ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Выпуск 10 1970

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ ТИПА МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ I

М. Н. Шеремета

Пусть функция $\omega(z)$, $z=\rho e^{i\theta}=\tau+it$, аналитическая в области $D_{a,\eta}=\{\rho>a,\ |\theta|<\pi-\eta\}$, где $\eta>0$ — некоторая достаточно малая постоянная, действительная на действительной оси, удовлетворяет следующим условиям:

1) $\omega(z)=\omega(\rho)+\omega_1(\rho,\theta)+i\omega_2(\rho,\theta)$, где $\omega_1(\rho,\theta)$ и $\omega_2(\rho,\theta)$ — действительные величины, которые при $|\theta|<\pi-\eta$ и $\rho\to\infty$ удовлетворяют следующим соотношениям:

1) $\omega_1(\rho,\theta)=O\left(\frac{1}{\ln\rho\ln_2\rho}\right)$ и $\omega_2(\rho,\theta)=O\left(\frac{1}{\ln\rho\ln_2\rho}\right)$;

2) $\omega'(z)=O\left(\frac{1}{\rho\ln\rho\ln_2\rho}\right)$ при $|\theta|<\pi-\eta$ и $\rho\to\infty$;

3) $\omega''(z)=O\left(\frac{1}{\rho^2\ln\rho\ln_2\rho}\right)$ при $|\theta|<\pi-\eta$ и $\rho\to\infty$;

4) $0<\lambda_1\leqslant\omega(\rho)\leqslant\lambda_2<\infty$, $\lambda_1=\text{const}$, $\lambda_2=\text{const}$.

Здесь через $\ln_k x$ обозначена k-я итерация логарифма:

$$\ln_1 x=\ln x,\ \ln_k x=\ln(\ln_{k-1}x),\ k=2,3,4,\ \ldots$$

Примером функции, удовлетворяющей указанным выше условиям, может служить функция

$$\omega(z)=\frac{1}{2}\{\lambda_1+\lambda_2+(\lambda_2-\lambda_1)\sin(\ln_3 z)\},$$

где каждый логарифм понимается в смысле главного значения. Миттаг-Леффлер [1] исследовал асимптотику степенного ряда

$$E_\alpha(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(1+\alpha k)},$$

где $x=re^{i\varphi}$, а α — постоянная величина, $0<\alpha<\infty$. Нашей целью является исследование асимптотического поведения ряда

$$E_\omega(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{\Gamma(1+k\omega(k))},\tag{1}$$

где $\omega(z)$ удовлетворяет перечисленным выше условиям и для целочисленных значений k, $0\leqslant k\leqslant[a]+1$, $\omega(k)>0$ — произвольная последовательность. Здесь [a] — целая часть числа a. Исследование асимптотического поведения ряда (1) будем проводить тем же, в основном, методом, что и Миттаг-Леффлер, используя при этом метод перевала (см. [2], [3]). Обобщением функции Миттаг-Леффлера занимались многие авторы, обзор см. в [4, §§ 18. 1, 18. 3]. В этом обзоре не указаны работы М. М. Джрбашяна, подытоженные в монографии [5], и статьи В. Ж. Риекстыни [6—8]. В отличие от всех этих работ, где рассматривались случаи, когда нижний порядок λ равен порядку ρ, мы будем рассматривать и тот случай, когда $\lambda \neq \rho$. Класс функций, рассматриваемый нами, содержит все обобщения функций типа Миттаг-Леффлера, которые рассматривались раньше, но асимптотика, которую мы находим, менее точна, чем известная в частных случаях. Функция $E_\omega(x)$ используется для доказательства точности оценок роста целых функций по лучу.

Обозначим через $\mu(r)$ максимальный член ряда (1), через $\nu(r)$ (мы часто будем писать просто ν) — его центральный индекс, а через ν_1 и ν_2 следующие величины:

$$\nu_1 = [\nu(\ln_3 \nu)^{-1}], \quad \nu_2 = [\nu \ln_3 \nu]. \tag{2}$$

Далее, через $\psi(\tau, r)$ обозначим функцию $\psi(\tau, r) = r^\tau(\Gamma(1 + \tau\omega(\tau)))^{-1}$. Очевидно, что $\max\limits_{|x|=r} |E_\omega(x)| = E_\omega(r)$, а $\psi(k, r)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$, является общим членом ряда $E_\omega(r)$.

§ 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЛЕММЫ

Определим точку $\tau = \tau_*(r)$, в которой функция $\psi(\tau, r)$, как функция действительного переменного $\tau \geqslant T$ ($T > 0$ — достаточно большое число), достигает своего максимума. Для этого приравняем нулю логарифмическую производную $\psi(\tau, r)$:

$$\frac{\psi'_\tau(\tau, r)}{\psi(\tau, r)} = \ln r - \frac{d \ln \Gamma(1 + \tau\omega(\tau))}{d\tau} = 0. \tag{1. 1}$$

Используя свойства Г-функции (см. [9, стр. 32]), из (1. 1) получаем

$$\ln r = \omega(\tau)\ln(\tau\omega(\tau)) + \tau\omega'(\tau)\ln(\tau\omega(\tau)) + \frac{1 + O(1)}{2\tau\omega(\tau)}(\omega(\tau) + \tau\omega'(\tau)),$$

или в силу условия 2)

$$\ln r = \omega(\tau)\ln(\tau\omega(\tau)) + O\left(\frac{1}{\ln_2 \tau}\right). \tag{1. 2}$$

Так как (см. [9, стр. 32, 36])

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\psi'_\tau(\tau, r)}{\psi(\tau, r)}\right) = -\left(\frac{1}{\tau\omega(\tau)} + O\left(\frac{1}{\tau^2}\right)\right)(\omega(\tau) + \tau\omega'(\tau))^2 - \left(\ln(\tau\omega(\tau)) + \right.$$
$$\left. + O\left(\frac{1}{\tau}\right)\right)(2\omega'(\tau) + \tau\omega''(\tau)),$$

то в силу условий 2) и 3) получаем

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\psi'_\tau(\tau, r)}{\psi(\tau, r)}\right) = -\frac{\omega(\tau)}{\tau} + O\left(\frac{1}{\tau \ln_2 \tau}\right) < 0$$

при достаточно больших $\tau > T$, т. е. (если обратить внимание на (1.2)) при достаточно больших $r \geqslant R$; поэтому решение уравнения (1. 1) является точкой максимума функции $\psi(\tau, r)$.

Лемма 1. Для центрального индекса и максимального члена ряда (1) имеют место следующие соотношения:

$$\ln r = \omega(\nu)\ln(\nu\omega(\nu)) + O\left(\frac{1}{\ln_2 \nu}\right), \tag{1.3}$$

$$\mu(r) = \exp\left\{\nu\left(\omega(\nu) + O\left(\frac{1}{\ln_2\nu}\right)\right)\right\} \tag{1.4}$$

при $r \to \infty$.

