Вып. 6 1968

О РОСТЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ СПЕЦИАЛЬНЫМ НЕРАВЕНСТВАМ

В. В. Зимогляд

Вопросы теории вероятностей приводят [1] к изучению класса целых функций, удовлетворяющих неравенству

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant |\varphi(iy)|, \quad -\infty < x,\ y < \infty.$$

В работе [2] И. В. Островский рассмотрел более широкий класс целых функций, определяемый условием

$$|\varphi(x+iy)| \leqslant M(|y|, \varphi), \quad -\infty < x,\ y < \infty, \tag{1}$$

где $M(r, \varphi) = \max\limits_{|z|=r} |\varphi(z)|$, и доказал следующую теорему.

Теорема I. *Пусть $F(w)$ и $f(z)$ — целые функции, и $F(w) \not\equiv \text{const}$. Если функция $\varphi(z) = F(f(z))$ удовлетворяет условию (1), то либо $f(z)$ — полином степени не больше 2, либо $f(z)$ — целая функция не ниже нормального типа порядка 1.*

Таким образом, независимо от вида функции $F(w)$, неравенство (1) накладывает существенные ограничения на рост $f(z)$.

То обстоятельство, что $f(z)$ не ниже нормального типа порядка 1, можно записать так:

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln M(r, f) > 0. \tag{2}$$

И. В. Островский [3] поставил вопрос, нельзя ли утверждение в теореме I заменить следующим: либо $f(z)$ — полином степени не выше 2, либо

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln M(r, f) > 0.$$

Результаты настоящей работы дают положительный ответ на этот вопрос. Более того, из них следует, что если $\varphi(z)$ удовлетворяет условиям теоремы I, а $f(z)$ — не полином, то наименьший возможный рост $f(z)$ может реализоваться лишь на функциях, весьма регулярно растущих. Точнее говоря, при условиях, указанных в теореме I, функция $f(z)$ либо полином степени не больше 2, либо

$$\underline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln M(r, f) = \infty, \tag{3}$$

либо

$$0 < \underline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln M(r, f) = \overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln M(r, f) < \infty. \tag{4}$$

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы I и следующей теоремы, представляющей основной результат настоящей работы.

Теорема II. *Пусть $F(w)$ и $f(z)$ — целые функции, и $F(w) \not\equiv \text{const}$. Если функция $f(z)$ такова, что для некоторого L можно указать такую* *последовательность чисел* $0 < r_1 < r_1' < r_2 < r_2' < \cdots r_k \to \infty$, *что выполняются условия:*

$$\ln M(r_k, f) \geqslant r_k e^{L+2Br_k^{-\frac{1}{2}}}; \tag{5}$$

$$\ln M(r_k', f) \leqslant r_k' e^L, \tag{6}$$

где $B \geqslant 5 \cdot 10^5 e^{-\frac{1}{2}L} = B_L$, *то целая функция* $\varphi(z) = F(f(z))$ *не может удовлетворять условию* (1).

Следствие. *Если* $f(z)$ — *целая трансцендентная функция и*

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln M(r, f) = c < \infty,$$

а функция $\varphi(z) = F(f(z))$ *удовлетворяет условию* (1), *то*

$$\ln M(r, f) \leqslant cr + O(\sqrt{r}), \quad r \to \infty.$$

Условимся для простоты писать $M(r)$ вместо $M(r, f)$. Функцию $\ln M(e^t)$ обозначим через $\psi(t)$. О функции $\psi(t)$ известно, что это непрерывная, монотонно возрастающая выпуклая функция переменного $t \geqslant 0$. Из этого следует, что производная $\psi'(t)$ существует всюду, за исключением, быть может, счетного множества точек полуоси $t \geqslant 0$, и является неубывающей функцией.

Примененный в работе [2] метод основан на использовании свойств так называемого сильного уточненного порядка в смысле Б. Я. Левина [4, стр. 52—60], то есть непрерывно-дифференцируемой функции $\Phi(t)$, имеющей кусочно-непрерывную вторую производную и обладающей следующими свойствами:

а) $\Phi(t) \geqslant \psi(t)$ для всех $t \geqslant 0$;

б) $\Phi(t) = \psi(t)$, } для некоторого неограниченного

в) $\Phi'(t) = \psi'(t)$, } множества точек полуоси $t \geqslant 0$.

В [2] доказательство велось от противного. Поэтому там рассматривались функции, удовлетворяющие условию

$$\lim_{r\to\infty} r^{-1} \ln M(r, f) = 0.$$

Для каждой такой функции $f(z)$ удавалось построить функцию $\Phi(t)$, для которой, кроме а), б), в), выполнялось еще и условие

г) $\lim_{t\to\infty} e^{-t}\Phi(t) = 0.$

В случае, когда

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\, r^{-1} \ln M(r, f) > 0,$$

такую функцию построить не удается. Поэтому мы для каждой $f(z)$ строим *последовательность* функций, которые обозначаем через $\Phi_k(t)$ и которые на некоторой неограниченной последовательности точек $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $x_k \uparrow \infty$ удовлетворяют условиям:

$$\Phi_k(x_k) = \psi(x_k); \tag{7}$$

$$\Phi_k'(x_k) = \psi'(x_k); \tag{8}$$

$$\Phi_k(t) \geqslant \psi(t) \text{ при } t \in \left[x_k - \{\Phi_k'(x_k)\}^{-\frac{1}{2}},\quad x_k + \{\Phi_k'(x_k)\}^{-\frac{1}{2}}\right], \tag{9}$$

Условия (7), (8) и (9) есть аналоги условий а), б) и в). Функции $\Phi_k(t)$ имеют вид

$$\Phi_k(t) = \exp\left[t + L_k + 2Be^{-\frac{1}{2}t}\right],$$

где $\{L_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность вещественных чисел.

