

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, СРЕДНИЕ ОТ КОТОРЫХ ПОСТОЯННЫ

Ю. Л. Работников

В статье рассматриваются уравнения:

$$\ddot{u}(t) + a_1 \dot{u}(t) + a_0 u(t) = \alpha(t) u(t)$$

и

$$\ddot{u}(t) + a_1 \dot{u}(t) + a_0 u(t) = \beta(t) \dot{u}(t),$$

где a_0 и a_1 — вещественные постоянные ($a_0 > 0$), $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — вещественные случайные функции. Ограничения, налагаемые на случайные функции, в основном, таковы:

$$1) M\alpha(t) = M\beta(t) = 0 \quad (-\infty < t < \infty),$$

где символ M означает усреднение по совокупности всех реализаций $\alpha(t)$ (или $\beta(t)$).

$$2) |\alpha(t)| < \gamma, |\beta(t)| < \delta \quad (\gamma = \text{const}, \delta = \text{const}; -\infty < t < \infty).$$

В этих предположениях получено достаточное условие одновременной ограниченности функций: $Mu^2(t)$, $M[u(t)\dot{u}(t)]$ и $M\dot{u}^2(t)$. Для случая, когда эти функции неограниченно возрастают с t , найдена оценка скорости этого возрастания.

§ 1. Введение

Рассмотрим вопрос об ограниченности функций $Mu^2(t)$, $M[u(t)\dot{u}(t)]$ и $M\dot{u}^2(t)$, где $u(t)$ — общее решение одного из уравнений:

$$\ddot{u}(t) + a_1 \dot{u}(t) + a_0 u(t) = \alpha(t) u(t), \tag{A}$$

$$\ddot{u}(t) + a_1 \dot{u}(t) + a_0 u(t) = \beta(t) \dot{u}(t), \tag{B}$$

удовлетворяющее фиксированным начальным условиям. Здесь a_0 и a_1 — вещественные постоянные (предполагается, что $a_0 > 0$), $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — вещественные случайные функции с длинами автокорреляции, не превосходящими некоторой постоянной a^* , символ M означает усреднение по всем реализациям случайной функции $\alpha(t)$ или $\beta(t)$ ** . Вместо $u(t)$, будем в дальнейшем писать $u(t; \alpha)$, поскольку решения имеют различный вид при различных реализациях $\alpha(t)$.

* То есть значения $\alpha(t_1)$ и $\alpha(t_2)$ являются независимыми случайными величинами, если $|t_2 - t_1| > a$.

** В дальнейшем, для краткости, о случае (B) будет упоминаться лишь тогда, когда он потребует несколько иного рассмотрения, чем случай (A).

Если относительно функции $\alpha(t)$ предположить лишь, что

$$M\alpha(t) = 0, \quad |\alpha(t)| < \gamma \quad (\gamma = \text{const}, \quad -\infty < t < \infty), \quad (1.1)$$

то удастся получить достаточное условие одновременной ограниченности функций $Mu^2(t, \alpha)$; $M[u(t; \alpha)\dot{u}(t; \alpha)]$ и $M\dot{u}^2(t; \alpha)$. В дальнейшем, для краткости, будем называть его условием ограниченности решений в среднем. Подчеркнём, что это условие не содержит никаких других характеристик функции $\alpha(t)$, кроме чисел a и γ . Оно будет найдено в параграфе 4 (параграфы 2 и 3 носят подготовительный характер). В параграфе 5 выводится оценка некоторой величины, используемой в формулировке условия ограниченности. В параграфе 6 содержится краткое резюме работы, составленное таким образом, чтобы результатами можно было воспользоваться независимо от остального текста статьи. В приложении даётся вывод оценки, приведенной в (3.3).

В работе [1] было рассмотрено уравнение вида (A), в котором, однако, коэффициенты $a_0(t)$ и $a_1(t)$ являются функциями t с периодом T . В уравнениях (A) и (B) постоянные коэффициенты a_0 и a_1 можно рассматривать как частный случай таких периодических функций $a_0(t)$ и $a_1(t)$ с совершенно произвольным периодом T . Это обстоятельство позволяет рассмотреть значительно более широкий класс случайных функций $\alpha(t)$ (нестационарные случайные процессы с постоянным математическим ожиданием и с произвольной длиной автокорреляции — ср. с [1]).

Для упрощения вычислений мы будем считать в дальнейшем, что коэффициент a_0 равен единице. Это, разумеется, не уменьшает общности рассмотрения, поскольку любое уравнение вида (A) или (B) может быть приведено к такому виду заменой: $t \rightarrow a_0^{-1/2}t$.

