УДК 517.534.4

В. Д. Мохонько

ЛЕММА О ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ДЛЯ АЛГЕБРОИДНЫХ ФУНКЦИЙ

Наиболее точная форма леммы о логарифмической производной, играющей важную роль в теории распределения значений мероморфных функций (см., например, [1—3]), получена И. В. Островским и Ву Нгоаном (см. [4] или [1, гл. III, § 1]). Они показали, что для любой мероморфной в конечной плоскости функции выполняется

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\ln^+\left\{\frac{32}{\varepsilon}T(R, f)\, r^{-1+\varepsilon}\left(1-\frac{r}{R}\right)^{-2(1-\varepsilon)}\right\} + \frac{1}{1-\varepsilon}\ln 2, \quad (1)$$

где $1 < r < R$; $T(R, f) \geqslant 1$; $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

В случае, когда функция $f(z)$ имеет конечный порядок ρ, из (1) вытекает важное следствие: для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant (\rho - 1 + \varepsilon)^+ \ln r + O(1), \quad r \to 0. \quad (2)$$

Известны различные доказательства леммы о логарифмической производной для алгеброидных функций, например [5—9]. Однако все известные оценки $m(r, f'/f)$ для алгеброидных функций по точности значительно уступают оценке, полученной И. В. Островским и Ву Нгоаном для мероморфных функций.

В данной работе получим оценку логарифмической производной для алгеброидных функций, которая по точности сравнима с результатом И. В. Островского и Ву Нгоана, хотя в частном случае мероморфных функций теорема И. В. Островского и Ву Нгоана все же сильнее, чем наш результат.

При рассмотрении случая алгеброидных функций мы не могли воспользоваться методом И. В. Островского и Ву Нгоана, так как в его основе лежит представление $\ln f(z)$ по формуле Шварца — Иенсена, после дифференцирования которой и получается оценка для f'/f. Для алгеброидных функций также имеется формула Шварца—Иенсена, дающая выражение для

$$\sum_k \ln f_k(z), \quad (3)$$

где $f_k(z)$ — ветви алгеброидной функции $f(z)$. Если продифференцировать выражения для (3), получим оценку для $\left|\sum_k f_k'(z)/f_k(z)\right|$, а нам нужно оценить величину $\sum_k \left|f_k'(z)/f_k(z)\right|$. На то, что в случае алгеброидных функций применение формулы Шварца—Иенсена не приводит к цели, указывал еще Ульрих [8].

Отметим дополнительно такой момент. Будем рассматривать алгеброидные функции не во всей конечной плоскости, а в области

$G=\{0<r_0\leqslant|z|<\infty\}$, что важно для приложений в теории дифференциальных уравнений. В случае функций, мероморфных в G, оценка И. В. Островского и Ву Нгоана справедлива в прежней форме, потому что, как указал Неванлинна [10, с. 78], такую функцию можно представить в виде произведения функции, мероморфной в конечной плоскости, и аналитической функции, имеющей в бесконечности устранимую особенность или полюс.

Мы предполагаем, что читатель знаком с основными определениями и фактами теории алгеброидных функций (см. [6] или [8]).

Основные определения и результаты

Пусть $w=f(z)$ — алгеброидная функция в области G, т. е. она удовлетворяет уравнению

$$w^k+s_1(z)\,w^{k-1}+\cdots+s_k(z)=0, \tag{4}$$

где $s_j(z)$ — мероморфные в G функции. Мы не требуем, как это обычно делается, чтобы левая часть уравнения (4) была неприводимым многочленом над полем мероморфных в G функций.

Обозначим через $F(r)$ часть римановой поверхности функции $f(z)$, лежащую над $G_r=\{r_0\leqslant|z|\leqslant r\}$, через $\Gamma(r)$ и $\Gamma(r_0)$ — части границы $F(r)$, лежащие соответственно над окружностями $\{|z|=r\}$ и $\{|z|=r_0\}$. Отметим, что римановы поверхности F и $F(r)$ не обязательно являются связными. Исключим из $F(r)$ t-окрестности полюсов и точек ветвления функции $f(z)$. Оставшуюся часть $F(r)$ обозначим через $F_t(r)$, а границу этой области — через $\Gamma_t(r)$.

