

К-14038

П312585



ХАРЬКОВСКОГО
УНИВЕРСИТЕТА

К-14038
П312585

286'86

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

«ВИЩА ШКОЛА»

1 р. 10 к.

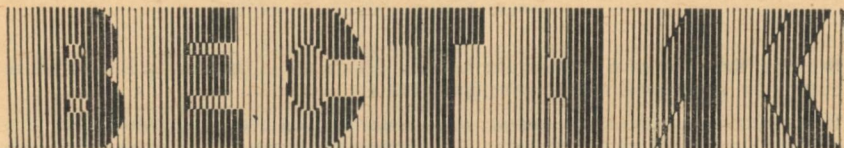
Вестн. Харьк. ун-та, 1986, № 286, 1—112.



28



МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ УССР



ХАРЬКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

№ 286

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

Основан в 1965 г.

ХАРЬКОВ
ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРИ ХАРЬКОВСКОМ
ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1986

Вестник Харьковского университета.—Х.: Вища шк. Изд-во при Харьк. ун-те, 1986.— № 286. Математика, механика.—112 с.

В вестнике опубликованы статьи по математической теории оптимальных процессов, магнитной гидродинамике, некоторым вопросам прикладной математики и алгебры.

Нормативные материалы приведены по состоянию на 1 января 1986 г. Для научных работников и специалистов.

Редакционная коллегия: И. Е. Тарапов (отв. ред.), А. П. Маринич (отв. секр.), В. В. Баранов, В. И. Коробов, Ю. И. Любич, В. А. Марченко

Печатается по решению Ученого совета механико-математического факультета Харьковского университета (протокол № 4 от 19 апреля 1985 г.)

Адрес редакционной коллегии: 310077, Харьков-77, пл. Дзержинского, 4, университет, механико-математический факультет, тел. 40-14-40

Редакция литературы по естественным наукам и филологии

Н. К. БАСАК, Г. А. ДОМБРОВСКИЙ

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ
ФИЛЬТРАЦИИ С ПРЕДЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ

Рассматривается плоская установившаяся фильтрация несжимаемой жидкости с предельным градиентом [1]. Для специального закона фильтрации, позволяющего применять при решении задач аппарат теории функций комплексного переменного, получено точное решение некоторой обобщенной задачи о точечном стоке в полосе.

1. Пусть x, y — прямоугольные декартовы координаты точки плоскости движения; $z = x + iy$ ($i = \sqrt{-1}$); v — модуль вектора скорости фильтрации; θ — угол наклона вектора скорости фильтрации к оси x ; $\varphi = -H + \text{const}$, где H — напор; ψ — функция тока; $\Phi(v)$ — функция, характеризующая закон фильтрации [2].

В статье применяется нелинейный закон фильтрации с предельным градиентом, который определяется функцией $\Phi(v)$, заданной параметрически (параметр σ , $\sigma \geq 0$) формулами

$$\Phi = \frac{\lambda \exp \sigma}{\sigma + 1}, \quad v = \frac{\lambda \sigma \exp \sigma}{a}, \quad (1)$$

где λ, a — произвольные положительные постоянные.

В этом случае имеем систему уравнений [3]

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{a}{\sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = -\frac{a}{\sigma^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

решение которой допускает представление [4]

$$\varphi = a\sigma^{-1} \text{Re } W(\omega); \quad \psi = \text{Im} \left[\int_0^\omega W(\omega) d\omega - \sigma W(\omega) \right], \quad (2)$$

где $W(\omega)$ — произвольная аналитическая функция комплексного переменного $\omega = \sigma + i\theta$.

Связь между координатами соответствующих точек плоскости ω и плоскости z устанавливается формулой перехода

$$\frac{\lambda}{a} \bar{z} = \frac{1}{2\sigma} [W(\omega) + \overline{W(\omega)}] e^{-\omega} + \int e^{-\omega} W'(\omega) d\omega, \quad (3)$$

которую получаем с помощью (1) и (2) из дифференциального соотношения

$$dz = \left[\frac{d\varphi}{\Phi(v)} + i \frac{d\psi}{v} \right] \exp(i\theta),$$

выражающего смысл функций ψ и $\Phi(v)$. Зависимость Φ/λ от av/λ изображена согласно формулам (1) на рис. 1. При $av/\lambda = 0$ имеем

$\Phi/\lambda=1$. Производная рассматриваемой функции при $av/\lambda=0$ равна нулю. Точка с координатами $av/\lambda=\sqrt{e}/2$, $\Phi/\lambda=2\sqrt{e}/3$ является точкой перегиба графика.

2. Приложим закон (1) к решению обобщенной задачи о точечном стоке в полосе, которая была поставлена и решена в работе [5] для предложенного в работе [6] закона фильтрации с предельным градиентом

$$\Phi = \sqrt{v^2 + \lambda^2}, \quad \lambda = \text{const.} \quad (4)$$

Закон (1) существенно отличается от закона (4), следовательно, новое решение может представить определенный интерес.

Пусть полоса шириной $2l$, в которой рассматривается фильтрационное движение, ограничена прямыми $y=+l$ и $y=-l$. Огра-

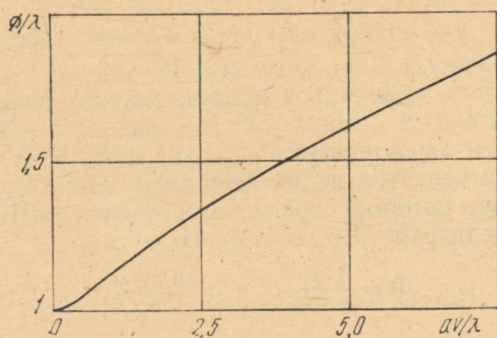


Рис. 1

ничивающие поток стенки — непроницаемые. Модуль вектора скорости в бесконечности слева принимает значение $v_1=q_1/l$, в бесконечности справа — значение $v_2=q_2/l$. Сток интенсивности $2(q_1+q_2)$ находится в начале координат. Если $v_2=v_1$, то имеем обычную задачу о стоке в полосе, которая для закона

$$\Phi = v + \lambda, \quad \lambda = \text{const} \quad (5)$$

была решена в [7] (см. также [1]), для закона (4) — в [6] и для закона (1) — в [8]. Для закона (5) рассматривался также частный случай $v_2=0$ [1].

Поскольку картина рассматриваемого движения симметрична относительно оси x , то достаточно исследовать часть потока, ограниченную прямыми $y=0$ и $y=-l$. Выделенной части потока в плоскости ω соответствует полуполоса $0 \leq \theta \leq \pi$, $\sigma \geq 0$, на границе которой имеем следующее условие для функции $\psi(\sigma, \theta)$:

$$\psi(\sigma, 0) = q_1 \quad (\sigma > \sigma_1), \quad \psi(\sigma, 0) = 0 \quad (0 \leq \sigma < \sigma_1), \quad \psi(0, \theta) = 0 \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \quad \psi(\sigma, \pi) = 0 \quad (0 \leq \sigma < \sigma_2), \quad \psi(\sigma, \pi) = -q_2 \quad (\sigma > \sigma_2),$$

где σ_1, σ_2 — значения σ , соответствующие v_1, v_2 .

Нетрудно убедиться, что записанное граничное условие для ψ выполняется, если функция $W(\omega)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} W &= 0 \quad (\theta = 0, \sigma > \sigma_1), & \operatorname{Im} W &= q_1/\sigma_1 \quad (\theta = 0, 0 \leq \sigma < \sigma_1), \\ \operatorname{Re} W &= 0 \quad (\sigma = 0, 0 \leq \theta \leq \pi), & \operatorname{Im} W &= -q_2/\sigma_2 \quad (\theta = \pi, 0 \leq \sigma < \sigma_2), \\ & & \operatorname{Im} W &= 0 \quad (\theta = \pi, \sigma > \sigma_2). \end{aligned}$$

С помощью функции $\zeta = \operatorname{ch} \omega$ отобразим рассмотренную в плоскости ω полуполосу на верхнюю полуплоскость комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$. На границе $\eta = 0$ будем иметь

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} W &= 0 \quad (\xi > \operatorname{ch} \sigma_1); & \operatorname{Im} W &= q_1/\sigma_1 \quad (1 \leq \xi < \operatorname{ch} \sigma_1); \\ \operatorname{Re} W &= 0 \quad (-1 \leq \xi \leq 1); & \operatorname{Im} W &= -q_2/\sigma_2 \quad (-\operatorname{ch} \sigma_2 < \xi \leq -1); \\ & & \operatorname{Im} W &= 0 \quad (\xi < -\operatorname{ch} \sigma_2). \end{aligned}$$

Применив формулу Келдыша — Седова [9, 10], получим

$$\begin{aligned} W(\zeta) &= \frac{1}{\pi f(\zeta)} \left[\sum_{k=1}^2 \frac{q_k}{\sigma_k} \int_{\delta_k}^{\delta_k \operatorname{ch} \sigma_k} \frac{f(t) dt}{t - \zeta} + \pi W(\infty) \right], \\ f(\zeta) &= \sqrt{\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}}, \quad \delta_k = (-1)^{k+1}. \end{aligned}$$

После вычисления интегралов и определения постоянной $W(\infty)$ из условия ограниченности функции $W(\zeta)$ при $\zeta = 1$ ($W(\infty) = -(q_1 + q_2)/\pi$) приходим к следующему результату:

$$W(\omega) = \frac{q_1}{\pi \sigma_1} \ln \frac{\operatorname{sh} [(\omega - \sigma_1)/2]}{\operatorname{sh} [(\omega + \sigma_1)/2]} + \frac{q_2}{\pi \sigma_2} \ln \frac{\operatorname{ch} [(\omega - \sigma_2)/2]}{\operatorname{ch} [(\omega + \sigma_2)/2]}.$$

Далее с помощью формулы перехода (3) определяем связь между координатами соответствующих точек плоскости ω и плоскости z . Имеем

$$\begin{aligned} \frac{z}{l} &= -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^2 Z_k(\sigma, \theta) \exp \sigma_k; \\ Z_k(\sigma, \theta) &= \frac{\exp(-\sigma + i\theta)}{2\sigma} \ln \frac{\operatorname{ch}(\sigma + \sigma_k) \mp \cos \theta}{\operatorname{ch}(\sigma - \sigma_k) \mp \cos \theta} \pm \\ &\pm \exp(\sigma_k) \ln [1 \mp \exp(-\sigma_k - \sigma + i\theta)] \mp \\ &\mp \exp(-\sigma_k) \ln [1 \mp \exp(\sigma_k - \sigma + i\theta)]. \end{aligned}$$

Верхний знак берем при $k = 1$, нижний — при $k = 2$. При $\sigma = \infty$, как и требуется по условию задачи, $z = 0$.

Осуществляя в формуле для z/l предельный переход при $\sigma \rightarrow 0$, получаем уравнение границы застойной зоны

$$\frac{z(\theta)}{l} = -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^2 [X_k(\theta) + iY_k(\theta)] \exp \sigma_k;$$

$$X_k(\theta) = \frac{\text{sh } \sigma_k \cos \theta}{\text{ch } \sigma_k \mp \cos \theta} \pm \text{sh } \sigma_k \ln (2 \text{ch } \sigma_k \mp 2 \cos \theta) \mp \sigma_k \text{ch } \sigma_k;$$

$$Y_k(\theta) = \frac{\text{sh } \sigma_k \sin \theta}{\text{ch } \sigma_k \mp \cos \theta} - \exp(\sigma_k) \text{arctg} \frac{\sin \theta}{\exp \sigma_k \mp \cos \theta} +$$

$$+ \exp(-\sigma_k) \left[\alpha_k + \text{arctg} \frac{\sin \theta}{\exp(-\sigma_k) \mp \cos \theta} \right],$$

где $\alpha_k = 0$ при $\exp(-\sigma_k) + (-1)^k \cos \theta \geq 0$ и $\alpha_k = \pi$ при $\exp(-\sigma_k) + (-1)^k \cos \theta < 0$. Условие о знаках прежнее.

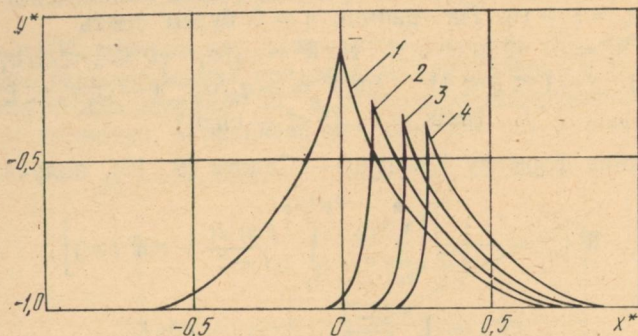


Рис. 2

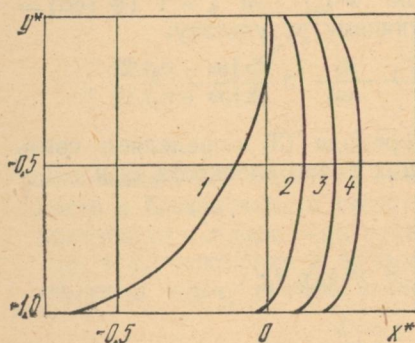


Рис. 3

В качестве параметров, от которых зависит вид застойной зоны, были приняты величины $b_1 = av_1/\lambda$, $b_2 = av_2/\lambda$, связанные равенствами $b_1 = \sigma_1 \exp \sigma_1$, $b_2 = \sigma_2 \exp \sigma_2$ с величинами σ_1 , σ_2 , входящими в уравнение границы застойной зоны.

В координатах $x^* = \pi x/(10l)$ и $y^* = y/l$ представлены границы застойных зон при $b_2 = 0,5$ (рис. 2) и $b_2 = 0$ (рис. 3). Кривые 1—4 на этих рисунках получены при значениях параметра b_1 , равных соответственно 0,5; 10; 40; 120.

Список литературы: 1. Бернадинер М. Г., Енгов В. М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей.— М.: Наука, 1975.— 199 с. 2. Христианович С. А. Движение грунтовых вод, не следующее закону Дарси.— Прикл. математика и механика, 1940, 4, вып. 1, с. 33—52. 3. Ильинский Н. Б., Фолин В. М., Шешуков Е. Г. О нелинейных законах фильтрации специального вида и решении краевых задач.— Тр. семинара по краевым задачам Казанск. ун-та, 1972, вып. 9, с. 92—102. 4. Домбровский Г. А. Метод аппроксимаций адиабаты в теории плоских течений газа.— М.: Наука, 1964.— 158 с. 5. Шешуков Е. Г. Об одном случае решения задач нелинейной фильтрации с начальным градиентом.— Тр. семинара по краевым задачам

Казанск. ун-та, 1980, вып. 17, с. 248—254. 6. *Панько С. В.* О некоторых задачах фильтрации с предельным градиентом.—Изв. АН СССР, МЖГ, 1973, № 4, с. 177—181. 7. *Ентов В. М.* Об одной задаче фильтрации с предельным градиентом, допускающей точное решение.—Прикл. математика и механика, 1968, 32, вып. 3, с. 487—492. 8. *Басак Н. К., Домбровский Г. А.* Об одном законе фильтрации с предельным градиентом.—Изв. АН СССР, МЖГ, 1983, № 3, с. 83—85. 9. *Келдыш М. В., Седов Л. И.* Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций.—Докл. АН СССР, 1937, 16, № 1, с. 7—10. 10. *Лаурентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.—4-е изд., испр.—М.: Наука, 1973.—736 с.

Поступила в редколлегию 22.01.85.

УДК 538.3:532:538.4

В. И. ЕРМАКОВ

ДИАГРАММА ФРИДРИХСА ДЛЯ РАЗРЫВОВ В ПОЛЯРИЗУЮЩЕЙСЯ И НАМАГНИЧИВАЮЩЕЙСЯ НЕПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Если $\Omega(\mathbf{r}) - t = 0$ — поверхность слабого разрыва произвольной величины $\Phi(\mathbf{r}, t)$, то этот разрыв полностью определяется одной функцией λ_Φ [1], причем

$$[\nabla\Phi] = \lambda_\Phi \mathbf{n}; \quad \left[\frac{\partial\Phi}{\partial t} \right] = \lambda_\Phi G, \quad (1)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности разрыва, квадратные скобки обозначают разрыв заключенных в них величин при переходе через эту поверхность по нормали \mathbf{n} , $\mathbf{G} = \mathbf{n}/q$ ($q = \nabla\Omega$) — скорость перемещения разрыва. Вводится также

$$\theta = G - \mathbf{v}\mathbf{n} \quad (2)$$

— скорость распространения поверхности разрыва относительно среды.

При заданных θ , \mathbf{v} соотношение (2) рассматривается [2] как уравнение в частных производных первого порядка для определения $\Omega(\mathbf{r})$. В предположении, что параметры течения, по которому распространяется разрыв, постоянны, в [2] приводится соответствующая (2) характеристическая система уравнений:

$$q\theta(q/q) = 1; \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\theta\mathbf{q}}{q} - q\mathbf{e}_\alpha \frac{\partial\theta}{\partial q_\alpha}; \quad \frac{dq}{dt} = 0, \quad (3)$$

из вида которой ясен способ построения поверхности разрыва в произвольный момент времени t , как огибающую плоскостей, касательных к начальной поверхности разрыва Ω_0 и смещенных в направлении нормалей к Ω_0 на расстояние θt . С помощью этого графического метода в [2] построена диаграмма Фридрихса для магнитогидродинамических разрывов, когда скорость распростране-

ния разрывов зависит от одного параметра — угла между направлениями внешнего магнитного поля \mathbf{H} и нормали \mathbf{n} .

Рассматривается случай, когда θ зависит от двух параметров. Поверхность разрыва при этом можно получить аналитически.