§ 2. Рекуррентные соотношения

Поскольку коэффициенты $a_0 (= 1)$ и a_1 уравнения (A) постоянны, то справедливо соотношение:

$$u(t'; \alpha) = u_1(t' - t; \alpha_t) u(t; \alpha) + u_2(t' - t; \alpha_t) \dot{u}(t; \alpha) \quad (t' \geq t), \quad (2.1)$$

где $u_1(t' - t; \alpha_t)$ и $u_2(t' - t; \alpha_t)$ — частные решения уравнения (A), определяемые начальными условиями:

$$u_1(0; \alpha_t) = \dot{u}_2(0; \alpha_t) = 1; \quad \dot{u}_1(0; \alpha_t) = u_2(0; \alpha_t) = 0.$$

Индекс t при α означает, что функции $u_1(t' - t; \alpha_t)$ и $u_2(t' - t; \alpha_t)$ зависят от вида функции α только на интервале (t, t') значений её аргумента*.

Выведем рекуррентное соотношение, аналогичное соотношению (3, 5) в работе [1], и притом тем же способом. Для этого продифференцируем (2.1) по t' и положим $t' = t + x$, где x — произвольное положительное число, которое мы впоследствии устремим к нулю. Полагая $u \equiv u^{(0)}$, $\frac{du}{dt} \equiv u^{(1)}$, получим:

$$u^{(i)}(t + x; \alpha) = u_1^{(i)}(x; \alpha_t) u(t; \alpha) + u_2^{(i)}(x; \alpha_t) \dot{u}(t; \alpha) \quad (i = 0, 1).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} M[u^{(i)}(t + x; \alpha) u^{(k)}(t + x; \alpha)] &= M[u_1^{(i)}(x; \alpha_t) u_1^{(k)}(x; \alpha_t) u^2(t; \alpha)] + \\ &+ M[(u_1^{(i)}(x; \alpha_t) u_2^{(k)}(x; \alpha_t) + u_1^{(k)}(x; \alpha_t) u_2^{(i)}(x; \alpha_t)) u(t; \alpha) \dot{u}(t; \alpha)] + \\ &+ M[u_2^{(i)}(x; \alpha_t) u_2^{(k)}(x; \alpha_t) \dot{u}^2(t; \alpha)] \quad (i, k = 0, 1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

* Таким образом, $u_l(t' - t; \alpha_t)$ ($l = 1, 2$) есть функция от $t' - t$ и функционал от α , рассматриваемой как функция на интервале (t, t') .

Соотношения (2.2) можно записать в матричной форме:

$$r(t+x) = A(x; t) r(t) + x(x; t), \quad (2.3)$$

где

$$r(t) = (Mu^2(t; \alpha), \sqrt{2} M[u(t; \alpha) \dot{u}(t; \alpha)], M\dot{u}^2(t; \alpha))^*; \\ A(x; t) =$$

$$= \begin{pmatrix} Mu_1^2(x; \alpha_t) & \sqrt{2} M[u_1(x; \alpha_t) u_2(x; \alpha_t)] & Mu_2^2(x; \alpha_t) \\ \sqrt{2} M[u_1(x; \alpha_t) \dot{u}_1(x; \alpha_t)] & M[u_1(x; \alpha_t) \dot{u}_2(x; \alpha_t)] + M[\dot{u}_1(x; \alpha_t) u_2(x; \alpha_t)] & \sqrt{2} M[u_2(x; \alpha_t) \dot{u}_2(x; \alpha_t)] \\ Mu_1^2(x; \alpha_t) & \sqrt{2} M[\dot{u}_1(x; \alpha_t) \dot{u}_2(x; \alpha_t)] & M\dot{u}_2^2(x; \alpha_t) \end{pmatrix};$$

$x(x; t) = (x_1(x; t), x_2(x; t), x_3(x; t))$ — вектор с координатами:

$$x_1(x; t) = \sum_{l, m=0}^1 \gamma_{00lm}(x; t); \quad x_2(x; t) = \sqrt{2} \sum_{l, m=0}^1 \gamma_{01lm}(x; t); \quad x_3(x; t) = \\ = \sum_{l, m=0}^1 \gamma_{11lm}(x; t); \quad (2.4)$$

$$\gamma_{iklm}(x; t) = M[u^{(l)}(t; \alpha) u^{(m)}(t; \alpha) u_{l+1}^{(i)}(x; \alpha_t) u_{m+1}^{(k)}(x; \alpha_t)] -$$

$$- M[u^{(l)}(t; \alpha) u^{(m)}(t; \alpha)] M[u_{l+1}^{(i)}(x; \alpha_t) u_{m+1}^{(k)}(x; \alpha_t)] \quad (i, k, l, m = 0, 1). \quad (2.5)$$

Для вычисления элементов матрицы $A(x; t)$ нужно усреднить по всем возможным реализациям случайной функции $\alpha(t)$ произведения вида $u^{(l)}(x; \alpha_t) u_m^{(k)}(x; \alpha_t)$ ($l, m = 1, 2; i, k = 0, 1$).

