ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ТЕОРЕМЫ ПОЙА ДЛЯ РЯДОВ ДИРИХЛЕ

Р. М. Гаврилова

1. Рассмотрим целую функцию $f(z)$, представимую рядом Дирихле

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\Gamma(1+\lambda_n)}e^{-z\lambda_n}, \tag{1}$$

последовательность показателей $\{\lambda_k\}$ которой удовлетворяет условиям

$$0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots,\ \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\infty;\ \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\lambda_n}=0. \tag{2}$$

Введем следующие обозначения:

$$M(x)=\sup_{-\infty<y<\infty}|f(z)|,\quad A=\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln|a_n|}{\lambda_n}, \tag{3}$$

$$h(y)=\overline{\lim_{x\to-\infty}}\frac{\ln|f(x+iy)|}{e^{-x\rho_R}}, \tag{4}$$

$$D(\eta,a)=\{z:\ \cos(y+\eta)\leqslant ae^x\}, \tag{5}$$

где $z=x+iy$, ρ_R — порядок функции (*1*) по Ритту [1].

Пусть σ_R — тип функции (1) по Ритту и $\rho_R=1$. Известно [1, 2], что σ_R определяется по формуле

$$\sigma_R=\overline{\lim_{x\to-\infty}}\frac{\ln M(x)}{e^{-x}} \tag{6}$$

и через коэффициенты ряда (1) выражается следующим образом:

$$\sigma_R e=\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\{\lambda_n\left[\frac{|a_n|}{\Gamma(1+\lambda_n)}\right]^{1/\lambda_n}\right\}. \tag{7}$$

Функции $f(z)$ поставим в соответствие функцию $F(z)$, определенную рядом

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{z(\lambda_n+1)}. \tag{8}$$

Известно [3], что ряд (8) сходится абсолютно и равномерно внутри полуплоскости $\operatorname{Re} z<-A$. Из сравнения формул (3) и (7) легко получаем, что

$$A=\ln\sigma_R.$$

2. Покажем теперь, что между функциями $f(z)$ и $F(z)$ существует более тесная связь, для чего установим предварительно следующие формулы обращения:

$$F(z)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-e^{-(\zeta+z)}}f(\zeta)e^{-\zeta}\,d\xi, \tag{9}$$

где $\zeta=\xi+i\eta$ и интегрирование происходит по прямой $\operatorname{Im}\zeta=\eta$, η — фиксировано;

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C(y,\alpha)}e^{e^{-(\zeta+z)}}F(\zeta)e^{-\zeta}\,d\zeta, \tag{10}$$

где $C(y,\alpha)$ — контур, пробегаемый в направлении невозрастания мнимой части переменной ζ и состоящий из двух полупрямых

$$\operatorname{Im}\zeta=-y\pm\alpha,\ -\infty<\operatorname{Re}\zeta\leqslant A_1$$

отрезка

$$\operatorname{Re}\zeta = A_1, \ -y-\alpha \leqslant \operatorname{Im}\zeta \leqslant -y+\alpha, \ \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

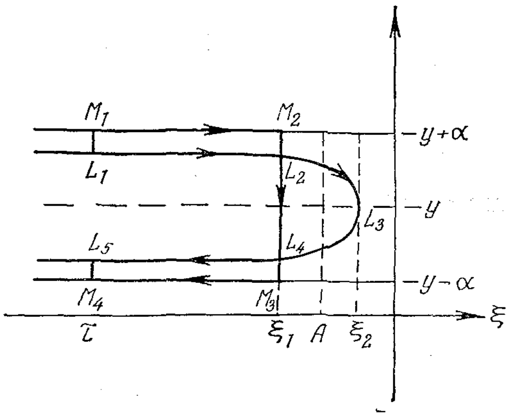
и $-A_1 > A$ (см. на рисунке контур $M_1M_2M_3M_4$, где $\xi_1 = A_1$).

Интеграл (9) сходится абсолютно и равномерно дополнении к $D(\eta, h(\eta)) + \varepsilon$, что следует непосредственно из неравенств

$$|f(\zeta)| < B(\eta)\, e^{e^{-\xi\left(h(\eta)+\frac{\varepsilon}{2}\right)}},$$

$$\left|e^{-e^{-(\zeta+z)}}\right| < e^{-e^{-\xi(h(\eta)+\varepsilon)}},$$

где $B(\eta)$ — некоторая положительная постоянная.



