О ТОЧНЫХ КЛАССАХ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Я. И. Житомирский

В данной статье развиваются и усиливаются некоторые результаты, полученные в [1], [2]. В этих работах мы рассматривали задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)\,u, \tag{1}$$

$a \neq 0$ — комплексная постоянная при начальном условии

$$u(x, 0) = u_0(x). \tag{2}$$

Подчинив $q(x)$ ряду требований, основным из которых являлось условие

$$\int\limits_{-\infty} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} = \infty, \quad \int^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} = \infty, \tag{3}$$

мы доказали, что класс функций, удовлетворяющих с каким-либо $\alpha > 0$ оценке

$$|u(x, t)| \leqslant C \exp\left\{\alpha t + \left|\int\limits_0^x H(t)\,dt\right|\right\} \tag{4}$$
$$0 \leqslant t < \infty, \ -\infty < x < \infty,$$

$H(x) > 0$ возрастает при $x > 0$ и четна, будет классом единственности решения задачи (1)—(2) в том и только в том случае, когда

$$\int^{\infty} \frac{dx}{H(x)} = \infty. \tag{5}$$

Мы докажем сейчас эту теорему в более свободных предположениях на $q(x)$.

Теорема 1. *Пусть $q(x)$ — комплекснозначная, непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию*

$$\sup_{t \in [0,\ x[} |D^r q(x)| \leqslant h^2(x)(1 + |x|)^{-r}, \quad r = 0, 1; \ -\infty < x < \infty, \tag{6}$$

$h(x)$ возрастает при $x > 0$ и четна и

$$\int^{\infty} \frac{dx}{h(x)} = \infty. \tag{7}$$

Тогда решение $u(x, t)$ задачи (1)—(2), удовлетворяющее оценке (4), тождественно равно нулю.

Теорема 2. *Если при всех x, $-\infty < x < \infty$, $q(x)$ удовлетворяет оценке*

$$|q(x)| \leqslant h^2(x)$$

и

$$xh(x) = o(1)\int_0^x H(t)\,dt,\ o(1)\underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где $H(x)$ не удовлетворяет условию (5), то единственность решения задачи (1)—(2) в классе функций (4) не имеет места.

Эти две теоремы приводят нас к упоминавшемуся необходимому и достаточному условию.

Доказательство теоремы 2 имеется, по существу, в [2].

Доказательство теоремы 1*.

Рассмотрим решение $y(x, \lambda)$ уравнения

$$ay''(x, \lambda) + (q(x) - \lambda)\,y(x, \lambda) = 0, \tag{8}$$

аналитическое в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \alpha > 0$ и удовлетворяющее в ней оценке

$$|y(x, \lambda)| \leqslant C_1 \exp\left|\int_0^x H(t)\,dt\right|. \tag{9}$$

Пусть при $\lambda = \sigma_1 + i\tau$

$$y(x, \lambda) = C_0(\lambda)\,y_0(x, \lambda) + C_1(\lambda)\,y_1(x, \lambda), \tag{10}$$

где $y_0(x, \lambda)$, $y_1(x, \lambda)$ — линейно независимые решения уравнения (8) с асимптотикой [3]

$$y_j(x, \lambda) = (1 + o(1)) \exp\int_0^x W_j(t, \lambda)\,dt, \tag{11}$$

$$j = 0,1;\ o(1)\underset{|\tau|\to\infty}{\to} 0;\ |x| \leqslant g(|\tau|),$$

где $g(x)$ связана с $H(x)$:

$$H(g(x)) = \delta\sqrt{x},\ 0 < x < \infty,\ \delta > 0, \tag{12}$$

а $W_j(x, \lambda)$ — корни характеристического для (8) уравнения; при $|x| \leqslant g(|\tau|)$ эти корни имеют вид

$$W_0(x, \lambda) = (ia^{-1}\operatorname{sign}\tau)^{\frac{1}{2}}|\tau|^{\frac{1}{2}}(1 + o(1)), \tag{13}$$

$$W_1(x, \lambda) = -W_0(x, \lambda).$$

Выберем знак τ так, чтобы при $|x| \leqslant g(|\tau|)$ выполнялось неравенство

$$|\arg W_0(x, \lambda)| \leqslant C_2 < \frac{\pi}{2}, \tag{14}$$

что возможно в силу формулы (13). Из (14) следует, что при $|x| \leqslant g(|\tau|)$ справедлива оценка

$$\operatorname{Re} W_0(x, \lambda) \geqslant C_3|W_0(x, \lambda)|,\ C_3 > 0. \tag{15}$$

* Данная теорема являлась бы частным случаем соответствующей теоремы из нашей работы [3], если бы условию (4) вместе с функцией $u(x, t)$ удовлетворяла и ее производная $D_x u(x, t)$.