Заметим, что условию г) наши функции не удовлетворяют.

После того как функции $\Phi_k(t)$ построены, мы используем часть рассуждений, проведенных в [2], и получаем наш результат.

Работа состоит из трех параграфов.

В первом параграфе мы проводим построение функций $\Phi_k(t)$ и последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, а также доказываем выполнение условий (7), (8) и (9).

Во втором параграфе приведены нужные нам теоремы типа Вимана—Валирона о поведении целой функции в окрестности точки максимального модуля.

В третьем параграфе доказывается основная теорема II.

§ 1. Пусть целая функция $f(z)$ такова, что выполняются условия (5) и (6). На полуоси $t \geqslant 0$ рассмотрим функцию $\Phi(t, L, B) = \exp\left[t + L + 2Be^{-\frac{1}{2}t}\right]$, где L и B — некоторые фиксированные величины. Так как вторая производная этой функции положительна, то функция $\Phi(t, L, B)$ выпукла.

Если произвести замену: $r = e^t$, $\ln M(et) = \psi(t)$, то из (5) и (6) следует, что существует L и $B \geqslant B_L$, и последовательность точек $0 < t_1 < t_1' < t_2 < t_2' < \cdots < t_k < t_k' < \cdots$, $t_k \to \infty$, для которых выполняются условия

$$\psi(t_k) \geqslant \exp\left[t_k + L + 2Be^{-\frac{1}{2}t_k}\right], \qquad (10)$$

$$\psi(t_k') \leqslant \exp\left[t_k' + L\right]. \qquad (11)$$

Лемма 1. *Пусть функция $f(z)$ такова, что выполняются условия (10) и (11). Тогда существует последовательность вещественных чисел L_k и последовательность точек x_k, $x_k \uparrow \infty$ такие, что, полагая $\Phi_k(t) = \Phi(t, L_k, B)$, будем иметь соотношения:*

$$\Phi_k(x_k) = \psi(x_k); \qquad (12)$$

$$\Phi_k'(x_k) = \psi'(x_k); \qquad (13)$$

$$\Phi_k(t) \geqslant \psi(t) \quad при \quad t \in \left[x_k - \{\Phi_k'(x_k)\}^{-\frac{1}{2}},\ \ x_k + \{\Phi_k'(x_k)\}^{-\frac{1}{2}}\right]. \qquad (14)$$

Доказательство. Рассмотрим на отрезке $[t_k', t_{k+1}']$ функцию $\ln\psi(t)$ и функцию

$$\ln\Phi(t, \tilde{L}, B) = t + \tilde{L} + 2Be^{-\frac{1}{2}t},$$

где $\tilde{L}$ выбрано столь большим, что для всех $t \in [t_k', t_{k+1}']$ выполняется неравенство

$$\ln\Phi(t, \tilde{L}, B) > \ln\psi(t).$$

Геометрически это означает, что график функции $y_1(t) = \ln\Phi(t, \tilde{L}, B)$ находится над графиком функции $y_2(t) = \ln\psi(t)$ на всем отрезке $[t_k', t_{k+1}']$.

Начнем теперь уменьшать $\tilde{L}$ до тех пор, пока график функции $y_1(t)$ не коснется графика функции $y_2(t)$ в некоторой точке $x_k \in [t'_k, t'_{k+1}]$, при этом если точек касания несколько, то выберем любую из них. Зафиксируем теперь значение параметра $\tilde{L}$, обозначим это значение через L_k. Заметим, что для данного L_k будут выполняться условия

$$\ln \Phi(x_k, L_k, B) = \ln \psi(x_k); \qquad (15)$$

$$\ln \Phi(t, L_k, B) \geqslant \ln \psi(t) \text{ при } t \in [t'_k, t'_{k+1}]. \qquad (16)$$

Из (15) следует выполнение условия (12), условие (16) можно переписать так:

$$\Phi_k(t) \geqslant \psi(t) \text{ при } t \in [t'_k, t'_{k+1}]. \qquad (17)$$

Так как функции $\psi(t)$ и $\Phi_k(t)$ выпуклы и функция $\Phi_k(t)$ имеет производную всюду на полуоси $t \geqslant 0$, то из (12) и (17) можно сделать вывод, что $\psi'(x_k)$ существует и выполняется условие (13).

Из (10) следует, что

$$L_k \geqslant L, \qquad (18)$$

а это вместе с (11) означает, что точка x_k не может быть ни одним из концов отрезка $[t'_k, t'_{k+1}]$.

Чтобы установить выполнение условия (14), оценим снизу разности $t'_{k+1} - x_k$ и $x_k - t'_k$.