С этой целью перепишем уравнение (A) в виде интегрального уравнения:

$$u_l^{(i)}(t' - t; \alpha_t) = u_l^{(i)}(t' - t) + \int_t^{t'} W^{(i)}(t' - p) \alpha(p) u_l(p - t; \alpha_t) dp \\ (l = 1, 2; i = 0, 1). \quad (2.6)$$

Здесь $u_l(t' - t)$ — те частные решения уравнения

$$\ddot{u}(t') + a_1 \dot{u}(t') + a_0 u(t') = 0, \quad (2.7)$$

которые удовлетворяют следующим начальным условиям:

$u_1(0) = u_2(0) = 1, \quad \dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = 0$; $W(\xi)$ — функция Коши уравнения (2.7), составленная из этих же частных решений.

Вычислив теперь функции $u_l^{(i)}(t' - t; \alpha_t)$ в виде бесконечных рядов **,

* Если вектор $r(t)$ взять в виде: $r(t) = \left(Mu^2(t; \alpha), \frac{\sqrt{2}}{\sigma} M[u(t; \alpha) \dot{u}(t; \alpha)], \frac{1}{\sigma^2} M\dot{u}^2(t; \alpha) \right)$, то, как можно показать, наилучший (при нашем методе) достаточный критерий ограниченности $|r(t)|$ получается для $\sigma = 1$.

** Полагаем в (2.6) $i = 0$ и находим $u_l(t' - t; \alpha_t)$ итерационным методом в виде бесконечного ряда. Чтобы получить $\dot{u}_l(t' - t; \alpha_t)$, удобно подставить теперь этот ряд в правую часть уравнений (2.6), полагая в них $i = 1$.

В случае (B) для функций $u_l(t' - t; \beta_t)$ имеем уравнения:

$$u_l^{(i)}(t' - t; \beta_t) = u_l^{(i)}(t' - t) + \int_t^{t'} W^{(i)}(t' - p) \beta(p) \dot{u}_l(p - t; \beta_t) dp \quad (l = 1, 2; i = 0, 1). \quad (2.6a)$$

Положив в (2.6 а) $i = 1$, найдём $\dot{u}_l(t' - t; \beta_t)$ в виде ряда; для нахождения $u_l(t' - t; \beta_t)$ подставим этот ряд в правую часть уравнений (2.6a), полагая в них $i = 0$.

можно найти (используя (1.1)) матрицу $A(x; t)$. Для наших целей достаточно знать приближенное выражение для матрицы $A(x; t)$, отличающееся от точного на величину порядка $o(x)$. Это означает, как будет показано ниже (лемма 2), что при вычислении матричных элементов достаточно ограничиться первыми членами соответствующих рядов. Таким образом, матрица $A(x; t)$ в интересующем нас приближении не зависит от случайной функции $\alpha(t)$.

§ 3. Основные оценки

Приведём четыре вспомогательных предложения, которые понадобятся в параграфе 4.

Обозначим через $\gamma_{iklm}^{(1)}(x; t)$ первый член ряда для $\gamma_{iklm}(x; t)$. Поясним, что ряд для $\gamma_{iklm}(x; t)$ получается при подстановке в формулы (2.5) функций $u_{l+1}^{(i)}(x; \alpha_t)$ и $u_{m+1}^{(k)}(x; \alpha_t)$ в виде рядов, описанных ранее. Итак,

$$\begin{aligned} \gamma_{iklm}^{(1)}(x; t) = & u_{l+1}^{(i)}(x) \int_t^{t+x} W^{(k)}(t+x-p) M[\alpha(p) u^{(l)}(t; \alpha) u^{(m)}(t; \alpha)] \times \\ & \times u_{m+1}^{(k)}(p-t) dp + u_{m+1}^{(k)}(x) \int_t^{t+x} W^{(i)}(t+x-p) M[\alpha(p) u^{(l)}(t; \alpha) u^{(m)}(t; \alpha)] \times \\ & \times u_{l+1}^{(i)}(p-t) dp. \end{aligned}$$

Пусть также

$$\begin{aligned} \psi(q) &= \max_{i, k; 0 \leq \xi \leq q} |u_{i+1}^{(k)}(\xi)| \quad (i, k = 0, 1), \\ K(q) &= \max_{0 \leq \xi \leq q} \{ |W(\xi)|, |\dot{W}(\xi)| \}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Лемма 1. Для величин $\gamma_{iklm}(x; t)$ и $x(x; t)$ справедливы оценки:

$$\gamma_{iklm}(x; t) = \gamma_{iklm}^{(1)}(x; t) + O(x^2), \quad (3.2)$$

$|x(x; t)| \leq x [256\psi^4(a) \gamma(e^{2K(a)} \gamma^a - 1) e^{2[K(a)\gamma + a_1]a} + O(x)] |r(t)|^*$. (3.3)
Доказательство неравенства (3.3), ввиду его громоздкости, приводится в приложении. Справедливость оценки (3.2) очевидна. То же можно сказать о приводимой ниже лемме 2.