Пусть в точке λ полувертикали $\lambda = \sigma_1 + i\tau$ выполнено неравенство

$$|C_0(\lambda)| > |C_1(\lambda)|. \tag{16}$$

Из (11) следует, что

$$\left|\frac{y_0(x, \lambda)}{y_1(x, \lambda)}\right| \leqslant (1 + o(1)) \left|\exp\left\{-2\int_0^x W_0(t, \lambda)\, dt\right\}\right|. \tag{17}$$

Используя (15) и (13), из (17) при $x \geqslant x_1 > 0$ получим:

$$\left|\frac{y_1(x, \lambda)}{y_0(x, \lambda)}\right| \leqslant C_4 \exp\{-C_5 |\tau|^{\frac{1}{2}}\} \leqslant \frac{1}{2} \tag{18}$$

при достаточно больших значениях $|\tau|$.

Используя (16) и (18), при $x \geqslant x_1$ получим из (10):

$$|y(x, \lambda)| = |C_0(\lambda)\, y_0(x, \lambda)| \cdot \left|1 + \frac{C_1(\lambda)\, y_1(x, \lambda)}{C_0(\lambda)\, y_0(x, \lambda)}\right| \geqslant \frac{1}{2} |C_0(\lambda)\, y_0(x, \lambda)|.$$

Тогда из (9) и (11) получим при $x \geqslant x_1$

$$C_1 \geqslant \frac{1}{2} |C_0(\lambda)\, y_0(x, \lambda)| \exp\left\{-\int_0^x H(t)\, dt\right\} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{4} |C_0(\lambda)| \exp \int_0^x [\operatorname{Re} W_0(t, \lambda) - H(t)]\, dt.$$

Отсюда, используя (15) и (13), получаем

$$|C_0(\lambda)| \leqslant C_6 \exp \int_0^x [H(t) - \operatorname{Re} W_0(t, \lambda)]\, dt \leqslant C_6 \exp \int_0^x [H(t) - C_7 |\tau|^{\frac{1}{2}}]\, dt.$$

Если в рассматриваемой точке λ вместо (16) выполнено противоположное неравенство, то в (17) и далее следует рассматривать $\dfrac{y_0(x, \lambda)}{y_1(x, \lambda)}$ и выбирать значения $x \leqslant -x_2 < 0$.

Определим теперь $\hat{g}(x)\ (x > 0)$ соотношением

$$H(\hat{g}(x)) = \hat{\delta}\sqrt{x}, \quad \hat{\delta} = \min\left\{\delta, \frac{1}{2} C_7\right\} \leqslant \delta.$$

Очевидно, $\hat{g}(|\tau|) \leqslant g(|\tau|)$. Подставляя в последнюю оценку $x = \hat{g}(|\tau|)$, получим

$$|C_0(\lambda)| \leqslant C_6 \exp\{-C_8 \hat{g}(|\tau|)\sqrt{|\tau|}\}, \quad C_8 > 0.$$

Эта оценка справедлива как для $C_0(\lambda)$, так и для $C_1(\lambda)$ в любой точке одной из полувертикалей $\lambda = \sigma_1 + i\tau$ (либо при $\tau > 0$, либо при $\tau < 0$).

Далее, при фиксированном x и достаточно больших значениях $|\tau|$ (чтобы выполнялось $|x| \leqslant g(|\tau|)$) из (11) и (13) получим, что

$$|y_j(x, \lambda)| \leqslant C_9 \exp\{A_1 |x| \sqrt{|\tau|}\}, \quad j = 0,1.$$

Подставляя полученные оценки для $C_j(\lambda)$ и $y_j(x, \lambda)$ в (10), получим при любом фиксированном x и достаточно больших значениях $|\tau|$ (либо при $\tau > 0$, либо при $\tau < 0$) оценку:

$$|y(x, \sigma_1 + i\tau)| \leqslant A_2 \exp\{[-C_8 \hat{g}(|\tau|) + A_1 |x|] \sqrt{|\tau|}\}.$$

Эта оценка (в случае ее справедливости, например, при $\tau > 0$) дает

$$\int^{\infty} \tau^{-2} \ln |y(x, \sigma_1 + i\tau)| \, d\tau = -\infty,$$

так как $-C_8\hat{g}(|\tau|) + A_1|x| \leqslant -A_3\hat{g}(|\tau|)$ и

$$\int_{\tau_0}^{\infty} \tau^{-2}\hat{g}(\tau)\sqrt{\tau}\, d\tau = A_4 \int_{y_0}^{\infty} y\sqrt{H(y)}\, H'(y)\, dy =$$

$$= A_5\left[y_0 H^{-1}(y_0) + \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{H(y)}\right] = \infty.$$

Учитывая ограниченность в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_1$ аналитической функции $y(x, \lambda)$ (что следует из (9)) и полученное убывание на полувертикали, получим $y(x, \lambda) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

В теореме 1 речь шла о классе единственности задачи (1), (2) при условии медленного роста $q(x)$ (см. (6), (7)). Точность этого класса обеспечивается теоремой 2. Напомним, что в работах [1], [2] мы получили точные классы единственности и при любом другом росте $q(x)$ при $|x| \to \infty$. Но при этом предполагали, что $q(x)$ удовлетворяет условиям одного типа как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$.