Оценим вначале разность $t'_{k+1} - x_k$. Обозначим $y_1(t) = \ln \Phi_k(t)$, $y_2(t) = \ln \psi(t)$ и $y_3(t) = t + L$ — графики соответствующих функций (рис. 1). Из точки C с координатами $(x_k, \ln \psi(x_k))$ проведем прямую, параллельную оси t, и пусть A — точка пересечения данной прямой с линией $y_3(t)$. Так как $y_1(x_k) = \ln \psi(x_k) > y_3(x_k)$, а $\ln \psi(t'_{k+1}) \leqslant y_3(t'_{k+1})$, то между x_k и t'_{k+1} лежит хотя бы одна точка t_E такая, что $\ln \psi(t_E) = y_3(t_E)$. Из строгой монотонности функции $\ln \psi(t)$ следует, что $t_E > t_A$.

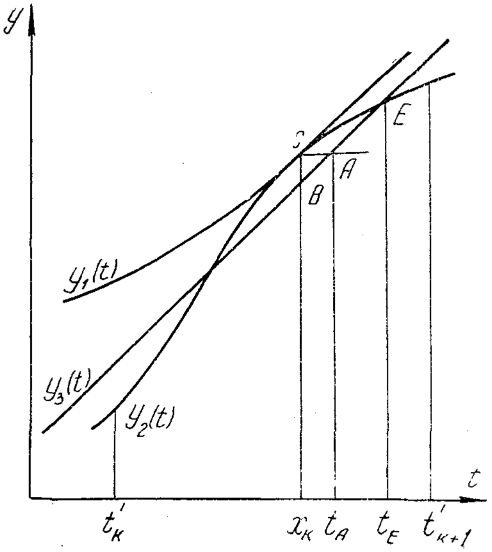

Рис. 1.

Поэтому

$$t'_{k+1} - x_k \geqslant t_E - x_k > t_A - x_k. \qquad (19)$$

Но

$$t_A - x_k = BC = \ln \Phi_k(x_k) - x_k - L = x_k + L_k + 2Be^{-\frac{1}{2}x_k} - x_k - L \geqslant 2Be^{-\frac{1}{2}x_k}.$$

Поскольку $B \geqslant 5 \cdot 10^5 \cdot e^{-\frac{1}{2}L}$, из (18) следует:

$$t'_{k+1} - x_k > t_A - x_k > 10^6 e^{Be^{-\frac{1}{2}x_k}} \cdot \{\Phi_k(x_k)\}^{-\frac{1}{2}}. \qquad (20)$$

Из (20) следует, что для достаточно больших x_k

$$t'_{k+1} - x_k > \{\Phi'_k(x_k)\}^{-\frac{1}{2}}. \qquad (21)$$

Оценим теперь снизу разность $x_k - t'_k$. Для этого рассмотрим графики функций $u_1(t) = \Phi_k(t)$, $u_2(t) = \psi(t)$ и $u_3(t) = \exp[t + L]$ (рис. 2). Обозначим через $\tilde{x}_k$ самую левую точку отрезка $[t'_k, t'_{k+1}]$, где выполняются условия (12) и (13).

Из точки C с координатами $(\tilde{x}_k, \psi(\tilde{x}_k))$ проведем общую касательную к кривым $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Уравнение этой касательной имеет вид

$$u_4(t) = \exp\left\{\tilde{x}_k + L_k + 2Be^{-\frac{1}{2}\tilde{x}_k}\right\}\left[1 + (t - \tilde{x}_k)\left(1 - Be^{-\frac{1}{2}\tilde{x}_k}\right)\right].$$

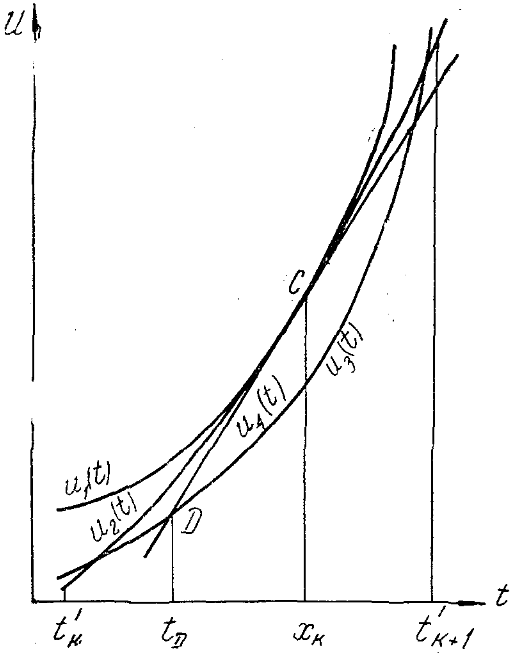

Рис. 2.

Обозначим через D точку пересечения касательной $u_4(t)$ с кривой $u_3(t)$. В силу (11) и выпуклости $u_2(t) = \psi(t)$

$$x_k - t'_k > \tilde{x}_k - t_D, \qquad (22)$$

где t_D — абсцисса точки D.