Рассмотрим в области $F_t(r)$ функцию $v(z)=\ln(1+|f(z)|^2)$. Она удовлетворяет в $F_t(r)$ уравнению

$$\Delta_z v=4\frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)}=4\,[\mathring{f}(z)], \tag{5}$$

где Δ — оператор Лапласа.

Применим к $v(z)$ формулу Гаусса

$$\int\limits_{F_t(r)}\Delta_z v\,ds=\int\limits_{\Gamma_t(r)}\frac{\partial v}{\partial n}\,dl, \tag{6}$$

где ds — элемент площади; dl — элемент длины; $\frac{\partial}{\partial n}$ — оператор дифференцирования по внешней нормали. Будем считать, что на $\Gamma(r)$ нет полюсов функции $f(z)$. Воспользуемся равенством (5) и, устремляя t к нулю, получим

$$4\int\limits_{F_t(r)}[\mathring{f}(z)]\,ds=-2r_0\int\limits_{\Gamma(r_0)}\frac{\partial\ln\sqrt{1+|f|^2}}{\partial r}\,d\varphi+$$

$$+2r\frac{d}{dr}\int\limits_{\Gamma(r)}\ln\sqrt{1+|f|^2}\,d\varphi+4\pi n(r,f)+2\pi n(r_0,f), \tag{7}$$

где $n(r,f)=n(r,\infty)$ — количество полюсов функции $f(z)$ в G_r.

Заметим, что на $\Gamma(r_0)$ функция $\partial \ln \sqrt{1+|f|^2}/\partial r$ ограничена. Это очевидно, если $f(z)$ не имеет полюсов или точек ветвления на $\Gamma(r_0)$, а в общем случае

$$\frac{\partial \ln|z-z_0|}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = \operatorname{Re}\frac{e^{i\varphi}}{z-z_0}\Big|_{r=r_0} = \frac{1}{r_0}\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}-e^{i\theta_0}} = \frac{1}{2r_0}.$$

Разделив обе части (7) на $4k\pi r$ и проинтегрировав от r_0 до r, получим

$$-\frac{r_0}{2k\pi}\left\{\int\limits_{\Gamma(r_0)} \frac{\partial \ln \sqrt{1+|f|^2}}{\partial r}\, d\varphi\right\}\ln\frac{r}{r_0} +$$

$$+\frac{1}{2k\pi}\int\limits_{\Gamma(r)} \ln\sqrt{1+|f|^2}\, d\varphi + \frac{1}{k}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{n(t,\infty)}{t}\, dt + \frac{1}{2k}n(r_0,\infty)\ln\frac{r}{r_0} =$$

$$= \frac{1}{k}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{1}{\pi}\left\{\iint\limits_{F(t)} [\overset{\circ}{f}(z)]^2\, ds\right\} d\ln t + \frac{1}{2k\pi}\int\limits_{\Gamma(r_0)} \ln\sqrt{1+|f|^2}\, d\varphi. \tag{8}$$

Обозначим $n(r, a)$ — число a-точек $f(z)$ в $G(r)$,

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{F(r)} [\overset{\circ}{f}(z)]^2\, ds = A(r),$$

$$\frac{1}{k}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{A(t)}{t}\, dt = T(r),$$

$$\frac{1}{k}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{n(t,a)}{t}\, dt = N(r, a), \tag{9}$$

$$m(r, a) = \frac{1}{2k\pi}\int\limits_{\Gamma(r)} \ln\frac{1}{[f(r, e^{i\varphi}), a]}\, d\varphi,$$

где $[w, a]$ — хордальное расстояние на сфере Римана (см. [1, с. 29]) между точками w и a.

