + \vec{b}$, b) $2\vec{a} - 3\vec{b}$, c) $\frac{5\vec{a} + \vec{b}}{2}$.

Скалярний добуток векторів.

53. Обчислити кути трикутника ABC з вершинами A(1; 2; 3), B(-3; 4; 5), C(3; 0; 6).

54. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, знаючи, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 3$.

55. Знайти модуль вектора $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 1$, $|\vec{n}| = 4$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

56. Знайти кут між векторами $\vec{a} = \vec{m} - 3\vec{n}$ і $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$, якщо $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

57. Чи може вектор утворювати з координатними осями кути

a) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 120^\circ$;

b) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$, $\gamma = 150^\circ$?

58. Знайти вектор, перпендикулярний до осі Oz та до вектора $\vec{a} = (1; -2; 3)$, з модулем $2\sqrt{5}$.

59. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ утворюють трикутник. Обчислити $(\vec{a}, \vec{b}) + (\vec{b}, \vec{c}) + (\vec{c}, \vec{a})$.

60. Обчислити проекцію вектора $\vec{a} = 2i - 3j + 5k$ на вісь, яка паралельна вектору $\vec{b} = i + 3j + 2k$.

61. Вектор $\vec{x}$, колінеарний до вектора $\vec{a} = (1; 1; 2)$, утворює з віссю Ox тупий кут, $|\vec{x}| = 3\sqrt{6}$. Знайти орт вектора $\vec{x}$.

62. Дано три вектора $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 0; 2)$ і $\vec{c} = (-2; 3; 1)$. Обчислити $np_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b})$.

63. До вершини куба прикладені сили з величиною 1, 2, 3 та направлені по діагоналях граней куба, що проходять через цю вершину. Знайти величину рівнодійної $\vec{R}$ цих сил.

64. Обчислити роботу, що її виконує сила $\vec{f} = (4; 5; 2)$, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, перемістилась з положення $A(3; -7; 1)$ у положення $B(6; -1; -2)$.

65. Дано три сили $\vec{f}_1 = (3; -4; 2)$, $\vec{f}_2 = (2; 3; -5)$, $\vec{f}_3 = (-3; -2; 4)$, прикладені до однієї точки. Обчислити роботу, яку виконує рівнодійна цих сил, коли точка, до якої вона прикладена, рухаючись прямолінійно, перемістилась з точки $A(5; 3; -7)$ у точку $B(4; -1; -4)$.

Векторний добуток.

66. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Обчислити $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

67. Знайти орт вектора, перпендикулярного до векторів $\vec{a} = 2i - j + k$ та $\vec{b} = i + 3j - 4k$.

68. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ взаємно перпендикулярні. Знаючи, що $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, обчислити: а) $|\vec{a} + \vec{b}|$; б) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

69. Дано вектори $\vec{a} = (2; -1; 3)$ і $\vec{b} = (1; 3; 4)$. Знайти координати векторних добутоків: а) $[\vec{a}, \vec{b}]$; б) $[3\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}]$; в) $[2\vec{a} + \vec{b}, (\vec{a} - 2\vec{b})]$.

70. При якій величині α вектори $\vec{p} = \alpha\vec{a} - 4\vec{b}$ і $\vec{q} = 2\vec{a} + 5\vec{b}$ колінеарні?

71. Дано точки $A(1; 0; -3)$, $B(4; 1; 2)$ і $C(5; 7; -3)$. Обчислити площу трикутника ABC .

72. Знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{m} - \vec{n}$ і $\vec{b} = 3\vec{m} + \vec{n}$, де $\vec{m}$ і $\vec{n}$ – орти і $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{6}$.

73. Знайти синус кута між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (-1; 3; 5)$ та $\vec{b} = (2; 1; 4)$.

74. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (4; -2; -3)$ та $\vec{b} = (0; 1; 3)$, утворює з віссю Ox тупий кут. Знаючи, що $|\vec{x}| = 26$, знайти його координати.

Мішаний добуток трьох векторів. Подвійний векторний добуток.

75. Точки $A(-1; 2; -3)$, $B(-2; 5; 1)$, $C(-1; 6; 0)$, $D(2; 5; -6)$ є вершинами чотирикутника. Довести, що цей чотирикутник плоский, та знайти його площу.

76. У тетраедрі $OABC$ з вершини O проведені медіани бокових граней. Беручи їх за ребра нового тетраедру, довести, що об'єм його становить $\frac{1}{4}$ об'єму тетраедра $OABC$.

77. Довести, що чотири точки $A(1; 2; -1)$, $B(0; 1; 5)$, $C(-1; 2; 1)$, $D(2; 1; 3)$ належать одній площині.

78. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, якщо:

а) $\vec{a} = (2; 3; -1)$, $\vec{b} = (1; -1; 3)$, $\vec{c} = (1; 9; -11)$;

б) $\vec{a} = (3; -2; 1)$, $\vec{b} = (2; 1; 2)$, $\vec{c} = (3; -1; -2)$;

в) $\vec{a} = (2; -1; 2)$, $\vec{b} = (1; 2; -3)$, $\vec{c} = (3; -4; 7)$.

79. Встановити, чи компланарні вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, і, якщо це можливо, виразити вектор $\vec{c}$ через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо:

а) $\vec{a} = (5; 2; 1)$, $\vec{b} = (-1; 4; 2)$, $\vec{c} = (-1; -1; 6)$;

б) $\vec{a} = (6; 4; 2)$, $\vec{b} = (-9; 6; 3)$, $\vec{c} = (-3; 6; 3)$;

в) $\vec{a} = (6; -18; 12)$, $\vec{b} = (-8; 24; -16)$, $\vec{c} = (8; 7; 3)$.