Очевидно, что величина t_D есть меньший корень уравнения

$$\exp\left\{\tilde{x}_k + L_k + 2Be^{-\frac{1}{2}\tilde{x}_k}\right\} \times \left[1 + (t - \tilde{x}_k)\left(1 - Be^{-\frac{1}{2}\tilde{x}_k}\right)\right] = \exp\{t + L\}. \qquad (23)$$

Но из (18) следует, что меньший корень уравнения (23) отстоит от точки $\tilde{x}_k$ дальше, чем меньший корень уравнения

$$\exp\left\{\tilde{x}_k + 2Be^{-\frac{1}{2}\tilde{x}_k}\right\}[1 + (t - \tilde{x}_k)] = \exp t,$$

откуда получаем после несложных преобразований уравнение

$$2Be^{-\frac{1}{2}\tilde{x}_k} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}(\tilde{x}_k - t). \qquad (24)$$

Легко показать, что меньший положительный корень уравнения (24) отстоит от точки $\tilde{x}_k$ дальше, чем положительный корень уравнения

$$2Be^{-\frac{1}{2}\tilde{x}_k} = \frac{(\tilde{x}_k - t)^2}{1 - (\tilde{x}_k - t)}. \qquad (25)$$

Но из (25) следует

$$\tilde{x}_k - t = -Be^{-\frac{1}{2}\tilde{x}_k} + \sqrt{B^2 e^{-\frac{1}{2}\tilde{x}_k} + 2Be^{-\frac{1}{2}\tilde{x}_k}}.$$

Поэтому для достаточно больших x_k мы имеем

$$x_k - t'_k > \tilde{x}_k - t_D > Be^{-\frac{1}{2}x_k} > \{\Phi'_k(x_k)\}^{-\frac{1}{2}}. \qquad (26)$$

Соотношение (14) следует из (21) и (26).

Лемма 2. *Пусть*

$$\Delta = \Delta(t,\ L,\ B) = \Phi(t + \varepsilon R,\ L,\ B) - \Phi(t,\ L,\ B) - \Phi'(t,\ L,\ B)\,\varepsilon R, \quad (27)$$

где

$$R = R(t,\ L,\ B) = \{\Phi'(t,\ L,\ B)\}^{-\frac{1}{2}}, \quad (28)$$

L, вообще говоря, зависит от t, а $\varepsilon = \varepsilon(t) = \pm 1$ выбрано так, чтобы выражение в правой части (27) *было возможно большим.*

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \Delta(t,\ L,\ B) = \frac{1}{2}.$$

Доказательство. Имеем

$$\Delta(t,\ L,\ B) = \frac{1}{2}\Phi''(t + k\varepsilon R,\ L,\ B)\ R^2 =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}(t+k\varepsilon R)} + (1 - Be^{-\frac{1}{2}(t+k\varepsilon R)})^2}{2(1 - Be^{-\frac{1}{2}t})} \cdot e^{k\varepsilon R + 2Be^{-\frac{1}{2}t}\cdot(e^{-\frac{1}{2}k\varepsilon R} - 1)}$$

где $k = k(t)$ удовлетворяет условию $0 < k < 1$.

Так как $\lim\limits_{t\to\infty} R = 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} \Delta(t,\ L,\ B) = \frac{1}{2}.$$

Лемма доказана.

§ 2. В этом параграфе мы приведем ряд утверждений относительно поведения целой функции в окрестности точки ζ, $|\zeta| = e^{x_k}$, где $|f(\zeta)| = M(e^{x_k})$. Доказательства этих утверждений мы приводить не будем, так как они получаются дословным повторением доказательств аналогичных утверждений из работы [2].

Лемма 3 (ср. [2, стр. 154]). *Выберем на каждой окружности $|z| = e^{x_k}$ точку ζ, в которой $|f(\zeta)| = M(e^{x_k})$.*

Положим

$$N_m = N_m(\zeta) = \frac{1}{m!}\left(\frac{d}{d\ln z}\right)^m \ln f(z)\,/_{z=\zeta}.$$

Справедливы соотношения

$$N_1(\zeta) = \Phi_k'(x_k); \quad (29)$$

$$\operatorname{Re} N_2(\zeta) \leqslant \frac{1}{2}\Phi_k''(x_k). \quad (30)$$

Пусть теперь h — любое положительное число. Положим

$$\delta = \delta(h,\ \zeta) = \psi(t + \varepsilon_1 h) - \psi(t) - N_1\varepsilon_1 h,$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(t) = \pm 1$ выбрано так, чтобы выражение справа было возможно большим. Из выпуклости функции $\psi(t)$ и леммы 3 следует, что величина $\delta > 0$.

Лемма 4 [2, стр. 155]. *Если $0 < \theta(t) < 1$, $|\tau| < \theta h$, то имеет место соотношение*

$$f(\zeta e^{\tau}) = f(\zeta)\,e^{N_1\tau}\{1 + \omega(\tau)\},$$

где

$$|\omega(\tau)| \leqslant \frac{\theta^2(e^{2\delta} - 1)}{e^{\delta} - \theta^2}. \quad (31)$$

Лемма 5 [2 стр. 156]. *Если* $0 < \theta(t) < \frac{1}{2} e^{-\frac{\delta}{2}}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$, $|\tau| < \theta h$, *то имеет место соотношение*

$$f(\zeta e^{\tau}) = f(\zeta) \exp [N_1\tau + N_2\tau^2 + \cdots + N_n\tau^n] \{1 + \omega_n(\tau)\},$$

где

$$|\omega_n(\tau)| \leqslant 2e^2(n+1)(\theta e^{\frac{\delta}{2}})^{n+1}.$$

Лемма 6. Если целая функция $f(z)$ *такова, что выполняются условия* (5) *и* (6), *а величина* $R_k = R_k(x_k, L_k, B)$ *определена соотношением* (28), *то*

$$\delta(R_k, \zeta) \leqslant \Delta(x_k, L_k, B).$$

Лемма является простым следствием условий (12), (13) и (14) и соотношения (29).