Из (9) вытекает, что $T(r) > 0$ при $r > r_0$. Равенство (8) можно записать в виде

$$T(r) = T(r, \infty) = m(r, \infty) + N(r, \infty) +$$

$$+\frac{1}{2k}n(r_0, \infty)\ln\frac{r}{r_0} - \left\{\frac{r_0}{2k\pi}\int\limits_{\Gamma(r_0)} \frac{\partial \ln 1/[f, \infty]}{\partial r}\, d\varphi\right\}\ln\frac{r}{r_0} -$$

$$-\frac{1}{2\pi k}\int\limits_{\Gamma(r_0)} \ln\frac{1}{[f, \infty]}\, d\varphi.$$

Введем обозначение

$$T(r, a) = m(r, a) + N(r, a) + \frac{1}{2k} n(r_0, a) \ln \frac{r}{r_0} -$$
$$- \frac{r_0}{2k\pi} \left\{ \int\limits_{\Gamma(r_0)} \frac{\partial \ln 1/[f, a]}{\partial r} d\varphi \right\} \ln \frac{r}{r_0} - \frac{1}{2k\pi} \int\limits_{\Gamma(r_0)} \ln \frac{1}{[f, a]} d\varphi. \qquad (10)$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — алгеброидная в G_r функция. Каково бы ни было число a из расширенной комплексной плоскости, справедливо равенство*

$$T(r) = T(r, \infty) = T(r, a). \qquad (11)$$

Доказательство этой теоремы без изменений повторяет рассуждения для соответствующей теоремы из теории мероморфных функций.

Из (10), (11) следует, что для любого a выполняется

$$m(r, a) \leqslant T(r) + L_1 \ln \frac{r}{r_0} + L_2,$$

е L_1, L_2 — постоянные, которые не зависят от r, но могут зависеть от a.

Будем говорить, что множество $\Delta = \bigcup_k (a_k, b_k)$, $\Delta \in K(\lambda)$, если

$^{\lambda-1} dr < \infty$, где $\lambda \geqslant 0$.

Теорема 2. *Если $f(z)$ — алгеброидная функция в G и $0 < \varepsilon < 1$, то для всех r, кроме, возможно, множества $\Delta \in K(\lambda)$, справедливо неравенство*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant \ln^+ (r^{\lambda-1-\varepsilon} T(r)^{1+\varepsilon}) + (1 + \varepsilon) \ln \times$$
$$\times \left\{2 + K\left(\frac{\ln (r/r_0)}{T(r)} + \frac{\ln^2 (r/r_0)}{T^2(r)}\right)\right\} + \frac{3}{2} \ln 2 + \ln^+ \frac{2}{k\varepsilon}, \qquad (12)$$

де K — некоторая положительная постоянная, не зависящая от и ε.

Если $\ln r = O(T(r))$ при $r \to \infty$, то функцию $f(z)$ назовем трансцендентной алгеброидной функцией.

Следствие. *Если $f(z)$ — трансцендентная алгеброидная функция порядка $\rho < \infty$, то для любого ε $0 < \varepsilon < 1$ при $r \to \infty$ справедливо неравенство*

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant (2\rho - 1 + \varepsilon)^+ \ln r + O(1). \qquad (13)$$

Для всех r, кроме, возможно, множества конечной логарифмической меры, справедлива более точная оценка

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant (\rho - 1 + \varepsilon)^{+} \ln r + O(1). \tag{14}$$

Вероятно, оценка (14) справедлива для всех r, но как это доказать, неясно.

Вспомогательные неравенства

Определим для всех a, $|a| < \infty$ функцию

$$\rho(a) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{1}{|a|^2 (1 + |\ln|a||)^{1+\varepsilon}}, \tag{15}$$

где $\varepsilon > 0$. Для любого измеримого множества l в плоскости положим

$$\mu(l) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int\limits_{(l)} \rho(a)\, ds_a = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint\limits_{(l)} \frac{d|a|\, d\alpha}{|a|(1 + |\ln|a||)^{1+\varepsilon}},$$

где $a = |a| e^{i\alpha}$.