80. Знайти об'єм тетраедра за вершинами:

а) $A(1; 0; -3)$, $B(-4; 5; 8)$, $C(-1; 1; 2)$, $D(0; -2; 3)$;

б) $A(1; 2; 3)$, $B(3; 4; -1)$, $C(-2; 3; 1)$, $D(0; 0; 5)$.

81. Знайти довжину висоти тетраедра з вершинами $A(1; -1; 2)$, $B(4; 0; 3)$, $C(2; -2; 1)$ та $D(5; 4; 3)$, опущеної з вершини D .

82. Об'єм тетраедра $V=10$, три його вершини знаходяться в точках $A(-1; 1; 3)$, $B(3; 0; 5)$, $C(3; -4; 1)$. Знайти координати четвертої вершини, якщо відомо, що вона лежить на осі Oz .

83. Обчислити $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$, якщо $\vec{a} = (-1; 3; 4)$, $\vec{b} = (5; 3; 0)$, $\vec{c} = (2; -1; 6)$.

84. Обчислити $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] - [\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]]$, якщо $\vec{a} = (2; 4; 5)$, $\vec{b} = (-1; 3; 4)$, $\vec{c} = (3; -1; 2)$.

85. Довести тотожності:

а) $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] + [\vec{c}, [\vec{a}, \vec{b}]] + [\vec{b}, [\vec{c}, \vec{a}]] = \vec{0}$;

б) $([\vec{a}, \vec{b}][\vec{c}, \vec{d}]) = (\vec{a}, \vec{c})(\vec{b}, \vec{d}) - (\vec{a}, \vec{d})(\vec{b}, \vec{c})$.

Пряма на площині

86. Визначити, які з точок $M_1(3;1)$, $M_2(2;3)$, $M_3(6;3)$, $M_4(-3;-3)$, $M_5(3,-1)$, $M_6(-2;1)$ належать прямій $2x - 3y - 3 = 0$, а які – ні.

87. Визначити точки перетину прямих з осями координат, побудувати ці прямі:

а) $2x + 3y - 6 = 0$;

б) $4x - 6 = 0$;

в) $3y + 5 = 0$.

88. Знайти точки перетину двох прямих:

а) $\begin{cases} x - 2y + 3 = 0; \\ 3x + y - 9 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x + y - 7 = 0; \\ 6x + 2y + 5 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -x + 4y + 1 = 0; \\ -5x + 20y + 5 = 0. \end{cases}$

89. Дано сторони трикутника $ABC: 3x + 2y - 5 = 0(AB)$, $4x - 3y - 1 = 0(AC)$, $7x - y - 23 = 0(BC)$. Знайти координати його вершин.

90. Дано рівняння двох сторін паралелограма $4x - 3y - 17 = 0$, $x + y + 1 = 0$ і рівняння однієї з його діагоналей $2x - y - 1 = 0$. Знайти координати вершин

цього паралелограма.

91. Обчислити площу трикутника, сторони якого лежать на прямих $x + 5y - 7 = 0$, $2x - 2y - 4 = 0$, $7x + y + 19 = 0$.

92. Визначити кутовий коефіцієнт k і відрізок b , що відтинає пряма на осі ординат, для кожної з прямих:

а) $7x + y + 8 = 0$; б) $2y + 5 = 0$; в) $4x + 4y - 3 = 0$.

93. Знайти кутовий коефіцієнт k прямої, що проходить через дві точки $A(1; 3)$ і $B(-4; 5)$.

94. Дано рівняння прямої $8x + 3y - 2 = 0$. Визначити кутовий коефіцієнт k прямої:

а) паралельної до даної прямої; б) перпендикулярної до даної прямої.

95. Дано рівняння прямої $3x - 5y - 2 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $P(-1; 0)$:

а) паралельно до даної прямої; б) перпендикулярно до даної прямої.

96. Дано рівняння двох сторін прямокутника $x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ і рівняння однієї з його діагоналей $7x + y - 15 = 0$. Знайти вершини прямокутника.

97. Знайти проекцію точки $P(-1; 3)$ на пряму $4x - 2y + 1 = 0$.

98. Знайти точку Q , симетричну точці $P(-5; 4)$ відносно прямої $3x + 3y - 7 = 0$.

99. Дано середини сторін трикутника: $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$ і $M_3(3;-4)$. Скласти рівняння його сторін.

100. Скласти рівняння медіан трикутника з вершинами $A(-4; -2)$, $B(2; 0)$ та $C(2; -4)$.

101. Знайти кут α між прямими:

а) $2x - 3y + 5 = 0$ та $x + 3y - 4 = 0$; б) $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + 3t; \end{cases}$ та $\begin{cases} x = -2 + 5t, \\ y = 4t. \end{cases}$

102. Скласти рівняння висот трикутника з вершинами $A(1; 0)$, $B(4; 5)$ та $C(7; 3)$.

103. Знайти внутрішні кути трикутника ABC з вершинами A(1; 1), B(0; 3) та C(2; 4).

104. Промінь світла, що має напрям прямої $x + 5y = 0$, падає на дзеркало, визначуване рівнянням $2x - 3y + 5 = 0$. Написати рівняння відбитого променя.

105. При якій вартості параметра a три прямі $2x - y + 1 = 0$, $x + y - 4 = 0$ та $3x + ay - 2 = 0$ проходять через одну точку?

106. Нехай $3x - 2y - 5 = 0$, $2x + 3y + 7 = 0$ - рівняння двох сторін прямокутника, а A(-2; 1) - його вершина. Обчислити площу прямокутника.

107. Знайти відстань між прямими $5x - 12y - 65 = 0$ та $5x - 12y + 26 = 0$.

108. З'ясувати, чи перетинає пряма $2x + 3y - 5 = 0$ відрізок, обмежений точками $M_1(-1; 3)$ і $M_2(2; -5)$?

