# НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ О ФУНКЦИЯХ, ПЕРИОДИЧЕСКИХ В СРЕДНЕМ

*Ю. И. Любич, В. А. Ткаченко*

## § 1. ВВЕДЕНИЕ

Понятие функции, периодической в среднем, было введено Ж. Дельсартом [1] и усовершенствовано Л. Шварцем [2]. Согласно Л. Шварцу непрерывная комплекснозначная функция $g(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ называется *периодической в среднем* (п. в с.), если замкнутая линейная оболочка $T_g$ «сдвижек» $g_t(x) = g(x+t)\,(-\infty < t < \infty)$ неплотна в линейном топологическом пространстве* $C$ всех непрерывных функций на $(-\infty, \infty)$. Это свойство эквивалентно существованию такого $N > 0$ и такой функции $\tau(x)$ ограниченной вариации на $[-N, N]$, что выполняется интегральное уравнение

$$\int_{-N}^{N} g(x+t)\,d\tau(x) = 0 \quad (-\infty < t < \infty). \tag{1.1}$$

Линейной заменой переменных уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$\int_{0}^{1} f(x+t)\,d\sigma(x) = 0 \quad (-\infty < t < \infty), \tag{1.2}$$

где функции $f$, $\sigma$ понятным образом связаны с функциями $g$, $\tau$. Не умаляя общности, можно считать, что концы $x = 0$, $1$ являются точками роста функции $\sigma(x)$. В дальнейшем мы оперируем лишь с решениями уравнения (1.2) в качестве функций п. в с.

Если $\sigma(x) = x$, то множество решений уравнения (1.2) совпадает с множеством непрерывных периодических функций периода 1, имеющих нулевое среднее значение. По аналогии с периодическими функциями для функций п. в с. можно определить понятие спектра по Берлингу [2, 3].

Определение 1. *Спектром по Берлингу п. в с. функции $f$ называется множество $S_f^B$ тех значений $\lambda$, для которых $e^{\lambda x} \in T_f$.*

Определение 2. *Если $\lambda \in S_f^B$, то кратностью точки $\lambda$ в спектре $S_f^B$ называется наибольшее целое $r \geqslant 1$, для которого $x^{r-1} e^{\lambda x} \in T_f$.*

---

* Топология в $C$ определяется счетной системой полунорм: $p_N(\varphi) = \max\limits_{|x| \le N} |\varphi(x)|$ $(N = 1, 2, 3, \ldots)$.

Определение 2 корректно, так как, если $x^{r-1}e^{\lambda x} \in T_f$, то $x^{r-1}e^{\lambda x}$ является вместе с $f$ решением уравнения* (1.2), откуда

$$\int_0^1 x^k e^{\lambda x}\, d\sigma(x) = 0 \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-1),$$

т. е. $\lambda$ является корнем характеристической функции

$$\Delta(\lambda) = \int_0^1 e^{\lambda x}\, d\sigma(x)$$

кратности, не меньшей $r$. Из этого же замечания ясно, что спектр по Берлингу любой п. в с. функции не более, чем счетен.

Основная теорема о функциях п. в с., установленная Л. Шварцем [2] (см. также [4, 5]), гласит:

*Если $f \neq 0$ — п. в с. функция, $S_f^B = \{\lambda_k\}_1^\infty$, $r_k$ — кратность точки $\lambda_k$ в $S_f^B$, то функция $f$ принадлежит замыканию** линейной оболочки системы*

$$e^{\lambda_k x},\ xe^{\lambda_k x},\ \ldots,\ x^{r_k-1}e^{\lambda_k x} \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Следовательно, если $f \neq 0$, то $S_f^B \neq \varnothing$.

В настоящей статье излагается доказательство этой теоремы на основе *локального преобразования Лапласа* (л. п. Л.). введенного в [6] по другому поводу***. Собственно доказательство содержится в § 4. В §§ 2, 3 собраны необходимые сведения из элементарной спектральной теории функций п. в с. и из теории л. п. Л.

## § 2. ЭЛЕМЕНТАРНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ П. В С.

Еще Ж. Дельсарт ввел понятие обобщенного ряда Фурье функции п. в с. [1]. Формальное определение таково: *обобщенным рядом Фурье п. в с. функции $f(x)$ называется ряд*

$$\sum_{\Delta(\lambda)=0} P_\lambda(x)\, e^{\lambda x}. \tag{2.1}$$

*Здесь $P_\lambda(x)$ — полином, определяемый формулой*

$$P_\lambda(x) = e^{-\lambda x} \operatorname*{Res}_{\mu=\lambda} \left\{ \frac{E_f(\mu)}{\Delta(\mu)}\, e^{\mu x} \right\} \tag{2.2}$$

и

$$E_f(\mu) = \int_0^1 e^{\mu y}\, d\sigma(y) \int_0^y f(s)\, e^{-\mu s}\, ds. \tag{2.3}$$

Это определение может показаться искусственным, но с ним легко согласиться, заметив, что формально

$$\sum_\lambda P_\lambda(x)\, e^{\lambda x} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathrm{Re}\lambda=\mathrm{const}} \frac{E_f(\lambda)}{\Delta(\lambda)}\, e^{\lambda x}\, d\lambda,\quad \frac{E_f(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \int_0^\infty f(x)\, e^{-\lambda x}\, dx. \tag{2.4}$$

* Вообще, если $f$ — решение уравнения (1.2), то все функции из $T_f$ также являются решениями.

** По-прежнему в пространстве $C$.

*** Здесь мы несколько модифицируем определение л. п. Л.

Кроме того, в периодическом случае ($\sigma(x) = x$) ряд (2.1) превращается в обычный ряд Фурье.

Положим

$$E(x, \lambda) = \operatorname*{Res}_{\mu=\lambda} \frac{e^{-\mu x} \int\limits_x^1 e^{\mu y}\, d\sigma(y)}{\Delta(\mu)}. \tag{2.5}$$

***Лемма 1.*** *Имеет место формула*

$$P_\lambda(x) e^{\lambda x} = \int\limits_0^1 E(s, \lambda) f(s + x)\, ds. \tag{2.6}$$

Доказательство. Очевидно,

$$P_\lambda(x) e^{\lambda x} = \operatorname*{Res}_{\mu=\lambda} \left\{ \frac{1}{\Delta(\mu)} e^{\mu x} \int\limits_0^1 e^{\mu y}\, d\sigma(y) \int\limits_x^y f(s) e^{-\mu s}\, ds \right\}. \tag{2.7}$$

Но

$$e^{\mu x} \int\limits_0^1 e^{\mu y}\, d\sigma(y) \int\limits_x^y f(s) e^{-\mu s}\, ds = \int\limits_0^1 d\sigma(y) \int\limits_x^y f(x + y - t) e^{\mu t}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^1 d\sigma(y) \int\limits_0^y f(x + y - t) e^{\mu t}\, dt + \int\limits_x^0 e^{\mu t}\, dt \int\limits_0^1 f(x + y - t)\, d\sigma(y).$$

Второе слагаемое равно нулю вследствие уравнения (1.2). Первое слагаемое записывается в виде

$$\int\limits_0^1 f(x + s)\, ds \int\limits_s^1 e^{\mu(y-s)}\, d\sigma(y).$$

В силу (2.7)

$$P_\lambda(x) e^{\lambda x} = \operatorname*{Res}_{\mu=\lambda} \left\{ \frac{1}{\Delta(\mu)} \int\limits_0^1 f(x + s)\, ds \int\limits_s^1 e^{\mu(y-s)}\, d\sigma(y) \right\},$$

что совпадает с (2.6) в силу (2.5).

Лемма 1 доказана. Отправляясь от нее, рассмотрим в $C$ следующий оператор $\tilde{E}_\lambda$:

$$(\tilde{E}_\lambda g)(x) = \int\limits_0^1 E(s, \lambda) g(s + x)\, ds.$$

Очевидно, $\tilde{E}_\lambda$ — линейный непрерывный оператор.

Обозначим через $C_\sigma$ подпространство решений уравнения (1.2).

***Лемма 2.*** *Подпространство $C_\sigma$ инвариантно относительно оператора $\tilde{E}_\lambda$.*

Действительно, если $f_1 \in C_\sigma$, то

$$\int\limits_0^1 d\sigma(x) \int\limits_0^1 E(s, \lambda) f(s + x + t)\, ds = \int\limits_0^1 E(s, \lambda)\, ds \int\limits_0^1 f(s + x + t)\, d\sigma(x) =$$

$$= 0 \quad (-\infty < t < \infty),$$

т. е. $\tilde{E}_\lambda f \in C_\sigma$.

