



С.Н. Зиненко

Математический анализ

Интегрирование функций одной переменной

(сборник задач)

2017

16. Интегрирование “подстановкой” и “по частям”

Найти интегралы функций	
<p>№ 16.1. $\int \cos(3x - 5) dx$</p> <p>№ 16.2. $\int \sin(x^2) x dx$</p> <p>№ 16.3. $\int e^{x^3} x^2 dx$</p> <p>№ 16.4. $\int \frac{1}{\sin^2 \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} dx$</p> <p>№ 16.5. $\int \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx$</p> <p>№ 16.6. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$</p> <p>№ 16.7. $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$</p> <p>№ 16.8. $\int \operatorname{tg} x dx$</p> <p>№ 16.9. $\int \frac{1}{\arcsin x \sqrt{1 - x^2}} dx$</p> <p>№ 16.10. $\int \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{1 + x^2} dx$</p> <p>№ 16.11. $\int \frac{\sin \sqrt{\ln x}}{x \sqrt{\ln x}} dx$</p>	<p>№ 16.1. $\int \sin(-5x + 3) dx$</p> <p>№ 16.2. $\int \cos(x^5) x^4 dx$</p> <p>№ 16.3. $\int e^{x^4} x^3 dx$</p> <p>№ 16.4. $\int \frac{1}{\cos^2 \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x}^2} dx$</p> <p>№ 16.5. $\int \frac{1}{e^{-x} + e^x} dx$</p> <p>№ 16.6. $\int \frac{1}{\ln^2 x \cdot x} dx$</p> <p>№ 16.7. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx$</p> <p>№ 16.8. $\int \operatorname{ctg} x dx$</p> <p>№ 16.9. $\int \sqrt{\frac{\arccos x}{1 - x^2}} dx$</p> <p>№ 16.10. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x (1 + x^2)}} dx$</p> <p>№ 16.11. $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{(1 + \cos^2 \sqrt{x}) \sqrt{x}} dx$</p>
<p>№ 16.12. $\int x e^x dx$</p> <p>№ 16.13. $\int (2x - 3) \sin x dx$</p> <p>№ 16.14. $\int (x^2 - x + 1) \cos x dx$</p> <p>№ 16.15. $\int e^x \cos x dx$</p> <p>№ 16.16. $\int \ln x dx$</p> <p>№ 16.17. $\int \operatorname{arctg} x dx$</p> <p>№ 16.18. $\int \arcsin x dx$</p> <p>№ 16.19. $\int \sqrt{1 - x^2} dx$</p>	<p>№ 16.12. $\int x e^{-2x} dx$</p> <p>№ 16.13. $\int (-3x + 2) \cos 4x dx$</p> <p>№ 16.14. $\int (5x^2 - 4x + 3) \sin 2x dx$</p> <p>№ 16.15. $\int e^{-2x} \sin 3x dx$</p> <p>№ 16.16. $\int \ln^2 x dx$</p> <p>№ 16.17. $\int \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x dx$</p> <p>№ 16.18. $\int \arccos x dx$</p> <p>№ 16.19. $\int \sqrt{x^2 \pm 1} dx$</p>

17. Интегрирование рациональных дробей (“вещественный случай”)

Найти интегралы рациональных дробей	
№ 17.1. $\int \frac{x-1}{x^2-5x+6} dx$	№ 17.1. $\int \frac{5x-10}{x^2-3x-4} dx$
№ 17.2. $\int \frac{x^3+x^2-6x-8}{x^2+2x-3} dx$	№ 17.2. $\int \frac{x^3+4x^2+5x-1}{x^2+x-2} dx$
№ 17.3. $\int \frac{-5x^2+6x+23}{x^3+2x^2-5x-6} dx$	№ 17.3. $\int \frac{2x^2+12x+22}{x^3+4x^2+x-6} dx$
№ 17.4. $\int \frac{3x+5}{x^3+4x^2+5x+2} dx$	№ 17.4. $\int \frac{4x^2-12x+9}{x^3-4x^2+5x-2} dx$
№ 17.5. $\int \frac{x^2+4x+6}{(x+1)^3} dx$	№ 17.5. $\int \frac{-3x^2+8x-6}{(x-1)^3} dx$

18. Интегрирование рациональных дробей (“комплексный случай”)

Найти интегралы рациональных дробей	
№ 18.1. $\int \frac{1}{x^3 - 1} dx$	№ 18.1. $\int \frac{x}{x^3 + 1} dx$
№ 18.2. $\int \frac{x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 9x - 13} dx$	№ 18.2. $\int \frac{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 1}{x^3 + 3x^2 + 7x + 5} dx$
№ 18.3. $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$	№ 18.3. $\int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx$
№ 18.4. $\int \frac{2x^3 + 11x^2 + 14x - 5}{(x^2 + 6x + 13)^2} dx$	№ 18.4. $\int \frac{2x^3 + 9x^2 + 34x + 16}{(x^2 + 4x + 13)^2} dx$

19. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Найти интегралы вида $\int \frac{Mx + N}{\sqrt{\pm(x^2 - 2px + q)}} dx$	
№ 19.1. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2 - 4x - 5}} dx$	№ 19.1. $\int \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} dx$
№ 19.2. $\int \frac{x-1}{\sqrt{16 + 6x - x^2}} dx$	№ 19.2. $\int \frac{x+3}{\sqrt{-9 - 10x - x^2}} dx$
Найти интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$	
№ 19.3. $\int \frac{1}{x + 2\sqrt{x-2}} dx$	№ 19.3. $\int \frac{\sqrt{x-5} + 1}{x(\sqrt{x-5} - 4) + 20} dx$
№ 19.4. $\int \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-3}} \frac{1}{(x-3)^2} dx$	№ 19.4. $\int \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}} \frac{1}{(x-2)} dx$
Найти интегралы вида $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ (дифференциальный бином)	
№ 19.5. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})} dx$	№ 19.5. $\int \frac{(1 + \sqrt[4]{x})^2}{\sqrt[3]{x}} dx$
№ 19.6. $\int \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{(1 + 2\sqrt[4]{x})^4}} dx$	№ 19.6. $\int \frac{\sqrt[4]{(1 - 2\sqrt[3]{x})}}{\sqrt[3]{x}} dx$
№ 19.7. $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt{x} + 2}}{\sqrt[6]{x}^{13}} dx$	№ 19.7. $\int \frac{\sqrt[3]{\sqrt[4]{x}^3 - 3}}{\sqrt[4]{x}^{11}} dx$

20. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Найти интегралы вида $\int \cos^n x dx$, $\int \sin^n x dx$ ($n > 0$)	
№ 20.1. $\int \cos^3 x dx$	№ 20.1. $\int \sin^3 x dx$
№ 20.2. $\int \sin^5 x dx$	№ 20.2. $\int \cos^5 x dx$
№ 20.3. $\int \cos^2 x dx$	№ 20.3. $\int \sin^2 x dx$
№ 20.4. $\int \sin^6 x dx$	№ 20.4. $\int \cos^4 x dx$
Найти интегралы вида $\int f(\cos x) \sin x dx$, $\int f(\sin x) \cos x dx$	
№ 20.5. $\int \cos^4 x \sin x dx$	№ 20.5. $\int \sin^5 x \cos x dx$
№ 20.6. $\int \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin^3 x}} dx$	№ 20.6. $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$
№ 20.7. $\int \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$	№ 20.7. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1 + \cos^2 x}} dx$
№ 20.8. $\int \frac{1}{\cos x} dx$	№ 20.8. $\int \frac{1}{\sin x} dx$
№ 20.9. $\int \frac{\sin 2x + \cos x}{\cos^2 x + \sin x + 1} dx$	№ 20.9. $\int \frac{\sin 2x + \sin x}{7 + 5 \cos x - \sin^2 x} dx$
Найти интегралы вида $\int f\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) dx$	
№ 20.10. $\int \frac{4 \sin^2 x - 5 \sin x \cos x - \cos^2 x}{\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x} dx$	№ 20.10. $\int \frac{\sin^2 x + 5 \sin 2x + \cos^2 x}{\sin^2 x - \sin 2x - 3 \cos^2 x} dx$
№ 20.11. $\int \frac{2 dx}{\sin^2 x + \sin 2x}$	№ 20.11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \sin x \cos x - 6 \cos^2 x}$
Найти интегралы вида $\int f(\sin x, \cos x) dx$	
№ 20.12. $\int \frac{dx}{5 \cos x + 3}$	№ 20.12. $\int \frac{dx}{\sin x + 2}$

21. Площадь фигуры

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми	
<p>№ 21.1. $y = x^2 - 2x - 3$, $y = x + 1$</p> <p>№ 21.2. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$</p> <p>№ 21.3. $y = \cos x$, $y = \sin x$</p> <p>№ 21.4. $y = \frac{2}{1+x^2}$, $y = x^2$</p> <p>№ 21.5. $y = \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = 1$</p> <p>№ 21.6. $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$</p> <p>№ 21.7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$</p>	<p>№ 21.1. $y = x^2 - x - 3$, $y = -x^2 - 3x + 1$</p> <p>№ 21.2. $y = x^2$, $y = x^3$</p> <p>№ 21.3. $y = \sin x$, $y = 0$</p> <p>№ 21.4. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $y = \sqrt{2}$</p> <p>№ 21.5. $y = \arcsin x$, $y = 0$, $x = 1$</p> <p>№ 21.6. $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$</p> <p>№ 21.7. $\frac{ x }{a} + \frac{ y }{b} = 1$</p>
<p>№ 21.8. $r = a \sin 3\varphi$</p> <p>№ 21.9. $r = a(1 + \cos \varphi)$</p> <p>№ 21.10. $r = a(2 + \cos 4\varphi)$, $r \geq \frac{3}{2}a$</p>	<p>№ 21.8. $r = a \cos 4\varphi$</p> <p>№ 21.9. $r = a(1 + 2 \cos \varphi)$</p> <p>№ 21.10. $r = a(2 - \cos 4\varphi)$, $r \geq \frac{3}{2}a$</p>
<p>№ 21.11. Найти массу (заряд) стержня $[a, b]$ с линейной плотностью вещества (заряда) $\rho(x)$.</p>	
<p>a) $\rho(x) = \cos x$, $x \in [0, 2\pi]$</p> <p>b) $\rho(x) = 1$, $x \in [-\pi, +\pi]$</p>	<p>a) $\rho(x) = \sin x$, $x \in [-\pi, +\pi]$</p> <p>b) $\rho(x) = 1$, $x \in [0, 2\pi]$</p>