Заметим, что

$$\frac{\varepsilon}{4\pi} \iint\limits_{|a| \leqslant \infty} \frac{d|a|\, d\alpha}{|a|(1 + |\ln|a||)^{1+\varepsilon}} = 1.$$

Для функции $f(z)$ введем

$$\Omega(r, f) = \Omega(r) = \iint\limits_{|a| \leqslant \infty} n(r, a)\, d\mu(a), \quad r_0 < r < \infty. \tag{16}$$

Пусть $f(z)$ отображает риманову поверхность $F(r)$ на риманову поверхность $W(r)$. Равенство (16) можно записать в виде

$$\Omega(r) = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint\limits_{|a| \leqslant \infty} n(r, a)\, \rho(a)\, ds_a = \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint\limits_{W(r)} \rho(f)\, ds_f =$$

$$= \frac{\varepsilon}{4\pi} \iint\limits_{F(r)} |f'(z)|^2\, r\, dr\, d(\varphi) / |f(z)|^2 (1 + |\ln|f(z)||)^{1+\varepsilon}, \tag{17}$$

где $z = re^{i\varphi}$, ds_f, ds_a — соответственно элементы площади на римановой поверхности $W(r)$ и в a-плоскости.

Выведем еще одну функцию

$$Q(r) = \int\limits_{r_0}^{r} \frac{\Omega(t)}{t}\, dt. \tag{18}$$

Используем (16) и, поменяв порядок интегрирования, получим

$$Q(r)=\frac{\varepsilon k}{4\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{N(r,\ a)\,d|a|\,d\alpha}{|a|\,(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}. \tag{18'}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 2, докажем две леммы.

Лемма 1. *Для каждого $r>r_0$ выполняется неравенство*

$$Q(r)\leqslant T(r)+C_1\ln\frac{r}{r_0}+C_2, \tag{19}$$

где C_1, C_2 — постоянные не зависящие от r.

Лемма 2. *Пусть $\lambda\geqslant 0$, $0<\varepsilon<1$. Тогда*

$$\Omega'(r)\leqslant r^{2\lambda-1+\varepsilon}Q(r)^{1+\varepsilon} \tag{20}$$

для всех r, исключая самое большое множество $\Delta\in K(\lambda)$.

Доказательство леммы 1. Из (10) и теоремы 1 следует, что

$$N(r,\ a)\leqslant T(r)+\frac{1}{2k\pi}\int_{\Gamma(r_0)}\ln\frac{1}{[f,\ a]}\,d\varphi+$$
$$+\frac{r_0}{2\pi k}\left\{\int_{\Gamma(r_0)}\frac{\partial\ln 1/[f,\ a]}{dr}\,d\varphi\right\}\ln\frac{r}{r_0},$$

откуда

$$Q(r)\leqslant T(r)+\frac{\varepsilon r_0}{8\pi^2}\left[\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{\Gamma(r_0)}\frac{\partial\ln 1/[f,\ a]}{\partial r}\,d\varphi\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{d|a|\,d\alpha}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}\right]\ln\frac{r}{r_0}+\frac{\varepsilon}{8\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{\Gamma(r_0)}\ln\frac{1}{[f,\ a]}\,d\varphi\right\}\frac{d|a|\,d\alpha}{|a|\,(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}.$$

Для того чтобы доказать неравенство (19), достаточно доказать, что последние два интеграла сходятся, и принять

$$C_1=\left|\frac{\varepsilon r_0}{8\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{\Gamma(r_0)}\frac{\partial\ln 1/[f,\ a]}{\partial r}\,d\varphi\right\}\frac{d|a|\,d\alpha}{|a|\,(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}\right|; \tag{21}$$

$$C_2=\left|\frac{\varepsilon}{8\pi^2}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{\Gamma(r_0)}\ln\frac{1}{[f,\ a]}\,d\varphi\right\}\frac{d|a|\,d\alpha}{|a|\,(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}\right.. \tag{22}$$