109. Нехай A(-3; 5), B(-1; -4), C(7; -1) та D(2; 9) - послідовні вершини чотирикутника. Встановити, чи буде чотирикутник опуклий.

110. Дано дві вершини A(-3; -1) і B(2; 2) паралелограма ABCD і точка Q(3; 0) перетину його діагоналей. Скласти рівняння сторін цього паралелограма.

111. На прямій $2x - y - 5 = 0$, знайти таку точку P, сума відстаней якої до точок A(-7; 1) і B(-5; 5) була б найменша.

112. Дано рівняння прямої $2x + 3y + 4 = 0$. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку M(2; 1) під кутом 45° до даної прямої.

113. Дано дві вершини трикутника $M_1(-10; 2)$ і $M_2(6; 4)$; його висоти перетинаються у точці N(5; 2). Визначити координати третьої вершини M_3 .

114. Скласти рівняння бісектрис кутів, утворених двома прямими $3x + 4y - 1 = 0$, $5x + 12y - 2 = 0$.

115. Дано вершини трикутника A(2; -2), B(3; -5) і C(5; 7). Скласти рівняння перпендикуляра, опущеного із вершини C на бісектрису внутрішнього кута при вершині A.

Площина і пряма у просторі

116. Дано дві точки $M_1(1; 0; -2)$ і $M_2(-3; 4; 5)$. Скласти рівняння площини, що проходить через точку M_1 перпендикулярно до вектора $\vec{N} = \overrightarrow{M_1M_2}$.

117. Скласти рівняння геометричного місця точок, рівновіддалених від двох точок $A(2; -1; 2)$ і $B(0; 1; 0)$.

118. Скласти рівняння площини, яка містить вісь Oz і точку $P(1; -2; 3)$.

119. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(-1; 3; 4)$ і відсікає на осях координат Ox і Oz відповідно відрізки $a=5$, $c=-2$.

120. Скласти рівняння площини, яка паралельна до осі Oy і проходить через точки $M_1(2; 0; 0)$ і $M_2(-3; 4; 8)$.

121. Скласти рівняння площини, що проходить через три точки $M_1(2; -1; 3)$, $M_2(-1; 1; 0)$, $M_3(4; 5; 2)$.

122. Знайти кути, що утворює вектор нормалі площини $2x - y + 2z - 1 = 0$ з осями координат.

123. Знайти кут α між площинами:

а) $x + 2y + 2z - 6 = 0$ і $x - z + 5 = 0$;

б) $2x + 3y - z = 0$ і $3x - 2y + 10 = 0$.

124. Визначити, при яких значеннях l і m слідує пари рівнянь будуть визначати паралельні площини:

а) $2x + ly + 3z - 5 = 0$, $mx - 6y - 6z + 2 = 0$;

б) $3x - y + lz - 9 = 0$, $2x + my + 2z - 3 = 0$;

в) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - lz = 0$.

125. Визначити, при яких значеннях l слідує пари рівнянь будуть визначати перпендикулярні площини:

а) $3x - 5y + lz - 3 = 0$, $x + 3y + 2z + 5 = 0$;

б) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$;

в) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y - 3z - 1 = 0$.

126. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(-1; 2; 5)$, паралельно до площини $2x + 3y - z - 8 = 0$.

127. Скласти рівняння площини, що проходить через початок координат перпендикулярно до двох площин $x - z + 1 = 0$, $2x + y - 3z + 4 = 0$.

128. З'ясувати, що три площини $2x + 3y - z + 7 = 0$, $y + z - 1 = 0$, $x - y + 4z - 15 = 0$ мають одну спільну точку і знайти її координати.

129. З'ясувати, що три площини $3y - 4z + 3 = 0$, $2x - y + 2z + 3 = 0$, $x + 4y - 5z + 6 = 0$ проходять через одну пряму.

130. Скласти рівняння площини яка проходить

а) через точку $M(1; -4; 5)$ паралельно до площини Oxy ;

б) через точку $P(0; 1; 3)$ паралельно до площини Oxz ;

в) через точку $K(-1; 3; 7)$ паралельно до площини Oyz .

131. Знайти точки перетину площини $2x - y + 10z + 20 = 0$ з осями координат.

132. Знайти відстань d від точки $P(-1; 1; -2)$ до площини, що проходить через три точки $M_1(1; -1; 1)$, $M_2(-2; 1; 3)$, $M_3(4; -5; -2)$.

133. Обчислити об'єм піраміди, обмеженою площиною $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ та координатними площинами.

134. Обчислити відстань між паралельними площинами $6x - 18y - 9z - 28 = 0$, $4x - 12y - 6z - 7 = 0$.

135. Дві грані куба належать площинам $2x + 2y + z - 5 = 0$, $2x + 2y + z + 10 = 0$. Обчислити об'єм цього куба.

136. Скласти рівняння площин, які ділять навпіл двогранні кути між площинами $2x - y + 3z - 1 = 0$ та $x + 2y - 3z + 5 = 0$.

137. Скласти рівняння прямих, утворених перетином площини $2x + 7y - 4z - 3 = 0$ з координатними площинами.

138. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1; 3; 2)$ паралельно:

а) вектору $\vec{a} = (3; 4; 8)$; б) прямій $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$; в) осі Oz .

139. Скласти канонічне рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки $M_1(1; -1; 2)$ і $M_2(0; 3; -4)$. Чи належать цій прямій точки $M'_1(2; 0; 5)$, $M'_2(-1; -5; 8)$, $M'_3(0; 3; -4)$?

140. Через точки $P_1(3; -2; 1)$ та $P_2(-1; 4; 3)$ проведено пряму. Визначити точки перетину цієї прямої з координатними площинами.