Так, в случае быстрого роста $q(x)$, когда не выполняются условия (6) и (7), мы предполагали, что как при $x \to +\infty$, так и при $x \to -\infty$ $q(x)$ стремится либо к $+\infty$, либо к $-\infty$. Кроме того, предполагалось, что оба интеграла в (3) сходятся. Мы не станем формулировать здесь соответствующих результатов. Отметим лишь, что в них существенную роль играла суммируемость на $+\infty$ и на $-\infty$ функции $|q(x)|^{-\frac{1}{2}} \ln |q(x)|$.

В данной работе мы отказываемся от предположений типа одинаковости поведения $q(x)$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Наша цель — проследить, как меняются при этом классы единственности.

Как обычно, мы начнем с изучения асимптотики решений уравнения (8).

Теорема 3. *Пусть $q(x)$ удовлетворяет условиям:* 1) *при* $-\infty < x \leqslant 0$ $q(x)$ — *вещественная, дважды непрерывно дифференцируемая функция такая, что* $|q(x)| \to \infty$ *при* $x \to -\infty$ *и при достаточно большом* $x_0 > 0$ *функции* $q''|q|^{-\frac{3}{2}}$ *и* $q'^2|q|^{-\frac{5}{2}}$ *принадлежат* $L_1(-\infty, -x_0)$; 2) *при* $x > 0$ $q(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1.

Тогда на вертикали $\lambda = \sigma_1 + i\tau^*$, $\sigma_1 > 0$ *уравнение (8) имеет два линейно независимых решения вида*

$$y_j^{(p)}(x, \lambda) = \begin{cases} \left(\dfrac{\lambda - q(x)}{a}\right)^{-\frac{1}{4} + \frac{p}{2}} [(-1)^{pj} + o(1)] \exp \displaystyle\int_0^x W_j(t, \lambda)\, dt, & x < 0 \\ \left(\dfrac{i\tau}{a}\right)^{-\frac{1}{4} + \frac{p}{2}} [(-1)^{pj} + o(1)] \exp \displaystyle\int_0^x W_j(t, \lambda)\, dt, & 0 \leqslant x \leqslant g(|\tau|) \end{cases} \quad p, j = 0, 1 \tag{19}$$

$$W_j(x, \lambda) = (-1)^j \sqrt{\frac{\lambda - q(x)}{a}}, \quad o(1) \xrightarrow[|\tau| \to \infty]{} 0,$$

---

* При $\operatorname{sign} q(x) \operatorname{sign} \cos\varphi < 0$ знак τ можно выбрать любым, в противном случае знак τ выбирается из условия $\operatorname{sign} \tau = \operatorname{sign} \varphi$. Здесь имеется в виду $\operatorname{sign} q(x)$ при $x \to -\infty$ и $\varphi = \arg a$.

$q(x)$ связана соотношением (12) с функцией $H(x)$, удовлетворяющей условию (5) и такой, что $h(x)=o(1)H(x)$ при $x\to+\infty$.

Доказательство. Запишем уравнение (8) в виде системы $\bar{y}'=A\bar{y}$, где собственными значениями матрицы A являются функции $W_0(x,\lambda)=\left(\frac{\lambda-q(x)}{a}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $W_1(x,\lambda)=-W_0(x,\lambda)$. Рассмотрим матрицу $B=\left(\frac{\lambda-q(x)}{a}\right)^{-\frac{1}{4}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ W_0 & W_1\end{pmatrix}$. Тогда матрица $G=B^{-1}B'=\|g_{ij}(x,\lambda)\|$ имеет вид $G=\frac{q'(x)}{\lambda-q(x)}C_G$, где C_G — постоянная матрица с нулями на диагонали. Обозначим $s_{ij}(x,\lambda)=\frac{g_{ij}(x,\lambda)}{W_i-W_j}$ при $i\neq j$ и $s_{ii}(x,\lambda)=0$. Тогда матрица $S(x,\lambda)=\|s_{ij}(x,\lambda)\|$ имеет вид $S(x,\lambda)=q'(x)(\lambda-q(x))^{-\frac{3}{2}}C_s$, где C_s — постоянная матрица с нулями на диагонали.

Если обозначить W — диагональную матрицу с элементами W_0, W_1 на диагонали, то, очевидно, $W=B^{-1}AB$ и $WS-SW=G$. Полагая в системе $\bar{y}'=A\bar{y}$, $\bar{y}=B(I+S)\bar{z}$, получим $\bar{z}'=W\bar{z}+C\bar{z}$, где $C(x,\lambda)=-(I+S)^{-1}(S'+GS)=\|C_{ij}(x,\lambda)\|$.

Анализ элементов $C_{ij}(x,\lambda)$ сравнительно легко приводит к справедливости следующего утверждения.

***Лемма 1.** Пусть $q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда справедливы соотношения*

$$\lim_{|\tau|\to\infty}\int_{-\infty}^{0}|C_{ij}(x,\lambda)|dx=0,\quad \lim_{|\tau|\to\infty}\int_{x_0}^{g(|\tau|)}|C_{ij}(x,\lambda)|dx=0,$$

где x_0 — произвольно.