Для этого покажем, что интеграл (21) сходится абсолютно. Имеем

$$\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{\Gamma(r_0)}\left|\frac{\partial\ln 1/[f,\ a]}{\partial r}\right|d\varphi\right\}\frac{d|a|\,d\alpha}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}\leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma(r_0)} \left| \frac{\partial \ln |f-a|}{\partial r} \right| d\varphi \right\} \frac{d|a|\,d\alpha}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}} +$$

$$+ \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma(r_0)} \left| \frac{\partial \ln \sqrt{1+|f|^2}}{\partial r} \right| d\varphi \right\} \frac{d|a|\,d\alpha}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}.$$

Не уменьшая общности, можно считать, что на $\Gamma(r_0)$ функция $f(z)$ не имеет полюсов, нулей и точек ветвления. В противном случае за r_0 взяли бы $r_0' > r_0$, удовлетворяющее этому условию. Тогда ясно, что второе слагаемое в правой части неравенства конечно, а

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma(r_0)} \left| \frac{\partial \ln |f-a|}{\partial r} \right| d\varphi \right\} \frac{d|a|\,d\alpha}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma(r_0)} \frac{|f'(z)|}{|f-a|} d\varphi \right\} \frac{d|a|\,d\alpha}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{\Gamma(r_0)} \frac{d\varphi}{|f-a|} \right\} \frac{d|a|\,d\alpha}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}},$$

так как на $\Gamma(r_0)$ производная $f'(z)$ ограничена.

Учитывая теорему Фубини, достаточно показать, что интеграл

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{|w-a|} \frac{d|a|\,d\alpha}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}, \quad w = f(r_0 e^{i\varphi}), \tag{23}$$

ограничен постоянной, не зависящей от φ.

Действительно,

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{1}{|w-a|} \frac{d|a|\,d\alpha}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}} = \iint_{a \overline{\in} K_w} \frac{1}{|w-a|} \frac{|a|\,d|a|\,d\alpha}{|a|^2(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}} +$$

$$+ \iint_{K_w} \frac{1}{|w-a|} \frac{|a|\,d|a|\,d\alpha}{|a|^2(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}},$$

где $K_w = \{a : |a-w| < \delta$, а $\delta > 0$ столь мало, что $\delta < \min|f(z)| \leqslant \leqslant \max|f(z)| < \delta^{-1}$. Тогда для всех $a \in K_w$ имеем $1/|a|^2(1+ + |\ln|a||)^{1+\varepsilon} < D$, где постоянная D не зависит от $w = f(r_0 e^{i\varphi})$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Следовательно,

$$\iint_{K_w} \frac{1}{|w-a|} \frac{ds_a}{|a|^2(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}} \leqslant 2\pi\delta D$$

при $a \bar{\in} K_w$ имеем $|w-a| \geqslant \delta$ и

$$\iint\limits_{a\in K_w} \frac{1}{|w+a|}\,\frac{ds_a}{|a|^2(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\iint\limits_{|a|\leqslant\infty}\frac{ds_a}{|a|^2(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}} = \frac{4\pi}{\varepsilon\delta}.$$

Отсюда следует сходимость интеграла (23), а следовательно, доказано, что $C_1 < \infty$.