Обозначим через γ угол между направлением внешних постоянных электромагнитных полей \mathbf{B} и \mathbf{D} . Декартову систему координат выберем так, чтобы \mathbf{B} было направлено вдоль оси ox , а вектор \mathbf{D} — в плоскости $y = 0$. Обозначим через δ угол между нормалью \mathbf{n} к поверхности слабого разрыва и направлением вектора \mathbf{D} , а также через β — угол между \mathbf{n} и \mathbf{B} . Нормаль \mathbf{n} можно выразить через углы β , δ , γ и представить θ как функцию двух параметров $b \equiv \sin^2 \beta$ и $d \equiv \sin^2 \delta$. Учитывая тогда, что $\frac{\partial \theta}{\partial q_\alpha} = \frac{1}{q} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial n_\alpha} - \frac{\partial \theta}{\partial n_k} n_k n_\alpha \right\}$, $b = 1 - n_1^2$, $d = (n_3 \sin \gamma + n_1 \cos \gamma)^2$ из (3) интегрированием получаем

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}t + \mathbf{r}_0 \quad (\Omega_0(\mathbf{r}_0) = 0), \quad (4)$$

где компоненты \mathbf{R} будут:

$$\begin{aligned} X &= 2 \left\{ \frac{\theta}{2} - b \frac{\partial \theta}{\partial b} - \left(\sqrt{\frac{1-d}{1-b}} \cos \gamma + d - 1 \right) \frac{\partial \theta}{\partial d} \right\} \sqrt{1-b}; \\ Y &= 2 \left\{ \frac{\theta}{2} + (1-b) \frac{\partial \theta}{\partial b} + \right. \\ &+ (1-d) \frac{\partial \theta}{\partial d} \left. \frac{\sin^2 \gamma - 2 + d + b + 2 \cos \gamma \sqrt{(1-d)(1-b)}}{\sin \gamma} \right\}; \\ Z &= 2 \left\{ \frac{\theta}{2} + (1-b) \frac{\partial \theta}{\partial b} - \left(\frac{\sqrt{1-b} \sin^2 \gamma}{\sqrt{d} - \sqrt{b} \cos \gamma} - \right. \right. \\ &\left. \left. - 1 + d \right) \frac{\partial \theta}{\partial d} \right\} \frac{\sqrt{1-d} - \sqrt{1-b} \cos \gamma}{\sin \gamma}. \end{aligned} \quad (5)$$

Будем считать, что размеры начальной поверхности разрыва пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием, которое прошел элемент разрыва за время t , т. е. положим $\mathbf{r}_0 = 0$. Тогда равенства (5) представляют параметрическое уравнение фронтов разрывов в момент времени $t = 1$, распространяющихся в неограниченном пространстве и возникших от действия при $t = 0$ точечного источника, помещенного в начало координат.

Рассматривается распространение слабых разрывов в непроводящей, намагничивающейся и поляризующейся среде — во внешних однородных электрическом \mathbf{E} и магнитном \mathbf{H} полях. Предполагается, что среда идеальна, не имеет объемного заряда и в отсутствие электромагнитного поля описывается уравнениями состояния: $p = p(\rho, S)$, $T = T(\rho, S)$, где p , ρ , T , S — давление, плотность, температура и энтропия единицы массы среды. Считаются известными намагниченность среды $M = \{\mu(\rho, T, H) - 1\} H$ и поля-

ризация $P = \epsilon_0 \{ \epsilon(\rho, T, E) - 1 \} E$, связь которых с электрической D и магнитной B индукциями определена соотношениями

$D = \epsilon_0 E + P(\rho, T, E) E/E$; $B = \mu_0 \{ H + M(\rho, T, H) H/H \}$, (6)
 где $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{12}$ ф/м, $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$ гн/м — диэлектрическая и магнитная постоянные, ϵ, μ — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды.

Процессы в среде описываются системой уравнений [3]:

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla(p + \chi + \psi) + \epsilon_0(\epsilon - 1) \nabla E^2/2 + \\ + \mu_0(\mu - 1) \nabla H^2/2; \quad \frac{d(S + S^s)}{dt} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}; \quad (7) \\ \operatorname{div} \mathbf{B} = 0; \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{H}; \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \end{aligned}$$

где $\chi \equiv \epsilon_0 \int_0^E (\epsilon - 1 - \rho \epsilon_\rho) E dE$; $\psi \equiv \mu_0 \int_0^H (\mu - 1 - \rho \mu_\rho) H dH$;

$$S^s = \frac{\mu_0}{\rho} \int_0^H \mu_T H dH + \frac{\epsilon_0}{\rho} \int_0^E \epsilon_T E dE. \quad (8)$$

Здесь и далее вводится обозначение Φ_η для частной производной функции Φ ($\Phi = \mu, \epsilon, \rho, T, \psi, \chi, S^s$) по переменной η ($\eta = \rho, T, S, H, E$) при постоянных остальных параметрах.

На основании (1) из (7) следуют динамические условия на слабых разрывах:

$$\begin{aligned} \lambda_\rho \theta - \rho (\vec{\lambda}_v \cdot \mathbf{n}) = 0; \quad (\vec{\lambda}_v = \lambda_{v_x} \mathbf{i} + \lambda_{v_y} \mathbf{j} + \lambda_{v_z} \mathbf{k}); \\ (\lambda_S + \lambda_\rho) \theta = 0; \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \vec{\lambda}_v \theta - (\lambda_\rho + \lambda_\chi + \lambda_\psi) \mathbf{n} - \epsilon_0(\epsilon - 1) E \lambda_{E\mathbf{n}} \mathbf{n} - \mu_0(\mu - 1) H \lambda_{H\mathbf{n}} \mathbf{n} = 0; \\ \vec{\lambda}_B G - (\mathbf{n} \times \vec{\lambda}_E) = 0; \quad \vec{\lambda}_D G + (\mathbf{n} \vec{\lambda}_H) = 0. \end{aligned}$$

Из уравнений состояния (6) и (8), используя (1), можно получить также выражения для $\lambda_T, \lambda_\rho, \lambda_\psi, \lambda_\chi, \lambda_{S^s}, \lambda_H, \lambda_H, \lambda_E, \vec{\lambda}_E$ через $\lambda_\rho, \lambda_S, \lambda_B, \lambda_D, \vec{\lambda}_B$ и $\vec{\lambda}_D$ и исключить их из (9). После этого и эквивалентных преобразований, которые здесь не приводятся из-за громоздкости, система (9) сводится к линейной однородной системе пятого порядка относительно $\lambda_\rho, \lambda_S, (\mathbf{n} \vec{\lambda}_v), (\mathbf{B} \vec{\lambda}_B), (\mathbf{D} \vec{\lambda}_D)$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} \theta & 0 & \rho & 0 & 0 \\ \theta A_{21} & \theta A_{22} & 0 & \theta A_{24} & \theta A_{25} \\ \theta^2 - A_{31} & A_{32} & 0 & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & 0 & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & 0 & A_{54} & A_{55} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

Где обозначено

$$\begin{aligned}
 A_{21} &= S_{(\rho)}^2 - \mu_{(\rho)} \mu_T m B^2 - \varepsilon_{(\rho)} \varepsilon_T e D^2; & A_{22} &= 1 + \\
 &+ T_S (S_T^2 - \mu_T^2 m B^2 - \varepsilon_T^2 e D^2); & A_{24} &= \mu \mu_T m; & A_{25} &= \varepsilon \varepsilon_T e; \\
 A_{31} &= p_\rho + \chi_{(\rho)} + \psi_{(\rho)} + \rho^2 \mu_\rho \mu_{(\rho)} m B^2 + \rho^2 \varepsilon_\rho \varepsilon_{(\rho)} e D^2; \\
 A_{32} &= p_S + (\chi_T + \psi_T + \rho^2 \mu_\rho \mu_T m B^2 + \rho^2 \varepsilon_\rho \varepsilon_T e D^2) T_S; & (11) \\
 A_{34} &= -\rho^2 \mu \mu_\rho m; & A_{35} &= -\rho^2 \varepsilon \varepsilon_\rho e; & A_{4i} &= c^2 \mu^{-1} \varepsilon^{-1} \delta_i B^2 b + \\
 &+ c \mu^{-1/2} \varepsilon^{-1/2} G \gamma_i Z B D l \quad (i = 1, 2); & A_{44} &= G^2 - c^2 \mu^{-1} \varepsilon^{-1} (l - \alpha_1 b); \\
 A_{45} &= c \mu^{-1/2} \varepsilon^{-1/2} G Z \alpha_2 B D^{-1} l; & A_{5i} &= c^2 \mu^{-1} \varepsilon^{-1} \gamma_i D^2 d + \\
 &+ c \mu^{-1/2} \varepsilon^{-1/2} G \delta_i Z^{-1} B D l \quad (i = 1, 2); & A_{54} &= c \mu^{-1/2} \varepsilon^{-1/2} G Z^{-1} \alpha_1 B^{-1} D l; \\
 A_{55} &= G^2 - c^2 \mu^{-1} \varepsilon^{-1} (l - \alpha_2 d); & \delta_1 &= \rho \mu^2 \mu_0 \mu_{(\rho)} m; & \delta_2 &= \rho \mu^2 \mu_0 \mu_T T_S m; \\
 \gamma_1 &= \rho \varepsilon^2 \varepsilon_0 \varepsilon_{(\rho)} e; & \gamma_2 &= \rho \varepsilon^2 \varepsilon_0 \varepsilon_T T_S e; & \alpha_1 &= \rho \mu \mu_H m B; \\
 \alpha_2 &= \rho \varepsilon \varepsilon_E e D; & m^{-1} &= \rho \mu (\mu_0 \mu^2 + \mu_H B); & e^{-1} &= \rho \varepsilon (\varepsilon_0 \varepsilon^2 + \varepsilon_E D);
 \end{aligned}$$

$c = (\mu_0 \varepsilon_0)^{-1/2} = 2,998 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме; $Z = (\mu_0 \mu / \varepsilon_0 \varepsilon)^{1/2}$ — волновое сопротивление среды; $l = n(\mathbf{B} \times \mathbf{D}) / BD$, $\Phi_{(\rho)} = \Phi_\rho + \Phi_T T_\rho$. Условие существования нетривиального решения системы с матрицей (10) приводит к уравнению

$$\theta \{ \Delta_1 + (\theta^2 - A_{31}^*) \Delta_2 \} = 0, \quad (12)$$

определяющему возможные скорости слабых разрывов. В (12) обозначено

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & A_{34}^* & A_{35}^* \\ A_{41}^* & A_{44}^* & A_{45}^* \\ A_{51}^* & A_{54}^* & A_{55}^* \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} A_{44}^* & A_{45}^* \\ A_{54}^* & A_{55}^* \end{vmatrix}; \\
 A_{ik}^* = A_{ik} - A_{ik} A_{2k} A_{22}^{-1}.$$

Анализ (12) показывает, что помимо очевидного корня $\theta_1 = 0$, во внешних, постоянных, не слишком больших электромагнитных полях таких, что

$$B^2 / \mu_0 \rho, \quad D^2 / \varepsilon_0 \rho \ll c^2 \quad (13)$$

для сред с характеристиками свойств:

$$\rho \mu_\rho, \quad H \mu_H, \quad E \varepsilon_E, \quad T \mu_T, \quad \rho T_\rho / T, \quad S T_S / T \ll 1 \quad (14)$$

имеем две группы корней — это корни значительно меньше скорости света c и корни уравнения $\Delta_2(\theta) = 0$ (в этом случае $G = \theta$ с точностью до v/c), сравнимые по порядку с c .

Предполагается, что соотношения (13), (14) выполняются. Например, для воздуха (13) означает, что $E \ll 10^{14}$ В/м, $H \ll 2,5 \times 10^{11}$ А/м $\sim 3 \cdot 10^9$ Э, а для искусственных ферромагнитных жидкостей — $H \ll 10^{12}$ А/м. Указанные ограничения на величину внешних полей E и H нужно считать естественными, так как обычно напряженность электрического пробоя ~ 30 кВ/см, а магнитное поле, на данном этапе достигнутое в лабораторных условиях, — не более 10^5 Э.

Таким образом, уравнение (12) при условиях (13), (14) определяет три типа слабых разрывов: энтропийный, «вмороженный» в среду

$$\theta_1 = 0, \quad (15)$$

звуковой, со скоростью распространения

$$\theta_{2,3} = \pm \sqrt{A_{31} - A_{32} A_{21} N - L_1/L_2}, \quad (16)$$

электромагнитные, скорость которых — корни уравнения

$$\theta^4 + 2 \frac{c}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \sqrt{\beta_1 \beta_2} l \theta^3 - \frac{c^2}{\mu \varepsilon} \{1 + L_2 + L_3 (l^2 - bd)\} \theta^2 - \quad (17)$$

$$- 2 \frac{c^3 \sqrt{\beta_1 \beta_2}}{\mu \varepsilon \sqrt{\mu \varepsilon}} l \theta + \frac{c^4}{\mu^2 \varepsilon^2} L_2 = 0,$$

$$\text{где } L_1 = \Gamma_1 (1 - \alpha_2 d) b + \Gamma_2 (1 - \alpha_1 b) d - \Gamma_{12} bd;$$

$$L_2 = 1 + (\beta_1 - \alpha_1) b + (\beta_2 - \alpha_2) d + L_3 bd;$$

$$L_3 = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2; \quad N = A_{22}^{-1};$$

$$\beta_1 = \rho \mu_0 \mu^3 \mu_f^2 m^2 T_S N B^2; \quad \beta_2 = \rho \varepsilon_0 \varepsilon^3 \varepsilon_T^2 e T_S N D^2;$$

$$\Gamma_1 = \rho \mu_0 \mu^3 m^2 (\rho^2 \mu_r + A_{32} \mu_T N) (A_{21} \mu_T T_S N - \mu_{(p)}) B^2;$$

$$\Gamma_2 = \rho \varepsilon_0 \varepsilon^3 e^2 (\rho^2 \varepsilon_r + A_{32} \varepsilon_T N) (A_{21} \varepsilon_T T_S N - \varepsilon_{(p)}) D^2;$$

$$\Gamma_{12} = \rho^4 \mu_0 \varepsilon_0 \mu^3 \varepsilon^3 m^2 e^2 N (\mu_r \varepsilon_T - \varepsilon_r \mu_T)^2 B^2 D^2.$$

В неполяризуемом немагнитном диэлектрике имеются те же типы слабых разрывов, скорости распространения которых можно получить из (16), (17), положив $\mu = \text{const}$, $\varepsilon = \text{const}$ или $\mathbf{B} = \mathbf{D} = 0$. Тем не менее способность среды неоднородно и изотропно намагничиваться и поляризоваться во внешнем постоянном электромагнитном поле привносит существенные особенности в свойства слабых разрывов. Это, прежде всего, анизотропия скорости распространения звуковых и электромагнитных разрывов. Кроме того, все четыре корня уравнения (17) в рассматриваемом случае различны, в отличие от классического решения, когда корни попарно совпадают и равны $\pm c/\sqrt{\mu \varepsilon}$. Учет поляризационных свойств «снимает» указанную вырожденность и приводит к ряду явлений типа эффектов Фарадея, Керра и др. [4, 5] в изотропной среде, связанных с анизотропией распространения разрывов по отношению к внешним полям \mathbf{B} и \mathbf{D} .

В пренебрежении каллорическими и стрикционными эффектами, т. е. в случае зависимости $\mu = \mu(H)$ и $\varepsilon = \varepsilon(E)$, электромагнитное поле не влияет на распространение звука в среде, так как в соответствии с (16) $\theta_{2,3} = \pm \sqrt{\rho}$. Электромагнитные разрывы, как следует из (17), распространяются со скоростями

$$\theta_{4,5,6,7} = \pm \frac{c}{\sqrt{2\mu\varepsilon}} \{2 - \alpha_1 b - \alpha_2 d + \alpha_1 \alpha_2 l^2 \pm \sqrt{(\alpha_1 b + \alpha_2 d - \alpha_1 \alpha_2 l^2)^2 + 4\alpha_1 \alpha_2 (l^2 - bd)}\}^{1/2} \quad (18)$$

Корни одного знака попарно различны. Таким образом, в каждом, произвольно ориентированном по отношению к векторам \mathbf{B} и \mathbf{D} , направлении \mathbf{n} имеем две вообще различные скорости распространения разрывов. Для парамагнитной среды каждая из скоростей (18) будет не меньше скорости света в среде с проницаемостями μ , ε и не больше скорости света в вакууме. При доказательстве этого мы используем естественные для парамагнетика неравенства

$$\frac{\partial M}{\partial H} > 0; \quad \frac{\partial^2 M}{\partial H^2} \leq 0; \quad \frac{\partial P}{\partial E} > 0; \quad \frac{\partial^2 P}{\partial E^2} \leq 0. \quad (19)$$

Можно показать, что α_1 и α_2 отрицательны. Действительно, в силу (19) имеем $\frac{\partial M}{\partial H} \leq \frac{M}{H}$, $\frac{\partial P}{\partial E} \leq \frac{P}{E}$ и, например, для α_1 , используя тождество $M = (\mu - 1)H$, пишем

$$\alpha_1 = \frac{\mu_H H}{\mu + \mu_H H} = \frac{(M_H - 1 + \mu)H}{M_H + 1} \leq \left(\frac{M}{H} + 1 - \mu\right)H = 0.$$

Кроме того, исходя из определения b , d , l , можно показать, что $bd - l^2 = (\cos \gamma - \cos \delta \cos \beta)^2$. Тогда для каждого корня из (18), с одной стороны, справедлива оценка $|\theta| \geq c/\sqrt{\mu\varepsilon}$, причем знак равенства достигается при

$$\cos \gamma = \cos \delta \cos \beta. \quad (20)$$

С другой стороны,

$$|\theta| \leq \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{1 - \alpha_1 b - \alpha_2 d + \alpha_1 \alpha_2 l^2} \leq \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{(1 - \alpha_1 b)(1 - \alpha_2 d)} \leq$$

и, отыскивая максимум функции $(1 - \alpha_1 b)(1 - \alpha_2 d)$ при условии (20), например методом неопределенных множителей Лагранжа, можно продолжить эту цепочку неравенств

$$\leq \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \left| \sqrt{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)} - \cos \gamma \sqrt{\alpha_1 \alpha_2} \right| \leq \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \times \\ \times \sqrt{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)} = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{(1 + M_H)(1 + P_E)}} \leq c,$$

причем знак равенства в последнем достигается при $P_E = M_H = 0$, т. е. в случае одновременного магнитного и электрического насыщения. Таким образом, возможные скорости распространения электромагнитных разрывов в поляризующейся и намагничивающейся парамагнитной среде лежат в интервале $c/\sqrt{\mu\varepsilon} \leq |\theta| \leq c$ и зависят от ориентации фронта разрыва по отношению к полям \mathbf{B} и \mathbf{D} , их величины и поляризационных свойств среды. Возвращаясь еще раз к доказанным неравенствам и следя за выполнением условий, при которых достигается знак равенства, заключаем, что электромагнитный разрыв может распространяться в материальной среде со скоростью света в вакууме c . Это возможно, если $\mathbf{B} \perp \mathbf{D}$, возмущения распространяются поперек \mathbf{B} и \mathbf{D} , а среда поляризована и намагничена до насыщения.

Для диамагнитной среды, при $\partial M/\partial H < 0$, $\partial^2 M/\partial H^2 \geq 0$ параметр $\alpha_1 > 0$ и аналогично можно показать, что скорости электромагнитных разрывов находятся в интервале

$$\frac{c}{\sqrt{\epsilon(\mu + \mu_H H)}} \leq |\theta| \leq \frac{c}{\sqrt{\mu(\epsilon + \epsilon_E E)}}.$$

Построим пространственную диаграмму Фридрикса в двух частных случаях взаимного расположения внешних полей: $\mathbf{B} \parallel \mathbf{D}$ и $\mathbf{B} \perp \mathbf{D}$.