Действительно, по теореме Лагранжа, учитывая условия 2), имеем

$$\omega(\tau)\ln(\tau\omega(\tau)) - \omega([\tau]+\alpha)\ln(([\tau]+\alpha)\omega([\tau]+\alpha)) =$$
$$= \left\{\omega'(\xi)\ln(\xi\omega(\xi)) + \omega(\xi)\frac{\omega(\xi)+\xi\omega'(\xi)}{\xi\omega(\xi)}\right\}(\tau - [\tau] - \alpha) = O\left(\frac{1}{\tau}\right),$$

где α принимает значения 0 или 1, а ξ находится между τ и $[\tau]+\alpha$. Поэтому из последнего равенства и (1. 2) следует равенство (1. 3). Далее,

$$\mu(r) = \psi(\nu, r) = \exp\{\nu\ln r - \ln\Gamma(1+\nu\omega(\nu))\} = \exp\{\nu(\omega(\nu)\ln(\nu\omega(\nu)) +$$
$$+ O\left(\frac{1}{\ln_2\nu}\right)\Big) - \nu\omega(\nu)\ln(\nu\omega(\nu)) + \nu\omega(\nu) - \ln\sqrt{2\pi\nu\omega(\nu)} + O\left(\frac{1}{\nu}\right)\Big\} =$$
$$= \exp\left\{\nu\left(\omega(\nu) + O\left(\frac{1}{\ln_2\nu}\right)\right)\right\}.$$

Тем самым лемма 1 доказана.

В дальнейшем мы будем исследовать асимптотику функции $E_\omega(x)$ при помощи функции $\omega(\nu)$.

Лемма 2. *При* $r \to \infty$ *справедливы следующие оценки**

$$\sum_{k=0}^{\nu_1-1}\psi(k, r) \leqslant \exp\left\{\omega(\nu)(|\ln\omega(\nu)| + \ln_4\nu)\, O\left(\frac{\nu}{\ln_3\nu}\right)\right\}, \tag{1.5}$$

$$\sum_{k=\nu_2+1}^{\infty}\psi(k, r) \leqslant B,$$

где B *— некоторое положительное постоянное число.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что $\omega(\nu_j) - \omega(\nu) = \omega'(\eta)(\nu_j - \nu)$, $j = 1, 2$, где η лежит между ν_j и ν. Учитывая условие 2) и равенства (2), получаем

$$\omega(\nu_1) = \omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3\nu}{\ln\nu\ln_2\nu}\right) \text{ и } \omega(\nu_2) = \omega(\nu) + O\left(\frac{(\ln_3\nu)^2}{\ln\nu\ln_2\nu}\right).$$

Поэтому, учитывая (2) и (1. 3), получаем

$$\psi(\nu_1 - 1, r) = \exp\{(\nu_1 - 1)\ln r - \ln\Gamma(1 + (\nu_1 - 1)\omega(\nu_1 - 1))\} =$$
$$= \exp\Big\{(\nu_1 - 1)\Big[\omega(\nu)\ln\nu + \omega(\nu)\ln\omega(\nu) + O\left(\frac{1}{\ln_2\nu}\right) - \omega(\nu_1 - 1)\ln(\nu_1 -$$
$$- 1) - \omega(\nu_1 - 1)\ln\omega(\nu_1 - 1) + O\left(\frac{\ln(\nu_1 - 1)}{\nu_1 - 1}\right)\Big]\Big\} \leqslant \exp\Big\{(\nu_1 -$$
$$- 1)\Big[2\omega(\nu)|\ln\omega(\nu)| + \omega(\nu)(1 + o(1)) + \omega(\nu)\ln\nu - \Big(\omega(\nu) +$$
$$+ o\left(\frac{\ln_3\nu}{\ln\nu\ln_2\nu}\right)\Big)\left(\ln\nu - \ln_4\nu + O\left(\frac{\ln_3\nu}{\nu}\right)\right)\Big]\Big\} \leqslant \exp\Big\{(\nu_1 - 1)\Big[\omega(\nu)(1 +$$
$$+ 2|\ln\omega(\nu)|)(1 + o(1)) + \omega(\nu)\ln_4\nu(1 + o(1))\Big]\Big\} \leqslant \exp\Big\{\omega(\nu)(|\ln\omega(\nu)| +$$
$$+ \ln_4\nu)\, O\left(\frac{\nu}{\ln_3\nu}\right)\Big\}.$$

---

*) Так как $\omega(\nu) = O(1)$ и $\frac{1}{\omega(\nu)} = O(1)$, то очевидно, что эти величины можно исключить из (1. 5). Однако в дальнейшем мы откажемся от ограничения $\lambda_1 \leqslant \omega(\rho) \leqslant \lambda_2$ и будет нужна оценка (1. 5) в указанной форме.

Отсюда следует первое неравенство (1.5). Далее, так как функция $\omega(\tau)(\ln(\tau\omega(\tau))-1)$ возрастает при достаточно больших $\tau \geqslant T > 0$, то при $\tau \geqslant \exp\left\{1+\left(\frac{1}{\omega(\nu)}+\varepsilon\right)\ln 2+\ln\nu\right\}$, $\varepsilon > 0$, если r достаточно велико, выполняется

$$\psi(\tau, r) = O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\exp\left\{\tau\left[\omega(\nu)\ln(\nu\omega(\nu)) + O\left(\frac{1}{\ln_2\nu}\right) - \omega(\tau)\ln(\tau\omega(\tau)) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \omega(\tau)\right]\right\} \leqslant O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\exp\left\{\tau\left[\omega(\nu)\ln(\nu\omega(\nu)) + O\left(\frac{1}{\ln_2\nu}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \omega\left(e2^{\frac{1}{\omega(\nu)}+\varepsilon}\nu\right)\left\{1+\left(\frac{1}{\omega(\nu)}+\varepsilon\right)\ln 2+\ln\nu+\ln\omega\left(e2^{\frac{1}{\omega(\nu)}+\varepsilon}\nu\right)-1\right\}\right]\right\} \leqslant$$
$$\leqslant O\left(\frac{1}{\sqrt{\tau}}\right)\exp\left\{\tau\left[\ln\nu(1+o(1))\,\omega'(\eta)\left(e2^{\frac{1}{\omega(\nu)}+\varepsilon}-1\right)\nu - \ln 2\right]\right\} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1+o(1)}{2}\right)^{\tau},$$

где $\nu < \eta < \exp\left\{1+\left(\frac{1}{\omega(\nu)}+\varepsilon\right)\ln 2+\ln\nu\right\}$. Так как при достаточно больших r выполняется $\nu_2+1 > \exp\left\{1+\left(\frac{1}{\omega(\nu)}+\varepsilon\right)\ln 2+\ln\nu\right\}$, то из последнего неравенства следует второе неравенство (1.5).

Доказательство следующих трех лемм проведено в [1], мы их здесь только сформулируем.

Лемма 3. *При $\tau > 0$ и $-\infty < t < \infty$ выполняется*

$$\frac{1}{|\Gamma(1+\tau+it)|} \leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\tau)}\sqrt{\frac{\operatorname{sh}\pi t}{\pi t}} \leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\tau)}e^{\frac{\pi|t|}{2}}. \tag{1.6}$$

Лемма 4. *При $t \geqslant 0$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$ выражения*

$$\frac{1}{|e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1|} \quad \text{и} \quad \frac{1}{|e^{-2\pi i\varepsilon}-e^{-2\pi t}|}$$

не превышают некоторой постоянной величины $h > 0$, зависящей лишь от ε.