141. Дано пряму $x - 5y + 3z - 4 = 0$, $2x - 3y + 5z - 1 = 0$. Знайти який-небудь її напрямний вектор.

142. Дано вершини трикутника ABC: A(2; -1; -3), B(5; 2; -7) та C(-7; 11; 6). Скласти:

- а) канонічні рівняння бісектриси його зовнішнього кута при вершині А;
- б) параметричні рівняння його медіани, проведеної з вершини С.

143. Дано вершини трикутника ABC: A(1; -2; -4), B(3; 1; -3) та C(5; 1; -7). Скласти параметричні рівняння його висоти, опущеної з вершини В на протилежну сторону.

144. Скласти канонічні та параметричні рівняння прямої $2x - y + z + 1 = 0$, $x + y + 3z + 2 = 0$.

145. Знайти гострий кут між прямими: $x = 2 + t$, $y = -1 - t$, $z = 3 + \sqrt{2}t$; $x - y + 5 = 0$, $\sqrt{2}x - z + 2\sqrt{2} = 0$.

146. Дано рівняння руху точки $M(x, y, z)$: $x = 5 - 2t$, $y = -3 + 2t$, $z = 5 - t$. Визначити відстань d , яку пройде ця точка за проміжок часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = 7$.

147. Довести, що прямі $x = 2t - 3$, $y = 3t - 2$, $z = -4t + 6$ та $x = t + 5$, $y = -4t - 1$, $z = t - 4$ перетинаються.

148. Довести, що пряма $5x - y + 2z - 1 = 0$, $4x + y - 3z + 2 = 0$ належить площині $6x - 3y + 7z - 4 = 0$.

149. Знайти точку перетину прямої і площини:

а) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{4}$, $2x + y - z + 3 = 0$;

б) $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{2}$, $4x + 2y + z - 4 = 0$;

в) $\frac{x+2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{1}$, $x+3y-z+4=0$.

150. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(-1; 0; 3)$ перпендикулярно до площини $5x+y+4z+7=0$.

151. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M(1; 2; 3)$ перпендикулярно до прямої $2x+y+z+5=0$, $x-y-z+1=0$.

152. Знайти точку Q , симетричну точці $P(4; 1; 6)$ відносно прямої $x-y-4z+12=0$, $2x+y-2z+3=0$.

153. Знайти точку Q , симетричну точці $P(2; -1; 3)$ відносно площини $4x-y+3z+8=0$.

154. Точка $M(x; y; z)$ рухається прямолінійно і рівномірно з початкового положення $M_0(1; -2; 4)$ зі швидкістю $V=3$ в напрямку вектора $\vec{S} = (2; -2; 1)$. З'ясувавши, що траєкторія точки M перетинає площину $2x+3y-4z+38=0$, знайти:

а) точку P їх перетину;

б) довжину відрізка M_0P ;

в) час, витрачений на рух точки M від M_0 до P .

155. Обчислити відстань d точки $P(0; -1; 2)$ від прямої $x+y-z+6=0$, $3x+y+2z=0$.

156. З'ясувавши, що прямі $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{4}$ та $x+7y+z-2=0$, $x+3y-6=0$ паралельні, обчислити відстань d між ними.

157. Скласти рівняння площини, що проходить через пряму $x=2+3t$, $y=-t$, $z=1+t$ і точку $M(5; -1; 3)$.

158. Обчислити кут α між прямою, що проходить через точки $M_1(1; 2; 3)$ та $M_2(-1; 0; 4)$ і площиною, якій належать точки $P_1(0; 0; 1)$, $P_2(2; 0; 3)$, $P_3(-1; 2; 0)$.

159. Обчислити найкоротшу відстань між прямими:

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}; \quad x=6t+9, \quad y=-2t, \quad z=-t+2.$$

160. Скласти параметричні рівняння спільного перпендикуляра двох прямих, які задаються рівняннями:

$$x = 3t - 7, \quad y = -2t + 4, \quad z = 3t + 4;$$

$$x = t + 1, \quad y = 2t - 8, \quad z = -t - 12.$$

Рівняння кривих другого порядку та їх властивості

161. Знайти центр і радіус кола:

а) $x^2 + y^2 - 4y - 5 = 0$, б) $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 15 = 0$, в) $x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$.

162. Скласти рівняння кола, що проходить через три точки $A(-1; 3)$, $B(0; 2)$, $C(1; -1)$.

163. Скласти рівняння кола, що проходить через три точки перетину кола $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 0$ з прямою $y = -x$ і через точку $A(4; -4)$.

164. Скласти рівняння кола, якщо відомо, що точки $A(4; 0)$ і $B(-2; 6)$ являються діаметрально протилежними точками цього кола.

165. Скласти рівняння кола з центром у точці $(1; -3)$, яке дотикається а) осі Ox ; б) осі Oy .

166. З'ясувати положення точки $A(1; -2)$ відносно кіл:

а) $x^2 + y^2 = 5$;

б) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 5 = 0$;

в) $x^2 + y^2 - 10x + 8y = 0$.

167. Дано рівняння еліпса $9x^2 + 16y^2 = 144$. Знайти його осі, фокуси, директриси.

168. Дано рівняння еліпса $25x^2 + 4y^2 = 100$. Знайти його осі, фокуси, директриси.

169. Меридіан земної кулі має форму еліпса, відношення осей якого дорівнює $299/300$. Визначити ексцентриситет земного меридіана.

170. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо відомо, що його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c = 10$.

171. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі ординат, симетрично відносно початку координат, якщо відомо, що відстань між фокусами $2c=24$ і ексцентриситет $\varepsilon = 12/13$.

172. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо дано точку $M(-\sqrt{5}; 2)$ еліпса, і відстань між його директрисами – 10.