Лемма 2. Для величины $M[u_{l+1}^{(i)}(x; t) u_{m+1}^{(k)}(x; t)] - u_{l+1}^{(i)}(x) u_{m+1}^{(k)}(x)$ справедлива оценка:

$$M[u_{l+1}^{(i)}(x; t) u_{m+1}^{(k)}(x; t)] - u_{l+1}^{(i)}(x) u_{m+1}^{(k)}(x) = O(x^2).$$

Введём обозначение $A^{(0)}(x)$ для матрицы, в которую переходит $A(x; t)$ при $\alpha(t) \equiv 0$, и используем леммы 1 и 2 при доказательстве следующих двух лемм.

Лемма 3. Производная по x от матрицы $A(x; t)$ в точке $x=0$ существует и равна $\dot{A}^{(0)}(0)$, то есть не зависит от случайной функции $\alpha(t)$.

Справедливость леммы 3 следует из того, что, согласно лемме 2,

$$A(x; t) = A^{(0)}(x) + O(x^2).$$

В самом деле, всякая величина вида $o(x)$ имеет равную нулю производную в точке $x=0$, а матрица $A^{(0)}(x)$ дифференцируема при любом x .

* В случае (B), вместо $e^{2[K(a)\gamma + a_1]a}$, нужно писать $e^{2[K(a)\delta + a_1 + \delta]a}$.

Лемма 4. Производная по x от величины $x(x; t)$ в точке $x = 0$ существует.

Лемма будет доказана, если мы установим существование производной по x в точке $x = 0$ от $\gamma_{iklm}(x; t)$ (см. (2.4)). Как следует из (3.2), для этого достаточно дифференцируемости в точке $x = 0$ величины $\gamma_{iklm}^{(1)}(x; t)$. Учитывая, что, по предположению, случайная функция $a(t)$ ограничена, легко убедиться непосредственным вычислением, что $\gamma_{iklm}^{(1)}(0; t)$ действительно существует. Лемма 4 доказана.

Заметим, что из лемм 3 и 4 и соотношения (2.3) следует существование $\dot{r}(t)$ при любом t .

§ 4. Условие ограниченности решений в среднем

Перепишем теперь соотношение (2.3) в виде:

$$r(t) + x\dot{r}(t) + o_1(x) = [A(0; t) + x\dot{A}(0; t) + o_2(x)]r(t) + x\dot{x}(0; t) + o_1(x) \quad (x \rightarrow 0), \quad (4.1)$$

учитывая, что $x(0; t) = 0$. Здесь $o_1(x)$ и $o_2(x)$ обозначают некоторые вектор и матрицу, стремящиеся к нулю вместе с x быстрее первой степени x .

Легко видеть, что $A(0; t) = E$ (единичная матрица) и, согласно лемме 3,

$\dot{A}(0; t) = \dot{A}^{(0)}(0) \equiv \dot{A}(0)$. Поэтому из (4.1) следует:

$$\dot{r}(t) = \dot{A}(0)r(t) + \dot{x}(0; t).$$

Отсюда

$$r(t) = e^{t\dot{A}(0)}r(0) + \int_0^t e^{(t-s)\dot{A}(0)}\dot{x}(0; s)ds.$$

Произведём грубую оценку вектора $r(t)$ в предположении, что матрица $\dot{A}(0)$ имеет три линейно-независимых нормированных собственных вектора: e_1 , e_2 и e_3 . Пусть λ_1 , λ_2 и λ_3 — соответствующие собственные числа. Положим

$$r(0) = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3, \quad \dot{x}(0; s) = d_1(s)e_1 + d_2(s)e_2 + d_3(s)e_3.$$

Тогда

$$r(t) = \sum_{i=1}^3 e^{t\lambda_i} c_i e_i + \int_0^t \left(\sum_{i=1}^3 e^{(t-s)\lambda_i} d_i(s) e_i \right) ds$$

и

$$|r(t)| \leq \sum_{i=1}^3 |e^{t\lambda_i} c_i| + \int_0^t \left(\sum_{i=1}^3 |e^{(t-s)\lambda_i} d_i(s)| \right) ds. \quad (4.2)$$

Обозначим через R наибольшую в алгебраическом смысле реальную часть λ_i ($i = 1, 2, 3$) и введём величину

$$N(\dot{A}(0)) = \max_{c_1, c_2, c_3} \sqrt{\frac{|c_1|^2 + |c_2|^2 + |c_3|^2}{\sum_{i,k=1}^3 (e_i, e_k) c_i \bar{c}_k}}.$$