Лемма 5. *При $\tau \geqslant 0$ и $n = 1, 2, 3, \ldots$ справедливы оценки*

$$\frac{1}{|e^{2\pi i\tau+2\pi n}-1|} \leqslant \frac{e^{-2\pi n}}{1-e^{-2\pi n}},$$
$$\frac{1}{|e^{2\pi i\tau-2\pi n}-1|} \leqslant \frac{1}{1-e^{-2\pi n}}. \tag{1.7}$$

§ 2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ $E_\omega(x)$

Пусть $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$. Обозначим через R прямоугольник с вершинами в точках

$$\nu_2+1-\varepsilon+i\nu_2,\ \nu_1-\varepsilon+i\nu_2,\ \nu_1-\varepsilon-i\nu_2,\ \nu_2+1-\varepsilon-i\nu_2.$$

Разобьем сумму (1) на три суммы следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+k\omega(k))} = \sum_{k=0}^{\nu_1-1} \frac{x^k}{\Gamma(1+k\omega(k))} +$$

$$+ \sum_{k=\nu_1}^{\nu_2} \frac{x^k}{\Gamma(1+k\omega(k))} + \sum_{k=\nu_2+1}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1+k\omega(k))}. \tag{2. 1}$$

Первую и третью суммы правой части (2. 1) можно оценить при помощи неравенств (1. 5). Вторую сумму правой части (2. 1) по теореме о вычетах можно представить так:

$$\sum_{k=\nu_1}^{\nu_2} \frac{x^k}{\Gamma(1+k\omega(k))} = \int_R \frac{1}{e^{2\pi iz}-1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z\omega(z))} =$$

$$= \int_{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z\omega(z))} + \int_{R_2} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z\omega(z))}, \tag{2. 2}$$

где R_1 означает ломаную линию с вершинами в точках

$$\nu_2+1-\varepsilon,\ \nu_2+1-\varepsilon+i\nu_2,\ \nu_1-\varepsilon+i\nu_2,\ \nu_1-\varepsilon,$$

а R_2 — ломаную линию с вершинами в точках

$$\nu_1-\varepsilon,\ \nu_1-\varepsilon-i\nu_2,\ \nu_2+1-\varepsilon-i\nu_2,\ \nu_2+1-\varepsilon.$$

Приведем контурные интегралы, стоящие в правой части равенства (2. 2), к обычным интегралам. Тогда

$$\int_{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z\omega(z))} = i\int_0^{\nu_2} \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1} \times$$

$$\times \frac{r^{\nu_2+1-\varepsilon} e^{-\varphi t} r^{it} e^{i\varphi(\nu_2+1-\varepsilon)}}{\Gamma(1+(\nu_2+1-\varepsilon+it)\,\omega(\nu_2+1-\varepsilon+it))} dt - \int_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i\tau-2\pi\nu_2}-1} \times$$

$$\times \frac{r^{\tau} e^{-\varphi\nu_2} r^{i\nu_2} e^{i\varphi\tau}}{\Gamma(1+(\tau+i\nu_2)\,\omega(\tau+i\nu_2))} d\tau - i\int_0^{\nu_2} \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1} \times$$

$$\times \frac{r^{\nu_1-\varepsilon} e^{-\varphi t} r^{it} e^{i\varphi(\nu_1-\varepsilon)}}{\Gamma(1+(\nu_1-\varepsilon+it)\,\omega(\nu_1-\varepsilon+it))} dt,$$

$$\int_{R_2} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z\omega\ z))} =$$

$$= i\int_0^{\nu_2} \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{\nu_2+1-\varepsilon} e^{\varphi t} r^{-it} e^{i\varphi(\nu_2+1-\varepsilon)}}{\Gamma(1+(\nu_2+1-\varepsilon-it)\,\omega(\nu_2+1-\varepsilon-it))} dt +$$

$$+ \int_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon} \frac{1}{e^{2\pi i\tau+2\pi\nu_2}-1} \frac{r^{\tau} e^{\varphi\nu_2} r^{-i\nu_2} e^{i\varphi\tau}}{\Gamma(1+(\tau-i\nu_2)\,\omega(\tau-i\nu_2))} d\tau -$$

$$- i\int_0^{\nu_2} \frac{1}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}} \frac{r^{\nu_1-\varepsilon} e^{\varphi t} r^{-it} e^{i\varphi(\nu_1-\varepsilon)}}{\Gamma(1+(\nu_1-\varepsilon-it)\,\omega(\nu_1-\varepsilon-it))} dt.$$

Учитывая последние два равенства, из (2. 2) получаем

$$\sum_{k=\nu_1}^{\nu_2} \frac{x^k}{\Gamma(1+k\omega(k))} = I_1 + I_2 + I_3, \tag{2.3}$$

где

$$I_1 = i\int_0^{\nu_2}\left\{\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\,\frac{r^{\nu_2+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(1+(\nu_2+1-\varepsilon+it)\,\omega(\nu_2+1-\varepsilon+it))}+\right.$$

$$\left.+\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{\nu_2+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(1+(\nu_2+1-\varepsilon-it)\,\omega(\nu_2+1-\varepsilon-it))}\right\}e^{i\varphi(\nu_2+1-\varepsilon)}dt;$$

$$I_2 = \int_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon}\left\{\frac{r^{-i\nu_2}}{e^{2\pi i\tau+2\pi\nu_2}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{\varphi\nu_2}}{\Gamma(1+(\tau-i\nu_2)\,\omega(\tau-i\nu_2))}-\right.$$

$$\left.-\frac{r^{i\nu_2}}{e^{2\pi i\tau-2\pi\nu_2}-1}\,\frac{r^{\tau}e^{-\varphi\nu_2}}{\Gamma(1+(\tau+i\nu_2)\,\omega(\tau+i\nu_2))}\right\}e^{i\varphi\tau}d\tau;$$

$$I_3 = -i\int_0^{\nu_1}\left\{\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{\nu_1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(1+(\nu_1-\varepsilon-it)\,\omega(\nu_1-\varepsilon-it))}+\right.$$

$$\left.+\frac{r^{it}}{e^{-2\pi i\varepsilon-2\pi t}-1}\,\frac{r^{\nu_1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(1+(\nu_1-\varepsilon+it)\,\omega(\nu_1-\varepsilon+it))}\right\}e^{i\varphi(\nu_1-\varepsilon)}dt.$$

Прежде чем переходить к оценке интегралов I_1, I_2 и I_3, отметим, что так как функция $\omega(z)$ является действительной на действительной оси, то $\bar z\omega(\bar z) = \overline{z\omega(z)}$, и в силу условия 1) имеем

$$(\tau \pm it)\,\omega(\tau \pm it) = \Phi_1(\tau,\ t;\ \rho,\ \theta) + i\Phi_2(\tau,\ t;\ \rho,\ \theta),$$

где

$$\Phi_1(\tau,\ t;\ \rho,\ \theta) = \tau(\omega(\rho)+\omega_1(\rho,\ \theta)) - t\omega_2(\rho,\ \theta), \text{ а}$$

$$\Phi_2(\tau,\ t;\ \rho,\ \theta) = t(\omega(\rho)+\omega_1(\rho,\ \theta)) + \tau\omega_2(\rho,\ \theta),$$

откуда по лемме 3 получаем

$$\frac{1}{|\Gamma(1+(\tau\pm it)\,\omega(\tau\pm it))|} \leqslant \frac{1}{\Gamma(1+\Phi_1(\tau,\ t;\ \rho,\ \theta))}\,e^{\frac{\pi\Phi_2(\tau,\ t;\ \rho,\ \theta)}{2}}, \tag{2.4}$$

где

$$\rho = |\tau+it|, \text{ а } \theta = |\arg(\tau+it)|.$$

1°. Оценка интеграла I_1. Учитывая лемму 4 и неравенство (2. 4), получаем

$$|I_1| \leqslant hr^{\nu_2+1-\varepsilon}\int_0^{\nu_2}\frac{e^{-\varphi t}+e^{-(2\pi-\varphi)t}}{\Gamma(1+\Phi_1(\nu_2+1-\varepsilon,\ t;\ \rho_1,\ \theta_1))}\,e^{\frac{\pi}{2}|\Phi_2(\nu_2+1-\varepsilon,\ t;\ \rho_1,\ \theta_1)|}dt,$$