Обозначим сужение оператора $\tilde{E}_\lambda$ на подпространство $C_\sigma$ через $E_\lambda$.

***Лемма 3.*** *$\{E_\lambda\}$ — ортогональное семейство проекторов:*

$$E_\lambda^2 = E_\lambda, \quad E_\omega E_\lambda = 0 \quad (\omega \neq \lambda). \tag{2.8}$$

Доказательство. Предположим, что $\lambda$ является корнем характеристической функции $\Delta(\mu)$; в противном случае $E_\lambda = 0$ и формулы (2.8) тривиальны. Обозначим кратность корня $\lambda$ через $r$. Очевидно, в силу (2.2)

$$\deg P_\lambda \leqslant r - 1.$$

Поэтому достаточно проверить, что для $k = 0, 1, \ldots, r-1$

$$E_\omega [x^k e^{\lambda x}] = \begin{cases} 0 & (\omega \neq \lambda) \\ x^k e^{\lambda x} & (\omega = \lambda). \end{cases} \tag{2,9}$$

С этой целью подсчитаем

$$\tilde{E}_\omega [e^{\zeta x}]$$

как функцию от $\zeta$:

$$\tilde{E}_\omega [e^{\zeta x}] = \int_0^1 E(s, \omega) e^{\zeta(s+x)} ds =$$

$$= e^{\zeta x} \operatorname*{Res}_{\mu=\omega} \frac{\int_0^1 e^{(\zeta-\mu)s} ds \int_s^1 e^{\mu y} d\sigma(y)}{\Delta(\mu)}$$

в силу (2.5). Меняя порядок интегрирования, находим после простых преобразований:

$$\tilde{E}_\omega [e^{\zeta x}] = e^{\zeta x} \operatorname*{Res}_{\mu=\omega} \frac{1}{\Delta(\mu)} \frac{\Delta(\zeta) - \Delta(\mu)}{\zeta - \mu}.$$

Продифференцируем эту формулу $k$ раз $(0 \leqslant k \leqslant r-1)$ по параметру $\zeta$:

$$\tilde{E}_\omega [x^k e^{\zeta x}] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} e^{\zeta x} \operatorname*{Res}_{\mu=\omega} \frac{1}{\Delta(\mu)} \left\{ (-1)^j j! \frac{\Delta(\zeta) - \Delta(\mu)}{(\zeta - \mu)^{j+1}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{j} \binom{j}{i} \Delta^{(i)}(\zeta) \frac{(-1)^{j-i} (j-i)!}{(\zeta - \mu)^{j-i+1}} \right\}.$$

При $\zeta = \lambda$ получаем

$$E_\omega [x^k e^{\lambda x}] = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} x^{k-j} e^{\lambda x} \operatorname*{Res}_{\mu=\omega} \frac{j!}{(\mu - \lambda)^{j+1}} = x^k e^{\lambda x} \operatorname*{Res}_{\mu=\omega} \frac{1}{\mu - \lambda}.$$

Отсюда непосредственно вытекает (2.9). Лемма 3 доказана.

Определение 3. *Спектром по Фурье п. в с. функции $f$ называется множество $S_f^F$ тех $\lambda$, для которых $E_\lambda f \neq 0$ (т. е. $P_\lambda \neq 0$).*

Определение 4. *Если $\lambda \in S_f^F$, то кратностью точки $\lambda$ в спектре $S_f^F$ называется число* $\deg P_\lambda + 1$.

Имеет место следующий важный факт:

***Теорема 1.*** *Для любой п. в с. функции $f$ спектры по Берлингу и по Фурье совпадают и кратности любой точки $\lambda$ в обоих спектрах равны.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in S_f^F$ и кратность точки $\lambda$ в спектре $S_f^F$ равна $r$. Из леммы 1 следует, что

$$P_\lambda(x)e^{\lambda x} \in T_f.$$

Но подпространство $T_f$ инвариантно относительно операторов сдвига

$$(\tau_h g)(x) = g(x+h) \quad (-\infty < h < \infty).$$

Поэтому $T_f$ инвариантно относительно оператора дифференцирования $\frac{d}{dx}$. Следовательно,

$$P_\lambda^{(k)}(x)e^{\lambda x} = \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^k [P_\lambda(x)e^{\lambda x}] \in T_f (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-1).$$

Так как $\deg P_\lambda = r - 1$, то

$$x^k e^{\lambda x} \in T_f \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ r-1).$$

Но это означает, что $\lambda \in S_f^B$ и кратность точки $\lambda$ в спектре $S_f^B$ не меньше $r$.