173. З'ясувати, що кожне з рівнянь визначає еліпс, і знайти координати його центра, осі, ексцентриситет і рівняння директрис:

а) $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$;

б) $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$;

в) $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

174. Скласти рівняння еліпса, якщо відомо, що його мала ось дорівнює 2, а фокуси знаходяться у точках $F_1(-1; -1)$, $F_2(1; 1)$.

175. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі абсцис, симетрично відносно початку координат, якщо відомо, що:

а) її осі $2a = 8$, $2b = 10$;

б) вісь $2b = 16$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$;

в) рівняння асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ і відстань між фокусами $2c = 20$;

г) відстань між директрисами дорівнює $\frac{18}{5}$ і ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{3}$.

176. Дано рівняння гіперболи $16x^2 - 9y^2 = 144$. Знайти її осі, фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот і рівняння директрис.

177. Дано рівняння гіперболи $16x^2 - 9y^2 = -144$. Знайти її осі, фокуси, ексцентриситет, рівняння асимптот і рівняння директрис.

178. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої розташовані на осі ординат, симетрично відносно початку координат, якщо відомо, що:

а) відстань між фокусами $2c = 10$ і рівняння асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$;

б) ексцентриситет $\varepsilon = \frac{5}{4}$ і відстань між директрисами дорівнює 12,8.

179. З'ясувати, що кожне з рівнянь визначає гіперболу, і знайти її центр, осі, ексцентриситет, рівняння асимптот і рівняння директрис:

а) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$;

б) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

180. Скласти рівняння гіперболи, якщо кут між її асимптотами дорівнює 90° і фокуси знаходяться у точках $F_1(-2; 2)$, $F_2(2; -2)$.

181. Визначити величину параметра і розташувати відносно осей координат наступних парабол:

а) $y^2 = 8x$; б) $x^2 = 3y$; в) $y^2 = -4x$; г) $x^2 = -2y$.

182. Скласти рівняння параболи, фокус якої знаходиться у точці $F(3; 0)$ і директриса має рівняння $x = -3$.

183. Скласти рівняння параболи, вершина якої знаходиться у початку координат, якщо:

а) парабола розташована симетрично відносно осі Ox і проходить через точку $(9; 6)$;

б) парабола розташована симетрично відносно осі Ox і проходить через точку $(-2; 4)$;

в) парабола розташована симетрично відносно осі Oy і проходить через точку $(1; 2)$;

г) парабола розташована симетрично відносно осі Oy і проходить через точку $(2; -2)$;

184. Скласти рівняння параболи, яка має фокус у точці $F(0; -4)$ і проходить через початок координат, якщо відомо, що її віссю являється ось Oy .

185. З'ясувати, що кожне рівняння визначає параболу, знайти координати її вершини A , величину параметра p і рівняння директриси:

а) $y^2 = 6x - 10$; б) $y^2 = 8 - 6x$; в) $x^2 = 4y + 2$; г) $x^2 = 3 - y$.

186. З'ясувати, що рівняння $y = 4x^2 + 8x - 1$ визначає параболу, знайти координати її вершини A , фокуса F і величину параметра p .

187. Скласти рівняння дотичної до еліпса $x^2 + 9y^2 = 9$ у точці $(2; \frac{\sqrt{5}}{3})$.

188. Скласти рівняння дотичних до еліпса $9x^2 + 16y^2 = 144$ в його вершинах.

189. Скласти рівняння дотичних до еліпса $\frac{x^2}{10} + \frac{2y^2}{5} = 1$ паралельних прямій

$$3x + 2y + 7 = 0.$$

190. Знайти рівняння дотичних до гіперболи $x^2 - 4y^2 = 20$, перпендикулярних до прямої $4x + 3y - 7 = 0$.

191. Скласти рівняння дотичної до параболи $y^2 = 10x$ у точці $(2,5; 5)$.

192. Скласти рівняння дотичних до гіперболи $9x^2 - 4y^2 = 16$ в її вершинах.

193. Скласти рівняння дотичної до параболи $y^2 = 8x$, паралельній прямій $2x + 2y - 3 = 0$.

194. Скласти рівняння дотичної до параболи $x^2 = 16y$, перпендикулярній прямій $2x + 4y + 7 = 0$.

Границі функції

195. Записати послідовність значень змінної $x = 1 + \frac{(-1)^n}{2n+1}$. Починаючи з якого n модуль різниці $(x-1)$ стане і буде залишатись менше 0,01?

196. Довести, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{2x} = 1$.

197. Довести, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+3}{2x+1} = 2$. При яких x значення функції будуть відрізнятися від своєї границі менше за 0,001?

Знайти границі:

$$198. \lim_{x \rightarrow 1-0} 3^{\frac{2}{1-x}}; \quad 199. \lim_{x \rightarrow 1+0} 3^{\frac{2}{1-x}}; \quad 200. \lim_{x \rightarrow \pi-0} 2^{\operatorname{ctgx}}; \quad 201. \lim_{x \rightarrow \pi+0} 2^{\operatorname{ctgx}}; \quad 202. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{1}{1+4^{\operatorname{tg} x}};$$

$$203. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} \frac{1}{1+4^{\operatorname{tg} x}}; \quad 204. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 8}{x + 1}; \quad 205. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin 2x}{\cos x}; \quad 206. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 5x + 4}{x - 4};$$

$$207. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-2)^2}; \quad 208. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 6x^2 + 9x}{x + 3}; \quad 209. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{ctgx}}{\sin 2x}; \quad 210. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1};$$

211. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1}-1}$; 212. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16-x^2}{\sqrt{x}-2}$; 213. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$; 214. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-3x+5}{x^2+8x-1}$;
 215. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^3}{3x^3+1}$; 216. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-4x+3}{x^2+1}$; 217. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-1}{8x^2-6x+7}$; 218. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 8x}$;
 219. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 \frac{x}{4}}{x^3}$; 220. $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{ctg} 2x$; 221. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}$; 222. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 2x}{x^2}$;
 223. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x - \sin 2x}{x^2}$; 224. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}}$; 225. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x-2} \right)^{3x}$; 226. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x^2}-1}{x^2}$;
 227. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x+1)}{10x}$; 228. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+6x}-x)$; 229. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-4x})$;
 230. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x$; 231. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{4}{x^2-4} \right)$.