Из (4.2) следует:

$$|r(t)| \leq 3N(\dot{A}(0))e^{tR} \left(|r(0)| + \int_0^t e^{-sR} |\dot{x}(0; s)| ds \right). \quad (4.3)$$

Оценим функцию $|\dot{x}(0; s)|$. Имеем:

$$|\dot{x}(0; s)| = \left| \frac{x(z; s) - x(0; s)}{z} + o(1) \right|.$$

Учитывая, что $x(0; s) = 0$ и вспоминая оценку (3.3), получим:

$$|\dot{x}(0; s)| < 256\psi^4(a) \gamma (e^{2K(a)\gamma a} - 1) e^{2[K(a)\gamma + a_1]a} |r(s)| \equiv C |r(s)|.$$

Теперь (4.3) можно записать так:

$$|r(t)| e^{-tR} < 3N(\dot{A}(0)) (|r(0)| + C \int_0^t |r(s)| e^{-sR} ds).$$

Отсюда следует оценка:

$$|r(t)| < 3N(\dot{A}(0)) |r(0)| e^{[R + 3N(\dot{A}(0))C]t},$$

получаемая на основании следующей леммы (см., например, [2]).

Лемма Гронуолла. Пусть $f(t)$ — такая скалярная функция, что

$$0 \leq f(t) \leq \lambda + \int_{t^0}^t (\mu f(t') + \nu) dt',$$

где λ, μ, ν — положительные постоянные, $t \geq t^0$ и $f(t)$ непрерывна на отрезке $t^0 \leq t \leq t^1$. Если $t^1 - t^0 = T$, то

$$f(t) \leq (\nu T + \lambda) e^{\mu T} \quad (t^0 \leq t \leq t^1).$$

Мы видим, что для ограниченности $|r(t)|$ достаточно, чтобы выполнялось соотношение:

$$R + 3N(\dot{A}(0))C \leq 0. \quad (4.4)$$

Это и есть достаточное условие ограниченности в среднем решений уравнения (A). В связи с тем, что вычисление коэффициента $N(\dot{A}(0))$ может оказаться трудоёмким, мы получим в следующем параграфе оценку сверху для этой величины.

§ 5. Вычисление и оценка $N(\dot{A}(0))$.

Матрица $\dot{A}(0)$ имеет следующий вид:

$$\dot{A}(0) = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & -a_1 & \sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & -2a_1 \end{vmatrix}.$$

Её собственные числа равны $\lambda_1 = -a_1$, $\lambda_{2,3} = -a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4}$. Наибольшая в алгебраическом смысле реальная часть этих чисел $R = \operatorname{Re}\{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4}\}$. Мы будем предполагать, что $a_1^2 \neq 4$. Поэтому у матрицы $\dot{A}(0)$ будут три различных нормированных собственных вектора: e_1, e_2 и e_3 . Определитель Грама D^2 , составленный из этих трёх векторов, равен

$$D^2 = \begin{cases} \frac{(1 - a_{1/4}^2)^3}{1 + a_{1/4}^2} & (a_1^2 - 4 < 0), \\ \frac{(a_{1/4}^2 - 1)^3}{(a_{1/4}^2)^2 (a_{1/4}^2 + 1)} & (a_1^2 - 4 > 0). \end{cases}$$

Для вычисления $N(\dot{A}(0))$ можно воспользоваться тем, что

$$N(\dot{A}(0)) = \frac{1}{V_{\tilde{\lambda}(\dot{A}(0))}}^*, \quad (5.1)$$

где $\tilde{\lambda}(\dot{A}(0))$ — наименьшее собственное число матрицы $\|(e_i, e_k)\|$, то есть наименьший из корней (они все положительны) уравнения:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3d\lambda - D^2 = 0. \quad (5.2)$$

Здесь

$$d = \begin{cases} \frac{1 - a_1^2/4}{1 + a_1^2/4} \left(1 + \frac{a_1^2}{6} + \frac{a_1^4}{48}\right) & (a_1^2 - 4 < 0), \\ \frac{a_1^2/4 - 1}{(a_1^2/4)^2 (a_1^2/4 + 1)} \left(\frac{1}{3} + \frac{a_1^2}{6} + \frac{a_1^4}{16}\right) & (a_1^2 - 4 > 0). \end{cases}$$

Из уравнения (5.2) можно получить [1] искомую оценку величины $N(\dot{A}(0))$:

$$N(\dot{A}(0)) < \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{3d}{D^2}}. \quad (5.3)$$