Для доказательства формулы (9) достаточно показать, что она имеет место на дополнении к $D(\eta, \sigma_R + \delta)$, $\delta > 0$. Установим сначала равномерную сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1+\lambda_n)}\, e^{-\zeta(\lambda_n+1)} e^{-e^{-(\zeta+z)}} \tag{11}$$

на прямой $-\infty < \xi < \infty$. Действительно, на дополнении к $D(\eta, \sigma_R + \delta)$ имеем

$$\left|e^{-e^{-(\zeta+z)}}\right| \leqslant e^{-e^{-\xi(\sigma_R+\delta)}}. \tag{12}$$

Используя неравенство

$$M(\xi) < e^{e^{-\xi\left(\sigma_R+\frac{\delta}{2}\right)}},$$

вытекающее из определения σ_R (6), а также неравенства (12) и

$$\frac{|a_n|}{\Gamma(1+\lambda_n)} < M(\xi-\varepsilon)\, e^{(\xi-\varepsilon)\lambda_n},$$

для остатка ряда (11) получаем следующую оценку:

$$|R_k(z,\zeta)| = \left|\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(1+\lambda_n)}\, e^{-\zeta(\lambda_n+1)} e^{-e^{-(\zeta+z)}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{-\xi}\cdot e^{-\frac{\delta}{3}e^{-\xi}} \sum_{n=k+1}^{\infty} e^{-\varepsilon\lambda_n} < \max\left\{1, \frac{3}{e\delta}\right\} \sum_{n=k+1}^{\infty} e^{-\varepsilon\lambda_n}.$$

В силу условия (2) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \exp\{-z\lambda_n\}$ сходится при $x > 0$, а потому

$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \exp\{-\varepsilon\lambda_n\} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ и } \ |R_k(z,\zeta)| \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Равномерная сходимость ряда (11) доказана. Интегрируя теперь этот ряд почленно, получаем доказываемую формулу

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\Gamma(1+\lambda_n)}e^{-i\eta(\lambda_n+1)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\xi(\lambda_n+1)}e^{-e^{-\xi}\cdot e^{-i\eta-z}}\,d\xi=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\Gamma(1+\lambda_n)}e^{-i\eta(\lambda_n+1)}\int_{-\infty}t^{\lambda_n}e^{-te^{-i\eta-z}}\,dt=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{z(\lambda_n+1)},\quad t=e^{-\xi}.$$

Для доказательства формулы (10) подставим в нее ряд (8) и произведем замену:

$$u=\exp(-\zeta-z).$$

В результате будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(y,\,\alpha)}e^{e^{-(\zeta+z)}}\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{\zeta\lambda_n}\,d\zeta=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}a_ne^{-z\lambda_n}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(e^{-A_1-x},\,\alpha)}e^u\cdot u^{-\lambda_n-1}\,du,\tag{13}$$

где $\gamma(e^{-A_1-x},\alpha)$ — контур, пробегаемый в направлении неубывания аргумента u и состоящий из двух лучей

$$\arg u=\pm\alpha,\quad |u|\geqslant e^{-A_1-x}$$

и дуги $-\alpha\leqslant\arg u\leqslant\alpha$ окружности $|u|=e^{-A_1-x}$.

Воспользовавшись в (13) еще формулой Ханкеля [3]

$$\frac{1}{\Gamma(s)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma(\varepsilon,\,\alpha)}e^u\cdot u^{-s}\,du,$$

где ε, α — произвольные числа, $\varepsilon>0$, $\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$. получаем из (13) формулу (10).

3. Сформулируем теперь основной результат заметки.

Теорема. *Пусть $f(z)$ — целая функция, представимая рядом Дирихле и $\rho_R=1$. Тогда для любого $-\infty<\eta<\infty$ множество $D(\eta,h(\eta))$ содержит все особые точки функции $F(z)$ и при $h(\eta)>0$ содержится во всяком множестве $D(\eta,b)$, обладающем этим свойством.*

Первое утверждение теоремы непосредственно следует из абсолютной и равномерной сходимости интеграла (9) в дополнении к $D(\eta,h(\eta+\varepsilon)$, Далее, рассуждая от противного, предположим, что все особенности $F(z)$ лежат в $D(\eta,h(\eta)-2\gamma)$, где $h(\eta)>0$ и γ — некоторое положительное число. В равенстве (10) контур $C(y,\alpha)$ заменим контуром $\Gamma(y)$:

$$e^{-\zeta-iy}=h(y)-\gamma+iv,\quad -\infty<v<\infty.$$

$\left(\text{см. на рисунке контур } L_1L_2L_3L_4L_5,\ \text{где } \xi_2=\ln\frac{1}{h(y)-\gamma}\right)$.

Убедимся сначала, что такая замена законна в случае, когда $h(y)>0$. Так как по предположению $F(z)$ аналитична в дополнении к $D(\eta,h(\eta)-2\gamma)$, то

$$\int_{l_1}e^{e^{-(\zeta+z)}}F(\zeta)e^{-\zeta}\,d\zeta=\int_{l_2}e^{e^{-(\zeta+z)}}F(\zeta)e^{-\zeta}\,d\zeta$$

и

$$\int_{l_3+l_4+l_5+l_7}e^{e^{-(\zeta+z)}}F(\zeta)e^{-\zeta}\,d\zeta=0.$$

где $l_1 = \widehat{L_2L_3L_4}$, $l_2 = L_2L_4$, $l_3 = M_2L_2$, $l_4 = M_1M_2$, $l_5 = \widehat{L_1L_2}$, $l_\tau = M_1L_1$.