Відповіді до задач для самостійної підготовки

4. $x = 2 + 5\sqrt{3}, y = 8$; 5. $M_1(5; \frac{\pi}{2}), M_2(3; \pi), M_3(2; \frac{\pi}{6}), M_4(2; \frac{5\pi}{3})$; 6. $d = 7$;
7. $r_1 = 6\sqrt{2}, \varphi_1 = 225^\circ; r_2 = 4, \varphi_2 = 330^\circ$; 8. $C(3; \frac{13\pi}{9}), D(5; \frac{26\pi}{15})$; 9. $S = 5$ кв. од.; 10. $S = 28\sqrt{3}$; 11. $C(1; \frac{4\pi}{3})$; 12. A: $r = 5, \varphi = 2\pi - \arccos \frac{4}{5}; z = 2$, B: $r = \sqrt{2}, \varphi = \frac{7\pi}{4}; z = -1$,
C: $r = 4, \varphi = \pi; z = 5$, D: $r = 7, \varphi = 0; z = -8$; 13. а) $x = 1, y = 1, z = -\sqrt{2}$,
б) $r = \sqrt{2}, \varphi = \frac{\pi}{4}, z = -\sqrt{2}$; в) $r = 2, \varphi = \frac{\pi}{4}, \Theta = -\frac{\pi}{4}$; 14. A: $(9; \arccos \frac{2}{\sqrt{5}}; \arcsin \frac{1}{9})$,
B: $(3; \frac{\pi}{4}; -\arcsin \frac{1}{3})$, C: $(5; \frac{3\pi}{2}; \arccos \frac{4}{5})$, D: $(\sqrt{3}; \frac{3\pi}{4}; \arccos \sqrt{\frac{2}{3}})$, E: $(1; \frac{\pi}{2}; 0)$;
15. $x = \frac{\sqrt{3}}{4}, y = -\frac{3}{4}, z = \frac{1}{2}$; 16. $x = 1, y = 2, z = 3$; 17. $x = -2, y = 0, z = 1$;
18. $x = 3, y = 1, z = 0$; 19. $x = 3, y = -1, z = 1$; 20. $x = 5, y = 4, z = -2$;
21. $x = 6, y = 6,25, z = 5,25$; 22. $x = 2, y = 1, z = -1$; 23. $x = 2, y = 2, z = 5$;
24. $x = 1, y = 1, z = 1$; 25. $x = 2, y = 3, z = 4$; 26. $x = 2z - 1, y = z + 1$; 27. система не має розв'язків; 28. система не має розв'язків; 29. $z = -4x - 1, y = -7x - 4$;
30. $y = 5 - \frac{5}{2}x, z = 2 - \frac{3}{2}x$; 31. $x = 1, y = 2, z = -1$; 32. $x = 0, y = z$; 33. $x = 0, y = 0, z = 0$;
34. $x = 0, y = 0, z = 0$; 35. $x = 1 - t, y = 1 + z$; 37. $\vec{a} \parallel \vec{b}$; 38. $|\vec{a}| = |\vec{b}|$; 39. $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$,
 $\overrightarrow{BE} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}, \overrightarrow{CF} = -\frac{\vec{a}}{2} - \vec{b}$; 40. $\vec{r}_D = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 + \vec{r}_3$; 41. $\vec{m} + \vec{p} = \vec{n}, \overrightarrow{OB} = 3 \cdot (\vec{m} + \vec{n})$,
 $\overrightarrow{BC} = 3 \cdot (\vec{n} - \vec{m}), \overrightarrow{EO} = 3 \cdot (\vec{m} - \vec{n}), \overrightarrow{OD} = 3 \cdot (2\vec{n} - \vec{m}), \overrightarrow{DA} = 6 \cdot (\vec{m} - \vec{n})$; 42. $\overrightarrow{AC} = 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2$,
 $\overrightarrow{BD} = 8\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2, \overrightarrow{MN} = 4\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$; 43. $\overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{OC})$;
45. $\overrightarrow{BC} = \frac{4\overrightarrow{AL} - 2\overrightarrow{AK}}{3}, \overrightarrow{CD} = \frac{2\overrightarrow{AL} - 4\overrightarrow{AK}}{3}$; 46. $\vec{a} + 2\vec{b} = (11; -3; 8), \frac{\vec{a} - \vec{b}}{3} = (-\frac{4}{3}; -1; -\frac{1}{3})$,
 $\frac{3\vec{a} + \vec{b}}{2} = (4; -\frac{9}{2}; \frac{9}{2})$; 47. $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$; 48. $\vec{m} = -\vec{a} + 2\vec{b} - 2\vec{c}$; 49. $(2; 1; 7)$;
50. $\alpha = 2, \beta = 3, \gamma = 5$; 51. $\vec{a} = (\frac{7\sqrt{2}}{2}; \frac{7}{2}; -\frac{7}{2})$; 52. $\vec{a} + \vec{b} = (0; 5; 9), 2\vec{a} - 3\vec{b} = (-5; -5; -7)$,