§ 6. Выводы

Полученные выше результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. Пусть $u(t)$ есть решение одного из следующих уравнений:

$$\ddot{u}(t) + a_1 \dot{u}(t) + u(t) = \alpha(t) u(t), \quad (A)$$

$$\ddot{u}(t) + a_1 \dot{u}(t) + u(t) = \beta(t) \dot{u}(t), \quad (B)$$

удовлетворяющее фиксированным начальным условиям. Коэффициент a_1 — постоянная, причём $a_1^2 \neq 4$. Коэффициенты $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ — случайные функции, удовлетворяющие следующим условиям:

$$1) M\alpha(t) = 0, \quad M\beta(t) = 0 \quad (-\infty < t < \infty).$$

M означает усреднение по всем реализациям случайной функции.

$$2) |\alpha(t)| < \gamma, \quad |\beta(t)| < \gamma \quad (\gamma = \text{const.}, \quad -\infty < t < \infty).$$

3) Длины автокорреляции функций $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ не превышают некоторой постоянной величины a .

Все величины, фигурирующие в уравнениях (A) и (B), и начальные условия предполагаются вещественными.

Тогда:

а) Достаточное условие ограниченности в среднем квадратичном всех решений уравнения (A) вместе с их первыми производными (то есть условие того, что $Mu^2(t; \alpha) < \infty$, $M\dot{u}^2(t; \alpha) < \infty$ ($-\infty < t < \infty$)) имеет вид:

$$-a_1 + 128\sqrt{3} \frac{\sqrt{40 + 4a_1^2 + a_1^4}}{1 - a_1^2/4} \cdot Q \leq 0 \quad (a_1^2 - 4 < 0),$$

$$-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4} + 64\sqrt{3} \frac{\sqrt{64 + 16a_1^2 + 10a_1^4}}{a_1^2/4 - 1} Q \leq 0 \quad (a_1^2 - 4 > 0).$$

* Вообще, если у произвольной матрицы третьего порядка B есть три линейно-независимых собственных вектора b_1, b_2 , и b_3 , то $N(B) = [\tilde{\lambda}(B)]^{-1/2}$, где $\tilde{\lambda}(B)$ — наименьшее собственное число матрицы $\|(b_i, b_k)\|$.

Здесь

$$Q = \psi^4(a) \gamma e^{2[K(a)\gamma + a_1]a} (e^{2K(a)\gamma a} - 1);$$

$$\psi(a) = \max_{i, k; 0 \leq \xi \leq a} |u_{i+1}^{(k)}(\xi)| \quad (i, k = 0, 1);$$

$$K(a) = \max_{0 \leq \xi \leq a} \{ \|W(\xi)\|, \|\dot{W}(\xi)\| \};$$

$u_i(\xi)$ ($i = 1, 2$) — решения уравнения $\ddot{u}(\xi) + a_1 \dot{u}(\xi) + u(\xi) = 0$, удовлетворяющие начальным условиям: $u_1(0) = u_2(0) = 1$, $\dot{u}_1(0) = \dot{u}_2(0) = 0$; $W(\xi)$ — функция Коши такого уравнения, то есть

$$W(\xi) \equiv W(\tau - \rho) = [u_1(\rho) u_2(\tau) - u_1(\tau) u_2(\rho)] e^{a_1 \rho}.$$

б) Для уравнения (B) соответствующий результат отличается лишь тем, что выражение Q нужно умножить на $e^{2\gamma a}$.

Эта теорема в основном сводится к формуле (4.4), в которой величина $N(\dot{A}(0))$ заменена оценкой (5.3); конечно, можно использовать и точную формулу (5.1), если найти $\tilde{\lambda}(\dot{A}(0))$ из уравнения (5.2).

§ 7. Приложение

Покажем, как находится оценка (3.3) величины $|x(x; t)|$. Для этого получим прежде три вспомогательных неравенства, а затем оценку для $\gamma_{iklm}(x; t)$.

Согласно (2.6), функции $u_{l+1}^{(i)}(q; \alpha_\tau)$ ($i, l = 0, 1$) удовлетворяют уравнениям*

$$u_{l+1}^{(i)}(q; \alpha_\tau) = u_{l+1}^{(i)}(q) + \int_{\tau}^{\tau+q} W^{(i)}(\tau + q - \rho) \alpha(\rho) u_{l+1}(\rho - \tau; \alpha_\tau) d\rho \equiv$$

$$\equiv u_{l+1}^{(i)}(q) + \Delta_{l+1}^{(i)}(q; \alpha_\tau) \quad (i, l = 0, 1). \quad (7.1)$$

Положим в уравнениях (7.1) $i = 0$ и применим к ним лемму Гронуолла (см. параграф 4). Тогда, употребляя обозначения (3.1), получим первое из необходимых нам неравенств:

$$|u_{l+1}(q; \alpha_\tau)| < \psi(q) \exp(K(q)\gamma q) \quad (l = 0, 1). \quad (7.2)$$

Используя (7.2), легко найти второе неравенство:

$$|\Delta_{l+1}^{(i)}(q; \alpha_\tau)| < \psi(q) (e^{K(q)\gamma q} - 1) \quad (i, l = 0, 1), \quad (7.3)$$

из которого следует пригодность оценки (7.2) и для $|\dot{u}_{l+1}(q; \alpha_\tau)|$ ($l = 0, 1$).