Пусть направления электрического и магнитного полей совпадают, т. е. положим $\sin \gamma = 0$. В этом случае скорости электро-

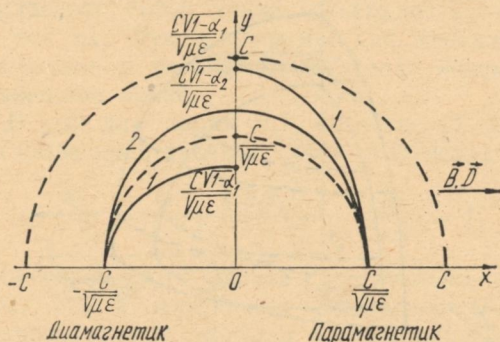


Рис. 1

магнитных разрывов зависят от одного параметра $b = d$ и, как следует из (18), имеют вид

$$\theta = \pm \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{1 - \alpha_i b} \quad (i = 1, 2).$$

Для каждой пары этих корней, используя (5), можно получить уравнение поверхности разрыва в виде эллипсоида вращения

$$X^2 + \frac{Y^2 + Z^2}{1 - \alpha_i} = \frac{c^2}{\mu\epsilon} \quad (i = 1, 2)$$

с осью симметрии вдоль \mathbf{B} и \mathbf{D} . Поскольку в рассматриваемом случае диаграммы симметричны относительно оси ox и плоскости $x = 0$, то они изображены в одном из квадратов на рис. 1. В правом квадрате кривые 1 и 2 представляют диаграммы Фридрикса в парамагнитной среде, причем $\alpha_1 < \alpha_2 < 0$, а кривые 1 и 2 слева — в диамагнетике, для которого $\alpha_1 > 0$.

Рассмотрим теперь случай $\mathbf{B} \perp \mathbf{D}$. Полагая тогда $\cos \gamma = 0$ из (18) получаем

$$\theta = \pm \frac{c}{\sqrt{2\mu\epsilon}} \{2 - \alpha_1 b - \alpha_2 d + \alpha_1 \alpha_2 (b + d - 1) \pm \sqrt{[\alpha_1 b + \alpha_2 d - \alpha_1 \alpha_2 (b + d - 1)]^2 - 4\alpha_1 \alpha_2 (1 - b)(1 - d)}\}^{1/2} \quad (1 \leq b + d \leq 2). \quad (21)$$

Находя частные производные θ по параметрам b и d , и подставляя их в (5), получаем уравнения фронтов электромагнитных разрывов в пространстве:

$$\begin{aligned} X &= \{\alpha_1 b + \alpha_2 d - \alpha_1 \alpha_2 b + (\theta^2 - 1)(2 - \alpha_2)\} \frac{\sqrt{1-d}}{\theta K}; \\ Y &= \{\alpha_1 b + \alpha_2 d - \alpha_1 \alpha_2 (b + d - 1) + \\ &+ (\theta^2 - 1)(2 - \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_2)\} \frac{\sqrt{b+d-1}}{\theta K}; \\ Z &= \{\alpha_1 b + \alpha_2 d - \alpha_1 \alpha_2 d + (\theta^2 - 1)(2 - \alpha_1)\} \frac{\sqrt{1-d}}{\theta K}, \end{aligned} \quad (22)$$

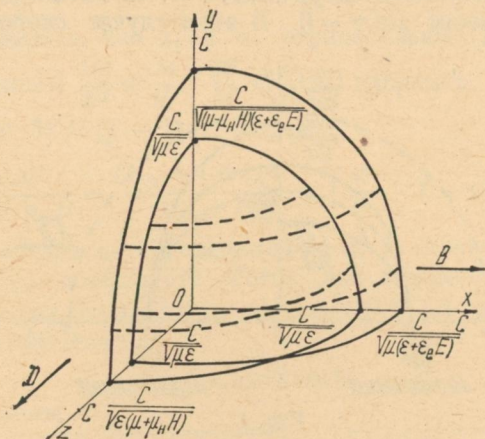


Рис. 2

где $K = 2\theta^2 - 2 + \alpha_1 b + \alpha_2 d - \alpha_1 \alpha_2 (b + d - 1)$, а θ принимает одно из значений (21). Диаграмма Фридрихса в этом случае состоит из двух поверхностей. Пересечение этих поверхностей, например с плоскостью $z = 0$ ($d = 1$), дает, как следует из (22), окружность радиуса $c/\sqrt{\mu\epsilon}$ (рис. 2) и эллипс, уравнение которого $\mu(\epsilon + \epsilon_E E) X^2 + (\mu + \mu_H H)(\epsilon + \epsilon_E E) Y^2 = c^2$. В плоскости $y = 0$ ($b + d = 1$) имеем эллипсы с осями $X_1 = c/\sqrt{\mu\epsilon}$, $Z_1 = c/\sqrt{\mu(\epsilon + \epsilon_E E)}$ и $X_2 = c/\sqrt{\epsilon(\mu + \mu_H H)}$, $Z_2 = c/\sqrt{\mu\epsilon}$. Изображение других, представленных на рис. 2, сечений плоскостями $y = \frac{1}{4} \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ и $y = \frac{3}{4} \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}$ получены с помощью численного счета по формулам (22).

В заключение рассмотрим распространение разрывов в среде с зависимостями $\mu = \mu(\rho, T)$ и $\epsilon = \epsilon(\rho, T)$. Согласно (16), (17) имеем

$$\begin{aligned} \theta_{2,3} &= \pm \sqrt{A_{31} - A_{32} A_{21} N - (\Gamma_1 b + \Gamma_2 d - \Gamma_{12} b d) (1 + \beta_1 b + \beta_2 d)^{-1}}; \\ \theta_{4,5} &= \pm \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}}; \quad \theta_{6,7} = \frac{c}{\sqrt{\mu\epsilon}} (-l \sqrt{\beta_1 \beta_2} \pm \sqrt{1 + \beta_1 b + \beta_2 d + \beta_1 \beta_2 l^2}), \end{aligned}$$

где $\beta_1, \beta_2, A_{31}, \dots$ и т. д.—некоторые постоянные, зависящие от свойств среды и величины внешних полей. Для идеального газа, поляризующегося и намагничивающегося по законам Клаузиуса—Мосотти эти постоянные приводятся в работе [6].

Для корня $\theta_{4,5}$ фронт разрыва представляет сферу радиуса $c/\sqrt{\mu\epsilon}$.

В случае $\mathbf{B} \parallel \mathbf{D}$ диаграммой Фридрихса для электромагнитного разрыва, соответствующего $\theta_{6,7}$, будет эллипсоид вращения с осью симметрии вдоль \mathbf{B} и \mathbf{D} и полуосями $X = c/\sqrt{\mu\epsilon}$, $Y = Z = c\sqrt{1 + \beta_1 + \beta_2}/\sqrt{\mu\epsilon}$, а фронт звукового разрыва, построенный по $\theta_{2,3}$, представляет собой также поверхность, симметричную относительно оси ox . Эти диаграммы для звукового и электромагнитного разрывов в парамагнитной среде «сплюснуты» вдоль направления внешних полей.

В случае $\mathbf{B} \perp \mathbf{D}$ для корня $\theta_{6,7}$ согласно (5) фронт электромагнитного разрыва представляет собой эллипсоид с уравнением

$$\frac{X^2}{1 + \beta_2} + \frac{(Y + \sqrt{\beta_1\beta_2})^2}{(1 + \beta_1)(1 + \beta_2)} + \frac{Z^2}{1 + \beta_1} = 1.$$

Отсутствие симметрии этого фронта относительно начала координат указывает, что в изотропной поляризующейся среде при $\beta_1\beta_2 \neq 0$ электромагнитные разрывы распространяются по-разному во взаимно противоположных направлениях. Этот эффект, являющийся «перекрестным», проявляется при учете электро- и магнитокаллорических членов, т. е. когда ϵ_T и μ_T отличны от нуля.

Список литературы: 1. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика: В 2-х т.—М.: Физматгиз, 1963.—Т. 2. 727 с. 2. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика.—М.: Физматгиз, 1962.—246 с. 3. Тарапов И. Е. Об основных уравнениях и задачах гидродинамики поляризующихся и намагничивающихся сред.—Теория функций, функционал. анализ и их прил., 1973, вып. 17, с. 221—239. 4. Волькенштейн М. В. Молекулярная оптика.—М.; Л.: Гостехтеориздат, 1951.—744 с. 5. Гольдштейн Л. Д., Зернов Н. В. Электромагнитные поля и волны.—М.: Сов. радио, 1971.—661. 6. Ермаков В. И., Тарапов И. Е. Волны в поляризующейся и намагничивающейся среде.—Магнитная гидродинамика, 1974, № 2, с. 51—57.

Поступила в редколлегию 27.03.83.

УДК 517.977

В. М. ГАВРИЛЯКО

СИНТЕЗ ОГРАНИЧЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ УПРАВЛЯЕМОСТИ

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением

$$\dot{x} = Ax + Bu + g(x, u), \quad (1)$$

Определим функцию управляемости $\theta(x)$ при $x \neq 0$, равной положительному решению уравнения

$$2a_0\theta^{1+k} = (N_\theta^{-1}x, x), \quad k \geq 0. \quad (10)$$

Тогда управление $u(x)$, определяемое равенством (8) или (9), удовлетворяет заданным ограничениям на управление и решает задачу синтеза в некоторой окрестности D начала координат, т. е. существуют постоянные a_0 и k такие, что из любой точки $x_0 \in D$ можно попасть в начало координат согласно системе

$$\dot{x} = Ax + Bu(x) + g(x, u(x)) \quad (11)$$

за конечное время $T(x_0)$. Постоянные a_0 , k могут быть любыми числами, удовлетворяющими неравенствам

$$0 < a_0 \leq d^2(1 - e^{-1}), \\ k > \max \left\{ \frac{2}{s_1 - 1} (2s - 2 - s_1); \frac{4}{s_2 - 1} (s - 1)(1 + s_2) \right\},$$

где s равно наибольшей из размерностей корневых подпространств матрицы A^* .

Доказательство. Не ограничивая общности, рассмотрим случай (6), (8). Случай (7), (9) рассматривается аналогично. Покажем, что выполнены все условия теоремы 1 [1]. Для этого проверим, что управление $u(x)$ вида удовлетворяет наперед заданным ограничениям в окрестности точки $x = 0$ и полная производная $\dot{\theta}(x(t))$ функции $\theta(x)$, взятая в силу системы (11), удовлетворяет дифференциальному неравенству [1]

$$\dot{\theta}(x(t)) \leq -\beta\theta^{1-\frac{1}{\alpha}}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0. \quad (12)$$

Действительно,

$$\dot{\theta}(x(t)) = (\nabla\theta, Ax + Bu(x)) + (\nabla\theta, g(x, u(x))).$$

Поэтому

$$\dot{\theta}(x(t)) \leq -\frac{1}{2+k} + \|\nabla\theta(x)\| \bar{C} (\|x\|^{s_1} + \|u\|^{s_2}).$$

Нетрудно получить оценку $\lambda_{\max}(N_\theta) \leq \theta R(\theta)$, где

$$R(\theta) = (1 - e^{-1+2\theta\|A\|}) / (1 - 2\theta\|A\|). \quad (13)$$

Тогда $\|x\|^2 \leq 2a_0\theta^{2+k}R(\theta)$. Учитывая (8), получаем

$$\|u\| \leq \|B\| \|x\| (2\lambda_{\min}(N_\theta))^{-1}.$$

Пользуясь методикой работы [14], нетрудно получить оценку $\lambda_{\min}(N_\theta) \geq M\theta^{2s-1}$. Здесь $\theta < 1$, M — некоторая постоянная; s — наибольшая из размерностей корневых подпространств матрицы A^* . Поэтому

$$\|u\| \leq \|B\| (2M)^{-1} \|x\| \theta^{1-2s}.$$

Оценим теперь величину $\|\nabla\theta(x)\|$. Имеем

$$\nabla\theta(x) = \frac{N_{\theta}^{-1}x}{a_0(1+k)\theta^k + \frac{1}{2}\left(-\frac{d}{d\theta}N_{\theta}^{-1}x, x\right)}.$$

Поэтому

$$\|\nabla\theta(x)\| \leq (Ma_0(1+k))^{-1}\theta^{1-k-2s}\|x\|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(x(t)) \leq & -\frac{1}{2} + \mu_1\theta^{\frac{k}{2}(s_1-1)+2-2s+s_1}R^{\frac{1}{2}(1+s_1)}(\theta) + \\ & + \mu_2\theta^{\frac{k}{2}(s_2-1)+2(1-s)(1+s_2)}R^{\frac{1}{2}(1+s_2)}(\theta), \end{aligned}$$

где

$$\mu_1 = \bar{C}(a_0M(1+k))^{-1}(2a_0)^{\frac{1}{2}(1+s_1)};$$

$$\mu_2 = \bar{C}(a_0M(1+k))^{-1}(2a_0)^{\frac{1}{2}(1+s_2)}(\|B\|/2M)^{s_2}.$$

Выберем k из условия

$$k > \max\left\{\frac{2}{s_1-1}(2s-2-s_1); \frac{4}{s_2-1}(s-1)(1+s_2)\right\}.$$

Согласно (13) функция $R(\theta)$ ограничена при $0 < \theta \leq C_1 \leq 1$. Теперь нетрудно убедиться, что при достаточно малых C_1 в области $D = \{x: \theta(x) \leq C_1\}$ справедливо неравенство

$$\dot{\theta}(x(t)) \leq -\frac{1}{4+k}. \quad (14)$$

Таким образом, неравенство (12) выполняется при $\alpha = 1$ и $\beta = -\frac{1}{4+k}$. Это гарантирует, согласно [1], попадание в точку $x = 0$ по траекториям системы (11) из всех точек области D . Далее покажем, что для любого $d > 0$ существует постоянная $a_0 > 0$ такая, что $\|u(x)\| \leq d$ для всех $x \in D$. Действительно, пусть $L = \{x: \theta(x) = c\}$. Сделаем замену $y = N_c^{-1}x$. Тогда управление u примет вид

$$u = -\frac{1}{2}B^*y, \quad (15)$$

а функция управляемости на поверхности L будет удовлетворять уравнению

$$2a_0c^{1+k} = (N_c y, y). \quad (16)$$

Учитывая [14], нетрудно получить при $c < 1$ равенство

$$c^{-1}(N_c \eta_i, \eta_j) = h(B^* \eta_i, B^* \eta_j) + O(c),$$

где $h = 1 - e^{-1}$; η_i — корневой вектор матрицы A^* , отвечающий

собственному значению λ_i . Поэтому равенство (16) приобретает вид

$$2a_0 c^k = h \sum_{i,j=1}^p (B^* \eta_i, B^* \eta_j) + O(c) = 4h \|u\|^2 + O(c).$$

Отсюда $\|u\|^2 \leq (a_0 + O(c))/(2h)$. Так как существует достаточно малое $c_1 > 0$ такое, что для всех $c \in (0, c_1]$ справедливы неравенство $|O(c)| \leq d^2 h$ и неравенство (14), то, выбрав коэффициент a_0 , удовлетворяющим условию $0 < a_0 \leq d^2 h$, получим, что в области D справедливы ограничение $\|u(x)\| \leq d$ и неравенство (12). Множество $Q = \{x: \theta(x) \leq c\}$ будет ограничено при любом конечном $c > 0$. Это сразу следует из включения $Q \subset S_{c^2 + k_R(c) \cdot 2a_0}$, где

$$S_\gamma = \{x: (x, x) \leq \gamma\}.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 1 [1] и, следовательно, управление вида (8) решает поставленную задачу синтеза.

Список литературы: 1. Коробов В. И. Общий подход к решению задачи синтеза ограниченных управлений в задаче управляемости. — Мат. сб., 1979, 109, № 4, с. 582—606. 2. Коробов В. И. Решение задачи синтеза с помощью функции управляемости. — Докл. АН СССР, 1979, 248, № 5, с. 1051—1055. 3. Коробов В. И. Решение задачи синтеза в дифференциальных играх с помощью функции управляемости. — Докл. АН СССР, 1982, 266, № 2, с. 269—273. 4. Коробов В. И., Скляр Г. М. Решение задачи синтеза с помощью функционала управляемости для систем в бесконечномерных пространствах. — Докл. АН УССР. Сер. А: физ.-мат. и техн. науки, 1983, № 5, с. 11—14. 5. Коробов В. И. Общий метод решения задачи синтеза ограниченных управлений. — Вестн. Харьк. ун-та, 1980, № 205. Прикл. математика и механика, вып. 45, с. 59—73. 6. Коробов В. И., Гавриляко В. М. О разностной аппроксимации синтеза ограниченного управления в задаче управляемости. — В кн.: Тез. III Всесоюз. семинара «Численные методы нелинейного программирования», Харьков, 1979, с. 107—109. 7. Гавриляко В. М. О синтезе ограниченного управления в задаче управляемости. — Вестн. Харьк. ун-та, 1980, № 205. Прикл. математика и механика, вып. 45, с. 73—77. 8. Гавриляко В. М. О некоторых свойствах функции управляемости. — Вестн. Харьк. ун-та, 1981, № 221. Прикл. математика и механика, вып. 46, с. 30—33. 9. Синтез управления, обеспечивающего попадание на подпространство / В. И. Коробов., В. М. Гавриляко — Харьк. гос. ун-т. Харьков, 1982.—14 с. 10. Коробов В. И., Скляр Г. М., Гавриляко В. М., Крутинь В. И. Развитие метода решения задачи синтеза с помощью функции управляемости. — В кн.: Тез. III Респ. конф. по дифференциальным и интегральным уравнениям. Одесса, 1982, с. 77—78. 11. Скляр Г. М., Крутинь В. И. Решение задачи оптимального синтеза управления движением твердого тела. — В кн.: Тез. докл. IV респ. совещ. по пробл. динамики тверд. тела. Донецк, 1984, с. 49—50. 12. Гавриляко В. М. О развитии метода функций управляемости и применении этого метода при решении задачи синтеза ограниченного управления. — Там же, с. 51—52. 13. Коробов В. И. Решение задачи синтеза управлений при наличии возмущений. — Там же, с. 29—30. 14. Коробов В. И., Маринич А. П., Подольский Е. Н. Управляемость линейных автономных систем при наличии ограничений на управление. — Дифференц. уравнения, 1975, 11, № 11, с. 1967—1979.

Поступила в редколлегию 29.01.85.