где

$$\rho_1 = \sqrt{(\nu_2+1-\varepsilon)^2+t^2}, \text{ а } \theta_1 = |\arg(\nu_2+1-\varepsilon+it)|.$$

Так как $0 \leqslant t \leqslant \nu_2$, то $\rho_1 = q_1(\nu_2+1-\varepsilon)$, $1 \leqslant q_1 < \sqrt{2}$, и в силу условия 2) выполняется

$$\omega(\rho_1) = \omega(\nu_2 + 1 - \varepsilon) + O\left(\frac{1}{\ln \nu_2 \ln_2 \nu_2}\right) = \omega(\nu) + O\left(\frac{\ln_3 \nu}{\ln \nu \ln_2 \nu}\right) = \omega(\nu) + o\left(\frac{1}{\ln \nu}\right);$$

$$\omega_j(\rho_1, \theta_1) = O\left(\frac{1}{\ln \nu_2 \ln_2 \nu_2}\right) = o\left(\frac{1}{\ln \nu}\right), \quad j = 1, 2$$

при $r \to \infty$. Поэтому при $r \to \infty$ выполняется

$$\Phi_1(\nu_2 + 1 - \varepsilon, t; \rho_1, \theta_1) = (\nu_2 + 1 - \varepsilon)\left(\omega(\nu) + o\left(\frac{1}{\ln \nu}\right)\right) - t \cdot o\left(\frac{1}{\ln \nu}\right) =$$

$$= (\nu_2 + 1 - \varepsilon)\left(\omega(\nu) + o\left(\frac{1}{\ln \nu}\right)\right);$$

$$\Phi_2(\nu_2 + 1 - \varepsilon, t; \rho_1, \theta_1) = t\omega(\nu) + \Phi_2^*(\nu_2 + 1 - \varepsilon, t; \rho_1, \theta_1),$$

где

$$\Phi_2^*(\nu_2 + 1 - \varepsilon, t; \rho_1, \theta_1) = t \cdot O\left(\frac{1}{\ln \nu_2 \ln_2 \nu_2}\right) +$$

$$+ (\nu_2 + 1 - \varepsilon)\, O\left(\frac{1}{\ln \nu_2 \ln_2 \nu_2}\right) = O\left(\frac{\nu_2 + 1 - \varepsilon}{\ln \nu_2 \ln_2 \nu_2}\right).$$

Интеграл I_1 оценивается теперь следующим образом:

$$|I_1| \leqslant h\psi_1(\nu_2 + 1 - \varepsilon, r)\, I_1^*, \tag{2.5}$$

где

$$\psi_1(\nu_2 + 1 - \varepsilon, r) = \frac{r^{\nu_2 + 1 - \varepsilon}}{\Gamma\left(1 + (\nu_2 + 1 - \varepsilon)\left(\omega(\nu) + o\left(\frac{1}{\ln \nu}\right)\right)\right)} \leqslant \left(\frac{1 + o(1)}{2}\right)^{\nu_2 + 1 - \varepsilon},$$

что легко показать таким же способом, как и при доказательстве леммы 2, а

$$I_1^* = \int_0^{\nu_2} (e^{-\varphi t} + e^{-(2\pi - \varphi)t})\, e^{\frac{\pi t \omega(\nu)}{2} + \frac{\pi}{2}|\Phi_2^*(\nu_2 + 1 - \varepsilon, t; \rho_1, \theta_1)|}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa(\nu) \int_0^{\nu_2} (e^{-\varphi t} + e^{-(2\pi - \varphi)t})\, e^{\frac{\pi t \omega(\nu)}{2}}\, dt, \tag{2.6}$$

где

$$\varkappa(\nu) = \max_{0 \leqslant t \leqslant \nu_2} \exp\left\{\frac{\pi}{2}\,|\Phi_2^*(\nu_2 + 1 - \varepsilon, t; \rho_1, \theta_1)|\right\} =$$

$$= \exp\left\{O\left(\frac{\nu_2}{\ln \nu_2 \ln_2 \nu_2}\right)\right\} = (1 + o(1))^{\nu_2 + 1 - \varepsilon}.$$

Интеграл, стоящий в правой части неравенства (2.6), ограничен при всех φ, удовлетворяющих условию

$$\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right), \tag{2.7}$$

где $\delta > 0$ — произвольное малое число. Поэтому ввиду (2.5), получаем следующую лемму.

Лемма 6. Для всех φ, удовлетворяющих условию (2.7), интеграл $I_1 \to 0$ при $r \to \infty$.

2°. Оценка интеграла I_2. При оценке интеграла I_2 мы учитываем оценки (1. 7) и (2. 4). Тогда

$$|I_2| \leqslant \frac{e^{-(2\pi-\varphi)\nu_2} + e^{-\varphi\nu_2}}{1-e^{-2\pi\nu_2}} \int\limits_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon} \frac{r^\tau}{\Gamma(1+\Phi_1(\tau, \nu_2, \rho_2, \theta_2))} e^{\frac{\pi}{2}|\Phi_2(\tau, \nu_2, \rho_2, \theta_2)|} d\tau,$$

где $\rho_2 = \sqrt{\nu_2^2 + \tau^2}$, а $\theta_2 = |\arg(\tau + i\nu_2)|$. Так как $\nu_1 - \varepsilon \leqslant \tau \leqslant \nu_2 + 1 - \varepsilon$, то $\rho_2 = \nu_2 q_2$, где $1 + o(1) \leqslant q_2 \leqslant \sqrt{2} + o(1)$, откуда $\omega(\rho_2) = \omega(\nu) +$

$$+ o\left(\frac{1}{\ln\nu}\right), \quad \omega_j(\rho_2, \theta_2)\, O\left(\frac{1}{\ln\nu_2 \ln_2\nu_2}\right), \quad j = 1, 2.$$

Поэтому, как и при оценке интеграла I_1, получаем при $r \to \infty$

$$|I_2| \leqslant \frac{e^{-\varphi\nu_2} + e^{-(2\pi-\varphi)\nu_2}}{1-e^{-2\pi\nu_2}} \exp\left\{O\left(\frac{\nu_2}{\ln\nu_2 \ln_2\nu_2}\right)\right\} e^{\frac{\pi\omega(\nu)\nu_2}{2}} I_2^*,$$

где

$$I_2^* = \int\limits_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon} \frac{r^\tau d\tau}{\Gamma\left(1 + \tau\left(\omega(\nu) + O\left(\frac{1}{\ln\nu}\right)\right)\right)}$$

ввиду того, что при $r \to \infty$ выполняется

$$\nu_2 O\left(\frac{1}{\ln\nu_2 \ln_2\nu_2}\right) = \tau o\left(\frac{1}{\ln\nu}\right), \quad \nu_1 - \varepsilon \leqslant \tau \leqslant \nu_2 + 1 - \varepsilon.$$

Рассматривая подынтегральную функцию в интеграле I_2^* аналогично тому, как это делалось при доказательстве леммы 1, убеждаемся, что ее максимум на промежутке $[\nu_1 - \varepsilon, \nu_2 + 1 - \varepsilon]$ равен $\exp\{\nu(\omega(\nu) + o(1))\}$. Поэтому $I_2^* \leqslant \exp\left\{\omega(\nu)\, O\left(\frac{\nu_2}{\ln_3\nu_2}\right)\right\}$. Итак,

$$|I_2| \leqslant \frac{e^{-\varphi\nu_2} + e^{-(2\pi-\varphi)\nu_2}}{1-e^{-2\pi\nu_2}} \exp\left\{\omega(\nu)\, O\left(\frac{\nu_2}{\ln_3\nu_2}\right) + O\left(\frac{\nu_2}{\ln\nu_2 \ln_2\nu_2}\right)\right\} e^{\frac{\pi\omega(\nu)\nu_2}{2}}, \tag{2.8}$$