Пусть, наоборот, $\lambda \in S_f^B$ и кратность точки $\lambda$ в спектре $S_f^B$ равна $r$. Тогда, как было отмечено в § 1,

$$x^{r-1}e^{\lambda x} \in C_\sigma.$$

Поэтому, если

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} f(x + h_{n,k}) = x^{r-1}e^{\lambda x}$$

в $C$, то в силу леммы 3

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{n,k} e^{\lambda h_{n,k}} P_\lambda(x + h_{n,k}) = x^{r-1}. \tag{2.10}$$

(Это соотношение получается из предыдущего действием оператора $E_\lambda$, причем используется очевидное свойство перестановочности $E_\lambda$ с операторами сдвига $\tau_h$). Из (2.10) видно, что $P_\lambda \neq 0$, т. е. $\lambda \in S_f^F$ и $\deg P_\lambda \geqslant r - 1$, т. е. кратность точки $\lambda$ в спектре $S_f^F$ не меньше $r$.

Теорема доказана. Теперь мы можем говорить просто о спектре $S_f$ п. в с. функции $f$ и о кратности точки $\lambda$ в спектре $S_f$.

Следствие. *Если $S_f = \varnothing$, то функция*

$$L_f(\lambda) = \frac{E_f(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

*целая.*

Это ясно из формулы (2.2)

## § 3. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ЛОКАЛЬНОМ ПРЕОБРАЗОВАНИИ ЛАПЛАСА

Из нескольких возможных вариантов определения л. п. Л. мы выберем тот, который наилучшим образом соответствует целям настоящей статьи.

*Пусть* $F(\lambda)$ — *мероморфная функция. Функция* $F(\lambda)$ *называется л. п. Л., если существует такая локально суммируемая функция* $f(x)$ $(x \geqslant 0)$, *что имеет место представление*

$$F(\lambda) = \int_0^t f(s) e^{-\lambda s} ds + \varepsilon(\lambda, t) \quad (t > 0), \tag{3.1}$$

*где «остаточный член»* $\varepsilon(\lambda, t)$ *подчинен условию:*

$$\overline{\lim_{\lambda \to +\infty}}^* \frac{\ln|\varepsilon(\lambda, t)|}{\lambda} \leqslant -t. \tag{3.2}$$

Символ $\overline{\lim}^*$ означает верхний предел по некоторому множеству $M \subset (0, \infty)$ полной относительной меры, т. е. такому, что

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\operatorname{mes}[M \cap (0, R)]}{R} = 1.$$

Функция $f(x)$ называется оригиналом для $F(\lambda)$.

Очевидно, если $F(\lambda)$ является классическим преобразованием Лапласа,

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(x) e^{-\lambda x} dx,$$

то $F(\lambda)$ *является и л. п. Л. с тем же оригиналом.*

В дальнейшем существенно используется следующий общий аналитический факт:

**Лемма 4.** *Если некоторая функция* $\eta(\lambda)$ *голоморфна и конечной степени в некотором угле** $|\arg \lambda| < \delta$, *то*

$$\overline{\lim_{\lambda \to +\infty}}^* \frac{\ln|\eta(\lambda)|}{\lambda} = -\overline{\lim_{\lambda \to +\infty}} \frac{\ln|\eta(\lambda)|}{\lambda}. \tag{3.3}$$

Эта лемма легко вытекает из известной в теории роста аналитических функций теоремы В. Бернштейна [7], [8, стр. 99—100]. Опираясь на нее, мы установим теорему об обращении л. п. Л.