Теперь покажем, что $C_2 < \infty$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\Bigl\{\int\limits_{\Gamma(r_0)} \ln\frac{1}{[f,\ a]}\,d\varphi\Bigr\}\frac{d|a|\,d\alpha}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}} = \\
&= \int\limits_{\Gamma(r_0)}\Bigl\{\iint\limits_{|a|<\infty}\ln\frac{1}{[f,\ a]}\,\frac{d\alpha\,d|a|}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}\Bigr\}d\varphi = \\
&= \int\limits_{\Gamma(r_0)}\Bigl\{\iint\limits_{|a|<\infty}\ln\frac{\sqrt{1+|a|^2}}{|f-a|}\,\frac{d\alpha\,d|a|}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}\Bigr\}d\varphi + \\
&+ \int\limits_{\Gamma(r_0)}\Bigl\{\iint\limits_{|a|<\infty}\ln\sqrt{1+|f|^2}\,\frac{d\alpha\,d|a|}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}\Bigr\}d\varphi \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{\Gamma(r_0)}\Bigl\{\iint\limits_{|a|\leqslant 1}\ln\Bigl(\frac{\sqrt{1+|a|^2}}{|f-a|}+1\Bigr)\frac{d\alpha\,d|a|}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}\Bigr\}d\varphi + \\
&+ \int\limits_{\Gamma(r_0)}\Bigl\{\iint\limits_{|a|>1}\frac{\sqrt{1+|a|^2}}{|f-a|}\,\frac{d\alpha\,d|a|}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}\Bigr\}d\varphi + C_4 \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{\Gamma(r_0)}\Bigl\{\iint\limits_{|a|\leqslant 1}\frac{\sqrt{2}}{|f-a|}\,\frac{d\alpha\,d|a|\,d\varphi}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}} + \\
&+ \int\limits_{\Gamma(r_0)}\Bigl\{\iint\limits_{|a|>1}\ln\frac{\sqrt{2}}{\Bigl|\frac{f}{|a|}-e^{i\alpha}\Bigr|}\,\frac{d\alpha\,d|a|}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}}\Bigr\}d\varphi + C_4 = \\
&= -\int\limits_{\Gamma(r_0)}\iint\limits_{|a|>1}\ln\Bigl|\frac{f}{|a|}-e^{i\alpha}\Bigr|\,\frac{d\alpha\,d|a|\,d\varphi}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}} + C_5 = \\
&= -\int\limits_{\Gamma(r_0)}\int\limits_1^\infty \ln^+\Bigl|\frac{f}{a}\Bigr|\,\frac{d|a|\,d\varphi}{|a|(1+|\ln|a||)^{1+\varepsilon}} + C_5 \leqslant C_5,
\end{aligned}$$

где C_j — положительные постоянные.

Здесь мы использовали оценку интеграла (23) и известное равенство (см., например, (4.14) из [1, с. 34]).

Доказательство леммы 2. Пусть $\Delta' = \{r : r \geqslant r_0 + 1, \Omega(r) \geqslant r^\lambda Q^{1+\varepsilon}(r)\}$. Тогда

$$\int\limits_{\Delta'} r^{\lambda-1}\,dr = \int\limits_{\Delta'} \frac{r^\lambda dQ}{\Omega} \leqslant \int\limits_{\Delta'} \frac{dQ}{Q^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{Q^\varepsilon(r^*)},$$

где $r^* = \min \Delta'$. Точно так же найдем, что на множестве $\Delta'' = \{r : r \geqslant r_0 + 1,\ \Omega' \geqslant r^{\lambda-1}\Omega^{1+\varepsilon}\}$ выполняется

$$\int\limits_{\Delta''} r^{\lambda-1}\,dr = \int\limits_{\Delta''} \frac{r^{\lambda-1}\,d\Omega}{\Omega'(r)} \leqslant \int\limits_{\Delta'} \frac{d\Omega}{\Omega^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{1}{\Omega^\varepsilon(r^{**})},$$

где $r^{**} = \min \Delta''$. Следовательно, вне $\Delta = \Delta' \bigcup \Delta''$ выполняется неравенство (20) и $\Delta \in K(\lambda)$.