Положив $\bar{z}=\bar{\eta}\exp\int_0^x W_j(t,\lambda)\,dt$, $j=0,1$, получим систему уравнений

$$\frac{d\eta_i}{dx}=(W_i-W_j)\eta_i+\sum_{k=0}^{1}C_{ik}\eta_k,\quad \bar{\eta}=\{\eta_0,\eta_1\}. \tag{20}$$

$$i,j=0,1$$

Нетрудно показать, что в условиях теоремы 3 величина $\operatorname{Re}[W_0(x,\lambda)-W_1(x,\lambda)]=2\operatorname{Re}W_0(x,\lambda)$ сохраняет знак при $-\infty<x\leqslant g(|\tau|)$.

Заменим теперь систему (20) системой интегральных уравнений

$$\eta_j(x,\lambda)=1+\int_{-\infty}^{x}\sum_{k=0}^{1}C_{jk}(t,\lambda)\eta_k(t,\lambda)\,dt,$$

$$\eta_i(x,\lambda)=\int_{-\infty}^{x}\exp\left\{\int_t^x[W_i(t_1,\lambda)-W_j(t_1,\lambda)]\,dt_1\right\}\sum_{k=0}^{1}C_{ik}(t,\lambda)\eta_k(t,\lambda)\,dt$$

при $\operatorname{Re}[W_i-W_j]\leqslant 0$, $i\neq j$.

$$\eta_i(x,\lambda)=-\int_{x}^{g(|\tau|)}\exp\left\{-\int_x^t[W_i(t_1,\lambda)-W_j(t_1,\lambda)]\,dt_1\right\}\sum_{k=0}^{1}C_{ik}(t,\lambda)\eta_k(t,\lambda)\,dt$$

при $\operatorname{Re}[W_i-W_j]\geqslant 0$, $i\neq j$.

Решая эту систему методом последовательных приближений и учитывая лемму 1, получим, что верна

Лемма 2. *Система (20) при* $\lambda = \sigma_1 + i\tau$ *и соответствующем выборе знака* τ *имеет решение* $\{\eta_0, \eta_1\}$ *вида*

$$\eta_i(x, \lambda) = \begin{cases} o(1), & i \neq j \\ 1 + o(1), & i = j, \end{cases}$$
$$-\infty < x \leqslant g(|\tau|), \quad o(1) \xrightarrow[|\tau| \to \infty]{} 0.$$

Из леммы 2 и вида наших преобразований приходим к справедливости теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть* $q(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы 3 и*

$$\int\limits_{-\infty} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} < \infty \tag{21}$$

Тогда всякое решение $u(x, t)$ *задачи (1)—(2), удовлетворяющее при каком-либо* $\beta > 0$ *оценке*

$$|u(x, t)| \leqslant e^{\beta t} \cdot F(x), \tag{22}$$
$$-\infty < x < \infty, \quad 0 \leqslant t < \infty,$$

$$F(x) = \begin{cases} \alpha(x)(1 + |q(x)|)^{\frac{1}{4}} \exp\left\{\mu \int\limits_x^0 \left|\frac{q(t)}{a}\right|^{\frac{1}{2}} dt\right\}, & x < 0 \\ \exp \int\limits_0^x H(t)\,dt, & x > 0 \end{cases} \tag{23}$$

$$\alpha(x) > 0 \text{ и } \inf_{x > 0} \alpha(x) = 0,$$

$$\mu = \begin{cases} \sin \frac{1}{2}|\varphi| & \text{при } q(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty \\ \cos \frac{1}{2}\varphi & \text{при } q(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty \end{cases}$$
$$\varphi = \arg a$$

тождественно равно нулю.

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ — аналитическое при $\operatorname{Re}\lambda \geqslant \sigma_0 > 0$ решение уравнения (8), удовлетворяющее при всех λ из этой полуплоскости и каком-либо $C > 0$ оценке

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |y(x, \lambda)| F^{-1}(x) \leqslant C. \tag{24}$$

Как обычно, достаточно доказать, что $y(x, \lambda) \equiv 0$. Представим $y(x, \lambda)$ в виде (10), где функции $y_0(x, \lambda)$ и $y_1(x, \lambda)$ описаны теоремой 3. Пусть в выбранной точке λ вертикали $\lambda = \sigma_1 + i\tau$ имеет место (16). Тогда рассмотрим отношение $\frac{y_1(x, \lambda)}{y_0(x, \lambda)}$. В силу (19)

$$\left|\frac{y_1(x, \lambda)}{y_0(x, \lambda)}\right| \leqslant C_1 \exp\left\{-2 \int\limits_0^x \operatorname{Re} W_0(t, \lambda)\, dt\right\}. \tag{25}$$

Пусть $\mu > 0$. Тогда, если $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos\arg W_0(x, \lambda) = -\mu < 0$, то при достаточно больших значениях $|x|$, $x < 0$, из (25), очевидно, что

$$|y_1(x, \lambda)\, y_0^{-1}(x, \lambda)| \leqslant \frac{1}{2}, \tag{26}$$

откуда следует

$$|y(x, \lambda)| \geqslant \frac{1}{2}|C_0(\lambda)| \cdot |y_0(x, \lambda)|. \tag{27}$$