**Теорема 2.** *Пусть мероморфная функция* $F(\lambda)$ *является л. п. Л. и в некотором угле* $|\arg \lambda| < \delta$ *голоморфна и конечной степени. Тогда функция*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_1^\infty \frac{F(\lambda)}{\lambda} e^{\lambda z} d\lambda \quad (\operatorname{Re} z < 0)$$

*аналитически продолжается на всю плоскость с разрезом по лучу* $z \geqslant 0$ *и на разрезе*

$$\lim_{y \to +0} \{\Phi(x + iy) - \Phi(x - iy)\} = \int_0^x f(s) ds. \tag{3.4}$$

---

* Конечность степени в угле $|\arg \lambda| < \delta$ означает, что $\overline{\lim\limits_{\substack{|\lambda| \to \infty \\ |\arg \lambda| < \delta}}} \frac{\ln|\eta(\lambda)|}{|\lambda|} < \infty$.

Доказательство. Рассмотрим производную

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_1^\infty F(\lambda)\, e^{\lambda z}\, d\lambda = \Phi_1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 F(\lambda)\, e^{\lambda z}\, d\lambda,$$

где

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty F(\lambda)\, e^{\lambda z}\, d\lambda.$$

В силу (3.1)

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^t \frac{f(s)\, ds}{s - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \varepsilon(\lambda, t)\, e^{\lambda z}\, d\lambda \quad (t > 0). \tag{3.5}$$

Первое слагаемое в представлении (3.5), очевидно, есть функция, голоморфная в плоскости с разрезом $[0, t)$. Второе слагаемое в силу (3.2) голоморфно в полуплоскости $\operatorname{Re} z < t$. Следовательно, функция $\Phi_1(z)$ аналитически продолжается в полуплоскость $\operatorname{Re} z < t$ с разрезом $[0, t)$. Так как $t > 0$ произвольно, то $\Phi_1(z)$ продолжается на всю плоскость с разрезом $[0, \infty)$. Тем же свойством обладает функция $\Phi(z)$, ибо ее производная отличается от $\Phi_1(z)$ на целую функцию.

Вновь обращаясь к (3.5), получаем

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_0^t f(s)\ln(z - s)\, ds + \psi(z, t),$$

где $\psi(z, t)$ — функция, голоморфная в полуплоскости $\operatorname{Re} z < t$, $\ln\zeta$ означает главную ветвь логарифма. Следовательно,

$$\Phi(x + iy) - \Phi(x - iy) = \int_0^t f(s)\,\frac{\arg(x - s - iy) - \arg(x - s + iy)}{2\pi}\, ds +$$
$$+ \Psi(x + iy, t) - \Psi(x - iy, t) \quad (0 < x < t,\ y > 0).$$

Отсюда

$$\lim_{y\to 0}\{\Phi(x + iy) - \Phi(x - iy)\} = \int_0^x f(s)\, ds,$$

что и требовалось доказать.

Следствие. *Оригинал для л. п. Л. определен однозначно (с точностью до значений на множестве меры нуль).*

Роль л. п. Л. в теории функций п. в с. определяется следующим предложением (ср. с (2.4)):

**Теорема 3.** *Если $f$ — функция п. в с., то мероморфная функция*

$$L_f(\lambda) = \frac{E_f(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

*является л. п. Л. с оригиналом $f$.*

Доказательство. Из уравнения (1.2)

$$\int_0^t e^{-\lambda s}\, d\lambda \int_0^1 f(x + s)\, d\sigma(x) = 0 \qquad (t > 0),$$

откуда

$$\int_0^1 e^{\lambda x}\, d\sigma(x) \int_x^{x+t} f(s)\, e^{-\lambda s}\, ds = 0$$

и в силу (2.3)

$$L_f(\lambda) = \int_0^t f(s)\, e^{-\lambda s}\, ds + \varepsilon(\lambda,\ t),$$

где

$$\varepsilon(\lambda,\ t) = \frac{\int_0^1 e^{\lambda x}\, d\sigma(x) \int_t^{t+x} f(s)\, e^{-\lambda s}\, ds}{\Delta(\lambda)}. \qquad (3.6)$$

Для того чтобы получить оценку (3.2), заметим, что $\Delta'(\lambda)$ является целой функцией конечной степени вполне регулярного роста [8, стр. 324] с индикаторной диаграммой [0, 1]. Поэтому

$$\lim_{\lambda\to+\infty}{}^{*} \frac{\ln|\Delta(\lambda)|}{\lambda} = 1.$$

В то же время числитель дроби (3.6), очевидно, является $O(e^{\lambda(1-t)})$ при $\lambda > 0$. Тем самым (3.2) действительно имеет место.