Третье вспомогательное неравенство

$$M|u^{(l)}(t; \alpha) u^{(m)}(t; \alpha)| \leq |r(t)| \quad (l, m = 0, 1) \quad (7.4)$$

следует из соотношения

$$|r(t)| = \sqrt{[Mu^2(t; \alpha)]^2 + 2[M(u(t; \alpha)\dot{u}(t; \alpha))]^2 + [M\dot{u}^2(t; \alpha)]^2}.$$

Теперь приступим к оценке величины $|\gamma_{iklm}(x; t)|$. Согласно (2.5), $\gamma_{iklm}(x; t)$ можно записать в виде

$$\gamma_{iklm}(x; t) = M(FG) - MFMG,$$

где

$$F = u^{(l)}(t; \alpha) u^{(m)}(t; \alpha), \quad G = u_{l+1}^{(i)}(x; \alpha_i) u_{m+1}^{(k)}(x; \alpha_k) \quad (i, k, l, m = 0, 1).$$

* В случае (B) используем уравнения (2.6a).

Легко видеть, что величина $\gamma_{iklm}(x; t)$ не изменится, если от G отнять любую детерминированную величину G_0 , а от F — любую случайную величину F_0 , не коррелирующую с G (то есть такую, что $M(F_0 G) = M F_0 M G$). Воспользовавшись очевидными соотношениями

$$u^{(l)}(t; \alpha) = u(t - a; \alpha) u_1^{(l)}(a; \alpha_{t-a}) + \dot{u}(t - a; \alpha) u_2^{(l)}(a; \alpha_{t-a}) \quad (l = 0, 1), \quad (7)$$

где a — длина автокорреляции, приведём F к виду:

$$F = u^2(t - a; \alpha) u_1^{(l)}(a; \alpha_{t-a}) u_1^{(m)}(a; \alpha_{t-a}) + \\ + u(t - a; \alpha) \dot{u}(t - a; \alpha) [u_1^{(l)}(a; \alpha_{t-a}) u_2^{(m)}(a; \alpha_{t-a}) + \\ + u_1^{(m)}(a; \alpha_{t-a}) u_2^{(l)}(a; \alpha_{t-a})] + \dot{u}^2(t - a; \alpha) u_2^{(l)}(a; \alpha_{t-a}) u_2^{(m)}(a; \alpha_{t-a}).$$

Если в этом выражении заменить α_{t-a} нулём, то получится функция

$$F_0 = u^2(t - a; \alpha) u_1^{(l)}(a) u_1^{(m)}(a) + \\ + u(t - a; \alpha) \dot{u}(t - a; \alpha) [u_1^{(l)}(a) u_2^{(m)}(a) + u_1^{(m)}(a) u_2^{(l)}(a)] + \\ + \dot{u}^2(t - a; \alpha) u_2^{(l)}(a) u_2^{(m)}(a),$$

которая не коррелирует с G . Поэтому

$$\gamma_{iklm}(x; t) = M(F_1 G_1) - M F_1 M G_1,$$

где $F_1 = F - F_0$, $G_1 = G - G_0$ и $G_0 = u_{l+1}^{(i)}(x) u_{m+1}^{(k)}(x)$.

Как уже упоминалось в параграфе 2, функции $u_{l+1}^{(i)}(x; \alpha_t)$ и $u_{m+1}^{(k)}(x; \alpha_t)$ могут быть представлены рядами, возникающими при решении уравнений (2.6) итерационным методом. При усреднении произведения двух таких рядов члены, пропорциональные первой степени x , выпадают, так как $M \alpha(t) = 0$. Поэтому $|M G_1| = O(x^2)$ и

$$|\gamma_{iklm}(x; t)| \leq M |F_1 G_1| + M |F_1| O(x^2) \quad (i, k, l, m = 0, 1).$$

Функцию $|F_1|$ можно представить в виде четырёх слагаемых, каждое из которых имеет множителем выражение типа

$$|u_{l+1}^{(i)}(q; \alpha_\tau) u_{m+1}^{(k)}(q; \alpha_\tau) - u_{l+1}^{(i)}(q) u_{m+1}^{(k)}(q)| \quad (i, k, l, m = 0, 1). \quad (7.6)$$