Тогда из (19) и оценки (24) при достаточно больших значениях $|x|$, $x < 0$, вытекает

$$|C_0(\lambda)| \leqslant C_2 \alpha(x) \exp \int_x^0 \left[\mu \sqrt{\left|\frac{q(t)}{a}\right|} - |\operatorname{Re} W_0(t, \lambda)|\right] dt. \tag{28}$$

Но нетрудно видеть, что $|\cos \arg W_0(x, \lambda)| \geqslant \mu - \left|\frac{C_3}{\sigma_1 - q(x)}\right|$, а $|W_0(x, \lambda)| \geqslant$ $\geqslant \sqrt{\left|\frac{q(x)}{a}\right|}\left(1 - \left|\frac{\sigma_1}{q_0(x)}\right|\right)$.

Поэтому

$$-|\operatorname{Re} W_0(t, \lambda)| + \mu\sqrt{\left|\frac{q(t)}{a}\right|} \leqslant \frac{C_4}{\sqrt{|q(t)|}}.$$

Тогда, используя условие (21) и то, что $\inf \alpha(x) = 0$, получим из (28), что $C_0(\lambda) = 0$. Тогда из (16) в этой точке λ и $C_1(\lambda) = 0$.

Если же $\lim\limits_{x \to -\infty} \cos \arg W_0(x, \lambda) = \mu > 0$, рассматривая отношение $\frac{y_1(x, \lambda)}{y_0(x, \lambda)}$ при $0 \leqslant x \leqslant g(|\tau|)$ и учитывая, что в этом случае $\cos \arg W_0(x,\lambda) >$ $> C_5 > 0$ (при этом, если $q(x) \to -\infty$ и $|\varphi| \geqslant \frac{\pi}{2}$ следует выбрать $\operatorname{sign} \tau =$ $= \operatorname{sign} \varphi$), из (25) снова получим справедливость (26) и (27). Тогда из (19) и (24) при больших значениях x получим

$$|C_0(\lambda)| \leqslant C_6 \exp \int_0^x [H(t) - \operatorname{Re} W_0(t, \lambda)] dt. \tag{29}$$

Если в рассматриваемой точке λ $|C_1(\lambda)| \geqslant |C_0(\lambda)|$, то аналогичные рассмотрения проводятся с отношением $\frac{y_0(x, \lambda)}{y_1(x, \lambda)}$. Они приведут нас к оценке (29) для функции $C_1(\lambda)$. Справедливость утверждения $y(x, \lambda) = 0$ устанавливается теперь, как и в теореме 1.

Пусть теперь $\mu = 0$. Это имеет место при $\varphi = 0$, $q(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ и при $\varphi = \pi$, $q(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$.

Поскольку эти случаи аналогичны, рассмотрим лишь первый из них. В этом случае на участке $x_0 \leqslant x \leqslant g(|\tau|)$

$$\cos \arg W_0(x, \lambda) = \sin \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left|\frac{\tau}{q(x) - \sigma_1}\right| \geqslant C_7 > 0,$$

после чего рассмотрения проводятся, как и в предыдущем случае, в точках λ, в которых выполнено (16). В тех точках, где (16) не имеет места, придем к оценке (26) для отношения $\frac{y_0(x, \lambda)}{y_1(x, \lambda)}$, так как при достаточно больших $|x|$ $\int_x^0 \operatorname{Re} W_0(t, \lambda)\, dt \geqslant C_8 \sqrt{|\tau|}$, $C_8 > 0$. Как и выше, получаем, что $C_0(\lambda) = C_1(\lambda) = 0$.

В остальном доказательство не отличается от случая $\mu > 0$.

Теорема 5. *Пусть $q(x)$ удовлетворяет:*

1) *при* $x \leqslant 0$ *условию* 1 теоремы 3; $q'(x)$ *не меняет знак при достаточно больших значениях* $|x|$ *и*

$$\int_{-\infty} \frac{\ln|q(x)|}{\sqrt{|q(x)|}}\, dx < \infty. \tag{30}$$

2) *при* $x \geqslant 0$ *условиям теоремы* 2

Тогда существует нетривиальное решение $u(x, t)$ *задачи* (1) — (2), *удовлетворяющее при некотором* $\beta > 0$ *оценке (22), где* $F(x)$ *определяется формулой (23) с* $\alpha(x) \equiv 1$.

Доказательство. Пусть $y(x, \lambda)$ — решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям $y(o, \lambda) = 1$, $y'(o, \lambda) = 0$. Оценивая $y(x, \lambda)$ при $x > 0$, как в теореме 2.2 работы [2], а при $x < 0$, как в теореме 3.3 той же работы, получим, что функция

$$f(\lambda) \equiv \sup_{-\infty < x < \infty} |y(x, \lambda)| F^{-1}(x)$$

удовлетворяет условию $\int^{\infty} r^{-2} \ln f(r)\, dr < \infty$. Тогда $y(x, \lambda)$ обычным образом приводит к искомому нетривиальному решению $u(x, t)$.