Следствие *П. в с. функция однозначно определяется своими значениями на* [0, 1].

Действительно, если $f(x) = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, то $L_f = 0$. Согласно теореме 3 и следствию теоремы 2 $f(x) = 0$ при всех* $x \geqslant 0$. Остается заметить, что функция $f_1(x) = f(1-x)$ также является п. в с. и равна нулю на [0, 1].

## § 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Достаточно установить, что каков бы ни был отрезок $[a,\ b]$ вещественной оси и функция $\rho(x)$ ограниченной вариации на $[a,\ b]$ такая, что

$$\int_a^b x^j e^{\lambda_k x}\, d\rho(x) = 0 \quad (k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots;\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ r_{k-1}), \qquad (4.1)$$

выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)\, d\rho(x) = 0.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(t) = \int_a^b f(x+t)\, d\rho(x) \quad (-\infty < t < \infty).$$

Достаточно доказать, что $\varphi(0) = 0$.

---

* Напомним, что п. в с. функции непрерывны.

Функция $\varphi$ вместе с $f$ удовлетворяет уравнению (1.2). В силу леммы 1 и условия (4.1) спектр функции $\varphi$ пуст, т. е. согласно следствию теоремы 1 функция

$$L_\varphi(\lambda) = \frac{E_\varphi(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

целая и, очевидно, конечной степени. Ее индикаторная диаграмма есть разность индикаторных диаграмм числителя и знаменателя [8, стр. 208]. Но индикаторная диаграмма числителя содержится в отрезке [0, 1]. Это ясно из (2.3). Индикаторная диаграмма знаменателя совпадает с [0, 1]. Следовательно, $L_\varphi(\lambda)$ — целая функция нулевой степени. В силу теоремы 3 доказательство завершается ссылкой на следующее предложение.

**Теорема 4.** *Если л. п. Л. $F(\lambda)$ — целая функция нулевой степени, то оригинал $f$ равен нулю (почти всюду).*

Доказательство. Воспользуемся формулой обращения для л. п. Л. (теорема 2). Функция

$$\Phi'(z) = \int_1^\infty F(\lambda) e^{\lambda z} d\lambda \quad (\operatorname{Re} z < 0)$$

несущественно отличается от функции, ассоциированной по Борелю с $F(\lambda)$. Согласно классической теореме Полиа [9], [8, стр. 114—116] функция $F^*(z)$ аналитически продолжается на всю плоскость с выколотой точкой* $z = 0$. Точно так же, очевидно, продолжается функция $\Phi'(z)$. Но тогда

$$\int_0^x f(s)\,ds = \lim_{y\to 0}\{\Phi(x+iy) - \Phi(x-iy)\} = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \Phi'(z) = \text{const},$$

откуда $f(x) = 0$ почти всюду.

## ЛИТЕРАТУРА

1. J. Delsarte. Les fonctions moyenne-pèriodiques, Journ. Math. pure et appl., sér. 9, 14 (1935), 403—453.
2. L. Schwartz. Theorie generale des fonctions moyenne-periodiques, Ann. of Math, 48 (1947), 857—929.
3. A. Beurling. Un theoréme sur les fonctions uniforment bornees et continues sur l'axe rèel, Acta Math., 77 (1945), 127—136.
4. J.—P. Kahane. Sur quelques problemes d'unicite et de prolongement relatifs aux fonctions approchables par des sommes d'exponentielles, Ann. Inst. Fourier, 5 (1955), 39—130.
5. Б. Мальгранж. Об уравнениях свертки. Сб. переводов «Математика», 7 : 2 (1963), 33—38.
6. Ю. И. Любич. Об условиях разрешимости абстрактной задачи Коши ДАН СССР, 154 (1964), 41—44.
7. V. Bernstein. Sopra una proposiziona relativa alla creszenza delle funzioni holomorfe, Ann. Scuola norm. sup., Pisa (2), 2 (1933).
8. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 1956.
9. G. Polya. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen, Math. Zeitsch., 29 (1929), 549—624.

*Поступила 4 апреля 1966 г.*

* Эта точка совпадает с зеркальным отражением в вещественной оси индикаторной диаграммы функции $F(\lambda)$.