Г. А. БЕССОНОВ

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ
УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

В работе рассмотрена задача стабилизации [1] системы

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \quad x \in R^n, \quad u \in R^r, \quad (1)$$

т. е. выбора управления

$$u(t, x) = P(t)x \quad (2)$$

такого, что любое решение системы $\dot{x} = (A(t) + B(t)P(t))x$ стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$. В работе [2] решается задача стабилизации для ограниченных матриц $A(t)$ и $B(t)$ путем приведения системы (1) к каноническому виду. В данной работе не предполагается ограниченность матриц $A(t)$ и $B(t)$ и не используется канонический вид системы (1). Вид управления (2) является аналогом управления, решающего задачу синтеза с помощью функции управляемости θ для автономных систем в работе [3]. Метод решения задачи синтеза таков, что при любом фиксированном θ управление в работе [3] является стабилизирующим. Справедлива следующая

Теорема. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) матрицы $A(t)$ и $B(t)$ системы (1) непрерывно дифференцируемы $(n-2)$ и $(n-1)$ раз соответственно на $T_+ = \{t: t \geq t_0\}$;
- 2) $\text{rg}(B(t), \Delta B(t), \dots, \Delta^{n-1}B(t)) = n \quad \forall t \in T_+$, где $\Delta = A(t) - E_n \frac{d}{dt}$;

- 3) существует для любого $t \in T_+$ $g(t) = \int_{t_0}^t h(\tau) d\tau$, где функция $h(t)$ положительна, монотонно возрастает и $\|A(t)\| \leq h(t) \quad \forall t \in T_+$;
- 4) существует $\lambda_0 > 0$, что $\forall \lambda \geq \lambda_0$

$$\int_t^\infty e^{-(\lambda-2)(g(\tau)-g(t))} \|B(\tau)\|^2 d\tau \leq C = \text{const} > 0 \quad \forall t \in T_+.$$

Тогда существует управление $u(t, x) = P(t)x$, стабилизирующее систему (1).

Доказательство. Используя обобщенную лемму Гронуолла—Беллмана [4], нетрудно показать, что

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq e^{\int_t^\tau \|A(s)\| ds} \quad (\tau \geq t), \quad (3)$$

где $\Phi(t, \tau)$ — фундаментальная матрица для системы $\dot{x} = A(t)x$, $\Phi(t, t) = E$. Поэтому, учитывая 3), имеем

$$\|\Phi(t, \tau)\| \leq e^{\int_t^\tau h(s)ds} = e^{g(\tau) - g(t)} \quad (\tau \geq t). \quad (4)$$

Рассмотрим матрицу $N_\lambda(t)$, аналогичную введенной в работе [3]:

$$N_\lambda(t) = \int_t^\infty e^{-\lambda(g(\tau) - g(t))} \Phi(t, \tau) B(\tau) B^*(\tau) \Phi^*(t, \tau) d\tau. \quad (5)$$

Легко показать, используя (4) и 4), что

$$\|N_\lambda(t)\| \leq C, \quad \forall t \in T_+, \quad \forall \lambda \geq \lambda_0. \quad (6)$$

Матрица $N_\lambda(t)$ является положительно-определенной, т. е. $(N_\lambda(t)x, x) > 0$ для любого $x \neq 0$ и любых $t \in T_+$ и $\lambda \geq \lambda_0$. Действительно, если это не так, то существует ненулевой вектор ξ , а также $t_1 \in T_+$ и $\lambda_1 \geq \lambda_0$, что $\xi^* N_{\lambda_1}(t_1) \xi = 0$ или

$$\int_{t_1}^\infty e^{-\lambda_1(g(\tau) - g(t_1))} \|\xi^* \Phi(t_1, \tau) B(\tau)\|^2 d\tau = 0. \quad (7)$$

Отсюда, учитывая непрерывность подынтегрального выражения, получаем:

$$\xi^* \Phi(t_1, \tau) B(\tau) = 0, \quad \forall \tau \geq t_1. \quad (8)$$

Дифференцируя (8) $(n-1)$ раз по τ в точке $\tau = t_1$, имеем

$$\begin{aligned} \xi^* B(t_1) &= 0 \\ \xi^* \Delta B(t_1) &= 0 \\ &\dots \\ \xi^* \Delta^{n-1} B(t_1) &= 0, \end{aligned}$$

что противоречит 2).

Покажем, что управление

$$u(t, x) = -B^*(t) N_\lambda^{-1}(t) x \quad (9)$$

стабилизирует систему (1) при любом $\lambda \geq \lambda_0$. Дифференцируя (5) по t , имеем

$$\frac{dN_\lambda(t)}{dt} = -B(t)B^*(t) + \lambda h(t) N_\lambda(t) + A(t) N_\lambda(t) + N_\lambda(t) A^*(t). \quad (10)$$

Домножая (10) слева и справа на $N_\lambda^{-1}(t)$ и учитывая, что $\frac{dN_\lambda^{-1}(t)}{dt} =$

$$= -N_\lambda^{-1}(t) \frac{dN_\lambda(t)}{dt} N_\lambda^{-1}(t), \text{ получаем}$$

$$\begin{aligned} \frac{dN_\lambda^{-1}(t)}{dt} + A^*(t) N_\lambda^{-1}(t) + N_\lambda^{-1}(t) A(t) &= N_\lambda^{-1}(t) B(t) B^*(t) N_\lambda^{-1}(t) - \\ &- \lambda h(t) N_\lambda^{-1}(t). \end{aligned} \quad (11)$$

Так как матрица $N_{\lambda}^{-1}(t)$ симметрична и положительно определена, то с учетом (6) получаем

$$(N_{\lambda}^{-1}(t)x, x) \geq \frac{1}{C} \|x\|^2, \quad \forall t \in T_+, \quad \forall \lambda \geq \lambda_0. \quad (12)$$

Рассмотрим положительно-определенную квадратичную форму

$$V(t, x) = (N_{\lambda}^{-1}(t)x, x) \quad (13)$$

и найдем ее производную по t в силу системы

$$\dot{x} = (A(t) - B(t)B^*(t)N_{\lambda}^{-1}(t))x.$$

Учитывая (11), имеем

$$\frac{dV(t, x)}{dt} = -(N_{\lambda}^{-1}(t)B(t)B^*(t)N_{\lambda}^{-1}(t)x, x) - \lambda h(t)(N_{\lambda}^{-1}(t)x, x).$$

Так как $(N_{\lambda}^{-1}(t)B(t)B^*(t)N_{\lambda}^{-1}(t)x, x) \geq 0$ и $h(t) \geq h(t_0) > 0$ $\forall t \in T_+$ и $\lambda \geq \lambda_0$, получаем

$$\frac{dV(t, x)}{dt} \leq -\lambda_0 h(t_0)(N_{\lambda}^{-1}(t)x, x) = -\lambda_0 h(t_0)V(t, x). \quad (14)$$

Интегрируя (14) от t_0 до t и используя (12), имеем

$$\|x(t)\|^2 \leq CV(t, x) \leq CV(t_0, x_0)e^{-\lambda_0 h(t_0)(t-t_0)}, \quad \text{откуда } x(t) \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow +\infty$.

Теорема доказана.

В частности, если функция $h(t)$ положительна, монотонно возрастает и $\|A(t)\| \leq h(t)$, $\|B(t)\|^2 \leq h(t)$, то условие 4) теоремы выполняется при $\lambda \geq 2 + \delta$, где δ сколь угодно малое число. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} e^{-(\lambda-2)(g(\tau)-g(t))} \|B(\tau)\|^2 d\tau &\leq \int_t^{\infty} e^{-(\lambda-2)(g(\tau)-g(t))} h(\tau) d\tau = \\ &= \int_t^{\infty} e^{-(\lambda-2)(g(\tau)-g(t))} g'(\tau) d\tau = \frac{1}{\lambda-2} \leq \frac{1}{\delta}. \end{aligned}$$

В случае, если $\|A(t)\| \leq d_1$, $\|B(t)\| \leq d_2$, то $h(t) = d_1$.

Список литературы: 1. Красовский Н. Н. Проблемы стабилизации управляемых движений. — В кн: Малкина И. Г. Теория устойчивости движения. М., 1966, с. 475—514. 2. Смирнов Е. Я. Некоторые задачи математической теории управления. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1981. — 198 с. 3. Коробов В. И., Скляр Г. М. Решение задачи синтеза с помощью функционала управляемости для систем в бесконечномерных пространствах. — Докл. АН УССР, сер. А., № 5, 1983, с. 11—14. 4. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Поступила в редколлегию 18.01.85.

Л. А. ВЛАСЕНКО

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ
УРАВНЕНИЙ $Au'(t) + Bu(t) = f(t)$

Дифференциальное уравнение

$$Au'(t) + Bu(t) = f(t), \quad 0 < t < \infty \quad (1)$$

с замкнутыми линейными операторами A и B , действующими из банахова пространства X в банахово пространство Y , и локально интегрируемой по Бохнеру функцией $f(t)$ со значениями в Y исследовалось в работах [2—5]. Через ρ (ρ_n) обозначается множество регулярных (леворегулярных) точек, в которых резольвентный оператор $S_\lambda = (\lambda A + B)^{-1}$ определен и ограничен на всем Y (соответственно $R_\lambda = S_\lambda A$ на D_A) [2, 3]. Функция $u(t) \in C[0, \infty)$ такая, что $Au(t) \in C[0, \infty)$, называется классическим решением уравнения (1), если $u(t) \in C^1(0, \infty)$, $Bu(t) \in C(0, \infty)$ и удовлетворяет уравнению (1), или обобщенным, если при $0 \leq t < \infty$ удовлетворяет уравнению

$$Au(t) - Au(0) + B \int_0^t u(s) ds = \int_0^t f(s) ds \quad (2)$$

[5]. Решение $u(t)$ называется A -нормальным, если функции $u(t)$, $Au(t)$ имеют конечные экспоненциальные типы h_u , h_{Au} [3, 5].

Некоторое множество A -нормальных решений уравнения (1) можно описать с помощью скалярного множителя сходимости $\varphi_\alpha(\lambda)$, использованного в [1] для уравнения $u'(t) = Tu(t)$. От множителя сходимости требуется голоморфность при $\operatorname{Re} \lambda < \alpha$, непрерывность и ограниченность при $\operatorname{Re} \lambda \leq \alpha$, убывание на бесконечности ($\varphi_\alpha(\lambda) \rightarrow 0$, $|\lambda| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Re} \lambda \leq \alpha$).

Теорема 1. Пусть $\tilde{f}(\lambda)$ — преобразование Лапласа функции $f(t)$ с абсциссой сходимости σ_f . Если $\varphi_\alpha(\lambda)$ — множитель сходимости и для некоторого $v \in D_A$ на прямой $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$ ($> \{\max \sigma_f, 0\}$) определены выражения $\theta(\lambda) = S_\lambda \tilde{f}(\lambda)$, $g(\lambda) = R_\lambda v$ и конечны интегралы

$\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} (\cdot) d\lambda$ от функций $\|\varphi_\alpha(\lambda) g(\lambda)\|$, $\|\varphi_\alpha(\lambda) Ag(\lambda)\|$, $\|\theta(\lambda)\|$, $\|A\theta(\lambda)\|$, тогда существует A -нормальное обобщенное решение уравнения (1)

$$u(t) = (2\pi i)^{-1} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} [\varphi_\alpha g + \theta] e^{\lambda t} d\lambda$$

с начальным вектором

$$u_0 = (2\pi i)^{-1} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} [\varphi_\alpha g + \theta] d\lambda.$$

Экспоненциальные типы функций $u(t)$, $Au(t)$ оцениваются числом α . Если $f(t)$ — локально абсолютно непрерывная функция экспоненциального типа $h_f < \alpha$, то те же самые формулы определяют A -нормальное классическое решение и его начальный вектор.

Следствие. Если резольвента R_λ на прямой $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$ допускает оценки $\|R_\lambda v\| \leq C |\lambda|^k \|v\|$, $\|AR_\lambda v\| \leq C_1 |\lambda|^p \|v\|$ с целыми показателями $k, p \geq 0$, то множитель сходимости $\varphi_\alpha(\lambda) = (\lambda - \alpha - 1)^{-n}$ удовлетворяет условиям теоремы 1 при $n \geq \max\{k, p\} + 3$ для классических решений, при $n \geq \max\{k, p\} + 2$ — для обобщенных.

Пусть Ω — открытое множество в R^n . В пространстве $L_2(\Omega)$ рассмотрим уравнение типа (1)

$$A \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + Bu(t, x) = f(t, x), \quad 0 < t < \infty; \quad (3)$$

$$B = - \sum_{i, j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x).$$

Здесь функции $a_{ij}(x)$ непрерывно дифференцируемы и ограничены вместе со своими производными, $a_{ij}(x) = \overline{a_{ij}(x)}$, функции $a_i(x)$ непрерывны и ограничены, функция $c(x)$ ограничена и измерима, причем $c_0 = \inf \operatorname{Re} c(x) > 0$, оператор B равномерно эллиптический, т. е. $\sum_{i, j} a_{ij}(x) \xi_i \bar{\xi}_j \geq \delta \sum_i |\xi_i|^2$, $\delta > 0$, $\xi_i \in C$. В обозначениях [6]

$D_B = \{u \in D_{L_2}^1, Bu \in L_2\}$. Напомним, что $D_{L_2}^1(\Omega)$ есть пополнение по норме $(\|\cdot\|_{L_2}^2 + \sum_i \|\frac{\partial}{\partial x_i}\|_{L_2}^2)^{1/2}$ множества бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций (производные понимаются в смысле теории распределений).

Уравнение (3) с необратимым оператором A , например, описывает распределение температур в неоднородной среде со сложным законом вырождения параметров. В [4] встречается частный случай уравнения (2), когда Ω — ограниченное множество и A — оператор умножения на неотрицательную непрерывную функцию. Обозначим

$$c_1 = \max \left\{ \sup_{\Omega} |a_i(x)|, \sup_{\Omega} \left| \frac{\partial a_{ij}(x)}{\partial x_k} \right| \right\}.$$

Лемма 1. В случае $A \geq 0$ и при условии $c_1^2 n(1+n)^2 < 4c_0\delta$ в полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ существует резольвентный оператор $S_\lambda = (\lambda A + B)^{-1}$ с областью определения, вообще говоря, зависящей от λ . Семейство операторов S_λ равномерно ограничено.

Доказательство. Нетрудно видеть, что $\operatorname{Re}(Bu, u) =$

$$= \sum_{i,j} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, u \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_i} \right) + \sum_i \left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, u \right) + (cu, u) \right\} \geq$$

$$\geq \delta \sum_i \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, u \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_i} \right) + \sum_i \left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, u \right) \right\} + c_0 \|u\|^2.$$

В силу очевидного арифметического неравенства $|a||b| \leq \varepsilon |a|^2 + (4\varepsilon)^{-1} |b|^2$ ($\varepsilon > 0$) и условия на оценочные постоянные δ, c_0, c_1 существует $\varepsilon > 0$, что при $K = \max \{ \delta - (1+n)c_1\varepsilon, c_0 - n(1+n) \times (4\varepsilon)^{-1}c_1 \} > 0$ и $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ имеет место оценка $|((\lambda A + B)u, u)| \geq$

$$\geq \operatorname{Re}(Bu, u) \geq K \left(\sum_i \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2 + \|u\|^2 \right).$$

Отсюда, в частности, при

$\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ получается искомая оценка $\|S_\lambda v\| \leq K^{-1} \|v\|$.

Теорема 2. Если в условиях леммы 1 оператор A ограничен на L_2 , то при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ резольвента S_λ равномерно ограничена на L_2 , $\|S_\lambda\| \leq K^{-1}$. Если к тому же область Ω ограничена, то операторы S_t ($t \geq 0$) компактны и конечный спектр пучка $\lambda A + B$ состоит из изолированных собственных чисел конечной алгебраической кратности (с возможной точкой сгущения на бесконечности).

Доказательство. Доказательство сначала проводится для случая вещественного $\lambda = t$. Ограниченность S_t на L_2 вытекает из разрешимости при всяком $f \in L_2$ уравнения

$$(\lambda A + B)u = f. \quad (4)$$

Разрешимость доказывается по образцу рассуждений [6, гл. 3, § 9] с учетом того, что топология гильбертова пространства H , эквивалентного $D_{L_2}^1$, задается $(u, v)_H = t(Au, v)_{L_2} + \sum_{i,j} \left(a_{ji} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L_2} +$

$$+ \operatorname{Re} \left\{ \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, v \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_i} \right)_{L_2} + \sum_i \left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \right)_{L_2} + (cu, v)_{L_2} \right\},$$

причем $(u, v)_H = t(Au, v) + \operatorname{Re}(Bu, v)_{L_2}$ ($u \in D_B$), а также, что $V[u, v] = \operatorname{Im} \left\{ \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}, v \frac{\partial a_{ji}}{\partial x_i} \right)_{L_2} + \sum_i \left(a_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \right)_{L_2} + (cu, v)_{L_2} \right\}$ является ограниченной эр-

митовой формой в H , для которой $V[u, v] = \operatorname{Im}(Bu, v)_{L_2}$ ($u \in D_B$).

Невещественные λ учитываются с помощью леммы 1 и уравнения $u + (\lambda - \mu)R_\mu u = S_\mu f$ ($\mu \in \rho$), эквивалентного (4), решением которого является сумма ряда Неймана ($|\lambda - \mu| < \|A\|^{-1}K$). В случае ограниченной Ω свойства спектра пучка $\lambda A + B$ следуют из компактности S_t (а значит, R_t), которая устанавливается на основе теоремы Реллиха о выборе (ср. [6], гл. 3).

Следствие 1. Пусть выполнены условия теоремы 2 и конечен интеграл $\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \|S_\lambda \bar{f}(\lambda, x)\| d\lambda$, где $\bar{f}(\lambda, x)$ — преобразование Лапласа функции $f(t, x)$ и $\alpha > \max\{0, \sigma_f\}$. Тогда некоторое множество начальных векторов и соответствующих нормальных обобщенных решений уравнения (3) задается формулами

$$\begin{aligned} \dot{u}_0(x) &= (2\pi i)^{-1} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} [R_\lambda v(\lambda - \alpha - 1)^{-2} + S_\lambda \bar{f}] d\lambda; \\ u(x) &= (2\pi i)^{-1} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} [R_\lambda v(\lambda - \alpha - 1)^{-2} + S_\lambda \bar{f}] e^{\lambda t} d\lambda \end{aligned} \quad (5)$$

при всяком $v \in L_2$.