22. Объем тела

Найти объем тела, ограниченного поверхностями	
<p>№ 22.1. $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, \quad z = c$</p> <p>№ 22.2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$</p> <p>№ 22.3. $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2az$</p>	<p>№ 22.1. $z = \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}, \quad z = c$</p> <p>№ 22.2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad z = \pm c$</p> <p>№ 22.3. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad az = 2a^2 - x^2 - y^2$</p>
Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси фигуры, ограниченной кривыми	
<p>№ 22.4. $y = 2x - x^2, \quad y = 0,$ а) ось Ox, б) ось Oy</p>	<p>№ 22.4. $y = \sin x, \quad y = 0, \quad (0 \leq x \leq \pi)$ а) ось Ox, б) ось Oy</p>
Используя теорему Гульдина, найти объем тела, образованного вращением фигуры	
<p>№ 22.5. $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ вокруг прямой $bx + ay = ab$</p>	<p>№ 22.5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг прямой $bx + ay = 2ab$</p>

23. Длина и масса кривой

Найти длину кривой	
№ 23.1. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$	№ 23.1. $\begin{cases} x = a t \cos t \\ y = a t \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$
№ 23.2. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad x \in [0, a]$	№ 23.2. $y = \ln \cos x, \quad x \in [0, \frac{\pi}{6}]$
№ 23.3. $r = \varphi, \quad \varphi \in [0, \alpha]$	№ 23.3. $r = a(1 + \cos \varphi)$
Найти координаты центра масс однородной кривой	
№ 23.4. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$	№ 23.4. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$

24. Площадь поверхности вращения

Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой вокруг оси	
<p>№ 24.1. $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t) \\ y = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}, t \in [0, \pi] \text{ (Ox)}$</p> <p>№ 24.2. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, x \in [0, a]$ a) ось Ox, b) ось Oy</p> <p>№ 24.3. $r = a(1 + \cos \varphi)$ (полярная ось)</p>	<p>№ 24.1. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi] \text{ (Ox)}$</p> <p>№ 24.2. $y = \sin x, x \in [0, \pi] \text{ (Ox)}$</p> <p>№ 24.3. $r = a \sin \varphi$ a) ось Ox, b) ось Oy</p>
Используя теорему Гульдина, найти площадь поверхности, образованной вращением кривой	
<p>№ 24.4. $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = b \sin^3 t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ вокруг прямой $bx + ay = ab$</p>	<p>№ 24.4. $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$ вокруг осей Ox, Oy</p>

25. Несобственные интегралы

Найти несобственные интегралы по неограниченному промежутку	
<p>№ 25.1. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$</p> <p>№ 25.2. $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$</p> <p>№ 25.3. $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$</p> <p>№ 25.4. $\int_0^{+\infty} \cos x dx$</p>	<p>№ 25.1. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx$</p> <p>№ 25.2. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$</p> <p>№ 25.3. $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx$</p> <p>№ 25.4. $\int_0^{+\infty} \sin x dx$</p>
Выяснить, при каких значениях параметра p сходятся интегралы	
<p>№ 25.5. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx$</p>	<p>№ 25.5. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^p} dx$</p>
Используя признаки сравнения, выяснить сходимость интегралов	
<p>№ 25.6. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^3}{x^4 + 1} dx$</p> <p>№ 25.7. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}^3} dx$</p> <p>№ 25.8. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^3}{e^x} dx$</p>	<p>№ 25.6. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}^4}{x^5 + 1} dx$</p> <p>№ 25.7. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}^4} dx$</p> <p>№ 25.8. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x}^4}{e^x} dx$</p>
Найти несобственные интегралы от неограниченной функции	
<p>№ 25.9. $\int_0^1 \frac{e^{\sin x} \cos x}{e^{\sin x} - 1} dx$</p> <p>№ 25.10. $\int_0^1 \frac{1}{x \ln^2 x} dx$</p>	<p>№ 25.9. $\int_0^1 \frac{1}{(1 - e^{-\operatorname{tg} x}) \cos^2 x} dx$</p> <p>№ 25.10. $\int_0^1 \frac{1}{x \ln^3 x} dx$</p>
Выяснить, при каких значениях параметра p сходятся интегралы	
<p>№ 25.11. $\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx$</p>	<p>№ 25.11. $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^p} dx$</p>
Используя признаки сравнения, выяснить сходимость интегралов	
<p>№ 25.12. $\int_0^1 \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{e^{\arcsin x} - 1} dx$</p> <p>№ 25.13. $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt[3]{x}^4} dx$</p>	<p>№ 25.12. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx$</p> <p>№ 25.13. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} x \sqrt[3]{x}} dx$</p>