Покажем, что

$$\int\limits_{l_\tau} e^{e^{-(\zeta+z)}} F(\zeta) e^{-\zeta} d\zeta \underset{\tau\to-\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{14}$$

Заметим сначала, что имеет место неравенство

$$\left| \int\limits_{l_\tau} e^{e^{-(\zeta+z)}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{\zeta\lambda_n} d\zeta \right| \leqslant \int\limits_{l_\tau} \left| e^{e^{-(\zeta+z)}} \right| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\xi\lambda_n} |d\zeta| =$$

$$= \int\limits_{l_\tau} e^{e^{-x-\xi} \cdot \cos(y+\eta)} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\xi\lambda_n} |d\zeta| \leqslant \pi e^{e^{-x}(h(y)-\gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{\tau\lambda_n}. \tag{15}$$

Из абсолютной сходимости ряда (8) в полуплоскости $x < -A$ следует, что

$$\sum_{n=K}^{\infty} |a_n| e^{\tau\lambda_n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

при K достаточно большом. Так как, кроме того, $|a_n| e^{\tau\lambda_n} < \frac{\varepsilon}{2K}$ при $-\tau$ достаточно большом, то из оценки (15) немедленно получаем утверждение (14).

Итак, нами получено следующее интегральное представление:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma(y)} e^{e^{-(\zeta+z)}} F(\zeta) e^{-\zeta} d\zeta. \tag{16}$$

Разобьем контур $\Gamma(y)$ прямой $\xi = N$, где N — достаточно большое фиксированное число, на три части:

$$\Gamma_1 = \{\zeta : \xi > N, \quad -y - \alpha \leqslant \eta \leqslant -y + \alpha\},$$
$$\Gamma_2 = \{\zeta : \xi \leqslant N, \quad -y \leqslant \eta \leqslant -y + \alpha\},$$
$$\Gamma_3 = \{\zeta : \xi \leqslant N, \quad -y - \alpha \leqslant \eta < -y\},$$

и части интеграла (16) по контуру Γ_j обозначим через Λ_j, $j = 1, 2, 3$. Оценим теперь каждое из трех слагаемых Λ_j. Неравенство

$$|\Lambda_1| \leqslant C_1(N) e^{e^{-x}(h(y)-\gamma)},$$

где $C_1(N) > 0$, следует из того, что $F(\zeta)$ непрерывна на Γ_1. Далее

$$|\Lambda_2| = \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\Gamma_2(y)} e^{e^{-(\zeta+z)}} F(\zeta) e^{-\zeta} d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int\limits_{\Gamma_2(y)} e^{e^{-(\zeta+z)}} e^{\zeta\lambda_n} d\zeta \right| \leqslant e^{e^{-x}(h(y)-\gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \int\limits_{\Gamma_2(y)} e^{\xi\lambda_n} |d\zeta|.$$

Легко видеть, что $|d\zeta| < \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \alpha_N)^2}\, d\xi$, где α_N — угол наклона касательной к $\Gamma_2(y)$ в точке пересечения $\Gamma_2(y)$ и прямой $\xi = N$ к оси ξ.

Отсюда следует, что

$$|\Lambda_2| < C_2(N) e^{e^{-x}(h(y)-\gamma)}, \quad C_2(N) > 0.$$

Аналогично Λ_2 оценим интеграл Λ_3.

Окончательно получим

$$|f(x+iy)| \leqslant C_3(N) e^{e^{-x}(h(y)-\gamma)},$$

откуда и из (4) следует противоречивое неравенство

$$h(y) \leqslant h(y) - \gamma, \quad \gamma > 0.$$

4. Отметим еще некоторые свойства функции $h(y)$, при этом буде: рассматривать случай целой функции произвольного порядка ρ_R (по Ритту

1) Функция $h(y)$ тригонометрически выпукла.

Утверждение можно доказать, используя метод доказательства триго нометрической выпуклости индикатора $h(\theta)$ целой функции, представимоі степенным рядом, и принцип Фрагмена—Линделефа [4] для горизонтально полосы шириной меньше $\frac{\pi}{\rho_R}$.

2) Функция $h(y)$ непрерывна на всей вещественной прямой.

В заключение отметим, что результат заметки в некоторых частны случаях перенесен автором на целые функции двух комплексных пер менных.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность В. А. Какичеву за рук водство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. J. F. Ritt On certain points in the theory of Dirichlet series. Am I. Math., 50 (1928), 73.

2. M. Maurice Blambert. Sur la notion de type de l'ordre d'une fonctio entiere, Ann. scient. Ecole norm. super., 79 (1962), 353—375.

3. А. И. Маркушевич. Теория аналитических функций. Гостехиздат, М. —Л. 1950.

4. Б. Я. Левин. Распределение корней целых функций. Гостехиздат, М., 195

Поступила 3 февраля 1970 г