Доказательство теоремы 2

Используя неравенство [1, с. 116]

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta \ln^+ f(x)\,dx \leqslant \ln^+\left[\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx\right] + \ln 2,$$

неравенство Гельдера и леммы 1, 2, получаем вне множества $\Delta \in K(\lambda)$

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = \frac{1}{2\pi k}\int\limits_{\Gamma(r)} \ln\sqrt{1+\left|\frac{f'}{f}\right|^2}\,d\varphi \leqslant \frac{1}{2\pi k}\int\limits_{\Gamma(r)} \ln^+\left|\frac{f'}{f}\right| d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{2+\varepsilon}{2}\,\frac{1}{2\pi k}\int\limits_{\Gamma(r)} \ln^+\left|\frac{f'}{f}\right|^{\frac{2}{2+\varepsilon}} d\varphi + \frac{1}{2}\ln 2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2+\varepsilon}{2}\ln^+\left[\frac{1}{2\pi k}\int\limits_{\Gamma(r)} \left|\frac{f'}{f}\right|^{\frac{2}{2+\varepsilon}} d\varphi\right] + \frac{3}{2}\ln 2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2+\varepsilon}{2}\ln^+\left[\left(\frac{1}{2k\pi}\,\frac{4\pi}{\varepsilon}\int\limits_{\Gamma(r)} |f'|^2 \rho(|f|)\,d\varphi\right)^{\frac{1}{2+\varepsilon}} \times\right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{2k\pi}\int\limits_{\Gamma(r)} (1 + |\ln|f||)\,d\varphi\right)^{\frac{1+\varepsilon}{2+\varepsilon}}\right] + \frac{3}{2}\ln 2 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln^+\left[\frac{2}{k\varepsilon}\,\frac{\Omega'(r)}{r}\left(1 + \frac{1}{2k\pi}\int\limits_{\Gamma(r)} |\ln|f||\,d\varphi\right)^{1+\varepsilon}\right] + \frac{3}{2}\ln 2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\ln^+\left[r^{2\lambda-2+\varepsilon}Q^{1+\varepsilon}\left(1 + \frac{1}{2k\pi}\int\limits_{\Gamma(r)} \left(\ln^+|f| + \ln^+\frac{1}{|f|}\right) d\varphi\right)^{1+\varepsilon}\right] +$$

$$+ \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln^+\frac{2}{k\varepsilon} \leqslant \frac{1}{2}\ln^+\left\{r^{2\lambda-2+\varepsilon}\left(T(r) + C_1\ln\frac{r}{r_0} + C_2\right)^{1+\varepsilon} \times\right.$$

$$\times \left[1 + \frac{1}{2k\pi}\int\limits_{\Gamma(r)}\left(\ln\frac{1}{[f,\infty]} + \ln\frac{1}{[f,0]}\right)d\varphi\right]^{1+\varepsilon}\Biggr\} + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln^+\frac{2}{k\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\ln^+\Biggl\{\left(T(r) + C_1\ln\frac{r}{r_0} + C_2\right)^{1+\varepsilon}\left(2T(r) + C_6\ln\frac{r}{r_0} + C_7\right)^{1+\varepsilon}\times$$

$$\times\, r^{2\lambda-2+\varepsilon}\Biggr\} + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln^+\frac{2}{k\varepsilon} = \ln^+\left(T^{1+\varepsilon}(r)\, r^{\lambda-1+\frac{\varepsilon}{2}}\right) +$$

$$+ (1+\varepsilon)\ln\left(2 + K\left(\frac{\ln\frac{r}{r_0}}{T(r)} + \frac{\ln^2\frac{r}{r_0}}{T^2(r)}\right)\right) + \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln^+\frac{2}{k\varepsilon}.$$

Теорема 2 доказана.