Такова же структура выражения $|G_1|$. Применяя обозначение $\Delta_{l+1}^{(i)}(q; \alpha_\tau)$ (см. (7.1)), перепишем (7.6) в виде

$$|u_{l+1}^{(i)}(q) \Delta_{m+1}^{(k)}(q; \alpha_\tau) + u_{m+1}^{(k)}(q) \Delta_{l+1}^{(i)}(q; \alpha_\tau) + \Delta_{l+1}^{(i)}(q; \alpha_\tau) \Delta_{m+1}^{(k)}(q; \alpha_\tau)|$$

и применим к нему вспомогательное неравенство (7.3). В результате получим

$$|u_{l+1}^{(i)}(q; \alpha_\tau) u_{m+1}^{(k)}(q; \alpha_\tau) - u_{l+1}^{(i)}(q) u_{m+1}^{(k)}(q)| < \\ < \psi^2(q) (e^{2K(q)\gamma q} - 1) \quad (i, k, l, m = 0, 1). \quad (7.7)$$

Полагая здесь $q = a$, находим

$$|F_1| < \psi^2(a) (e^{2K(a)\gamma a} - 1) [\dot{u}^2(t - a; \alpha) + 2|u(t - a; \alpha) \dot{u}(t - a; \alpha)| + \\ + \dot{u}^2(t - a; \alpha)].$$

Полагая в (7.7) $q = x$ и учитывая, что

$$\psi^2(x) (e^{2K(x)\gamma x} - 1) = 2\gamma x + O(x^2),$$

получим

$$|G_1| < 2\gamma x + O(x^2).$$

Две последних оценки позволяют написать для $|\gamma_{iklm}(x; t)|$ следующее неравенство:

$$\begin{aligned} |\gamma_{iklm}(x; t)| &< (2\gamma x + O(x^2)) \psi^2(a) (e^{2K(a)\gamma a} - 1) \times \\ &\times M[u^2(t-a; \alpha) + 2|u(t-a; \alpha)\dot{u}(t-a; \alpha)| + \dot{u}^2(t-a; \alpha)]. \end{aligned} \quad (7.8)$$

В правой части этого неравенства необходимо перейти от $u(t-a; \alpha)$ и $\dot{u}(t-a; \alpha)$ к $u(t; \alpha)$ и $\dot{u}(t; \alpha)$. Это позволит получить оценку вида $|x(x; t)| < xH(x)|r(t)|$, где $H(x)$ — функция, не зависящая от t . Без такого перехода оценка $|x(x; t)|$ была бы непригодна для вывода (4.4), так как вместо $|r(t)|$ содержала бы $|r(t-a)|$. Из соотношений (7.5) находим

$$\begin{aligned} u(t-a; \alpha) &= [\dot{u}_2(a; \alpha_{t-a})u(t; \alpha) - u_2(a; \alpha_{t-a})\dot{u}(t; \alpha)]e^{a_1a}, \\ \dot{u}(t-a; \alpha) &= [-\dot{u}_1(a; \alpha_{t-a})u(t; \alpha) + u_1(a; \alpha_{t-a})\dot{u}(t; \alpha)]e^{a_1a*}. \end{aligned}$$

Отсюда, если учесть (7.2) и замечание к (7.3) при $q = a$, следует, что каждая из величин $u^2(t-a; \alpha)$, $|u(t-a; \alpha)\dot{u}(t-a; \alpha)|$ и $\dot{u}^2(t-a; \alpha)$ меньше, чем

$$\psi^2(a) e^{2[K(a)\gamma + a_1]a} [u^2(t; \alpha) + 2|u(t; \alpha)\dot{u}(t; \alpha)| + \dot{u}^2(t; \alpha)].$$

Поэтому, согласно (7.4), имеем

$$\begin{aligned} M[u^2(t-a; \alpha) + 2|u(t-a; \alpha)\dot{u}(t-a; \alpha)| + \\ + \dot{u}^2(t-a; \alpha)] &< 16\psi^2(a) e^{2[K(a)\gamma + a_1]a} |r(t)|. \end{aligned}$$

Подставляя эту оценку в (7.8), находим окончательно

$$|\gamma_{iklm}(x; t)| < x[32\psi^4(a)\gamma(e^{2K(a)\gamma a} - 1)e^{2[K(a)\gamma + a_1]a} + O(x)]|r(t)|.$$

Из этой формулы и из (2.4) следует оценка (3.3).

Автор рад выразить свою благодарность профессору А. И. Ахиезеру за предложение рассмотреть настоящую задачу и Г. Я. Любарскому за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Я. Любарский. Ю. Л. Работников. «К теории дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами» (направлена в журнал «Теория вероятностей и её применения» в 1961 г.).
2. С. Лефшец. «Геометрическая теория дифференциальных уравнений», М., Изд-во иностр. лит., 1961.

$$a_1 a - \int_{t-a}^t \beta(s) ds$$

* В случае (B) вместо e^{a_1a} нужно писать e