и ввиду условия 4) справедлива следующая

Лемма 7. Для всех φ, удовлетворяющих условию (2. 7), *интеграл $I_2 \to 0$ при $r \to \infty$.*

3°. Оценка интеграла I_3. Учитывая лемму 4 и неравенство (2. 4), получаем

$$|I_3| \leqslant h r^{\nu_1-\varepsilon} \int\limits_0^{\nu_2} \frac{e^{-\varphi t} + e^{-(2\pi-\varphi)t}}{\Gamma(1+\Phi_1(\nu_1-\varepsilon, t; \rho_3, \theta_3))} e^{\frac{\pi}{2}|\Phi_2(\nu_1-\varepsilon, t; \rho_3, \theta_3)|} dt,$$

где $\rho_3 = \sqrt{(\nu_1-\varepsilon)^2 + t^2}$, а $\theta_3 = |\arg(\nu_1 - \varepsilon + it)|$. Поскольку $0 \leqslant t \leqslant \nu_2$, то $\nu_1 - \varepsilon \leqslant \rho_3 \leqslant \sqrt{(\nu_1-\varepsilon)^2 + \nu_2^2} = \nu_2(1 + o(1)) = \nu_1(\ln_3\nu)^2(1 + o(1))$, а так как $\nu_1 = \nu(\ln_3\nu)^{-1} + O(1)$, то

$$\omega(\rho_3) = \omega(\nu) + o\left(\frac{1}{\ln\nu}\right), \quad \omega_j(\rho_3, \theta_3) = O\left(\frac{1}{\ln\nu \ln_2\nu}\right), \quad j = 1, 2.$$

Поэтому

$$|I_3| \leqslant h\psi_2(\nu_1 - \varepsilon, r)\, I_3^*, \tag{2.9}$$

где

$$\psi_2(\nu_1-\varepsilon, r) = \frac{r^{\nu_1-\varepsilon}}{\Gamma\left(1+(\nu_1-\varepsilon)\left(\omega(\nu)+o\left(\frac{1}{\ln \nu}\right)\right)\right)} \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{\omega(\nu)\left(|\ln \omega(\nu)| + \ln_4 \nu\right) O\left(\frac{\nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\},$$

что легко показать таким же методом, как и при доказательстве леммы 2, а

$$I_3^* = \int_0^{\nu_2} (e^{-\varphi t} + e^{-(2\pi-\varphi)t}) \exp\left\{\frac{\pi\omega(\nu)\,t}{2} + \frac{\pi}{2}|\Phi_2^*(\nu_1-\varepsilon, t, \rho_3, \theta_3)|\right\} dt.$$

Повторяя те же рассуждения, что и при оценке интеграла I_1^*, получаем, что интеграл I_3^* ограничен при всех φ, удовлетворяющих (2.7). Поэтому ввиду (2.9) имеет место

Лемма 8. Для всех φ, удовлетворяющих условию (2.7), *интеграл I_3 допускает следующую оценку при $r \to \infty$:*

$$|I_3| \leqslant \exp\left\{\omega(\nu)\left(|\ln \omega(\nu)| + \ln_4 \nu\right) O\left(\frac{\nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}.$$

Теперь, учитывая леммы 6, 7 и 8, равенства (2.1) и (2.3), а также оценки (1.5), получаем, что при выполнении условия 4) справедлива следующая

Теорема 1. *Для всех φ, удовлетворяющих условию* (2.7), *выполняется*

$$E_\omega(x) = \exp\left\{O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\} \text{ при } r \to \infty.$$

Отметим, что условие (2.7) предполагает $\omega(\nu) \leqslant 2 - \frac{2\delta}{\pi}$.

4°. Интегральное представление $E_\omega(x)$, когда φ не удовлетворяет (2.7) и $\omega(\nu) < 2 - \frac{2\delta}{\pi}$. Мы снова возвратимся к равенству (2.2). Сделаем в правой части (2.2) некоторые преобразования. Так как

$$\frac{1}{e^{2\pi i z}-1} = -1 - \frac{1}{e^{-2\pi i z}-1},$$

то

$$\int_{R_1} \frac{1}{e^{2\pi i z}-1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z\omega(z))} = -\int_{R_1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z\omega(z))} - \int_{R_1} \frac{1}{e^{-2\pi i z}-1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z\omega(z))}. \qquad (2.10)$$

Функция $\frac{x^z}{\Gamma(1+z\omega(z))}$ — аналитическая внутри прямоугольника с вершинами в точках

$$\nu_1-\varepsilon,\ \nu_2+1-\varepsilon,\ \nu_2+1-\varepsilon+i\nu_2,\ \nu_1-\varepsilon+i\nu_2$$

и на его контуре. Поэтому по теореме Коши

$$-\int_{R_1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1+z\omega(z))} = \int_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon} \frac{x^\tau d\tau}{\Gamma(1+\tau\omega(\tau))}. \qquad (2.11)$$

Далее,

$$-\int_{R_1}\frac{1}{e^{-2\pi iz}-1}\frac{x^z dz}{\Gamma(1+z\omega(z))}=-i\int_0^{\nu_2}\frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\times$$

$$\times\frac{r^{\nu_2+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}r^{it}e^{i\varphi(\nu_2+1-\varepsilon)}}{\Gamma(1+(\nu_2+1-\varepsilon+it)\,\omega(\nu_2+1-\varepsilon+it))}dt+$$

$$+\int_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon}\frac{1}{e^{-2\pi i\tau+2\pi\nu_2}-1}\frac{r^{\tau}e^{-\varphi\nu_2}r^{i\nu_2}e^{i\varphi\tau}}{\Gamma(1+(\tau+i\nu_2)\,\omega(\tau+i\nu_2))}d\tau+$$

$$+i\int_0^{\nu_2}\frac{1}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{\nu_1-\varepsilon}e^{-\varphi t}r^{it}e^{i\varphi(\nu_1-\varepsilon)}}{\Gamma(1+(\nu_1-\varepsilon+it)\,\omega(\nu_1-\varepsilon+it))}dt. \qquad (2.12)$$

В силу (1.5), (2.2), (2.1), (2.10), (2.11) и (2.12) имеем

$$E_\omega(x)=\exp\left\{\omega(\nu)\left(|\ln\omega(\nu)|+\ln_4\nu\right)O\left(\frac{1}{\ln_3\nu}\right)\right\}+$$

$$+E_\omega^{(0)}(x)+J_1^{(0)}+J_2^{(0)}+J_3^{(0)}, \qquad (2.13)$$

где

$$E_\omega^{(0)}(x)=\int_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon}\frac{x^\tau d\tau}{\Gamma(1+\tau\omega(\tau))}; \qquad (2.14)$$

$$J_1^{(0)}=i\int_0^{\nu_2}\left\{\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{\nu_2+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(1+(\nu_2+1-\varepsilon-it)\,\omega(\nu_2+1-\varepsilon-it))}-\right.$$

$$\left.-\frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{\nu_2+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(1+(\nu_2+1-\varepsilon+it)\,\omega(\nu_2+1-\varepsilon+it))}\right\}e^{i\varphi(\nu_2+1-\varepsilon)}dt;$$

$$J_2^{(0)}=\int_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon}\left\{\frac{r^{-i\nu_2}}{e^{2\pi i\tau+2\pi\nu_2}-1}\frac{r^\tau e^{\varphi\nu_2}}{\Gamma(1+(\tau-i\nu_2)\,\omega(\tau-i\nu_2))}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{e^{-2\pi i\tau+2\pi\nu_2}-1}\frac{r^\tau e^{-\varphi\nu_2}}{\Gamma(1+(\tau+i\nu_2)\,\omega(\tau+i\nu_2))}\right\}e^{i\varphi\tau}d\tau;$$

$$J_3^{(0)}=-i\int_0^{\nu_2}\left\{\frac{r^{-it}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{\nu_1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(1+(\nu_1-\varepsilon-it)\,\omega(\nu_1-\varepsilon-it))}-\right.$$

$$\left.-\frac{r^{it}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\frac{r^{\nu_1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(1+(\nu_1-\varepsilon+it)\,\omega(\nu_1-\varepsilon+it))}\right\}e^{i\varphi(\nu_1-\varepsilon)}dt.$$