Теорема III (ср. теорему IV′ из [2]). *Пусть* $R_k = R_k(x_k, L_k, B)$ *и* $\Delta = \Delta(x_k, L_k, B)$ *определены соотношениями* (28) *и* (27), *а* ζ *таково, что* $|\zeta| = e^{x_k}$, $|f(\zeta)| = M(e^{x_k}$.) *Если* $0 < \theta(t) < 1$, $|\tau| < \theta R_k$, *то имеет место соотношение*

$$f(\zeta e^{\tau}) = f(\zeta) e^{N_1\tau} \{1 + \omega(\tau)\},$$

где

$$|\omega(\tau)| \leqslant \frac{\theta^2(e^{2\Delta} - 1)}{e^{\Delta} - \theta^2}. \tag{32}$$

Теорема является следствием лемм 4 и 6.

Теорема IV (ср. теорему IV из [2]). *Пусть* $R_k = R_k(x_k, L_k, B)$ *и* $\Delta = \Delta(x_k, L_k, B)$ *определены соотношениями* (28) *и* (27), *величина* $\theta = \theta(x_k)$ *удовлетворяет условию*

$$0 < \theta(x_k) < \frac{1}{2} e^{-\frac{\Delta}{2}}, \tag{33}$$

а ζ *таково, что* $|\zeta| = e^{x_k}$, $|f(\zeta)| = M(e^{x_k})$, *Если* $|\tau| < \theta R_k$, $n = 2,3$ $4, \ldots$, *то имеет место соотношение*

$$f(\zeta e^{\tau}) = f(\zeta) \exp [N_1\tau + N_2\tau^2 + \cdots + N_n\tau^n] \{1 + \omega_n(\tau)\},$$

где

$$|\omega_n(\tau)| \leqslant 2e^2(n+1)(\theta e^{\frac{\Delta}{2}})^{n+1}. \tag{34}$$

Теорема является следствием лемм 5 и 6.

§ 3. Прежде чем перейти к доказательству основной теоремы II, мы изучим отображение окрестности точки $\tau = 0$, даваемое функцией $w(t) = f(\zeta e^{\tau})$, а также поведение при $t \to \infty$ некоторой вспомогательной величины.

На протяжении всего параграфа считаем, что $|\zeta| = e^{x_k}$, $|f(\zeta)| = M(e^{x_k})$, а

$$\theta = \theta(x_k) = 10\pi R_k. \tag{35}$$

Обозначим $\mathrm{Re}\,\tau$ через $\varkappa$, а $\mathrm{Im}\,\tau$ через λ.

В плоскости τ рассмотрим четыре прямоугольника:

$$A_1 : 0 > \varkappa > -\frac{1}{4}\theta R_k; \qquad \frac{1}{4}\theta R_k \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}\theta R_k;$$

$$A_2 : 0 > \varkappa > -\frac{1}{4}\theta R_k; \qquad -\frac{1}{4}\theta R_k \geqslant \lambda \geqslant -\frac{1}{2}\theta R_k;$$

$$A_3 : 0 < \varkappa < \frac{1}{4}\theta R_k; \qquad \frac{1}{4}\theta R_k \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{2}\theta R_k;$$

$$A_4 : 0 < \varkappa < \frac{1}{4}\theta R_k; \qquad -\frac{1}{4}\theta R_k \geqslant \lambda \geqslant -\frac{1}{2}\theta R_k.$$

Лемма 7. *Для всех достаточно больших значений x_k функция*

$$w(\tau) = f(\zeta e^{\tau})$$

отображает прямоугольники A_1 и A_2 на область, покрывающую кольцо

$$|f(\zeta)|\, e^{-2\pi} \leqslant |w| \leqslant |f(\zeta)|\, e^{-\pi}, \tag{36(1)}$$

а прямоугольники A_3 и A_4 — на область, покрывающую кольцо

$$f(\zeta) e^{2\pi} \geqslant |w| \geqslant |f(\zeta)|\, e^{\pi}. \tag{36(2)}$$

Доказательство. По теореме III, для $|\tau| < \theta R_k$ справедливо соотношение

$$f(\zeta e^{\tau}) = f(\zeta)\, e^{N_1\tau}\{1 + \omega(\tau)\}. \tag{37}$$

где

$$|\omega(\tau)| \leqslant \frac{\theta^2(e^{2\Delta} - 1)}{e^{\Delta} - \theta^2}.$$

Так как по лемме 2 $\lim\limits_{x_k\to\infty} \Delta(x_k, L_k, B) = \frac{1}{2}$,

то для достаточно больших x_k

$$|\omega(\tau)| \leqslant 2\theta^2. \tag{38}$$

Из (37) и (38) следует, что

$$\ln f(\zeta e^{\tau}) - \ln f(\zeta) = N_1\tau + \eta(\tau) = \Phi_k'(x_k)\,\tau + \eta(\tau),$$