Рассмотрим частный случай уравнения (3), когда $B = -\Delta + c(x)$, где функция $c(x)$ вещественна. Можно показать, что S_t ($t \geq 0$) — самосопряженный оператор (ср. [6], гл. 3, § 2), а если A, B коммутируют на D_B (что эквивалентно коммутации S_t, A), то самосопряженным будет также оператор $R_t = S_t A$. В случае ограниченной области Ω оператор R_t компактен. Спектр $\{\lambda_i\}$ пучка $\lambda A + B$ лежит на полуоси $\lambda = \operatorname{Re} \lambda < 0$ и связан со спектром $\{\mu_i\}$ оператора R_t соотношением $\mu_i = (t - \lambda_i)^{-1}$, тогда как ортонормированные собственные функции $u_i(x)$ совпадают. Учитывая, что

$$\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} R_\lambda \quad (\lambda \neq \lambda_i), \quad R_\lambda^n v(x) = \sum_{i=1}^{\infty} (v(x), u_i(x)) u_i(x) (\lambda - \lambda_i)^{-n}.$$

Подставляем этот ряд при $n = 1$ в формулу для решений (5):

$$\begin{aligned} u(t, x) &= (2\pi i)^{-1} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \sum_i (v, u_i) u_i (\lambda - \lambda_i)^{-1} (\lambda - \alpha - 1)^{-2} e^{\lambda t} d\lambda + \\ &+ (2\pi i)^{-1} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{\lambda t} S_\lambda \bar{f} d\lambda. \end{aligned}$$

Для вычисления первого интеграла, предварительно поменяв порядок интегрирования и суммирования (в силу равномерной сходимости на прямой $\operatorname{Re} \lambda = \alpha$ соответствующего ряда из непрерывных функций), воспользуемся леммой Жордана и теоремой о вычетах. Таким образом,

$$u(t, x) = \sum_i (v, u_i) u_i e^{\lambda_i t} + (2\pi i)^{-1} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} S_\lambda \bar{f} e^{\lambda t} d\lambda, \quad (6)$$

где $v \in R_{\alpha+1}^2 L_2$. Нетрудно видеть, что ряд в формуле (6) дважды непрерывно дифференцируем, когда же $v \in R_{\alpha+1} L_2$, он непрерывно дифференцируем и при $v \in L_2$ непрерывен. Непосредственной под-

становкой в уравнение (2) функции $u(t, x)$ (6) при $v \in L_2$ можно убедиться, что она удовлетворяет этому уравнению и, следовательно, является обобщенным решением уравнения (3). Если же $v \in R_\lambda L_2$ (не зависит от $\lambda \in \rho_\lambda$), то при соответствующих требованиях на $f(t, x)$ функция $u(t, x)$ (6) является классическим решением. Тем самым доказана следующая

Теорема 3. Пусть область Ω ограничена и ограниченный оператор $A \geq 0$ коммутирует на D_B с оператором $B = -\Delta + c(x)$,

где $c(x)$ вещественна. Если конечен интеграл $\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \|S_\lambda \bar{f}\| d\lambda$, $\alpha >$

$> \max\{0, \sigma_f\}$, то формула (6) при $v \in L_2$ определяет нормальное обобщенное решение уравнения (3), тогда как начальным вектором является

$$u_0(x) = \sum_i (v, u_i) u_i + (2\pi i)^{-1} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} S_\lambda \bar{f} d\lambda.$$

Если же $f(t, x)$ — локально абсолютно непрерывная функция экспоненциального типа $h_1 < \alpha$ и конечен интеграл $\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \|\lambda S_\lambda \bar{f}\| d\lambda$, то те же самые формулы при $v \in R_\lambda L_2$ ($\lambda \neq \lambda_i$) определяют нормальное классическое решение и начальный вектор.

Замечание. Для однородного уравнения ($f(t, x) \equiv 0$) указанные в теореме 3 функции $u_0(x) = \sum_i (v, u_i) u_i$, $v \in L_2$, перечисляют все обобщенные решения, ибо в случае компактного самосопряженного оператора R_t ($t \geq 0$) множество их значений совпадает с подпространством $\overline{R_t L_2}$ — линейной замкнутой оболочкой $\{u_i\}$.

Список литературы: 1. Любич Ю. И. Классическое и локальное преобразование Лапласа в абстрактной задаче Коши. — Успехи мат. наук, 1966, 21, 3 (129), с. 3—51. 2. Руткас А. Г. Задача Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$. — Дифференц. уравнения, 1975, 11, № 11, с. 1996—2010. 3. Радбель Н. И. О начальном многообразии и диссипативности задачи Коши для уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = 0$. — Дифференц. уравнения, 1979, 15, № 6, с. 1142—1143. 4. Favini D. Laplace transform method for a class of degenerate evolution problems. — Rend. mat., 1979, 12, N 3—4, p. 511—536. 5. Власенко Л. А., Руткас А. Г. Исследование уравнения $Ax'(t) + Bx(t) = f(t)$ с помощью резольвенты пучка $\lambda A + B$. — X., 1982. Рукопись деп. в ВИНТИ 19.09.82, № 4885—82. Деп. 6. Мизохата С. Теория уравнений с частными производными. — М.: Мир, 1977. — 504 с.

Поступила в редколлегию 06.12.84.

Т. В. ГИРЯ, С. ОСУАЛА, А. Г. РУТКАС

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ
УРАВНЕНИЙ, НЕРАЗРЕШЕННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО
ПРОИЗВОДНОЙ

1. В работе рассматривается следующая стохастическая система уравнений, неразрешенных относительно производной:

$$Adx + Bx dt = [\sigma(x) + \sigma_0] dw + f dt \quad (1)$$

с начальным случайным условием

$$x(0, \omega) = x_0(\omega). \quad (2)$$

Наряду с уравнением (1) будем также рассматривать соответствующее детерминированное уравнение:

$$Adx + Bx dt = f dt. \quad (1')$$

Система (1) предполагается конечномерной и $\lambda A + B$ — регулярный пучок квадратных матриц порядка n .

В правой части (1) w — n -мерный винеровский процесс с нулевым средним и единичным корреляционным оператором:

$$M(w(t), \xi)(w(s), \eta) = t \wedge s (\xi, \eta), \quad (3)$$

$$\forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n,$$

где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в \mathbb{R}^n .

На коэффициент $\sigma(x)$ накладываются следующие условия: $\sigma(x)$ является борелевской оператор-функцией и при некотором K удовлетворяет условиям:

$$а) \text{ для всех } x, y \in \mathbb{R}^n, \|\sigma(x) - \sigma(y)\| \leq K \|x - y\|; \quad (4)$$

$$б) \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n, \|\sigma(x)\|^2 \leq K^2 (1 + \|x\|^2). \quad (5)$$

Для простоты изложения неслучайная функция f предполагается гладкой, $f \in C^\infty$.

По теореме о приведении [1, с.334] существуют невырожденные матрицы, приводящие пучок $\lambda A + B$ к каноническому квазидиагональному виду:

$$\lambda A_1 + B_1 = P(\lambda A + B)Q = (N^{u_1}, \dots, N^{u_s}, J + \lambda E), \quad (6)$$

$$N^{(u_i)} = E^{(u_i)} + \lambda H^{(u_i)}, \quad (7)$$

где первые s диагональных блоков соответствуют бесконечным элементарным делителям $\mu^{u_1} \dots \mu^{u_s}$ пучка $\lambda A + B$, а нормальная форма последнего диагонального блока $J + \lambda E$ однозначно определяется конечными элементарными делителями данного пучка.

В исходной системе сделаем замену

$$x = Qy \quad (8)$$

и умножим равенство (1) на P слева. В результате получим

$$A_1 dy + B_1 y dt = P [\sigma(Qy) + \sigma_0] dw + P f dt,$$

где $A_1 = PAQ$, $B_1 = PBQ$.

В соответствии с видом диагональных блоков (7) система дифференциальных уравнений (1) распадается на $s+1$ подсистем. Размерность i -го блока обозначим u_i :

$$\text{Ясно, что } n = \sum_{i=1}^{s+1} u_i.$$

Итак,

$$H^{(u_i)} dy^{(i)} + E^{(u_i)} y^{(i)} dt = \xi^{(i)} \quad i = 1, \dots, s; \quad (9)$$

$$dy^{(s+1)} + Jy^{(s+1)} dt = \xi^{(s+1)}, \quad (10)$$

где

$$y = \text{colon}(y^{(1)}, \dots, y^{(s+1)}),$$

$$y^{(i)} = \text{colon}(y_1^{(i)}, \dots, y_{u_i}^{(i)}),$$

$$\xi^{(i)} = P^{(u_i)} P [\sigma(Qy) + \sigma_0] dw + P^{(u_i)} P f dt.$$

Здесь $P^{(u_i)}$ определяется равенством $P^{(u_i)} y = y^{(i)}$, $\forall y$. Введем обозначения

$$P^{(\infty)} = \sum_{i=1}^s P^{(u_i)}, \quad P_{\infty} = QP^{(\infty)}Q^{-1}, \quad P_0 = E - P_{\infty}, \quad (11)$$

P_{∞} является проектором. Действительно,

$$P_{\infty}^2 = P_{\infty} P_{\infty} = QP^{(\infty)}Q^{-1}QP^{(\infty)}Q^{-1} = QP^{(\infty)}P^{(\infty)}Q^{-1} = QP^{(\infty)}Q^{-1} = P_{\infty}.$$

Начальный случайный вектор $x_0(\omega)$ предполагается независимым от винеровского процесса ω .

Пусть \bar{x} некоторое решение уравнения (1'). Положим $\eta(t) = P_{\infty} \bar{x}(t)$. Справедливо следующее

Предложение. Вектор $\eta(t)$ не зависит от выбора решения $\bar{x}(t)$ уравнения (1').

Доказательство. По определению $\eta(t) = P_{\infty} x(t) = QP^{(\infty)}\bar{y}(t)$, где $\bar{y}(t) = Q^{-1}\bar{x}(t)$ (8'), решение приведенной системы

$$H^{(u_i)} d\bar{y}^{(i)} + E^{(u_i)} \bar{y}^{(i)} dt = P^{(u_i)} P f dt, \quad i = 1, \dots, s, \quad (9')$$

$$a\bar{y}^{(s+1)} + J\bar{y}^{(s+1)} dt = P^{(u_{s+1})} P f dt. \quad (10')$$

Каждое уравнение в (9') имеет единственное решение. Но поскольку $P^{(\infty)}\bar{y}(t) = \sum P^{(u_i)}\bar{y}(t)$, то и $P^{(\infty)}\bar{y}(t)$ определяется однозначно. Следовательно, $\eta(t) = P_{\infty} \bar{x}(t) = QP^{(\infty)}\bar{y}(t)$ не зависит от выбора решения $x(t)$. Предложение доказано.

Определение. Решением системы (1) называется непрерывный случайный процесс $x(t, \omega)$ с непрерывными траекториями и удовлетворяющий (1) в смысле стохастических дифференциалов и начальному условию (2).

Сформулируем основные теоремы.

Теорема 1. Пусть для x_0 и $\sigma(x)$, кроме (4) и (5), выполнены условия

$$P_\infty QP [\sigma(\eta(t) + P_0 x) + \sigma_0] = 0 \quad x \in R^n, t \geq 0, \quad (12)$$

$$P_\infty x_0 = \eta(0). \quad (13)$$

Тогда решение задачи (1) — (2) существует и единственно. Следующая теорема указывает на необходимость условий (12), (13) для однозначной разрешимости (1) — (2).

Теорема 2. Если решение задачи (1) — (2) существует и единственно при всех x_0 , удовлетворяющих (13), то для $\sigma(x)$ и σ_0 дополнительно выполняется требование (12).

Докажем сначала теорему 2. Пусть $x(t, \omega)$ — решение (1) — (2). Сделаем замену (8). После умножения системы (1) слева на P она перейдет в систему (9), (10). Рассмотрим подробнее блоки (9), отвечающие бесконечным элементарным делителям, и возьмем произвольный, например, k -й блок:

$$H^{(u_k)} dy^{(k)} + E^{(u_k)} y^{(k)} dt = P^{(u_k)} P [\sigma(Qy) + \sigma_0] d\omega + P^{(u_k)} P f dt.$$

Это уравнение может быть записано в виде системы:

$$\begin{aligned} dy_2^{(k)} + y_1^{(k)} dt &= \xi_1^{(k)}, \\ dy_3^{(k)} + y_2^{(k)} dt &= \xi_2^{(k)}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} dy_{u_k}^{(k)} + y_{u_k-1}^{(k)} dt &= \xi_{u_k-1}^{(k)}, \\ y_{u_k}^{(k)} dt &= \xi_{u_k}^{(k)}, \end{aligned}$$

где $\xi^{(k)} = (\xi_1^{(k)}, \dots, \xi_{u_k}^{(k)})$.

Из свойств стохастических дифференциалов следует, что равенство

$$y_{u_k}^{(k)} dt = P_{u_k}^{(u_k)} P [\sigma(Qy) + \sigma_0] d\omega + P^{(u_k)} P f(t) dt, \quad (15)$$

имеет место лишь в случае

$$y_{u_k}^{(k)} = P^{(u_k)} P f, \quad (16)$$

$$P_{u_k}^{(u_k)} P [\sigma(Qy(t)) + \sigma_0] d\omega = 0. \quad (17)$$

Так как винеровский процесс ω имеет единичный корреляционный оператор, то равенство (17) эквивалентно:

$$P_{u_k}^{(u_k)} P [\sigma(Qy(t)) + \sigma_0] \xi = 0, \quad \forall \xi \in R^n. \quad (18)$$

Подставляя значения $y_{u_k}^{(k)} = P^{(u_k)} P f$ в остальные уравнения системы (14) и повторяя проведенные выкладки для $y_l^{(k)}$, $l = u_k - 1, \dots, 1$ аналогично (16), (17), получим, что

$$P^{(u_k)} P [\sigma(Qy(t)) + \sigma_0] \xi = 0. \quad (19)$$

Из (19) вытекает, что $y^{(k)}$ в действительности является решением k -го уравнения детерминированной системы (9'), т. е.

$$y^{(k)}(t) = \bar{y}^{(k)}(t). \quad (20)$$

Ввиду произвольности выбора блока в системе (9) аналогично (19), (20) получим соответствующие равенства и для остальных блоков.

Итак,

$$y^{(i)}(t) \equiv \bar{y}^{(i)}(t) \quad i = 1, \dots, s,$$

$$P^{(\omega_i)} P [\sigma(Qy) + \sigma_0] \xi = 0, \quad \forall \xi \in R^n.$$

Эти равенства в обозначении (11) примут вид

$$P_\infty x(t) = QP^{(\infty)} \bar{y}(t) = \eta(t), \quad (21)$$

$$P_\infty QP [\sigma(x(t)) + \sigma_0] \xi = 0, \quad \forall \xi \in R^n, \quad (22)$$

Полагая $t = 0$ в (21), получим

$$P_\infty x(0) = P_\infty x_0 = \eta(0). \quad (23)$$

Из (21) и (22) следует, что

$$P_\infty QP (\sigma(\eta(t) + P_0 x(t)) + \sigma_0) \xi = 0, \quad \forall \xi \in R^n. \quad (24)$$

Заметим, что если $P_0 x_0$ пробегает все $X_0 = P_0 X$, то $P_0 x(t)$ также пробегает X_0 . Поэтому из (24) следует (12).

Доказательство теоремы 1. Пусть (12), (13) выполнены. Приведем систему (1) вновь к каноническому виду (9), (10).

Из условия (12) следует, что решение системы (9) является решением системы (9').

Подставим найденные значения $P^{(\infty)}$, y в систему (10). Полученное стохастическое уравнение относительно $\dot{y}^{(s+1)}$ по теореме 1 [2, с. 469] имеет единственное решение. Теорема 1 доказана.

Рассмотрим некоторые частные случаи системы 1.

1. Однородная система $f = 0$. В этом случае $\eta(t) \equiv 0$ и, следовательно, (12), (13) примут вид

$$P_\infty QP\sigma(P_0 x) + P_\infty QP\sigma_0 = 0, \quad \forall x \in R^n, \quad (25)$$

$$P_\infty x_0 = 0. \quad (26)$$

2) $\sigma(x)$ линейный по x , тогда условие (12) примет вид:

$$P_\infty QP\sigma_0 + P_\infty QP\sigma(\eta(t)) + P_\infty QP\sigma(P_0 x) = 0, \quad \forall x \in R^n, t \geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$P_\infty QP\sigma(\eta(t)) = -P_\infty QP\sigma_0, \quad (27)$$

$$P_\infty QP\sigma(P_0 x) = 0, \quad \forall x \in R^n. \quad (28)$$

Таким образом видно, что в случае линейной однородной системы на σ необходимо, кроме требования (25) наложить условия (27).

3) Пусть $f(t)$ в правой части (1) удовлетворяет условию: вектор $\eta(t) = P_\infty QP f(t)$ постоянный.

Тогда условие (12) примет вид $P_{\infty} P Q [\sigma (\eta + P_0 x) + \sigma_0] = 0$,
 $P_{\infty} x_0 = \eta$.

Для доказательства достаточно показать, что вектор $\eta(t)$ равен η . Рассмотрим подробно один из блоков в системе (9);

$$\begin{aligned} dy_2^{(k)} + y_1^{(k)} dt &= (P^{(uk)} P f dt)_1, \\ dy_3^{(k)} + y_2^{(k)} dt &= (P^{(uk)} P f dt)_2, \\ y_{uk}^{(k)} dt &= (P^{(uk)} P f dt)_{uk}. \end{aligned} \quad (29)$$

Ввиду равенства $P_{\infty} = Q P^{(\infty)} Q^{-1}$ получим, что $P^{(\infty)} P f$ — постоянный вектор.

Таким образом, правая часть в (29) постоянна.

Решением системы (29) является постоянный вектор $y^{(k)} = P^{(uk)} P f$.

Следовательно, и $\eta(t) = P_{\infty} Q P f$ не зависит от t .

2. Систему (1), будем предполагать линейной. Применим к (1) оператор математического ожидания. Для первых моментов — $m_i = M x_i$ получим уравнение: $A \dot{m} + B m = f$, где $m = (m_1, \dots, m_n)$.

Для вывода уравнения на вторые моменты применим формулу и для произведения $a_{ik} x^k(t) a_{jk'} x^{k'}(t)$ (суммирование по повторяющимся индексам), где здесь и далее

$$A = (a_{ik}), B = (b_{ik}), \sigma = (\sigma_{ijk}), \sigma_0 = (\sigma_{oik}).$$

$$\begin{aligned} a_{ik} x^k(t) a_{jk'} x^{k'}(t) &= a_{ik} x^k(0) a_{jk'} x^{k'}(0) + \\ &+ \int_0^t [-a_{ik} x^k(\tau) b_{jk'} x^{k'}(\tau) - b_{ik} x^k(\tau) a_{jk'} x^{k'}(\tau) + \\ &+ a_{ik} x^k(\tau) f_j(\tau) + f_i(\tau) a_{jk'} x^{k'}(\tau) + (\sigma_{ikm} x^k(\tau) + \sigma_{oim}) \times \\ &\times (\sigma_{jk'm} x^{k'}(\tau) + \sigma_{ojm})] d\tau + \dots, \end{aligned}$$

где троеточием обозначены стохастические слагаемые.

