ЎзССР
ФАНЛАР АКАДЕМИЯСИНИНГ
ДОКЛАДЛАРИ

Журнал 1944 йилдан чиқа бошлаган

3

1978

ДОКЛАДЫ
АКАДЕМИИ НАУК
УзССР

Журнал издается с 1944 года

ФАН

Ўзбекистон ССР Фанлар академиясининг доклaдлари—Доклады Академии наук УзССР

1978, № 3

УДК 513.88:519.4

В. Н. КАЛЮЖНЫЙ

ЧИСЛОВАЯ ОБЛАСТЬ И ОБЛАСТИ ЛОКАЛИЗАЦИИ МАТРИЦ НАД ПОЛЕМ С УЛЬТРАМЕТРИЧЕСКИМ АБСОЛЮТНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ

(Представлено акад. АН УзССР Т. А. Сарымсаковым)

Будем пользоваться терминологией работы [1]. Пусть K — поле с нетривиальным ультраметрическим абсолютным значением, E — неархимедово нормированное, конечномерное, линейное пространство над K, обладающее ортонормированным базисом, E^* — сопряженное пространство. Положим

$$B(a,\ r)=\{t\in K: |t-a|\leqslant r\}.$$

Числовой областью линейного оператора A в пространстве E назовем множество

$$W(A)=\{f(Ax): x\in E,\ f\in E^*,\ \|x\|=\|f\|=f(x)=1\}.$$

Такое определение является общепринятым в случае нормированных пространств над полем комплексных чисел [2] и сводится к стандартному определению [3] в случае евклидова пространства. Пусть (a_{ij}) — матрица оператора A в некотором ортонормированном базисе. Норма оператора A находится по формуле $\|A\|=\max\limits_{i,j}|a_{ij}|$. Величина

$$\max\{|a_{ij}|,\ |a_{ii}-a_{jj}|: i\neq j\}$$

не зависит от выбора базиса, обозначим ее $\delta(A)$. Легко видеть, что $\delta(A)=\|A-a_{ii}\|$. Заметим, что диск $B(a_{ii},\ \delta(A))$ один и тот же для всех i. Обозначим его $B(A)$.

Теорема 1. Справедливо равенство $W(A)=B(A)$.

Следствие 1. Для любого собственного значения λ оператора A выполняется равенство $W(A)=B(\lambda,\ \|A-\lambda\|)$.

Для сравнения напомним, что в обычном случае числовая область является пересечением дисков $B(z,\ \|A-z\|)$ по всем комплексным z и представляет собой выпуклое множество довольно произвольной формы.

Следствие 2. Числовая область ортогональной суммы операторов совпадает с наименьшим диском, содержащим их числовые области.

Числовым радиусом оператора A называется величина

$$w(A)=\sup\{|\alpha|: \alpha\in W(A)\}.$$

Предложение 1. Имеет место равенство $w(A)=\|A\|$.

Следствие 1. Выполняется субмультипликативное неравенство $w(AB)\leqslant w(A)w(B)$.

Последние два утверждения в евклидовом случае не верны [3].

Следствие 2. Для любого оператора A существует такой ортонормированный базис, что $\|A\|=|a_{11}|$.

Размахом линейного оператора называется величина [4]

$$s(A) = \max\{|\lambda - \mu| : \lambda,\ \mu \in \sigma(A)\}.$$

Пусть $D(A)$ — наименьший диск, содержащий спектр $\sigma(A)$ оператора A. Легко видеть, что радиус диска $D(A)$ равен $s(A)$ и что $D(A) \subset W(A)$. Оператор A назовем нормальным, если он обладает ортогональным базисом из собственных векторов.

Предложение 2. Если оператор A нормален, то $D(A) = W(A)$. Обратное выполняется в двумерном пространстве и не верно в общем случае. Тем не менее справедливо

Предложение 3. Пусть A — оператор с простым спектром, причем $|\lambda - \mu| = s(A)$ для всех $\lambda \neq \mu \in \sigma(A)$. Тогда если $D(A) = W(A)$, то A нормален.

Предложение 4. Пусть $A = U^{-1} T^{-1} UT$, где U — изометрия, и $0 \overline{\in} \sigma(T)$. Тогда $\sigma(A) \subset W(T) W(T)^{-1}$.

Числовая область оператора является естественной областью локализации его спектра. Приведем теперь аналоги теорем Островского и Брауэра [4], дающие более точную локализацию. Введем величины

$$P_i = \max_{j \neq i} |a_{ij}|, \qquad Q_j = \max_{i \neq j} |a_{ij}|.$$

Теорема 1 означает, что числовая область оператора A является наименьшим кругом, содержащим все “круги Гершгорина“ $B(a_{ii}, P_i)$.

Теорема 2. Для любого $s \in [0, 1]$ выполняется включение

$$\sigma(A) \subset \bigcup_i B\left(a_{ii},\ P_i^s\ Q_i^{1-s}\right).$$

Следствие. Для спектрального радиуса оператора A выполняется неравенство

$$\rho(A) \leqslant \max_i \left\{|a_{ii}|,\ P_i^s\ Q_i^{1-s}\right\}.$$

При $s = 1$ эта оценка превращается в простейшую $\rho(A) \leqslant \|A\|$.

Рассмотрим „овал Кассини“

$$Q(a, b, r) = \{t \in K : |t - a||t - b| \leqslant r\}.$$

Теорема 3. Пусть $0 \leqslant s \leqslant 1$. Тогда

$$\sigma(A) \subset \bigcup_{i<j} Q\left(a_{ii},\ a_{jj},\ (P_i\ P_j)^s\ (Q_i\ Q_j)^{1-s}\right).$$

Явный вид овала устанавливает

Предложение 5. Если $|a - b|^2 > r$, то

$$Q(a, b, r) = B\left(a, \frac{r}{|a-b|}\right) \cup B\left(b, \frac{r}{|a-b|}\right).$$

Если же $|a - b|^2 \leqslant r$, то

$$Q(a, b, r) = B(a, \sqrt{r}) = B(b, \sqrt{r}).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Monna A. F., Analyse non-archimédienne Springer-Verlag, Berlin, 1971.
2. Bonsall F. F., Duncan J. Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras, Cambridge Univ. Press., London, 1971.
3. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах, М., «Мир», 1970.
4. Маркус М., Минк X. Обзор по теории матриц и матричных неравенств, М., «Наука», 1972.

Харьковский
ордена Трудового Красного Знамени
государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
8. VIII 1977 г.