- $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2} = (-2; \frac{13}{2}; \frac{25}{2})$; 53. $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = \arccos \frac{29}{\sqrt{1537}}$, $\angle C = 90^\circ - \angle B$; 54. $(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$;
55. $|\vec{a}| = 2\sqrt{43}$; 56. $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \arccos \frac{53}{2\sqrt{871}}$; 58. $(4; 2; 0)$, $(-4; -2; 0)$; 59. $-\frac{1}{2}(\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + \vec{c}^2)$;
60. $\frac{3}{\sqrt{14}}$; 61. $-\frac{1}{\sqrt{6}}(1; 1; 2)$; 62. $\frac{11}{\sqrt{14}}$; 63. $|\vec{R}| = 5$; 64. 36; 65. 13; 66. $|\vec{a}, \vec{b}| = 6$;
67. $\pm \frac{1}{\sqrt{131}}(1; 9; 7)$; 68. а) 12; б) 42; 69. а) $(-13; -5; 7)$; б) $(-39; -15; 21)$;
- в) $(65; 25; -35)$; 70. $\alpha = -\frac{8}{5}$; 71. $\frac{1}{2}\sqrt{1914}$; 72. 2; 73. $\frac{\sqrt{42}}{7}$; 74. $\vec{x} = (-6; -24; 8)$;
75. $2\sqrt{74}$; 78. а) компланарні; б) не компланарні; в) компланарні; 79. а) не компланарні; б) компланарні, $\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$; в) компланарні, але вектор $\vec{c}$ неможливо виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$; 80. а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{8}{3}$; 81. $2\sqrt{2}$; 82. $(0; 0; -1)$; $(0; 0; \frac{13}{2})$;
83. $(102; 36; -28)$; 84. $(86; -38; 50)$; 89. $A(1; 1)$, $B(3; -2)$, $C(4; 5)$; 90. $(2; -3)$, $(0; -1)$, $(-9; -13)$, $(-7; -15)$; 91. $S = 17$ кв.од.; 95. а) $3x - 5y + 3 = 0$, б) $5x + 3y + 5 = 0$; 96. $(2; 1)$, $(4; 2)$, $(-1; 7)$, $(1; 8)$; 97. $(0,8; 2,1)$; 98. $(-\frac{5}{3}; \frac{22}{3})$; 99. $7x - 2y - 12 = 0$, $5x + y - 28 = 0$, $2x - 3y - 18 = 0$;
100. $y + 2 = 0$, $x - y - 2 = 0$, $x + y + 2 = 0$; 101. а) $\alpha = \arccos \frac{7}{\sqrt{130}}$, б) $\alpha = \arccos \frac{7}{\sqrt{410}}$;
102. $3x - 2y - 3 = 0$, $2x + y - 13 = 0$, $3x + 5y - 36 = 0$;
103. $\angle A = \angle C = 45^\circ$, $\angle B = 90^\circ$; 104. $5x - y + 10 = 0$; 105. $a = -\frac{1}{3}$; 106. $S = 6$ кв.од.;
107. 7; 108. перетинає; 109. опуклий; 110. $3x - 5y + 4 = 0$, $x + 7y - 16 = 0$, $3x5y - 22 = 0$, $x + 7y + 10 = 0$;
111. $P(2, -1)$; 112. $x - 5y + 3 = 0$, $5x + y - 11 = 0$;
113. $M_3(6; -6)$; 114. $3x + 4y - 1 = 0$, $64x + 112y - 23 = 0$; 115. $x - 5 = 0$;
116. $4x - 4y - 7z - 18 = 0$; 117. $x - y + z - 2 = 0$; 118. $2x + y = 0$;
119. $6x + 32y - 15z - 30 = 0$; 120. $8x + 5z - 16 = 0$; 121. $16x - 9y - 22z + 25 = 0$;
122. $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $\cos \beta = -\frac{1}{3}$, $\cos \gamma = \frac{2}{3}$; 123. а) $\alpha = \arccos \frac{1}{3\sqrt{2}}$, б) $\alpha = 90^\circ$;

124. а) $l=3, m=-4$, б) $l=3, m=-\frac{2}{3}$, в) $l=-\frac{10}{3}, m=-\frac{6}{5}$; 125. а) $l=6$, б) $l=-19$, в)

$l=-\frac{1}{7}$; 126. $2x+3y-z+1=0$; 127. $x+y+z=0$; 128. $(1; -2; 3)$; 130. а) $z-5=0$,

б) $y-1=0$, в) $x+1=0$; 131. $(-10; 0; 0), (0; 20; 0), (0; 0; -2)$; 132. $d=4$; 133. 8 куб. од.;

134. $d=\frac{5}{6}$; 135. 25 куб. од.; 136. $3x+y+4=0$, $x-3y+6z-6=0$;

137. $x=0, 7y-4z-3=0$; $y=0, 2x-4z-3=0$; $z=0, 2x+7yz-3=0$;

138. в) $x+1=0, y-3=0$; 140. $(0; 2,5; 2,5), (\frac{5}{3}; 0; \frac{5}{3}), (5; -5; 0)$;

142. а) $\frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{-7}$, б) $x=-7+21t, y=11-21t, z=6-22t$;

143. $x=3t+3, y=15t+1, z=19t-3$; 144. $\frac{x+1}{-4} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z}{3}$,

$x=-2-4t, y=-6-5t, z=3t$; 145. 60° ; 146. $d=21$; 149. а) пряма паралельна

площині, б) пряма належить площині, в) $(7; -3; 2)$; 150. $x=-1+5t, y=t, z=3+4t$;

151. $y-z+1=0$; 152. $Q(2; -3; 2)$; 153. $Q(-6; 1; -3)$; 154. а) $P(7; -8; 7)$; б) за

проміжок часу, рівний 3; в) $|M_0P|=9$; 155. $d=3\sqrt{\frac{13}{38}}$; 156. $d=\sqrt{\frac{2027}{26}}$;

157. $x+3y-2=0$; 158. $\alpha=45^\circ$; 159. $d=7$; 160. $x=2t-5, y=-3t+1, z=-4t$;