После применения оператора математического ожидания к обеим частям этого равенства стохастические слагаемые исчезнут. В итоге получим

$$\begin{aligned} a_{ik} M x^k(t) x^{k'}(t) a_{jk'} &= a_{ik} M x_0^k x_0^{k'} a_{jk'} + \int_0^t -a_{ik} M x^k(\tau) \times \\ &\times x^{k'}(\tau) b_{jk'} - b_{ik} M x^k(\tau) x^{k'}(\tau) a_{jk'} + a_{ik} f_j M x^k(\tau) + \\ &+ f_i a_{jk'} M x^{k'}(\tau) + \sigma_{ikm} M x^k(\tau) x^{k'}(\tau) \sigma_{jk'm} + \\ &+ \sigma_{ikm} M x^k(\tau) \sigma_{ojm} + \sigma_{oim} \sigma_{jk'm} M x^{k'}(\tau) + \sigma_{oim} \sigma_{ojm} d\tau. \end{aligned} \quad (30)$$

Введем обозначения $M(t) = M x^k(t) x^{k'}(t)$.

Тогда (30) в матричной форме примет вид

$$AM(t)A^* = AM(0)A + \int_0^t \{-AM(\tau)B^* - BM(\tau)A^* + \\ + Am(\tau)f + fm(\tau)A^* + \text{sp}M(\tau)\sigma^* + \sigma m(\tau)\sigma_0^* + \sigma_0 m(\tau)\sigma^* + \\ + \sigma_0\sigma_0^*\} dt,$$

или в дифференцированной форме

$$AMA^* + AMB^* + BMA^* = Amf + fmA^* + \\ + \text{sp}M\sigma^* + \sigma m\sigma_0^* + \sigma_0 m\sigma^* + \sigma_0\sigma_0^*. \quad (31)$$

Здесь

$$Amf = a_{ik} m^k f_j; \quad fmA^* = f_i a_{jk} m^{k'}; \\ \text{sp}M\sigma^* = \sigma_{ikm} M^{kk'} \sigma_{j k' m}.$$

Список литературы: 1. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.—576 с. 2. Гихман Н. И., Скороход А. В. Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.—568 с.

Поступила в редколлегию 14.11.84.

УДК 681.51:519.8

В. В. БАРАНОВ, канд. техн. наук, Н. В. ТРЕТЬЯКОВА

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ В МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССАХ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ СТРАТЕГИЯМИ

В работах [1—4] развиты методы оптимальных решений в стохастических системах, описываемых управляемой марковской цепью (марковским процессом принятия решений) с однородной переходной функцией и стационарной стратегией управления. Однако существует широкий класс систем, в которых переходная функция является неоднородной (зависит от времени), а оптимальная стратегия заведомо не является стационарной. Из класса таких систем наибольший практический интерес представляют системы, в которых переходная функция q_t удовлетворяет условию периодичности: $q_t = q_{t+T}$, $t = 1, 2, \dots$; $T > 1$, где T — период. Понятно, что в таком случае оптимальная стратегия также будет периодической.

Типичным примером управляемых систем с периодическими стратегиями является водохранилище, в котором оптимальное управление по расходу воды зависит от сезонных по времени года колебаний притока воды.

Оказывается, что оптимизационные методы, развитые в [1, 2], не допускают возможности решения задач с периодическими стратегиями, поскольку они основаны на построении улучшений в пространстве стационарных стратегий. Методы же, развитые в [3, 4],

основаны на построении улучшений в пространстве нестационарных стратегий и тем самым допускают принципиальную возможность построения оптимальной периодической стратегии. Однако для реализации такой возможности в виде конкретных оптимизационных процедур требуется получение новых результатов. В данной работе развивается метод последовательного усреднения для отыскания оптимальной периодической стратегии, предложенный [4] для задач со стационарными стратегиями.

Постановка задачи. Марковский процесс принятия решений задается набором объектов $\{X, Y, \sigma, q_t, \omega_t\}$, где X — множество состояний; Y — множество управлений (альтернатив, решений и т. д.); σ — стратегия принятия решений (выбора управлений); $q_t, t \in \{1, 2, \dots\}$ — переходная функция, задающая переходные вероятности на $X \times Y \times X$; ω_t — функция выигрышей на $X \times Y$.

Будем предполагать, что множества X и Y конечны, а функции q_t, ω_t удовлетворяют условию периодичности:

$$q_t = q_{t+T}, t \in \{1, 2, \dots\}; \quad (1)$$

$$\omega_t = \omega_{t+T}, t \in \{1, 2, \dots\}, \quad (2)$$

где T — фиксированная величина из множества $\{2, 3, \dots\}$, определяющая период.

Образование $\pi: X \rightarrow Y$ назовем решающей функцией. Последовательность решающих функций $\{\pi_1, \pi_2, \dots\} = \sigma$ является стратегией принятия решений. Стратегия σ определяет правило выбора управлений $y \in Y$ в каждый момент времени $t = 1, 2, \dots$. Стратегия $\sigma = \{\pi_1, \pi_2, \dots\}$ является периодической, если решающая функция π_t удовлетворяет условию $\pi_t = \pi_{t+T}, t = 1, 2, \dots; T > 1$. Стратегия вида $\{\pi, \pi, \dots\} = \pi^\infty$ является стационарной.

Периодической стратегии σ поставим в соответствие математическое ожидание среднего в единицу времени выигрыш вида

$$\varphi(\sigma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} M_x^\sigma \sum_{t=1}^n \omega_t(x_t, y_t), x \in X.$$

Здесь x — начальное состояние из множества X ; $\omega_t(x_t, y_t)$ — выигрыш, начисляемый в момент t за применение управления $y_t = \pi_t(x_t)$ в состоянии $x_t \in X$. Математическое ожидание берется по мере, порождаемой переходной функцией $q_t(\cdot | x, \pi_t(x)), \pi_t(x) = y \in Y, x \in X$.

Стратегию σ^* назовем оптимальной, если $\varphi(\sigma^*) \geq \varphi(\sigma)$ для любой стратегии σ .

Задача состоит в отыскании оптимальной стратегии σ^* при наличии ограничений вида (1), (2), определяющих ее периодический характер.

Будем рассматривать эту задачу в предположении, что при любой стратегии σ множество X образует один эргодический класс

(возвратных) состояний. Это предположение сужает класс рассматриваемых систем, однако оно отвечает наиболее распро-транному и существенно важному классу практических задач.

Оптимизационная схема последовательных усреднений. Пусть V — пространство векторов размерности $|X|$. Нуль в этом пространстве обозначим через $\bar{0}$, а единицу — через $\bar{1}$.

Введем в V норму, полагая $\|v\| = \max_x |v(x)|$. Заметим, что каждой паре (x, y) , $x \in X$, $y \in Y$ и моменту $t \in \{1, 2, \dots\}$ отвечает распределение $q_t(\cdot | x, y)$ на X . Используя это распределение, определим оператор $Q_t(y)$, действующий на векторы $v \in V$ по правилу

$$[Q_t(y)v](x) = \sum_{z \in X} v(z) q_t(z | x, y), \quad x \in X.$$

Если при этом управление $y \in Y$ «выбирается» с помощью решающей функции π (т. е. $y = \pi(x)$), то этот оператор обозначим $Q_t(\pi)$.

Напомним, что периодическая стратегия $\sigma = \{\pi_1, \pi_2, \dots\}$ удовлетворяет условию $\pi_t = \pi_{t+T}$, где $T > 1$. Это означает, что она составлена из повторяющегося набора решающих функций вида $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_T) \equiv \delta$. Понятно тогда, что периодическую стратегию можно представить в виде $\sigma = \{\delta, \delta, \dots\} = \delta^\infty$, т. е. в этом смысле периодическая стратегия является стационарной. Данное обстоятельство и определяет возможность построения оптимизационной процедуры для отыскания оптимальной периодической стратегии.

Для обоснования такой процедуры введем в пространстве V ряд операторов. Прежде всего определим семейство операторов $F_t(y)$, $y \in Y$, зависящих от временного параметра $t = 1, 2, \dots$ следующим способом:

$$F_t(y)v(x) \equiv \frac{1}{t} w_t(x, y) + \frac{t-1}{t} Q_t(y)v(x), \quad x \in X.$$

Если при этом управление $y \in Y$ «выбирается» с помощью решающей функции π_t , то этот оператор обозначим $F_t(\pi_t)$ и представим в виде

$$F_t(\pi_t)v \equiv \frac{1}{t} w_t(\pi_t) + \frac{t-1}{t} Q_t(\pi_t)v,$$

где $w_t(\pi_t)$ — вектор с компонентами

$$w_t(\pi_t)(x) = w_t(x, \pi_t(x)) = w_t(x, y), \quad x \in X, \quad y = \pi_t(x).$$

Исходя теперь из условия периодичности, доопределим эти операторы, полагая

$$F_{nT-k}(\pi_{k+1})v \equiv \frac{1}{nT-k} w_{k+1}(\pi_{k+1}) + \frac{nT-k-1}{nT-k} Q_{k+1}(\pi_{k+1})v,$$

где $k = 0, 1, \dots, T-1$; $n = 1, 2, \dots$

Пусть теперь выделен некоторый набор решающих функций $\delta = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_T)$, отвечающий периоду T . Введем семейство операторов $F_n^*(\delta)$, зависящих от данного набора δ и временного параметра $n = 1, 2, \dots$, полагая

$$F_n^*(\delta) v \equiv F_{nT}(\pi_1) \cdot F_{nT-1}(\pi_2) \cdot \dots \cdot F_{nT-(T-1)}(\pi_T) v.$$

Расписывая определение $F_{nT-k}(\pi_{k+1})$, получаем для $F_n^*(\delta)$ следующее представление:

$$F_n^*(\delta) v = \frac{1}{nT} \sum_{k=0}^{T-1} \prod_{t=0}^k Q_t(\pi_t) \omega_{k+1}(\pi_{k+1}) + \frac{n-1}{n} \prod_{t=1}^T Q_t(\pi_t) v,$$

где $Q_0 = I$ — единичный оператор.

Отсюда, обозначая

$$\omega(\delta) = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \prod_{t=0}^k Q_t(\pi_t) \omega_{k+1}(\pi_{k+1}); \quad Q(\delta) = \prod_{t=0}^T Q_t(\pi_t),$$

получаем

$$F_n^*(\delta) v = \frac{1}{n} \omega(\delta) + \frac{n-1}{n} Q(\delta) v. \quad (3)$$

Наконец, введем операторы вида

$$U_t v(x) \equiv \max_y F_t(y) v(x), \quad x \in X.$$

В векторном представлении они определяются как

$$U_t v \equiv \max_{\pi} F_t(\pi) v.$$

Далее положим $U_n^* v \equiv \max_{\delta} F_n^*(\delta) v$. Свойства введенных операторов описываются следующей леммой.

Лемма 1. 1) Операторы $F_t(\pi)$, $F_n^*(\delta)$, U_t , U_n^* монотонны. 2) Имеет место представление

$$U_n^* v = U_{nT} \cdot U_{nT-1} \cdot \dots \cdot U_{nT-(T-1)} v. \quad (4)$$

3) Операторы $F_t(\pi)$, $F_n^*(\delta)$, U_t , U_n^* являются сжимаем.

Доказательство. 1) Монотонность операторов $F_t(\pi)$, U_t установлена ранее [4]. Монотонность $F_n^*(\delta)$, U_n^* очевиден образом следует из монотонности соответственно $F_t(\pi)$, U_t .

2) Поскольку рассматривается конечномерный случай, то найдется набор $\delta^* = (\pi_1^*, \dots, \pi_T^*)$ такой, что

$$\begin{aligned} U_n^* v &= \max_{\delta} F_n^*(\delta) v = \max_{\pi_1, \dots, \pi_T} [F_{nT}(\pi_1) \cdot F_{nT-1}(\pi_2) \cdot \dots \cdot F_{nT-(T-1)}(\pi_T)] v = \\ &= F_{nT}(\pi_1^*) \cdot F_{nT-1}(\pi_2^*) \cdot \dots \cdot F_{nT-(T-1)}(\pi_T^*) v = F_n^*(\delta^*) v. \end{aligned}$$

При этом поскольку здесь максимум берется по всевозможным наборам $\delta = (\pi_1, \dots, \pi_T)$, то очевидным образом выполняется неравенство

$$\begin{aligned} U_n^* v &= \max_{\pi_1, \dots, \pi_T} [F_{nT}(\pi_1) \cdot F_{nT-1}(\pi_2) \cdot \dots \cdot F_{nT-(T-1)}(\pi_T)] v \geq \\ &\geq \max_{\pi_1} F_{nT}(\pi_1) \max_{\pi_2} F_{nT-1}(\pi_2) \cdot \dots \cdot \max_{\pi_T} F_{nT-(T-1)}(\pi_T) v = \\ &= U_{nT} \cdot \dots \cdot U_{nT-(T-1)} v. \end{aligned}$$

С учетом же монотонности операторов U_t имеют место неравенства

$$\begin{aligned} U_{nT} \cdot U_{nT-1} \cdot \dots \cdot U_{nT-(T-1)} v &= U_{nT} \cdot U_{nT-1} \cdot \dots \cdot U_{nT-(T-2)} \times \\ \times \max_{\pi_T} F_{nT-(T-1)}(\pi_T) v &\geq U_{nT} \cdot U_{nT-1} \cdot \dots \cdot U_{nT-(T-2)} F_{nT-(T-1)} \times \\ \times (\pi_T^*) v &\geq \dots \geq F_{nT}(\pi_1^*) \cdot F_{nT-1}(\pi_2^*) \cdot \dots \cdot F_{nT-(T-1)}(\pi_T^*) v = U_n^* v. \end{aligned}$$

Вместе полученные неравенства дают равенство (4).

3) Сжатие $F_t(\pi)$, U_t установлено в [4]. Сжатие $F_n^*(\delta)$ теперь очевидным образом следует из сжатия $F_t(\pi)$. Сжатие U_n^* с учетом представления (4) доказывается так же, как и сжатие U_t , в [4].

Пусть $\delta^\infty = (\delta, \delta, \dots)$ — периодическая стратегия, порождаемая набором $\delta = (\pi_1, \dots, \pi_T)$. Рассмотрим векторы φ_t^δ , $t = 1, 2, \dots$ с компонентами вида

$$\varphi_t^\delta(x) = \frac{1}{t} M_x^\delta \sum_{k=1}^t \omega_k(x_k, y_k), \quad x \in X.$$

Очевидно, $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t^\delta = \varphi(\delta^\infty)$. Поскольку математическое ожидание

здесь берется по мере, порождаемой переходными вероятностями задаваемыми матрицами $Q_1(\pi_1), \dots, Q_T(\pi_T)$, нетрудно проследить, что вектор φ_t^δ можно представить как

$$\varphi_t^\delta = \frac{1}{t} \sum_{k=0}^{t-1} \prod_{i=0}^k Q_i(\pi_i) \omega_{k+1}(\pi_{k+1}),$$

где $Q_0 = I$ — единичный оператор.

Положим теперь $t = nT$, $n = 1, 2, \dots$. При $t = T$ имеем

$$\varphi_{t=T}^\delta = \varphi_T^\delta = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{T-1} \prod_{i=0}^k Q_i(\pi_i) \omega_{k+1}(\pi_{k+1}) = \omega(\delta) = \varphi_1(\delta).$$

Здесь использовано обозначение $\omega(\delta)$, введенное при определении операторов $F_n^*(\delta)$ в (3). Далее при $t = 2T$ получаем

$$\begin{aligned} \Phi_{2T}^\delta &= \frac{1}{2T} \sum_{k=0}^{2T-1} \prod_{i=0}^k Q_i(\pi_i) \omega_{k+1}(\pi_{k+1}) = \frac{1}{2T} \left[\sum_{k=0}^{T-1} \prod_{i=0}^k Q_i(\pi_i) \omega_{k+1}(\pi_{k+1}) + \right. \\ &+ \left. \prod_{i=1}^T Q_i(\pi_i) \sum_{k=0}^{T-1} \prod_{i=0}^k Q_i(\pi_i) \omega_{k+1}(\pi_{k+1}) \right] = \frac{1}{2} [\omega(\delta) + Q(\delta) \omega(\delta)] = \varphi_2(\delta). \end{aligned}$$

Наконец, при произвольном n имеем

$$\begin{aligned} \Phi_{nT}^\delta &= \frac{1}{nT} \sum_{k=0}^{nT-1} \prod_{i=0}^k Q_i(\pi_i) \omega_{k+1}(\pi_{k+1}) = \frac{1}{n} [\omega(\delta) + Q(\delta) \omega(\delta) + \dots + \\ &+ Q^{n-1}(\delta) \omega(\delta)] = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(\delta) \omega(\delta) = \varphi_n(\delta). \end{aligned} \quad (5)$$

Переходя в (5) к пределу, получаем

$$\varphi(\delta^\infty) = \lim_{l \rightarrow \infty} \Phi_l^\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi_{nT}^\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(\delta) \omega(\delta). \quad (6)$$

Лемма 2. Существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\delta) = \varphi(\delta^\infty)$, причем вектор $\varphi(\delta^\infty)$ имеет одинаковые компоненты.

Доказательство. Поскольку множество состояний образует один эргодический класс и матрица $Q(\delta)$ определяет вероятности переходов на этом множестве, то, как известно [5], существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(\delta) = Q^*(\delta),$$

где матрица $Q^*(\delta)$ имеет одинаковые строки. Поэтому знак нижнего предела в (6) можно опустить. Тогда окончательно получаем

$$\varphi(\delta^\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\delta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(\delta) \omega(\delta) = Q^*(\delta) \omega(\delta).$$

Поскольку строки матрицы $Q^*(\delta)$ одинаковы, то вектор $\varphi(\delta^\infty)$ имеет одинаковые компоненты, т. е. $\varphi(\delta^\infty)(x) = \text{const}$. Лемма доказана.

С целью подчеркнуть, что вектор $\varphi(\delta^\infty)$ имеет одинаковые компоненты, будем использовать обозначение $\varphi(\delta^\infty) \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — векторная единица; $\varphi(\delta^\infty)$ — значение компоненты.