где

$$|\eta(\tau)| = |\ln\{1 + \omega(\tau)\}| \leqslant 3\theta^2.$$

Теорема Руше дает возможность утверждать, что функция

$$\mu(\tau) = N_1\tau + \eta(\tau) = \Phi_k'(x_k)\,\tau + \eta(\tau)$$

отображает прямоугольники A_i, ($i = 1, 2, 3, 4$) соответственно на области: $\Omega_\mu^{(1)}$, содержащую прямоугольник

$$-3\theta^2 \geqslant \mathrm{Re}\mu \geqslant -2{,}5\pi + 3\theta^2; \quad 2{,}5\pi + 3\theta^2 \leqslant \mathrm{Im}\mu \leqslant 5\pi - 3\theta^2;$$

$\Omega_\mu^{(2)}$, содержащую прямоугольник

$$-3\theta^2 \geqslant \mathrm{Re}\mu \geqslant -2{,}5\pi + 3\theta^2; \quad -2{,}5\pi - 3\theta^2 \geqslant \mathrm{Im}\mu \geqslant -5\pi + 3\theta^2;$$

$\Omega_\mu^{(3)}$, содержащую прямоугольник

$$3\theta^2 \leqslant \mathrm{Re}\mu \leqslant 2{,}5\pi - 3\theta^2; \quad 2{,}5\pi + 3\theta^2 \leqslant \mathrm{Im}\mu \leqslant 5\pi - 3\theta^2;$$

$\Omega_\mu^{(4)}$, содержащую прямоугольник

$$3\theta^2 \leqslant \mathrm{Re}\mu \leqslant 2{,}5\pi - 3\theta^2; \quad -2{,}5\pi - 3\theta^2 \geqslant \mathrm{Im}\mu \geqslant -5\pi + 3\theta^2.$$

Поскольку $\lim\limits_{x_k\to\infty} \theta = 0$, то, при отображении

$$w(\tau) = f(\zeta)\exp\{\mu(\tau)\},$$

для достаточно больших x_k образы областей $\Omega_\mu^{(1)}$ и $\Omega_\mu^{(2)}$ покроют кольцо ($36^{(1)}$), а образы областей $\Omega_\mu^{(3)}$ и $\Omega_\mu^{(4)}$ покроют кольцо ($36^{(2)}$).

Лемма доказана.

Лемма 8. *Пусть $\gamma = \gamma(r)$ — некоторая функция, заданная на полуоси $r \geqslant 0$, и пусть n — число, равное либо $+1$, либо -1.*

Тогда во множестве

$$\{w : w = re^{i\gamma(r)}, \quad r \geqslant 0\} \tag{39}$$

существует точка w_0, а в одном из прямоугольников A_m^i, $1 \leqslant m \leqslant 4$ точка $\tau_0 = \varkappa_0 + i\lambda_0$, удовлетворяющие условиям

$$f(\zeta e^{\tau_0}) = w_0; \tag{40}$$

$$|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau_0})| \leqslant |\zeta e^{\tau_0}| \cdot \cos\lambda_0; \tag{41}$$

$$\operatorname{sign}(\lambda_0 \varkappa_0) = n. \tag{42}$$

Доказательство. Запишем очевидное равенство

$$|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau})| = |\zeta e^{\tau}| \cdot |\sin(\arg\zeta)\cdot\cos\lambda + \cos(\arg\zeta)\cdot\sin\lambda|. \tag{43}$$

Из (43) следует, что если $\frac{\pi}{2} \leqslant \arg\zeta < \pi$, или $\frac{3\pi}{2} \leqslant \arg\zeta < 2\pi$, то условие (41) выполняется для любой точки каждого из прямоугольников A_1 и A_3, а если $0 \leqslant \arg\zeta < \frac{\pi}{2}$, или $\pi \leqslant \arg\zeta < \frac{3\pi}{2}$ — то для любой точки каждого из прямоугольников A_2 и A_4. Зафиксируем ту пару прямоугольников, для всех точек которых при данном значении $\arg\zeta$, выполняется условие (41). Пусть это будут прямоугольники A_l и A_{l+2} $l = 1,2$. Очевидно, что из выбранной пары прямоугольников мы сможем выбрать один такой, чтобы выполнялось условие (42). Пусть это будет некоторый прямоугольник A_m, $1 \leqslant m \leqslant 4$.

По лемме 7 образ прямоугольника A_m при отображении $w(\tau) = f(\zeta e^{\tau})$ покрывает некоторое кольцо ($36^{(j)}$), $j = 1, 2$. Это кольцо имеет хотя бы одну точку w_0, общую с множеством (39), а следовательно, в прямоугольнике A_m имеется точка $\tau_0 = \varkappa_0 + i\lambda_0$, для которой выполняется условие (40).

Лемма доказана.