Оценки интегралов $J_j^{(0)}$, $j=1, 2, 3$, проводятся точно так же, как и оценки интегралов J_j, $j=1, 2, 3$, причем ввиду того, что величина $\omega(\nu)<2-\frac{2\delta}{\pi}$, она может быть исключена из оценок интегралов $J_j^{(0)}$, $j=1, 2, 3$. Оценим, например, интеграл $J_1^{(0)}$. Используя лемму 4 и неравенство (2.4), имеем

$$|J_1^{(0)}|\leqslant hr^{\nu_2+1-\varepsilon}\int_0^{\nu_2}\frac{e^{-(2\pi+\varphi)t}+e^{-(2\pi-\varphi)t}}{\Gamma(1+\Phi_1(\nu_2+1-\varepsilon,\ t;\ \rho_1,\ \theta_1))}e^{\frac{\pi}{2}|\Phi_2(\nu_2+1-\varepsilon,\ t;\ \rho_1,\ \theta_1)|}dt,$$

т. е. мы пришли к неравенству, аналогичному тому, которое мы имели при оценке интеграла J_1. Повторяя далее те же рассуждения, что и для оценки интеграла J_1, мы находим, что $J_1^{(0)} \to 0$ и при $r \to \infty$ для всех φ, удовлетворяющих условию

$$-2\pi + \frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right), \tag{2.15}$$

где $\delta > 0$ — произвольно малая величина. Аналогично для всех φ, удовлетворяющих (2.15), при $r \to \infty$

$$J_2^{(0)} \to 0, \text{ а } J_3^{(0)} = \exp\left\{O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}.$$

Поэтому, принимая во внимание (2.13), получаем, что при $r \to \infty$

$$E_\omega(x) = E_\omega^{(0)}(x) + \exp\left\{O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}, \tag{2.16}$$

если только φ удовлетворяет условию (2.15). Если $\omega(\nu) < 2 - \frac{2\delta}{\pi}$, то (2.15) выполняется при условии, что

$$-\left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right) \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta, \tag{2.17}$$

где $\delta > 0$ — произвольно малое число. Поэтому справедлива следующая

Теорема 2. *Для всех r, для которых $\omega(\nu) < 2 - \frac{2\delta}{\pi}$, и для всех φ, удовлетворяющих условию* (2.17), *выполняется равенство* (2.16), *где $E_\omega^{(0)}(x)$ определяется равенством* (2.14).

5°. **Интегральное представление функции $E_\omega(x)$, когда $\omega(\nu) \geqslant 2 - \frac{2\delta}{\pi}$.** Пусть $x = re^{i\varphi}$, $\delta > 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ Введем следующие обозначения:

$$x \in D_0, \text{ если } \begin{cases} 0 < \frac{\omega(\nu)}{2} < 1 - \frac{\delta}{\pi}, & (2.18) \\ \frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right); & (2.19) \end{cases}$$

$$x \in D_m^{(1)}, \text{ если } \begin{cases} 2m - \frac{\delta}{\pi} \leqslant \frac{\omega(\nu)}{2} < 2m + 1 - \frac{\delta}{\pi}, & (2.20) \\ 2m\pi - \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right) \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta - 2m\pi; & (2.21) \end{cases}$$

$$x \in D_m^{(2)}, \text{ если } \begin{cases} 2m + 1 - \frac{\delta}{\pi} \leqslant \frac{\omega(\nu)}{2} < 2(m+1) - \frac{\delta}{\pi}, & (2.22) \\ -2(m+1)\pi + \frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta \leqslant \varphi \leqslant 2(m+1)\pi - \\ \qquad -\left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right); & (2.23) \end{cases}$$

$$x \in D_m^{(3)}, \text{ если } \begin{cases} 2m + 1 - \frac{\delta}{\pi} \leqslant \frac{\omega(\nu)}{2} < 2(m+1) - \frac{\delta}{\pi}, & (2.24) \\ 2(m+1)\pi - \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right) \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta - 2m\pi; & (2.25) \end{cases}$$

$$x \in D_m^{(4)},\ \text{если} \begin{cases} 2(m+1) - \frac{\delta}{\pi} \leqslant \frac{\omega(\nu)}{2} < 2(m+1) + 1 - \frac{\delta}{\pi}, & (2.26) \\ -2(m+1)\pi + \frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta \leqslant \varphi \leqslant 2(m+2)\pi - \\ \qquad - \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right). & (2.27) \end{cases}$$

Теорема 1 показывает, что в D_0 функция $E_\omega(x) = \exp\left\{O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}$ при $r \to \infty$, а теорема 2 показывает, что в $D_0^{(1)}$ выполняется $E_\omega(x) = E_\omega^{(0)}(x) + \exp\left\{O\left(\frac{\nu \ln_4 \nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\}$ при $r \to \infty$, где $E_\omega^{(0)}(x)$ определяется равенством (2.14). Теперь мы найдем интегральное представление $E_\omega(x)$ в прочих

$$D_m^{(i)},\ i = 1, 2, 3, 4;\ m = 0, 1, 2, \ldots$$

Прежде всего отметим следующие тождества:

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = -\sum_{n=0}^{q} e^{2n\pi iz} - \frac{e^{2q\pi iz}}{e^{-2\pi iz} - 1},\quad q = 0, 1, 2, \ldots; \tag{2.28}$$

$$\frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} = \sum_{n=1}^{q} e^{-2n\pi iz} + \frac{e^{-2q\pi iz}}{e^{2\pi iz} - 1},\quad q = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.29}$$

Пусть сначала $x \in D_m^{(1)} \cup D_m^{(2)}$. Используя тождество (2.28) при $q = m$, получаем

$$\int\limits_{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1 + z\omega(z))} = -\sum_{n=0}^{m} \int\limits_{R_1} e^{2n\pi iz} \frac{x^z dz}{\Gamma(1 + z\omega(z))} - \\ - \int\limits_{R_1} \frac{e^{2m\pi iz}}{e^{-2\pi iz} - 1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1 + z\omega(z))}. \tag{2.30}$$

Аналогично, используя тождество (2.29) при $q = m$, получаем

$$\int\limits_{R_2} \frac{1}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1 + z\omega(z))} = \sum_{n=1}^{m} \int\limits_{R_2} e^{-2n\pi iz} \frac{x^z dz}{\Gamma(1 + z\omega(z))} + \\ + \int\limits_{R_2} \frac{e^{-2m\pi iz}}{e^{2\pi iz} - 1} \frac{x^z dz}{\Gamma(1 + z\omega(z))}. \tag{2.31}$$