Заметим, что полученные согласно (5) векторы $\varphi_n(\delta)$ можно определить с помощью рекуррентного соотношения

$$\varphi_n(\delta) = F_n^*(\delta) \varphi_{n-1}(\delta), \quad n = 1, 2, \dots,$$

где операторы $F_n^*(\delta)$ определены в (3). Действительно,

$$\begin{aligned} \varphi_n(\delta) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} Q^k(\delta) \omega(\delta) = \frac{1}{n} \left\{ \omega(\delta) + \sum_{k=1}^{n-1} Q^k(\delta) \omega(\delta) \right\} = \\ &= \frac{1}{n} \omega(\delta) + \frac{n-1}{n} Q(\delta) \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} Q^k(\delta) \omega(\delta) \right\} = \\ &= \frac{1}{n} \omega(\delta) + \frac{n-1}{n} Q(\delta) \varphi_{n-1}(\delta) = F_n^*(\delta) \varphi_{n-1}(\delta). \end{aligned}$$

Понятно также, что рассматриваемое рекуррентное соотношение равносильно представлению $\varphi_n(\delta) = F_n^*(\delta) F_{n-1}^*(\delta) \dots F_1^*(\delta) \varphi_0$, где φ_0 — произвольный вектор (для определенности положим $\varphi_0 = \bar{0}$). Введем обозначения

$$\bar{\varphi}_n(\delta) = \max_x \varphi_n(\delta)(x), \quad \underline{\varphi}_n(\delta) = \min_x \varphi_n(\delta)(x).$$

Лемма 3. Пусть δ^∞ — периодическая стратегия и векторы $\varphi_n(\delta)$ получены согласно (5). Тогда величины $\bar{\varphi}_n(\delta)$ и $\underline{\varphi}_n(\delta)$ образуют соответственно невозрастающую и неубывающую последовательности, сходящиеся к одному пределу.

Доказательство. Заметим, что из представления

$$\varphi_{n+1}(\delta) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n Q^k(\delta) \omega(\delta)$$

следует соотношение вида

$$\varphi_{n+1}(\delta) = \frac{n}{n+1} \varphi_n(\delta) + \frac{1}{n+1} Q^n(\delta) \omega(\delta). \quad (7)$$

Теперь учтем, что оператор $Q(\delta)$ порождается стохастической матрицей. Поэтому нетрудно видеть, что имеют место цепочки неравенств:

$$\begin{aligned} \max_x \omega(\delta)(x) &\geq \max_x Q(\delta) \omega(\delta)(x) \geq \dots \geq \max_x Q^n(\delta) \omega(\delta)(x) \geq \dots, \\ \min_x \omega(\delta)(x) &\leq \min_x Q(\delta) \omega(\delta)(x) \leq \dots \leq \min_x Q^n(\delta) \omega(\delta)(x) \leq \dots \end{aligned}$$

Поскольку $\varphi_n(\delta)(x)$ представляет собой среднее арифметическое величин вида $Q^k(\delta) \omega(\delta)(x)$, $k = 0, 1, \dots, T-1$, у которых с ростом k максимумы не возрастают, а минимумы не убывают, то

$$\bar{\varphi}_n(\delta) \geq \max_x Q^{n-1}(\delta) \omega(\delta)(x), \quad \underline{\varphi}_n(\delta) \leq \min_x Q^{n-1}(\delta) \omega(\delta)(x).$$

Тем более справедливы неравенства

$$\bar{\varphi}_n(\delta) \geq \max_x Q^n(\delta) \omega(\delta)(x); \quad (8)$$

$$\underline{\varphi}_n(\delta) \leq \min_x Q^n(\delta) \omega(\delta)(x). \quad (9)$$

Теперь, используя представление (7) и неравенство (8), получаем

$$\bar{\varphi}_{n+1}(\delta) \leq \frac{n}{n+1} \bar{\varphi}_n(\delta) + \frac{1}{n+1} \max_x Q^n(\delta) \omega(\delta) \leq \bar{\varphi}_n(\delta).$$

Отсюда следует, что $\bar{\varphi}_n(\delta)$ не возрастают.

Если воспользоваться представлением (7) и неравенством (9), то имеем

$$\underline{\varphi}_{n+1}(\delta) \geq \frac{n}{n+1} \underline{\varphi}_n(\delta) + \frac{1}{n+1} \min_x Q^n(\delta) \omega(\delta) \geq \underline{\varphi}_n(\delta).$$

Таким образом, $\underline{\varphi}_n(\delta)$ не убывают.

Поскольку векторы $\varphi_n(\delta)$ сходятся при $n \rightarrow \infty$ к вектору с одинаковыми компонентами, то ясно, что величины $\bar{\varphi}_n(\delta)$ и $\underline{\varphi}_n(\delta)$ имеют одинаковые пределы, равные $\varphi(\delta^\infty)$. Лемма доказана.

Следствие 1. Для всех $n = 1, 2, \dots$ имеет место неравенство

$$\underline{\varphi}_n(\delta) < \varphi(\delta^\infty) < \bar{\varphi}_n(\delta).$$

Доказательство. Поскольку $\varphi_n(\delta) = F_n^*(\delta) F_{n-1}(\delta)$ и оператор $F_n^*(\delta)$ является сжатием, то $\varphi_n(\delta) \neq \varphi_{n-1}(\delta)$, $n = 1, 2, \dots$ и $\varphi_n(\delta) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\delta) = \varphi(\delta^\infty) \mathbf{1}$, $n = 1, 2, \dots$ Отсюда следует, что $\|\varphi_n(\delta) - \varphi(\delta^\infty) \mathbf{1}\| \neq 0$, $n = 1, 2, \dots$

Теперь заметим, что утверждение леммы 3 не зависит от предположений в векторе $\omega(\delta)$. Поэтому без ограничения общности можно полагать $\omega(\delta) > \bar{0}$ либо $\omega(\delta) < \bar{0}$.

Пусть $\omega(\delta) > \bar{0}$. Очевидно, в таком случае и $\varphi_n(\delta) > \bar{0}$. Но тогда

$$\|\varphi_n(\delta)\| = \max_x |\varphi_n(\delta)(x)| = \max_x \varphi_n(\delta)(x) = \bar{\varphi}_n(\delta). \quad (10)$$

Поскольку $\|\varphi_n(\delta) - \varphi(\delta^\infty) \mathbf{1}\| \neq 0$, то и $\|\varphi_n(\delta)\| \neq \|\varphi(\delta^\infty) \mathbf{1}\|$. Отсюда и из (10) следует, что $\bar{\varphi}_n(\delta) \neq \varphi(\delta^\infty)$. Учитывая, наконец, что $\bar{\varphi}_n(\delta)$ не возрастают и сходятся к $\varphi(\delta^\infty)$, получаем

$$\varphi(\delta^\infty) < \bar{\varphi}_n(\delta), \quad n = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Полагая теперь $\omega(\delta) < \bar{0}$, получаем, что $\varphi_n(\delta) < \bar{0}$. Тогда

$$\|\varphi_n(\delta)\| = \max_x |\varphi_n(\delta)(x)| = |\min_x \varphi_n(\delta)(x)| = |\underline{\varphi}_n(\delta)|.$$

Поскольку $\|\varphi_n(\delta) - \varphi(\delta^\infty) \mathbf{1}\| \neq 0$, то и $\|\varphi_n(\delta)\| \neq |\varphi(\delta^\infty)|$, следовательно, $|\varphi_n(\delta)| \neq |\varphi(\delta^\infty)|$. Отсюда, учитывая, что $\varphi_n(\delta)$ не убывает, получаем, $\varphi_n(\delta) < \varphi(\delta^\infty)$, $n = 1, 2, \dots$. Вместе с (11) это доказывает требуемое.

Рассмотрим теперь произвольную стратегию $\delta_1^n = (\delta_n, \delta_{n-1}, \dots, \delta_1)$, составленную из различных наборов $\delta_k = (\pi_1^k, \dots, \pi_T^k)$. Сопоставим такой стратегии вектор $\varphi_n(\delta_1^n)$, определенный соотношением

$$\varphi_n(\delta_1^n) = F_n^*(\delta_n) F_{n-1}^*(\delta_{n-1}) \dots F_1^*(\delta_1) \varphi_0.$$

Это равносильно рекуррентному соотношению

$$\varphi_n(\delta_1^n) = F_n^*(\delta_n) \varphi_{n-1}(\delta_1^{n-1}). \quad (12)$$

Векторы $\varphi_n(\delta_1^n)$, определяемые таким рекуррентным соотношением, будем называть $\{F_n^*\}$ — порожденными.

Заметим, что вектор $\varphi_n(\delta_1^n)$ представляет собой вектор средних выигрышей для произвольной стратегии δ_1^n . Действительно, расписывая последовательно определение операторов F_n^* в (12), получаем

$$\begin{aligned} \varphi_n(\delta_1^n) &= \frac{1}{n} \omega(\delta_n) + \frac{n-1}{n} Q(\delta_n) \left[\frac{1}{n-1} \omega(\delta_{n-1}) + \frac{n-2}{n-1} Q(\delta_{n-1}) [\dots] \right] = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j=1}^k Q(\delta_{n+1-j}) \omega(\delta_{n-k}) = \frac{1}{n} M^{\delta_1^n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(\delta_{n-k}), \end{aligned}$$

где $\prod_{j=1}^0 Q(\delta_{n+1-j}) \equiv I$ — единичный оператор.

Понятно, что подобные векторы $\varphi_n(\delta_1^n)$ можно определять также с помощью операторов U_n^* , полагая

$$\varphi_n(\hat{\delta}_1^n) = U_n^* U_{n-1}^* \dots U_1^* \varphi_0, \quad (13)$$

где $\hat{\delta}_1^n = (\hat{\delta}_n, \hat{\delta}_{n-1}, \dots, \hat{\delta}_1)$, а $\hat{\delta}_k$ — набор решающих функций такой, что

$$U_k^* \varphi_{k-1}(\hat{\delta}_1^{k-1}) = F_k^*(\hat{\delta}_k) \varphi_{k-1}(\hat{\delta}_1^{k-1}) = \max_{\delta} F_k^*(\delta) \varphi_{k-1}(\hat{\delta}_1^{k-1}).$$

Векторы $\varphi_n(\hat{\delta}_1^n)$, наборы $\hat{\delta}_n$ и стратегии $\hat{\delta}_1^n$, получаемые с помощью соотношения (13) будем называть $\{U_n^*\}$ -порожденными. Также будем называть и периодическую стратегию $\hat{\delta}_n^\infty$, порожденную соответствующим набором $\hat{\delta}_n$.

Лемма 4. $\{U_n^*\}$ — порожденные векторы $\varphi_n(\hat{\delta}_1^n)$, $n = 1, 2, \dots$ удовлетворяют неравенству

$$\varphi_n(\hat{\delta}_1^n) \geq \varphi_n(\delta_1^n) \text{ для всех } \delta_1^n. \quad (14)$$

Доказательство. Пусть $n = 1$. Тогда имеем

$$\varphi_1(\hat{\delta}_1) = U_1^* \varphi_0 = \max_{\delta} F_1^*(\delta) \varphi_0 \geq F_1^*(\delta_1) \varphi_0 \text{ для всех } \delta_1.$$

Пусть требуемое неравенство выполнено для некоторого $n < \infty$. Покажем, что оно выполняется также и для $n + 1$. Действительно, в силу монотонности оператора U_{n+1}^* и предположения индукции, имеем

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(\hat{\delta}_1^{n+1}) &= U_{n+1}^* \varphi_n(\hat{\delta}_1^n) \geq U_{n+1}^* \varphi_n(\delta_1^n) = \max_{\delta} F_{n+1}^*(\delta) \varphi_n(\delta_1^n) \geq \\ &\geq F_{n+1}^*(\delta_{n+1}) \varphi_n(\delta_1^n) = \varphi_{n+1}(\delta_1^{n+1}) \text{ для всех } \delta_1^{n+1}. \end{aligned}$$

Теорема 1. Последовательность $\{U_n^*\}$ -порожденных векторов $\{\varphi_n(\hat{\delta}_1^n)\}$ сходится к вектору φ^* , все компоненты которого одинаковы и равны значению функционала $\varphi(\hat{\delta}^\infty)$, отвечающего оптимальной периодической стратегии.

Доказательство. Необходимо показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\hat{\delta}_1^n) = \varphi^* = \varphi(\delta^\infty) \mathbf{1},$$

где $\hat{\delta}^\infty$ — оптимальная периодическая стратегия. С этой целью заметим, что неравенство (14) справедливо для стратегий δ_1^n и всех $n = 1, 2, \dots$. В частности, оно справедливо и для оптимальной периодической стратегии $\hat{\delta}^\infty$, т. е. $\varphi_n(\delta_1^n) \geq \varphi_n(\hat{\delta})$, $n = 1, 2, \dots$, где $\varphi_n(\delta) = F_n(\delta) \varphi_{n-1}(\delta)$.

Отсюда следует, что для всех $n = 1, 2, \dots$ выполняются неравенства вида

$$\overline{\varphi}_n(\hat{\delta}_1^n) = \min_x \varphi_n(\hat{\delta}_1^n)(x).$$

Но, согласно лемме 3, последовательность величин $\{\varphi_n(\delta), n = 1, 2, \dots\}$ не убывает и сходится к $\varphi(\delta^\infty)$. Покажем, что и последовательность $\overline{\varphi}_n(\hat{\delta}_1^n)$ сходится к $\varphi(\delta^\infty)$. Действительно, предположим противное. Тогда найдется бесконечная подпоследовательность $\{\varphi_{n_i}(\hat{\delta}_1^{n_i})\}$ такая, что

$$\overline{\varphi}_{n_i}(\hat{\delta}_1^{n_i}) > \varphi_{n_i}(\delta), \quad i = 1, 2, \dots$$

Поскольку при этом $\varphi_n(\delta)$ стремится к $\varphi(\delta^\infty)$ при $n \rightarrow \infty$, то найдется некоторое n_ε такое, что будет выполняться неравенство

$$\overline{\varphi}_{n_i}(\hat{\delta}_1^{n_i}) \geq \varphi(\delta^\infty) + \varepsilon, \quad n_i \geq n_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Это означает, что найдется бесконечная подпоследовательность наборов решающих функций $\{\hat{\delta}_{n_i}\}$ таких, что выполняется векторное неравенство

$$\varphi_{n_i}(\hat{\delta}_1^{n_i}) \geq (\varphi(\delta^\infty) + \varepsilon) \mathbf{1}, \quad n_i \geq n_\varepsilon. \quad (15)$$

Теперь учтем, что число различных наборов решающих функций конечно. Поэтому рассматриваемая бесконечная подпоследовательность $\{\delta_{n_i}\}$ содержит лишь конечное число различных наборов решающих функций. Тогда без ограничения общности можно, в частности, положить, что такая подпоследовательность $\{\delta_{n_i}\}$ составлена из некоторого единственного набора решающих функций δ , который повторяется бесконечное число раз. Следовательно, начиная с момента n_e , такая подпоследовательность образует периодическую стратегию δ^∞ . Но для периодической стратегии в силу леммы 2 существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\delta) = \varphi(\delta^\infty)$. Тогда неравенство (15) воз-

можно единственным способом, когда $\varphi(\delta^\infty) \geq \varphi(\delta^\infty) + \varepsilon > \varphi(\delta^\infty)$. Но по определению оптимальной стратегии это невозможно.

Полученное противоречие доказывает, что последовательность величин $\vec{\varphi}_n(\delta_1^n) = \min_x \varphi_n(\delta_1^n)(x)$ и $\vec{\varphi}_n(\delta) = \min_x \varphi_n(\delta)(x)$ сходятся к одному пределу $\varphi(\delta^\infty)$.

Используя этот результат и рассуждая аналогичным образом, получаем, что последовательность величин вида $\bar{\varphi}_n(\delta_1^n) = \max_x \varphi_n(\delta_1^n)(x)$ сходятся к пределу $\varphi(\delta^\infty)$.

Объединяя полученные результаты, приходим к выводу, что последовательность $\{U_n^*\}$ -порожденных векторов $\{\varphi_n(\delta_1^n)\}$ сходятся к вектору $\varphi(\delta^\infty)$. Это и доказывает требуемое.

Замечание 1. Поскольку операторы U_n^* , как и операторы $F_n(\delta)$, обладают свойствами сжатия и монотонности, то для $\{U_n^*\}$ -порожденных векторов $\varphi_n(\delta_1^n)$ имеет место результат, аналогичный следствию 1, а именно

$$\vec{\varphi}_n(\delta_1^n) < \varphi(\delta^\infty) < \bar{\varphi}_n(\delta_1^n). \quad (16)$$

Лемма 5. Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\delta_1^n) = \varphi$ (если он существует) зависит лишь от совокупности тех наборов решающих функций, которые в последовательности $\{\delta_1^n\}$ встречаются бесконечно часто.

Доказательство. Обозначим через $n(\delta)$ частоту (число раз) использования набора δ стратегией $\delta_1^n = (\delta_n, \dots, \delta_1)$. Очевидно, если при $n \rightarrow \infty$ величина $n(\delta)$ стремится к конечному пределу, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\delta)}{n} = 0$. Тогда ясно, что «вклад» набора δ и соответствующего вектора выигрышей $w(\delta)$ в значение предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\delta_1^n) = \varphi$ равен 0. Отсюда следует, что рассматриваемый

предел φ зависит лишь от тех наборов δ , которые имеют $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(\delta)}{n} > 0$, т. е. используются бесконечно часто.

Теорема 2. Пусть каждому $\{U_n^*\}$ -порожденному набору $\hat{\delta}_n$ сопоставлена периодическая стратегия $\hat{\delta}_n^\infty$. Тогда в последовательности таких стратегий при некотором конечном $n = n_* < \infty$ достигается оптимальная стратегия.

Доказательство. Рассмотрим последовательность значений функционала $\varphi(\hat{\delta}_n^\infty)$, $n = 1, 2, \dots$. Покажем, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\hat{\delta}_n^\infty) = \varphi(\hat{\delta}^\infty)$, где $\hat{\delta}^\infty$ — оптимальная периодическая стратегия. Действительно, предположим, что такой предел не существует. Тогда из последовательности $\{U_n^*\}$ -порожденных наборов $\{\hat{\delta}_n\}$ можно выделить бесконечную подпоследовательность наборов $\{\hat{\delta}_{n_i}\}$ и соответствующих им периодических стратегий $\{\hat{\delta}_{n_i}^\infty\}$ таких, что $\varphi(\hat{\delta}_{n_i}^\infty) \leq \varphi(\hat{\delta}^\infty) + \varepsilon < \varphi(\hat{\delta}^\infty)$, $\varepsilon > 0$. Поскольку такие наборы $\hat{\delta}_{n_i}$ используются бесконечно часто, то, согласно лемме 5, предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\hat{\delta}_1^n) = \varphi^*$ зависит лишь от таких наборов. Но тогда будем иметь

$$\varphi^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\hat{\delta}_1^n)(x) \leq \varphi(\hat{\delta}^\infty) - \varepsilon < \varphi(\hat{\delta}^\infty).$$

В силу теоремы 1 $\varphi^* = \varphi(\hat{\delta}^\infty)$. Полученное противоречие доказывает существование предела.