161. а) $(0; 2)$, $R=3$, б) $(-1; 3)$, $R=5$, в) $(-2; 0)$, $R=4$; 162. $x^2+y^2+8x+2y-8=0$;

163. $x^2+y^2-8y=0$; 164. $(x-1)^2+(y-3)^2=18$; 165. а) $(x-1)^2+(y+3)^2=9$,

б) $(x-1)^2+(y+3)^2=1$; 167. $2a=8, 2b=6, F_1(-\sqrt{7}; 0), F_2(\sqrt{7}; 0)$, директриси: $x=\pm\frac{16}{\sqrt{7}}$;

168. $2a=4, 2b=10, F_1(0; -\sqrt{21}), F_2(0; \sqrt{21})$, директриси: $y=\pm\frac{25}{\sqrt{21}}$; 169. $e\approx 0,08$;

170. $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$; 171. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{169}=1$; 172. $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$; 173. а) $(3; 1)$,

$2a=6, 2b=2\sqrt{5}, \varepsilon=\frac{2}{3}$, директриси: $2x-15=0, 2x+3=0$, б) $(-1; 2)$,

$2a=10, 2b=8, \varepsilon=\frac{3}{5}$, директриси: $3x-22=0, 3x+28=0$, в) $(1; -2)$,

$2a=4\sqrt{3}, 2b=8, \varepsilon=\frac{1}{2}$, директриси: $y-6=0, y+10=0$; 174. $2x^2-2xy+2y^2-3=0$;

175. а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$, б) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$, в) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$, г) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$; 176. $2a = 6, 2b = 8$, $F_1(-5; 0), F_2(5; 0)$, $\varepsilon = \frac{5}{3}$, рівняння асимптот: $y = \pm \frac{4}{3}x$, рівняння директрис: $x = \pm \frac{9}{5}$;
177. $2a = 6, 2b = 8$, $F_1(0; -5), F_2(0; 5)$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$, рівняння асимптот: $y = \pm \frac{4}{3}x$, рівняння директрис: $y = \pm \frac{16}{5}$; 178. а) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = -1$, б) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = -1$; 179. а) $(2; -3)$, $2a = 6, 2b = 8$, $\varepsilon = \frac{5}{3}$, рівняння асимптот: $4x - 3y - 17 = 0, 4x + 3y + 1 = 0$, рівняння директрис: $5x - 1 = 0, 5x - 19 = 0$, б) $(2; -1)$, $2a = 6, 2b = 8$, $\varepsilon = \frac{5}{4}$, рівняння асимптот: $4x - 3y - 11 = 0, 4x + 3y - 5 = 0$, рівняння директрис: $y = -4,2; y = 2,2$; 180. $xy + 2 = 0$;
182. $y^2 = 12x$; 183. а) $y^2 = 4x$, б) $y^2 = -8x$, в) $x^2 = \frac{y}{2}$, г) $x^2 = -2y$; 184. $x^2 = -16y$;
185. а) $A(\frac{5}{3}; 0)$, $p = 3$, рівняння директриси: $x = \frac{1}{6}$, б) $A(\frac{4}{3}; 0)$, $p = 3$, рівняння директриси: $x = 2\frac{5}{6}$, в) $A(0; -\frac{1}{2})$, $p = 2$, рівняння директриси: $y = -\frac{3}{2}$, г) $A(0; 3)$, $p = \frac{1}{2}$, рівняння директриси: $x = \frac{13}{4}$; 186. $A(-1; -5)$, $F(-1; -4)$, $p = 2$;
187. $2x + 3\sqrt{5}y - 9 = 0$; 188. $x = \pm 4$, $y = \pm 3$; 189. $3x + 2y - 10 = 0$, $3x + 2y + 10 = 0$;
190. $3x - 4y - 10 = 0$, $3x - 4y + 10 = 0$; 191. $2x - 2y + 5 = 0$; 192. $x = \frac{4}{3}$, $x = -\frac{4}{3}$;
193. $x + y + 2 = 0$; 194. $2x - y - 16 = 0$; 195. $n \geq 50$; 197. $|x| > 2500,5$; 198. $+\infty$; 199. 0 ;
200. 0 ; 201. $+\infty$; 202. 0 ; 203. 1 ; 204. -2 ; 205. 1 ; 206. 3 ; 207. ∞ ; 208. 0 ; 209. $0,5$;
210. $0,5$; 211. 3 ; 212. -32 ; 213. $-\frac{1}{\sqrt{2}}(x \rightarrow -0), \frac{1}{\sqrt{2}}(x \rightarrow +0)$; 214. 2 ; 215. $\frac{1}{3}$; 216. ∞ ;
217. 0 ; 218. $\frac{3}{8}$; 219. $\frac{1}{64}$; 220. $0,5$; 221. 4 ; 222. 2 ; 223. 0 ; 224. $\frac{1}{e^2}$; 225. $e^{2,25}$; 226. 2 ;
227. $0,2$; 228. 3 ; 229. -2 ; 230. $\frac{2}{\pi}$; 231. $0,25$.

Література

1. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.
2. Погорелов А.В. Геометрия. – М.: Наука, 1983. – 288 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1971. – 232 с.
4. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов (под ред. Б.П. Демидовича). – М.: Наука, 1970. – 472 с.
6. Игначкова А.В., Лебедева И.Л. Задания к контрольным работам и методические рекомендации по их выполнению курса «Математика для экономистов». – Харьков: ХГЭУ, 2002. – 80 с.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
8. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М.: Наука, 1986. – 224 с.

Навчальне видання
Лисиця Віктор Тимофійович,
Якуба Марія Олексіївна

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Друкується в авторській редакції

61077, Харків, майдан Свободи, 4, Харківський національний університет імені
В.Н.Каразіна, механіко-математичний факультет.