Лемма 9. *Пусть вещественные функции $\varkappa = \varkappa(x_k)$, $\lambda = \lambda(x_k)$ удовлетворяют требованиям*

$$|\varkappa(x_k)| < \frac{1}{4}\theta R_k, \tag{44}$$

$$\frac{1}{4}\theta R_k \leqslant |\lambda(x_k)| \leqslant \frac{1}{2}\theta R_k, \tag{45}$$

для $k = 1, 2, 3 \ldots$

Тогда, для достаточно больших k функция $\Phi_k(t) = \exp[t + L_k + 2Be^{-\frac{1}{2}t}]$ при $t = x_k$ удовлетворяет неравенству

$$\Phi_k(x_k + \varkappa + \ln\cos\lambda) - \Phi_k(x_k) - \Phi_k'(x_k)\varkappa + \frac{\lambda^2 - \varkappa^2}{2}\Phi_k''(x_k) \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{B\theta^2 e^{-\frac{1}{2}x_k}}{64} + \theta^3 \cdot O(\{\Phi_k'(x_k)\}^{-\frac{1}{2}}). \tag{46}$$

Доказательство. Предварительно заметим, что какова бы ни была константа B, для достаточно больших k, а следовательно, и x_k

$$1 - 2Be^{-\frac{1}{2}x_k} > 0. \tag{47}$$

Обозначим левую часть (46) через $T(x_k)$. Тогда

$$T(x_k)=\Phi_k(x_k)\left\{\exp\left[\varkappa+\ln\cos\lambda+2Be^{-\frac{1}{2}x_k}\left(e^{-\frac{1}{2}(\varkappa+\ln\cos\lambda)}-1\right)\right]-1-\right.$$
$$\left.-\left(1-Be^{-\frac{1}{2}x_k}\right)\varkappa+\frac{\lambda^2-\varkappa^2}{2}\left[\frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}x_k}+\left(1-Be^{-\frac{1}{2}x_k}\right)^2\right]\right\}=$$
$$=\Phi_k(x_k)\left\{\exp\left[\varkappa+\ln\cos\lambda+2Be^{-\frac{1}{2}x_k}\left(-\frac{1}{2}\left(\varkappa+\ln\cos\lambda\right)+\frac{1}{8}\varkappa^2+O(\lambda^3)\right)\right]-\right.$$
$$\left.-1-\left(1-Be^{-\frac{1}{2}x_k}\right)\varkappa+\frac{\lambda^2-\varkappa^2}{2}\left[\frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}x_k}+\left(1-Be^{-\frac{1}{2}x_k}\right)^2\right]\right\}=$$
$$=\Phi_k(x_k)\left\{\left(1-Be^{-\frac{1}{2}x_k}\right)(\varkappa+\ln\cos\lambda)+\frac{\varkappa^2}{4}Be^{-\frac{1}{2}x_k}+\frac{\varkappa^2}{2}\left(1-Be^{-\frac{1}{2}x_k}\right)^2-\right.$$
$$\left.-\left(1-Be^{-\frac{1}{2}x_k}\right)\varkappa+\frac{\lambda^2-\varkappa^2}{2}\left[\frac{1}{2}Be^{-\frac{1}{2}x_k}+\left(1-Be^{-\frac{1}{2}x_k}\right)^2\right]+O(\lambda^3)\right\}=$$
$$=-B\frac{\lambda^2}{4}e^{-\frac{1}{2}x_k}\Phi_k(x_k)\left[1-2Be^{-\frac{1}{2}x_k}\right]+\Phi_k(x_k)\cdot O(\lambda^3).$$

Отсюда, используя (47) и левую часть неравенства (45), легко вывести соотношение (46).

Переходим теперь к доказательству основной теоремы II. Пусть $f(z)$ такова, что выполняются условия (5) и (6). Предположим, что существует целая функция $F(w)$, не равная тождественно константе, такая, что функция $\varphi(z)=F(f(z))$ удовлетворяет условию (1). Рассмотрим некоторую точку ζ, $|\zeta|=e^{x_k}$, $|f(\zeta)|=M(e^{x_k})$. Будем считать, что x_k взято достаточно большим, так что все предыдущие леммы и теоремы имеют место. В точке ζ вычислим $N_2(\zeta)$ и положим $n=\operatorname{sign}(-\operatorname{Im}N_2(\zeta))$. В плоскости w рассмотрим множество точек

$$\{w: w=re^{i\gamma(r)},\ r\geqslant 0\},\tag{48}$$

на котором

$$|F(re^{i\gamma(r)})|=M(r,F).$$

Среди точек этого множества выберем такую точку w_0, чтобы выполнялись условия (40), (41) и (42).

По теореме IV справедливо соотношение

$$f(\zeta e^{\tau})=f(\zeta)\exp\left[N_1\tau+N_2\tau^2\right]\{1+\omega_2(\tau)\},\quad |\tau|\leqslant\theta R_k,\tag{49}$$

где

$$|\omega_2(\tau)|\leqslant 6e^2\left(\theta e^{\frac{\Delta}{2}}\right)^3,$$

а $R_k=R_k(x_k, L_k, B)$ определено соотношением (28).

Но по лемме 2

$$\lim_{x_k\to\infty}\Delta(x_k, L_k, B)=\frac{1}{2},$$

поэтому для достаточно больших x_k можно считать, что

$$|\omega_2(\tau)|<6e^3\theta^3.$$

Тогда из (49) будем иметь

$$|f(\zeta e^{\tau_0})|\geqslant|f(\zeta)|\exp\left[N_1\varkappa+\operatorname{Re}N_2(\varkappa_0^2-\lambda_0^2)-2\operatorname{Im}N_2\varkappa_0\lambda_0\right]\times$$
$$\times\{1-6e^3\theta^3\}.\tag{50}$$