Замечание. В случае $\varphi = \pi$ и $q(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty$ условие (30) можно ослабить, заменив его условием (21).

В следующей теореме мы исключаем из рассмотрения случай $\varphi = 0$ и $q(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$. В остальных случаях имеет место

Теорема 6. *Пусть* $q(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы 3 и, кроме того, при* $x < -x_0$ $q'(x)$ *сохраняет знак, а также выполнены условия (21) и*

$$\int_{-\infty} \frac{\ln|q(x)|}{\sqrt{|q(x)|}}\, dx = \infty. \tag{31}$$

Тогда решение $y(x, t)$ *задачи (1) — (2), удовлетворяющее при какомлибо* $\beta > 0$ *оценке (22) с функцией*

$$F(x) = \begin{cases} \int_x^0 \left(h(t) + \mu \sqrt{\left|\frac{q(t)}{a}\right|}\right) dt, & x < 0 \\ \int_0^x H(t)\, dt, & x > 0, \end{cases} \tag{32}$$

где $H(x) > 0$, $h(x) > 0$ — *четные, возрастающие при* $x > 0$ *функции, из которых* $H(x)$ *удовлетворяет условию* (5), *а* $h(x)$ — *условию*

$$\int_{-\infty} \ln \frac{\sqrt{|q(x)|}}{h(x)} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} = +\infty \tag{33}$$

тождественно равно нулю.

Доказательство проводится по той же схеме что и в теореме 4, комбинированием доказательств теоремы 3.5 работы [2] и теоремы 1.

Теорема 7. *Пусть* $q(x)$ *удовлетворяет:*

1) *при* $x \leqslant 0$ *условию 1 теоремы 3,* $q'(x)$ *не меняет знак при достаточно больших значениях* $|x|$, *выполнены условия (21) и (31);*

2) *при* $x \geqslant 0$ *условиям теоремы 2.*

Тогда существует нетривиальное решение задачи (1) — (2), удовлетворяющее при некотором $\beta > 0$ оценке (22), где $F(x)$ определяется формулой (32) с функциями $h(x)$ и $H(x)$, для которых сходятся интегралы (33) и (5).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

Напомним, что, если $\varphi = \pi$, $q(x) \to +\infty$, вопрос о классах единственности в случае, когда оба интеграла в (3) сходятся, исчерпан теоремой 4.9 работы [2]. Случай $\varphi = 0$, $q(x) \to -\infty$ также особый.

Во всех остальных случаях справедлива

Теорема 8. *Пусть $q(x)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 3 как при $x \leqslant 0$, так и при $x \geqslant 0$. Пусть сходятся оба интеграла в* (3), *а при достаточно больших x $q'(x)$ сохраняет знак и*

$$\int^{\infty} \frac{\ln |q(x)|}{\sqrt{|q(x)|}} dx = \infty. \tag{34}$$

Тогда решение $u(x, t)$ задачи (1) — (2), *удовлетворяющее оценке* (22) *с функцией $F(x)$, определяемой при $x < 0$ формулой* (23), *а при $x > 0$, как в формуле* (32) *при $x < 0$, — тождественно равно нулю.*

Доказательство также проходит по схеме доказательства теоремы 4.

Теорема 9. *Пусть $q(x)$ удовлетворяет условию 1 теоремы 3 как при $x \leqslant 0$, так и при $x \geqslant 0$, $q'(x)$ сохраняет знак при достаточно больших значениях $|x|$, выполнены условия* (30) *и* (34).

Тогда существует нетривиальное решение $u(x, t)$ задачи (1) — (2), *удовлетворяющее оценке* (22) *с функцией $F(x)$, определенной при $x < 0$, как в* (23) *при $\alpha(x) \equiv 1$, а при $x > 0$ — как в формуле* (32) *при $x < 0$, где для $h(x)$ сходится интеграл* (33) *на $+\infty$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 5.

В двух последних теоремах речь шла о классах единственности задачи (1) — (2) при условиях (30) и (34), определяющих различный порядок роста $q(x)$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Однако мы предполагали в этих теоремах, что как при $x \to -\infty$, так и при $x \to +\infty$ либо $q(x) \to +\infty$, либо $q(x) \to -\infty$.

Отказ от этого условия приводит к анализу новых вариантов. Впредь будем считать для определенности, что

$$q(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty; \quad q(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

Кроме того, будем считать, что условие 1 теоремы 3 выполнено как при $x < 0$, так и при $x > 0$. Эти требования мы будем предполагать выполненными во всех дальнейших теоремах и впредь не будем их оговаривать.

Вначале изучим асимптотику решений уравнения (8) в новой ситуации.

Произведем те же преобразования уравнения (8), что и в доказательстве теоремы 3. Тогда для элементов $C_{ij}(x, \lambda)$ матрицы $C(x, \lambda)$ имеет место аналог леммы 1.1 работы [2] и леммы 1 данной работы.