Учитывая равенства (2.1), (2.2), (2.30) и (2.31), оценки (1.5), а также теорему Коши, как при доказательстве теоремы 1, получаем

$$E_\omega(x) = \exp\left\{\omega(\nu)(|\ln\omega(\nu)| + \ln_4\nu)\, O\left(\frac{\nu}{\ln_3 \nu}\right)\right\} + \\ + \sum_{n=-m}^{m} E_\omega^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{3} J_i^{(m)}, \tag{2.32}$$

где

$$E_\omega^{(n)}(x) = \int\limits_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon} \frac{e^{2n\pi i\tau} x^\tau}{\Gamma(1 + \tau\omega(\tau))}\, d\tau, \tag{2.33}$$

а

$$J_1^{(m)} = i \int\limits_0^{\nu_3} \left\{ \frac{e^{(2\pi i\varepsilon - 2\pi t)m}}{e^{-2\pi i\varepsilon + 2\pi t} - 1} \frac{r^{-it} r^{\nu_2+1-\varepsilon} e^{\varphi t}}{\Gamma(1 + (\nu_2 + 1 - \varepsilon - it)\,\omega(\nu_2 + 1 - \varepsilon - it))} - \right.$$

$$- \frac{e^{-(2\pi i\varepsilon+2\pi t)m}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{it}e^{-\varphi t}r^{\nu_2+1-\varepsilon}}{\Gamma(1+(\nu_2+1-\varepsilon+it)\,\omega(\nu_2+1-\varepsilon+it))}\Bigg\} e^{i\varphi(\nu_2+1-\varepsilon)}dt;$$

$$J_2^{(m)} = \int\limits_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon} \left\{ \frac{e^{-(2\pi i\tau+2\pi\nu_2)m}}{e^{2\pi i\tau+2\pi\nu_2}-1} \frac{r^{-i\nu_2}r^{\tau}e^{\varphi\nu_2}}{\Gamma(1+(\tau+i\nu_2)\,\omega(\tau+i\nu_2))} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{(2\pi i\tau-2\pi\nu_2)m}}{e^{-2\pi i\tau+2\pi\nu_2}-1} \frac{r^{i\nu_2}r^{\tau}e^{-\varphi\nu_2}}{\Gamma(1+(\tau-i\nu_2)\,\omega(\tau-i\nu_2))}\right\} e^{i\varphi\tau}d\tau;$$

$$J_3^{(m)} = -i\int\limits_0^{\nu_2} \left\{ \frac{e^{(2\pi i\varepsilon-2\pi t)m}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{\nu_1-\varepsilon}r^{-it}e^{\varphi t}}{\Gamma(1+(\nu_1-\varepsilon-it)\,\omega(\nu_1-\varepsilon-it))} + \right.$$

$$\left. + \frac{e^{-(2\pi i\varepsilon+2\pi t)m}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1} \frac{r^{\nu_1-\varepsilon}r^{it}e^{-\varphi t}}{\Gamma(1+(\nu_1-\varepsilon+it)\,\omega(\nu_1-\varepsilon+it))}\right\} e^{i\varphi(\nu_1-\varepsilon)}dt.$$

Оценки интегралов $J_1^{(m)}$, $J_2^{(m)}$ и $J_3^{(m)}$ проводятся точно так же, как и в предыдущих случаях. Например,

$$|J_1^{(m)}| \leqslant hr^{\nu_2+1-\varepsilon}\int\limits_0^{\nu_2} \frac{e^{-(2(m+1)\pi-\varphi)t}+e^{-(2(m+1)\pi+\varphi)t}}{\Gamma(1+\Phi_1(\nu_2+1-\varepsilon,\ t;\ \rho_1,\ \theta_1))} e^{\frac{\pi}{2}|\Phi_2(\nu_2+1-\varepsilon,\ t;\ \rho_1,\ \theta_1)|}dt,$$

и $J_1^{(m)} \to 0$ при $r \to \infty$, если φ удовлетворяет условию (2.23). Для интеграла $J_2^{(m)}$ справедлива оценка, аналогичная (2.8), и ввиду условия 4) он стремится к нулю при $r \to \infty$. Аналогично интеграл $|J_3^{(m)}| \leqslant \exp\Big\{\omega(\nu)\times$ $\times(|\ln\omega(\nu)|+\ln_4\nu)\,O\left(\frac{\nu}{\ln_3\nu}\right)\Big\}$ при $r\to\infty$. Итак, учитывая равенство (2.32), при выполнении условия 4) и при $r \to \infty$

$$E_\omega(x) = \sum_{n=-m}^{m} E_\omega^{(n)}(x) + \exp\left\{O\left(\frac{\nu\ln_4\nu}{\ln_3\nu}\right)\right\}, \tag{2.34}$$

если только φ удовлетворяет (2.23).

Если $x\in D_m^{(1)}$, то $\frac{\omega(\nu)}{2} < 2m+1-\frac{\delta}{\pi}$ и

$$2(m+1)\pi - \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta\right) > \frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta-2m\pi,$$

а

$$-2(m+1)\pi+\frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta < 2m\pi-\left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2}+\delta\right),$$

т. е. из выполнения условия (2.21) следует выполнение условия (2.23). Если же $x\in D_m^{(2)}$, то условие (2.23) выполняется по определению. Поэтому, если $x\in D_m^{(1)}\cup D_m^{(2)}$, $E_\omega(x)$ имеет представление (2.34).

Пусть теперь $x\in D_m^{(3)}\cup D_m^{(4)}$, $m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Используя тождество (2.28) при $q=m$, тождество (2.29) при $q=m+1$, подставляя их соответственно в интегралы

$$\int\limits_{R_1} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z dz}{\Gamma(1+z\omega(z))} \text{ и } \int\limits_{R_2} \frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\frac{x^z dz}{\Gamma(1+z\omega(z))},$$

а потом учитывая равенства (2. 1) и (2. 2), оценки (1. 5) и теорему Коши, получаем

$$E_\omega(x)=\exp\left\{\omega(\nu)(|\ln\omega(\nu)|+\ln_4\nu)\,O\left(\frac{\nu}{\ln_3\nu}\right)\right\}+$$
$$+\sum_{n=-(m+1)}^{m}E_\omega^{(n)}(x)+\sum_{i=1}^{3}\overline{J}_i^{(m)},\qquad(2.35)$$