Левую часть (50) оценим с помощью условия (1). Выбор точки w_0 был осуществлен так, что

$$|F(w_0)| = |\varphi(f(\zeta e^{\tau_0}))| = M(|f(\zeta e^{\tau_0})|, F).$$

По условию (1),

$$|\varphi(\zeta e^{\tau_0})| \leqslant M(|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau_0})|, \varphi) \leqslant M(M(|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau_0})|), F),$$

откуда получаем

$$|f(\zeta e^{\tau_0})| \leqslant M(|\operatorname{Im}(\zeta e^{\tau_0})|),$$

или, используя (41),

$$|f(\zeta e^{\tau_0})| \leqslant M(e^{x_k+\varkappa_0} \cdot \cos\lambda_0). \tag{51}$$

Подставляя (51) в (50) и логарифмируя, получим следующее неравенство:

$$\psi(x_k + \varkappa_0 + \ln\cos\lambda_0) \geqslant \psi(x_k) + N_1\varkappa_0 - \operatorname{Re} N_2(\lambda_0^2 - \varkappa_0^2) - \\ - 2\operatorname{Im} N_2\varkappa_0\lambda_0 + \ln(1 - 6e^{3\theta^3}). \tag{52}$$

Но по лемме 1

$$\psi(x_k + \varkappa_0 + \ln\cos\lambda_0) \leqslant \Phi(x_k + \varkappa_0 + \ln\cos\lambda_0),$$
$$\psi(x_k) = \Phi(x_k);$$

по лемме 3

$$N_1(\zeta) = \Phi_k'(x_k)$$
$$\operatorname{Re} N_2(\zeta) \leqslant \frac{1}{2}\Phi_k''(x_k),$$

а из выбора точки w_0 следует, что

$$\lambda_0^2 - \varkappa_0^2 > 0,$$
$$-2\operatorname{Im} N_2(\zeta)\varkappa_0\lambda_0 > 0.$$

Поэтому, усиливая неравенство (52), можно записать

$$\Phi_k(x_k + \varkappa_0 + \ln\cos\lambda_0) - \Phi_k(x_k) - \Phi_k'(x_k)\,\varkappa_0 + \frac{\lambda_0^2 - \varkappa_0^2}{2}\Phi_k''(x_k) \geqslant -6{,}5e^{3\theta^3}. \tag{53}$$

Используя лемму 9, (35) и (53), получаем неравенство

$$-\frac{Be^{-\frac{1}{2}x_k}}{64} + o(1)\,e^{-\frac{1}{2}\left(x_k + L_k + 2Be^{-\frac{1}{2}x_k}\right)} \geqslant -10 \cdot 6{,}5 \cdot \pi e^3 e^{-\frac{1}{2}\left(x_k + L_k + 2Be^{-\frac{1}{2}x_k}\right)},$$

или

$$-\frac{B}{64} \geqslant -70\pi e^3 e^{-\frac{1}{2}L_k}.$$

Но это неравенство невозможно для

$$B \geqslant B_L = 5 \cdot 10^5 \cdot e^{-\frac{1}{2}L}.$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

З а м е ч а н и е. В [2] И. В. Островский доказал также следующую теорему.

Теорема V. *Пусть* $F(w)$ *и* $f(z)$ — *целые функции. Предположим, что функция* $F(w) \not\equiv \mathrm{const}$ *и такова, что на каждой окружности* $|w| = \mathrm{const}$ *найдется точка* w_0 *такая, что*

$$F(w_0) = M(|w_0|, F). \tag{54}$$

...*жим*

$$\varphi(z) = F(f(z)).$$

... $\varphi(z)$ *удовлетворяет условию*

$$\operatorname{Re} \varphi(x+iy) \leqslant M(|y|, \varphi), \quad -\infty < x, \ y < \infty, \tag{55}$$

...*либо* $f(z)$ *полином степени не выше* 2, *либо* $f(z)$ — *целая функция* ...*ниже нормального типа порядка* 1.

Если под множеством (48) понимать множество, на котором

$$F(re^{i\gamma(r)}) = M(r, F),$$

...условие (1) заменить условием (55), то, повторяя дословно доказательство теоремы I, можно доказать следующую теорему.

Теорема VI. *Пусть* $F(w)$ *и* $f(z)$ — *целые функции. Предположим, что* ...*ция* $F(w) = \mathrm{const}$ *и такова, что на каждой окружности* $|w| = \mathrm{const}$ ...*ется точка* w_0 *такая, что выполняется условие* (54). *Если функция* ...*такова, что для некоторого* L *можно указать такую последовательность* ... $0 < r_1 < r_1' < r_2 < r_2' < \cdots < r_k < r_k' < \cdots$, *что выполняются усло*... (5) *и* (6), *то целая функция* $\varphi(z) = F(f(z))$ *не может удовлетворять* ...*ию* (55).

Автор выражает искреннюю благодарность И. В. Островскому за ...щь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. В. Линник. Разложения вероятностных законов. Изд-во ЛГУ, Л., 1960.

2. И. В. Островский. О целых функциях, удовлетворяющих некоторым специальным неравенствам, связанным с теорией характеристических функций вероятностных законов. «Уч. зап. мех.-матем. ф-та и ХМО», 29, 1963, стр. 145—168.

3. И. В. Островский. О росте целых характеристических функций вероятностных законов. Сб. «Современные проблемы теории аналитических функций». «Наука», М., 1966.

4. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций, ГИТТЛ, М., 1956.

Поступила 21 января 1967 г.