Лемма 3. *Если $|\arg \lambda| \geqslant \gamma > 0$, то*

$$\lim_{\mathrm{Re}\,\lambda \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |C_{ij}(x, \lambda)|\, dx = 0.$$

Если $|\arg\lambda| \leqslant \gamma$, *то*

$$\lim_{\operatorname{Re}\lambda\to\infty}\left[\int_{-\infty}^{x_0}|C_{ij}(x,\lambda)|\,dx+\int_{p(2\sigma)}^{\infty}|C_{ij}(x,\lambda)|\,dx\right]=0,$$

где $p(\alpha)$ таково, что $q(x)>\alpha$ *при* $x>p(\alpha)$.

Если $\lambda=\sigma_1+i\tau$, то

$$\lim_{|\tau|\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|C_{ij}(x,\lambda)|\,dx=0.$$

Лемма 4. *При всех* x, $-\infty<x<\infty$, *на полувертикали* $\lambda=\sigma_1+i\tau$, $\operatorname{sign}\tau=\operatorname{sign}\varphi$, $\operatorname{Re}W_0(x,\lambda)$ *сохраняет знак.*

Существует число $k>0$ *такое, что при* $x>p(kr)$ *и при* $x<\tilde p(kr)$ ($\tilde p(\alpha)$ *определяется аналогично* $p(\alpha)$ *при* $x\to-\infty$ |, $r=|\lambda|$, $\operatorname{Re}W_0(x,\lambda)$ *сохраняет знак.*

Теорема 10. *Пусть* $q'(x)$ *не меняет знак при достаточно больших значениях* $|x|$.

Тогда при $x\geqslant p(kr)$ *и достаточно большом* k *уравнение (8) имеет два линейно независимых решения* $y_0(x,\lambda)$, $y_1(x,\lambda)$ *вида* (19) (*при* $x<0$), *где* $o(1)\to 0$ *при* $\operatorname{Re}\lambda\to\infty$, *а при* $x<\tilde p(kr)$ *имеются аналогичные решения* $\tilde y_0(x,\lambda)$, $\tilde y_1(x,\lambda)$.

При всех x, $-\infty<x<\infty$, на полувертикали $\lambda=\sigma_1+i\tau$, $\operatorname{sign}\tau=$ $=\operatorname{sign}\varphi$, уравнение (8) имеет два линейно независимых решения вида (19) (при $x<0$).

Доказательство проходит аналогично доказательству теоремы 3 и теоремы 1.1 работы [2], При этом соответствующие леммы заменяются леммами 3, 4.

Обозначим $\mu_1=\cos\frac{\varphi}{2}$, $\mu_2=\sin\frac{1}{2}|\varphi|$, $\varphi=\arg a$. Очевидно, при $\lambda=$ $=\sigma_1+i\tau$, $\operatorname{sign}\tau=\operatorname{sign}\varphi$ имеют место соотношения

$$\lim_{x\to-\infty}\cos\arg W_0(x,\lambda)=\mu_1;\quad \lim_{x\to+\infty}\cos\arg W_0(x,\lambda)=\mu_2.$$

Теорема 11. *Пусть* $q'(x)$ *не меняет знак при достаточно больших значениях* $|x|$ *и*

$$\int_{-\infty}\frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}}<\infty,\quad \int^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}}<\infty. \tag{35}$$

Тогда решение $u(x,t)$ *задачи* (1) — (2), *удовлетворяющее при каком-либо* $\beta>0$ *оценке*

$$|u(x,t)|\leqslant\frac{C\alpha(x)}{\sqrt[4]{1+|q(x)|}}\exp\{\beta t+P(x)\}. \tag{36}$$

$$0\leqslant t<\infty,\quad -\infty<x<\infty,$$

$$P(x)=\begin{cases}\mu_1\displaystyle\int_x^0\sqrt{\left|\frac{q(t)}{a}\right|}\,dt, & x<0\\ \mu_2\displaystyle\int_0^x\sqrt{\left|\frac{q(t)}{a}\right|}\,dt, & x>0\end{cases}$$

$\alpha(x)>0$ — *четная функция, для которой* $\inf\alpha(x)=0$, — *тождественно равно нулю.*

Теорема 12. *Пусть* $\varphi \neq \pi$ *, $q(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы 11 и*

$$\int^{\infty} \frac{\ln|q(x)|}{\sqrt{|q(x)|}}\,dx = \infty.$$

Тогда решение $u(x, t)$ *задачи* (1) — (2), *удовлетворяющее при каком-либо* $\beta > 0$ *оценке*

$$|u(x, t)| \leqslant CP(x)\{\exp \beta t\}, \qquad (37)$$
$$0 \leqslant t < \infty, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$P(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(x)}{\sqrt[4]{1+|q(x)|}} \exp\left\{\mu_1 \displaystyle\int_x^0 \sqrt{\left|\frac{q(t)}{a}\right|}\,dt\right\}, & x < 0 \\ \exp \displaystyle\int_0^x \left(h(t) + \mu_2 \sqrt{\left|\frac{q(t)}{a}\right|}\right) dt, & x > 0 \end{cases}$$

$\inf \alpha(x) = 0$, $h(x) > 0$, *возрастает и удовлетворяет условию*

$$\int^{\infty} \ln \frac{\sqrt{|q(x)|}}{h(x)} \frac{dx}{\sqrt{|q(x)|}} = +\infty, \qquad (38)$$

— тождественно равно нулю.