Так как число различных периодических стратегий δ^∞ конечно, то найдется величина $\varepsilon > 0$ такая, что

$$\varepsilon = \min_{\{\delta^\infty : \varphi(\delta^\infty) \neq \varphi(\hat{\delta}^\infty)\}} \{|\varphi(\delta^\infty) - \varphi(\hat{\delta}^\infty)|\}.$$

Тогда в силу существования предела $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(\hat{\delta}_n^\infty) = \varphi(\hat{\delta}^\infty)$, где $\hat{\delta}^\infty$ — оптимальная периодическая стратегия, найдется момент $n_* < \infty$ такой, что для всех $n \geq n_*$ будет выполняться неравенство $|\varphi(\hat{\delta}_n^\infty) - \varphi(\hat{\delta}^\infty)| < \varepsilon$.

Из определения ε следует, что такое неравенство возможно единственным способом, когда $\varphi(\hat{\delta}_n^\infty) - \varphi(\hat{\delta}^\infty) = 0$. Это доказывает требуемое.

Лемма 6. Пусть $\varphi^* = \varphi(\hat{\delta}^\infty)$ — оптимальный выигрыш и $\{\varphi(\hat{\delta}_n^\infty)\}$ — последовательность значений функционала φ , отвечающих $\{U_n^*\}$ -порожденным стратегиям $\hat{\delta}_n^\infty$, $n = 1, 2, \dots$. Тогда найдется некоторое $\hat{n} < \infty$ такое, что для всех $n > \hat{n}$ выполняется неравенство

$$\varphi^* - \varphi(\hat{\delta}_n^\infty) \leq g_n, \quad (17)$$

где $g_n = \bar{\varphi}_n(\hat{\delta}_1^n) - \varphi_n(\hat{\delta}_1^n)$.

Доказательство. Из теоремы 2 следует, что, начиная с некоторого $n_* < \infty$, выполняется равенство

$$|\varphi^* - \varphi(\hat{\delta}_n^\infty)| = \varphi^* - \varphi(\hat{\delta}_n^\infty) = 0, \quad n \geq n_*.$$

С другой стороны, согласно (16), имеем $g_n = \bar{\varphi}_n(\hat{\delta}_1^n) - \underline{\varphi}_n(\hat{\delta}_1^n) > 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$. Кроме того, понятно, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{\varphi}_n(\hat{\delta}_1^n) - \underline{\varphi}_n(\hat{\delta}_1^n)) = \varphi(\hat{\delta}^\infty) - \varphi(\hat{\delta}^\infty) = 0.$$

В таком случае найдется некоторое $\hat{n} < \infty$ такое, что для всех $n \geq \hat{n}$ будет выполняться неравенство $\varphi^* - \varphi(\hat{\delta}_n^\infty) \leq g_n$. Это доказывает требуемое.

Замечание 2. На самом деле в лемме 6 можно утверждать большее, а именно, что неравенство (17) выполняется, начиная с $n = 1$.

Действительно, поскольку разности $\varphi^* - \varphi(\hat{\delta}_n^\infty)$, $n = 1, 2, \dots$ достигают значения 0 за конечное число шагов $n_* < \infty$, а $g_n > 0$, $n = 1, 2, \dots$ и достигает значения 0 лишь при $n = \infty$, отсюда следует, что разности $\varphi^* - \varphi(\hat{\delta}_n^\infty)$ убывают намного быстрее, чем величины g_n . Очевидно, если в этих условиях установить, что оно будет выполняться при $n = 1$, то оно будет выполняться и при всех $n > 1$. С этой целью заметим, что $\varphi_1(\hat{\delta}_1) = \omega(\delta) = \max_{\delta} \omega(\delta)$. Отсюда следует

$$\begin{aligned} \varphi^* = \varphi(\hat{\delta}^\infty) &\leq \max_x \max_{\delta} \omega(\delta)(x) = \max_x \omega(\hat{\delta}_1)(x) = \\ &= \max_x \varphi_1(\hat{\delta}_1) = \bar{\varphi}_1. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\varphi(\hat{\delta}_1^\infty) \geq \min_x \omega(\hat{\delta}_1)(x) = \min_x \varphi_1(\hat{\delta}_1)(x) = \underline{\varphi}_1.$$

Поскольку $\varphi^* = \varphi(\hat{\delta}^\infty) \geq \varphi(\hat{\delta}_1^\infty)$, то из полученных неравенств следует, что $\varphi^* - \varphi(\hat{\delta}_1^\infty) \leq \bar{\varphi}_1 - \underline{\varphi}_1 = g_1$.

Теорема 3. Пусть задано $\varepsilon > 0$ и величины $g_n = \bar{\varphi}_n(\hat{\delta}_1^n) - \underline{\varphi}_n(\hat{\delta}_1^n)$. Тогда, если $g_n < \varepsilon$, то $\{U_n^*\}$ -порожденная стратегия $\hat{\delta}_n^\infty \varepsilon$ — оптимальна.

Доказательство. Действительно, если $g_n < \varepsilon$, то из неравенства (17) следует, что стратегия $\hat{\delta}_n^\infty \varepsilon$ — оптимальна.

Полученные результаты определяют рекуррентную оптимизационную схему, в которой за конечное число итераций достигается ε -оптимальная стратегия. Однако для реализации этой схемы в виде конкретной оптимизационной процедуры требуется выполнить дополнительные построения. Прежде всего заметим, что в силу представления (4) имеем $U_n^* = U_{(n-1)T+T} U_{(n-1)T+(T-1)} \dots U_{(n-1)T+1}$.

Это дает возможность вычислять векторы $\varphi_n(\hat{\delta}_1^n)$ рекуррентным способом с помощью вспомогательной процедуры P .

Процедура P. Пусть вычислен вектор $\varphi_{n-1}(\hat{\delta}_1^{n-1})$. Тогда для вычисления вектора $\varphi_n(\hat{\delta}_1^n)$ необходимо выполнить следующий алгоритм:

1. Положить $\varphi^0 \equiv \varphi_{n-1}(\hat{\delta}_1^{n-1})$.
2. Для каждого $k = 1, 2, \dots, T$ вычислить вектор φ^k с компонентами:

$$\begin{aligned} \varphi^k(x) &= \max_y F_{(n-1)T+k}(y) \varphi^{k-1}(x) = \\ &= F_{(n-1)T+k}(y_{T-k+1}^{(x)}) \varphi^{k-1}(x), \quad x \in X. \end{aligned}$$

Образовать решающую функцию $\pi_{T-k+1}^{(n)}$, полагая

$$\pi_{T-k+1}^{(n)}(x) = y_{T-k+1}^{(x)}, \quad x \in X.$$

3. Если $k = T$, то положить $\varphi_n(\hat{\delta}_1^n) = \varphi^T$ и образовать набор $\hat{\delta}_n = (\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \dots, \pi_T^{(n)})$.

Используя процедуру *P*, теперь можно сформулировать оптимизационную процедуру следующего содержания.

Процедура 1. Пусть задано некоторое $\varepsilon > 0$, выполнено $n \geq 1$ итераций и вычислен вектор $\varphi_n(\hat{\delta}_1^n)$. Тогда для продолжения процедуры необходимо выполнить следующий алгоритм.

1. Вычислить $g_n = \bar{\varphi}_n(\hat{\delta}_1^n) - \varphi_n(\hat{\delta}_1^n)$.
2. Проверить $g_n \leq \varepsilon$. Если да, то остановить алгоритм. В противном случае перейти к 3.
3. Вычислить φ_{n+1} с помощью вспомогательной процедуры *P*.
4. Положить $n = n + 1$ и перейти к 1.

Заметим, что эта процедура будет выполняться до тех пор, пока не выполнится условие $g_n \leq \varepsilon$, хотя возможно, что оптимальная стратегия уже достигнута.

При этом в момент останова гарантируется лишь ε -оптимальность стратегии. В этом недостаток процедуры. С целью устранения этого недостатка и ускорения сходимости процедуры введем семейство операторов $\{\Gamma_n, n = 1, 2, \dots\}$ вида $\Gamma_{n+1}(\delta_n) \varphi_n = U_{n+1}^* \varphi_n - \Gamma_{n+1}^*(\delta_n) \varphi_n$.

Лемма 7. Пусть оптимальная стратегия единственна. Тогда предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Gamma_{n+1}(\hat{\delta}_n) \varphi_n(\hat{\delta}_1^n)\| = 0$ достигается в некоторый момент $n_0 < \infty$ и в этот же момент достигается оптимальная стратегия.

Доказательство. В силу следствия 2 последовательность $\{U_n^*\}$ -порожденных стратегий сходится к оптимальной стратегии $\hat{\delta}^\infty$. Поскольку она единственна, то в таком случае, начиная с некоторого $n_0 < \infty$ все наборы $\hat{\delta}_n (n \geq n_0)$ будут совпадать с оптимальным набором $\hat{\delta}$. В таком случае для всех $n \geq n_0$ очевидным образом будет выполняться равенство $\Gamma_{n+1}(\hat{\delta}_n) \varphi_n = \bar{0}$. Тем самым для всех $n \geq n_0$ $\|\Gamma_{n+1}(\hat{\delta}_n) \varphi_n\| = 0$. Это и доказывает лемму.

Из полученного результата следует, что для останова процедуры следует проверять условие $\|\Gamma_{n+1}(\hat{\delta}_n)\varphi_n\| = 0$. Однако необходимо учесть, что хотя предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Gamma_{n+1}(\hat{\delta}_n)\varphi_n\| = 0$ достигается при некотором $n_0 < \infty$, однако это значение n_0 неизвестно. Поэтому, вообще говоря, не исключается возможность, что после выполнения равенства $\|\Gamma_n(\hat{\delta}_{n-1})\varphi_{n-1}\| = 0$ выполнится неравенство $\|\Gamma_{n+1}(\hat{\delta}_n)\varphi_n\| > 0$. Это означает, что, вообще говоря, существует конечный набор моментов n_i , $i = 1, 2, \dots, N$ таких, что

$$\|\Gamma_{n_i}(\hat{\delta}_{n_i-1})\varphi_{n_i-1}\| > 0, \|\Gamma_{n_i+1}(\hat{\delta}_{n_i})\varphi_{n_i}\| = 0. \quad (18)$$

Понятно, что предел достигается в момент $n = n_N = n_0$, который, однако, неизвестен. Поэтому в качестве возможных моментов останова необходимо проверять все моменты, где $\|\Gamma_{n_i+1}(\hat{\delta}_n)\varphi_n\| = 0$. Тогда однозначное правило останова вытекает из следующего утверждения.

Теорема 4. Пусть n_i — моменты, определенные в (18). Тогда момент $\tau = \inf \{(n, i) : \|\Gamma_{n+1}(\hat{\delta})\varphi_n\| = 0, g_{n+1} \leq \varepsilon_i\}$ конечен и в этот момент достигается ε_τ -оптимальная (либо оптимальная) периодическая стратегия.

Доказательство. Заметим, что величина $\varepsilon_i > 0$ и их число конечно. С другой стороны, $g_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что момент τ конечен. Поскольку в момент τ выполняется условие $g_{n+1} \leq \varepsilon_\tau$, то согласно теореме 3 в этот момент достигается ε -оптимальная стратегия. При этом не исключается возможность, что $\tau = n_0$, где n_0 — момент, в который достигается предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Gamma_n\varphi_{n-1}\| = 0$. Очевидно, в таком случае в момент τ достигается оптимальная стратегия.

С целью освободиться от предположения единственности оптимальной стратегии и использовать правило останова, вытекающее из теоремы 4, кроме условия $\|\Gamma_{n+1}(\hat{\delta}_n)\varphi_n\| = 0$, будем на каждой итерации проверять условие $g_{n+1} \leq \tilde{\varepsilon}_n$, где $\tilde{\varepsilon}_n = \max\{\varepsilon_n, \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$. Тогда получаем оптимизационную процедуру следующего содержания.

Процедура 2. Пусть задано $\varepsilon > 0$, выполнено $n \geq 1$ итераций и вычислен вектор $\varphi_n(\hat{\delta}_1^n)$. Тогда для продолжения процедуры необходимо выполнить следующий алгоритм:

1. С помощью процедуры P вычислить вектор $\varphi_{n+1}(\hat{\delta}_1^{n+1})$.
2. Вычислить $g_{n+1} = \overline{\varphi}_{n+1} - \underline{\varphi}_{n+1} = \max_x \varphi_{n+1}(x) - \min_x \varphi_{n+1}(x)$.
3. Проверить условие $\|\Gamma_{n+1}(\hat{\delta}_n)\varphi_n\| = 0$. Если да, то перейти в 4. В противном случае положить $\tilde{\varepsilon}_n = \varepsilon$ и перейти в 5.
4. Вычислить $\varepsilon_n = \|\Gamma_n(\hat{\delta}_{n-1})\varphi_{n-1}\|$ и положить $\tilde{\varepsilon}_n = \max\{\varepsilon_n, \varepsilon\}$.
5. Проверить условие $g_{n+1} \leq \tilde{\varepsilon}_n$. Если да, то остановить алгоритм. В противном случае перейти к 6.

6. Положить $n = n + 1$ и перейти к 1.

Оператор Γ_{n+1} использует оператор U_{n+1}^* , который определяет набор решающих функций $\hat{\delta}_{n+1} = (\pi_1^{(n+1)}, \dots, \pi_T^{(n+1)})$, являющийся улучшением для набора $\hat{\delta}_n = (\pi_1^{(n)}, \dots, \pi_T^{(n)})$. Очевидно, что набор $\hat{\delta}_{n+1}$ будет улучшением для $\hat{\delta}_n$, если найдется хотя бы одна решающая функция $\pi_i^{(n+1)}$ из набора $\hat{\delta}_{n+1}$, которая окажется улучшением для соответствующей решающей функции из набора $\hat{\delta}_n$. В этих условиях, если наборы совпадают, то это означает, что все улучшения практически исчерпаны. Поэтому, если выполнено равенство $\|\Gamma_{n+1}\varphi_n\| = 0$, то с достаточным основанием можно полагать, что это равенство будет выполняться и далее. Эти рассуждения позволяют упростить правило останова при останове процедуры в момент, когда впервые выполняется равенство $\|\Gamma_{n+1}\varphi_n\| = 0$. Тогда приходим к следующему варианту оптимизационной процедуры.

Процедура 3. Положить $\varphi_0 = \bar{0}$ и вычислить $\varphi_1(\hat{\delta}_1)$ с помощью вспомогательной процедуры P . Пусть выполнено $n \geq 1$ итераций. Тогда для продолжения процедуры необходимо выполнить следующий алгоритм.

1. Вычислить $\varphi_{n+1}(\hat{\delta}_1^{n+1})$ с помощью процедуры P .

2. Проверить условие $\|\Gamma_{n+1}(\hat{\delta}_n)\varphi_n\| = 0$. Если да, то остановить алгоритм, иначе перейти в 3.

3. Положить $n = n + 1$ и перейти в 1.

Очевидно, использование процедуры 3 теоретически не гарантирует достижение оптимальной стратегии в момент останова. Однако в силу наличия периода с достаточной степенью уверенности можно утверждать, что такая стратегия будет достигнута. Поэтому для решения практических задач в силу ее простоты процедура 3 является наиболее приемлемым инструментом.

Пример. Пусть множество состояний X содержит два элемента $X = \{x_1, x_2\}$, множество допустимых управлений состоит из трех элементов $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Переходная функция q_t и функция выигрышей w_t удовлетворяют условию периодичности с периодом $T = 4$. Эти функции заданы в следующем виде:

$$q_t(x_1 | x_1, y) = \begin{cases} \frac{5-t}{5+t}, & y = y_1; \\ \frac{1}{12}((2-t)^2 + 2), & y = y_2; \\ \frac{1}{10}(6 - (2-t)^2), & y = y_3, \end{cases}$$

$$q_t(x_1 | x_2, y) = \begin{cases} \frac{1}{6+t}, & y = y_1; \\ \frac{1}{10}t(5-t), & y = y_2; \\ \frac{1}{10}t, & y = y_3, \end{cases}$$

$$\sum_{i=1}^2 q_i(x_i | x, y) = 1, \quad x \in X, \quad y \in Y,$$

$$\omega_t(x_1, y) = \begin{cases} 1,975q_t(x_1 | x_1, y_1) + 10, & y = y_1; \\ 6,01q_t(x_1 | x_1, y_2) + 10, & y = y_2; \\ 3 q_t(x_1 | x_1, y_3) + 10, & y = y_3, \end{cases}$$

$$\omega_t(x_2, y) = \begin{cases} 3,95q_t(x_1 | x_2, y_1) + 3, & y = y_1; \\ q_t(x_1 | x_2, y_2) + 2, & y = y_2; \\ 5 q_t(x_1 | x_2, y_3) + 3, & y = y_3. \end{cases}$$

Выполняя первую итерацию процедуры 3, получаем набор $\hat{\delta}_1$ и вектор средних выигрышей $\varphi_1(\hat{\delta}_1)$:

$$\varphi_1(\hat{\delta}_1) = \begin{pmatrix} 8,69 \\ 5,98 \end{pmatrix}; \quad \hat{\delta}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\}.$$

На второй итерации получены вектор $\varphi_2(\hat{\delta}_1^2)$ и набор решающих функций $\hat{\delta}_2$:

$$\varphi_2(\hat{\delta}_1^2) = \begin{pmatrix} 8,02 \\ 6,66 \end{pmatrix}; \quad \hat{\delta}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Поскольку $\|\Gamma_2(\hat{\delta}_1)\varphi_1(\hat{\delta}_1)\| \neq 0$, вычисления нужно продолжать. Выполняя третью итерацию процедуры 3, получаем набор решающих функций $\hat{\delta}_3$ и вектор $\varphi_3(\hat{\delta}_1^3)$:

$$\varphi_3(\hat{\delta}_1^3) = \begin{pmatrix} 7,79 \\ 6,88 \end{pmatrix}, \quad \hat{\delta}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_3 \\ y_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ y_1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Оказалось, что наборы $\hat{\delta}_2$ и $\hat{\delta}_3$ совпали. Поэтому $\|\Gamma_3(\hat{\delta}_2)\varphi_2(\hat{\delta}_1^3)\| = 0$ и вычисления следует закончить.

Таким образом, можно считать, что набор $\hat{\delta}_3$ (или $\hat{\delta}_2$) порождает оптимальную периодическую стратегию.

Список литературы: 1. Ховард Р. Динамическое программирование и марковские процессы.— М.: Сов. радио, 1964.— 189 с. 2. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений.— М.: Наука, 1977.— 175 с. 3. Баранов В. В. Рекуррентные методы оптимальных решений в стохастических системах.— Х.: Вища шк., 1981.— 145 с. 4. Баранов В. В. Об одном рекуррентном алгоритме в марковских процессах решений.— Кибернетика, 1982, № 4, с. 98—103. 5. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова.— М.: Наука, 1970.— 271 с.

Поступила в редколлегию 10.01.84.