Заметим, что если $f(z)$ — трансцендентная функция, то при $r \,\bar{\in}\, \Delta \in K(\lambda)$

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant \ln^+\left(r^{\lambda-1+\varepsilon}T^{1+\varepsilon}(r)\right) + 4\ln 2 + \frac{1}{2}\ln^+\frac{2}{k\varepsilon}. \qquad (24)$$

Доказательство следствия (ср. [2, с. 256]). Согласно доказанному, неравенство (13) выполняется всюду, кроме, возможно, множества $\Delta \in K(\lambda)$, где $\lambda = \rho + \varepsilon$. Пусть r — точка исключительного интервала, R — его правый конец. Тогда

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) = T\left(r, \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1) \leqslant$$

$$\leqslant T\left(R, \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f'}{f}\right) + O(1) = T\left(R, \frac{f'}{f}\right) -$$

$$- N\left(R, \frac{f'}{f}\right) + \left[N\left(R, \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right] + O(1) =$$

$$= m\left(R, \frac{f'}{f}\right) + \left[N\left(R, \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f'}{f}\right)\right] + O(1).$$

Чтобы оценить разность $N\left(R - \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f'}{f}\right)$, покажем, что порядок $N(r, f'/f)$ не превышает порядка функции $f(z)$. Действительно,

$$N\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant T(r, f'/f) + 0(1) \leqslant T(r, f') +$$

$$+ T(r, f) + 0(1) \leqslant (2k+1)\,T(r, f) + O(\ln r), \qquad (25)$$

где k — число ветвей функции $f(z)$. Последнее неравенство следует из замечания Ульриха [8], что $m(r, f'/f) = O(\ln r)$ для всех r, если $f(z)$ — алгеброидная функция конечного порядка, и из теоремы Иосиды [11]. Из (25) следует, что порядок $N(r, f'/f)$ не превышает ρ и $n(r, f'/f)$ имеет тот же порядок.

Следовательно, для достаточно больших r имеем $n(r, f'/f) < Ar^{\rho+\varepsilon}$, отсюда

$$N\left(R, \frac{f'}{f}\right) - N\left(r, \frac{f'}{f}\right) < A\int_r^R r^{\rho-1+\varepsilon}\,dr,$$

причем последний интеграл ограничен числом, не зависящим от r, в силу свойств исключительных интервалов. Итак,

$$m\left(r, \frac{f'}{f}\right) \leqslant m\left(R, \frac{f'}{f}\right) + O(1). \tag{26}$$

При $r \to \infty$ имеем $R = (1 + O(1))\,r$. Подставив (26) в (24), получим (13).

Оценка (14) получается из (13) при $\lambda = 0$.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Гольдбергу за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. М., «Наука», 1970. 591 с.
2. Неванлинна Р. Р. Однозначные аналитические функции. М.-Л., ОГИЗ, 1941. 388 с.
3. Хейман У. К. Мероморфные функции. М., «Мир». 1966. 287 с.
4. Ву Нгоан, Островский И. В. О логарифмической производной мероморфной функции. — «Докл. АН Арм. ССР». 1965, т. 41, с. 272—277.
5. Selberg H. Über die Wertverteilung der algebroiden Funktionen. — „Math. Zschr"., 1930, Bd 31, S. 709—728.
6. Selberg H. Algebroide Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale. — In: Avhandlinger Norske Videnskaps—Akademi Oslo. I. Matem.-Naturvid. Klasse, 1934, № 8, p. 1—72.
7. Valiron G. Sur la dérivée des fonctions algébroides. — „Bull. Soc. math. France", 1931, t. 59, № 1—2, p. 17—39.
8. Ullrich E. Über den Einfluß der Verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung. — „Journal für reine und angewandte Math"., 1931, Bd 167, S. 198—220.
9. Shimizu T., Yosida K., Kakutani S. On meromorphic functions. — „Proc. Physico-Math. Soc. Japan", 1935, vol. 17, № 1, p. 1—10.
10. Nevanlinna R. Neuere Untersuchungen über den Picardschen Satz. — In: 6e Congr. des math. scand. Copenhague, 1925, p. 77—95.
11. Yosida K. On algebroid solutions of ordinary differential equations. — „Japanese J. Math"., 1934, vol. 10, p. 199—208.