Теорема 13. *Пусть* $\varphi \neq 0$, $\varphi \neq \pi$, $q(x)$ *удовлетворяет условиям теоремы 11 и*

$$\int_{-\infty} \frac{\ln|q(x)|}{\sqrt{|q(x)|}}\,dx = \infty, \quad \int^{\infty} \frac{\ln|q(x)|}{\sqrt{|q(x)|}}\,dx = \infty. \qquad (39)$$

Тогда решение $u(x, t)$ *задачи* (1) — (2), *удовлетворяющее оценке* (37), *где*

$$P(x) = \begin{cases} \exp \displaystyle\int_x^0 \left(h(t) + \mu_1 \sqrt{\left|\frac{q(t)}{a}\right|}\right) dt, & x < 0 \\ \exp \displaystyle\int_0^x \left(h(t) + \mu_2 \sqrt{\left|\frac{q(t)}{a}\right|}\right) dt, & x > 0 \end{cases} \qquad (40)$$

$h(x) > 0$ *— четная, возрастает при* $x > 0$ *и удовлетворяет условиям* (33) *и* (38), *тождественно равно нулю.*

Доказательства теорем 11—13 проводятся по схеме доказательства теоремы 4, причем роль теоремы 3 выполняет теорема 10.

Теорема 14. *Пусть выполнены условия теоремы 10 и*

$$\int_{-\infty} \frac{\ln|q(x)|}{\sqrt{|q(x)|}}\,dx < \infty, \quad \int^{\infty} \frac{\ln|q(x)|}{\sqrt{|q(x)|}}\,dx < \infty. \qquad (41)$$

Тогда существует нетривиальное решение задачи (1) — (2), *удовлетворяющее оценке* (36) *с* $\alpha(x) \equiv 1$.

---

* Существенность условия $\varphi = \pi$ в данной теореме будет видна из теоремы 15.

Теорема 15. *Пусть* $\varphi = \pi$, выполнены условия теоремы 10 и

$$\int\limits_{-\infty} \frac{\ln|q(x)|}{\sqrt{|q(x)|}}\, dx < \infty, \quad \int\limits^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{q(x)}} < \infty.$$

Тогда справедлив результат предыдущей теоремы.

Теорема 16. *Пусть выполнены условия теоремы 10 и*

$$\int\limits_{-\infty} \frac{\ln|q(x)|}{\sqrt{|q(x)|}}\, dx < \infty, \quad \int\limits^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{q(x)}} < \infty, \quad \int\limits^{\infty} \frac{\ln q(x)}{\sqrt{q(x)}}\, dx = \infty.$$

Тогда существует нетривиальное решение задачи (1) — (2), *удовлетворяющее оценке (37) с* $\alpha(x) \equiv 1$ *и* $h(x)$, *для которой сходится интеграл в (33).*

Теорема 17. *Пусть выполнены условия теоремы 10 и условия (35) и (39).*

Тогда существует нетривиальное решение задачи (1) — (2), *удовлетворяющее оценке (37), где* $P(x)$ *определяется формулой (40) с функцией* $h(x)$, *для которой сходятся интегралы (33) и (38).*

Доказательства теорем 14—17 проводятся аналогично доказательству теоремы 5 с использованием теоремы 10 и методики работы [2].

Объединяя результаты теорем 11 и 14, 11 и 15, а также 13 и 17, приходим к следующим необходимым и достаточным условиям.

Теорема 18. *Пусть выполнены условия теоремы 10 и условия* (41).

Тогда для единственности решения задачи (1) — (2) *в классе функций, удовлетворяющих оценке (36), необходимо и достаточно, чтобы* $\inf\limits_{-\infty<x<\infty} \alpha(x) = 0$.

Теорема 19. *Пусть выполнены условия теоремы 15.*

Тогда справедлив результат теоремы 18.

Теорема 20. *Пусть выполнены условия теоремы 13 и функция* $q(x)$ *такова, что при любой четной, возрастающей при* $x > 0$ *функции* $h(x) > 0$ *из сходимости какого-либо одного из интегралов в (33) и (38) вытекает сходимость другого.*

Тогда для единственности решения задачи (1) — (2) *в классе функций, удовлетворяющих оценке (37), где* $P(x)$ *определяется формулой (40), необходимо и достаточно выполнения условий (33) и (38).*

Отметим в заключение, что во всех теоремах данной статьи можно поменять местами условия на $q(x)$ при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$. Соответственно изменятся и утверждения теорем.

ЛИТЕРАТУРА

1. Я. И. Житомирский. Точные классы единственности решения задачи Коши для уравнений второго порядка. ДАН СССР, т. 171, № 1, 1966.

2. Я. И. Житомирский. Классы единственности и неединственности решения задачи Коши для уравнений второго порядка. Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Изд-во ХГУ, Харьков. № 4, 1967.

3. Я. И. Житомирский. Классы единственности решения задачи Коши. ДАН СССР, т. 172, № 6, 1967.

Поступила 4 ноября 1966 г.