где $E_\omega^{(n)}(x)$ определяются равенством (2. 33), а

$$\overline{J}_1^{(m)}=i\int_0^{\nu_2}\left\{\frac{e^{(2\pi i\varepsilon-2\pi t)(m+1)}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{-it}r^{\nu_2+1-\varepsilon}e^{\varphi t}}{\Gamma(1+(\nu_2+1-\varepsilon-it))\,\omega(\nu_2+1-\varepsilon-it))}-\right.$$
$$\left.-\frac{e^{-(2\pi i\varepsilon+2\pi t)m}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{it}r^{\nu_2+1-\varepsilon}e^{-\varphi t}}{\Gamma(1+(\nu_2+1-\varepsilon+it))\,\omega(\nu_2+1-\varepsilon+it))}\right\}e^{i\varphi(\nu_2+1-\varepsilon)}dt;$$

$$\overline{J}_2^{(m)}=\int_{\nu_1-\varepsilon}^{\nu_2+1-\varepsilon}\left\{\frac{e^{-(2\pi i\tau+2\pi\nu_2)(m+1)}}{e^{2\pi i\tau+2\pi\nu_2}-1}\,\frac{r^{\tau}r^{-i\nu_2}e^{\varphi\nu_2}}{\Gamma(1+(\tau-i\nu_2))\,\omega(\tau-i\nu_2))}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{(2\pi i\tau-2\pi\nu_2)m}}{e^{-2\pi i\tau+2\pi\nu_2}-1}\,\frac{r^{\tau}r^{i\nu_2}e^{-\varphi\nu_2}}{\Gamma(1+(\tau+i\nu_2))\,\omega(\tau+i\nu_2))}\right\}e^{i\varphi\tau}d\tau;$$

$$\overline{J}_3^{(m)}=-i\int_0^{\nu_2}\left\{\frac{e^{(2\pi i\varepsilon-2\pi t)(m+1)}}{e^{-2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{\nu_1-\varepsilon}e^{\varphi t}r^{-it}}{\Gamma(1+(\nu_1-\varepsilon-it))\,\omega(\nu_1-\varepsilon-it))}+\right.$$
$$\left.+\frac{e^{-(2\pi i\varepsilon+2\pi t)m}}{e^{2\pi i\varepsilon+2\pi t}-1}\,\frac{r^{\nu_1-\varepsilon}e^{-\varphi t}r^{it}}{\Gamma(1+(\nu_1-\varepsilon+it))\,\omega(\nu_1-\varepsilon+it))}\right\}e^{i\varphi(\nu_1-\varepsilon)}dt.$$

Оценивая интегралы $\overline{J}_j^{(m)}$, $j=1,\ 2,\ 3$, тем же способом, что и раньше, получим

$$\sum_{i=1}^{3}\overline{J}_i^{(m)}\leqslant\exp\left\{O\left(\frac{\nu\ln_4\nu}{\ln_3\nu}\right)\right\}$$

при $r\to\infty$, если φ удовлетворяет условию (2. 27), и при $r\to\infty$ ввиду (2. 35) имеем

$$E_\omega(x)=\sum_{n=-(m+1)}^{m}E_\omega^{(n)}(x)+\exp\left\{O\left(\frac{\nu\ln_4\nu}{\ln_3\nu}\right)\right\}.\qquad(2.36)$$

Если $x\in D_m^{(3)}$, то легко показать $\left(\text{при }\frac{\omega(\nu)}{2}<2(m+1)-\frac{\delta}{\pi}\right)$, что из выполнения (2. 25) следует выполнение (2. 27). Поэтому, если $x\in D_m^{(3)}\cup D_m^{(4)}$, имеет место (2. 36). Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. *Для функции* $E_\omega(x)$ *при* $1-\frac{\delta}{\pi}\leqslant\frac{\omega(\nu)}{2}\leqslant\frac{\lambda_2}{2}$, $x\in\bigcup_{i=1}^{4}D_m^{(i)}$ *выполняется*

$$E_\omega(x)=\sum_{n=-(m+j)}^{m}E_\omega^{(n)}(x)+\exp\left\{O\left(\frac{\nu\ln_4\nu}{\ln_3\nu}\right)\right\}\qquad(2.37)$$

при $r\to\infty$, *где*

$$j=\begin{cases}0, & \text{если } x\in D_m^{(1)}\cup D_m^{(2)},\\ 1, & \text{если } x\in D_m^{(3)}\cup D_m^{(4)}.\end{cases}$$

Скажем, что $x = re^{i\varphi} \in \Delta_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots, r > a$, если выполняется следующее соотношение:

$$k - \frac{\delta}{\pi} \leqslant \frac{\omega(\nu)}{2} < k + 1 - \frac{\delta}{\pi}.$$

Прежде всего отметим, что множество $\Delta = \bigcup\limits_{k=0}^{K} \Delta_k$, где $K = \left[\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\delta}{\pi}\right]$, совпадает с множеством $a < |x| < \infty$. Пусть $\Delta_m^{(1)} = \Delta_{2m}$, $\Delta_m^{(2)} = \Delta_{2m+1}$, $m = 0, 1, 2 \ldots$ Тогда

1) если $K = 2M$, M — целое число, то $\Delta = \Delta^{(1)} \cup \Delta^{(2)}$, где

$$\Delta^{(1)} = \bigcup_{m=0}^{M} \Delta_m^{(1)}, \quad \Delta^{(2)} = \bigcup_{m=0}^{M} \Delta_m^{(2)};$$

2) если $K = 2M + 1$, то $\Delta = \Delta^{(1)} \cup \Delta^{(2)}$, где

$$\Delta^{(1)} = \bigcup_{m=0}^{M} \Delta_m^{(1)}, \quad \Delta^{(2)} = \bigcup_{m=0}^{M+1} \Delta_m^{(2)}.$$

Кроме того, введем следующие обозначения: $G_0^{(1)} = D_0 \cup D_0^{(1)}$,

$$G_m^{(1)} = D_{m-1}^{(4)} \cup D_m^{(1)}, \ m = 1, 2, 3, \ldots, \quad G_m^{(2)} = D_m^{(2)} \cup D_m^{(3)}, \ m = 0, 1, 2, \ldots$$

Далее, пусть $G = G^{(1)} \cup G^{(2)}$, где $G^{(1)} = \bigcup\limits_{m=0}^{M} G_m^{(1)}$, $G^{(2)} = \bigcup\limits_{m=0}^{M} G_m^{(2)}$, если $K = 2M$, и $G^{(1)} = \bigcup\limits_{m=0}^{M} G_m^{(1)}$, $G^{(2)} = \bigcup\limits_{m=0}^{M+1} G_m^{(2)}$, если $K = 2M + 1$.

Так как $G_m^{(1)}$ — множество, где выполняются одновременно неравенства (2.20) и (2.21) или

$$-2m\pi + \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right) \leqslant \varphi \leqslant 2(m+1)\pi - \left(\frac{\pi\omega(\nu)}{2} + \delta\right),$$

а $\Delta_m^{(1)}$ — множество, где выполняется неравенство (2.20), то $\Delta_m^{(1)} = G_m^{(1)}$. Аналогично $\Delta_m^{(2)} = G_m^{(2)}$. Поэтому $\Delta^{(1)} = G^{(1)}$, $\Delta^{(2)} = G^{(2)}$ и, следовательно, $\Delta = G$. Таким образом, множество G совпадает с множеством $a < |x| < \infty$, и равенство (2.37) дает интегральное представление функции $E_\omega(x)$ для всех x, $a < |x| < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. G. Mittag-Leffler. Sur la representation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogene. Acta mathematica, 29, 1905, 101—182.
2. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции 1 изд. Физматгиз, М., 1857.
3. М. А. Евграфов. Асимптотические оценки и целые функции, 2 изд. Физматгиз, М., 1962.
4. Г. Бейтмен и А. Эрдейн. Высшие трансцендентные функции, т. 3. Справочная матем. б-ка. М., 1967.
5. М. М. Джрбашян. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М., 1966.
6. В. Ж. Риекстыня. Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов. Уч. зап. Латвийск. ун-та им. П. Стучки, т. 58, 1964, 49—72.
7. В. Ж. Риекстыня. Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов. II. Латвийск. матем. ежегодник, т. 1, 1967. 37—70.
8. В. Ж. Риекстыня. Асимптотические оценки для суммы некоторых степенных рядов. III. Латвийск. матем. ежегодник, т. 2. 1967, 265—281.
9. Э. Т. Уиттекер и Дж. Ватсон. Курс современного анализа, т. 2. Физматгиз, М., 1963.

Поступила 7 октября 1968 г.