ДВОЙСТВЕННОСТЬ ДЛЯ ЛОКАЛЬНЫХ КОГОМОЛОГИЙ

В. Д. Головин

Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, счетное в бесконечности, комплексной размерности n и F — когерентный аналитический пучок на X. Комплексные векторные пространства $H_S^p(X;\ F)$ когомологий многообразия X с коэффициентами в пучке F и с носителями в замкнутом множестве S называются *пространствами локальных когомологий относительно* S (см. [1]). В настоящей работе доказана теорема двойственности для пространств $H_S^p(X;\ F)$, аналогичная теореме двойственности работы [2]. В качестве приложений получены результаты К. Баника — О. Станашила [3], А. Фридмана [4] и Г. Шейя [5].

§ 1. Конусы некоторых отображений

Прежде всего пространства $H_S^p(X;\ F)$ нужно топологизировать. С этой целью положим

$$C^p(\alpha) = \Gamma(X;\ \varepsilon^p \otimes_O F) \times \Gamma(X\setminus S;\ \varepsilon^{p-1} \otimes_O F)$$

($p = 0,\ 1,\ \ldots$), где O пучок ростков голоморфных функций на X, $\varepsilon^{-1} = 0$ и ε^p при каждом $p \geqslant 0$ — пучок ростков бесконечно дифференцируемых внешних дифференциальных форм на X двойной степени $(0,\ p)$. Векторные пространства $C^p(\alpha)$ и линейные отображения

$$\delta^p : (\varphi,\ \psi) \to (d''\varphi,\ -d''\psi + \alpha\varphi)$$

образуют коцепной комплекс $C^*(\alpha)$, который называется *конусом отображения сужения*

$$\alpha : \Gamma(X;\ \varepsilon^* \otimes_O F) \to \Gamma(X\setminus S;\ \varepsilon^* \otimes_O F).$$

Векторные пространства $\Gamma(X;\ \varepsilon^p \otimes_O F)$ и $\Gamma(X\setminus S;\ \varepsilon^{p-1} \otimes_O F)$ наделим их обычными топологиями пространств Фреше (см., например, [2]). При каждом $p \geqslant 1$ пространство $C^p(\alpha)$ наделим топологией произведения, а пространство когомологий $H^pC^*(\alpha)$ — топологией факторпространства $\operatorname{Ker}\delta^p/\operatorname{Im}\delta^{p-1}$.

Пусть

$$0 \to F \to L^0 \to L^1 \to \cdots$$

— произвольная инъективная резольвента пучка F. Положим, как и выше:

$$C^p(\alpha^q) = \Gamma(X;\ \varepsilon^p \otimes_O L^q) \times \Gamma(X\setminus S;\ \varepsilon^{p-1} \otimes_O L^q)$$

и

$$\delta^p(\varphi,\ \psi) = (d''\varphi,\ -d''\psi + \alpha^q\varphi),$$

где

$\alpha^q : \Gamma(X;\ \varepsilon^* \otimes_O L^q) \to \Gamma(X\setminus S;\ \varepsilon^* \otimes_O L^q)$ — отображение сужения. Тогда обе спектральные последовательности двойного комплекса $C^*(\alpha^*)$ вырождены. Следовательно, *векторные пространства* $H^pC^*(\alpha)$ *и* $H_S^p(X;\ F)$ *канонически изоморфны.*

Наделим векторные пространства $H_S^p(X;\ F)$ топологиями, индуцированными из соответствующих пространств $H^pC^*(\alpha)$. Ассоциированные отделимые пространства обозначим через $\tilde{H}_S^p(X;\ F)$; они являются пространствами Фреше и Шварца.

Пусть D^p — пучок ростков потоков двойной степени $(n,\ p)$ на X, $\delta : D^p \to D^{p+1}$ — отображение, определяемое как сопряженное к $d'' : \varepsilon^{n-p-1} \to \varepsilon^{n-p}$ и пусть

$$\beta : \mathrm{Hom}_{O,\,c}(X \setminus S;\ F,\ D^*) \to \mathrm{Hom}_{O,\,c}(X;\ F,\ D^*)$$

— каноническое вложение. Векторные пространства

$$C^p(\beta) = \mathrm{Hom}_{O,\,c}(X;\ F,\ D^p) \times \mathrm{Hom}_{O,\,c}(X \setminus S;\ F,\ D^{p+1})$$

и линейные отображения

$$\delta^p : (\varphi,\ \psi) \to (\delta\varphi + \beta\psi,\ -\delta\psi)$$

образуют коцепной комплекс $C^*(\beta)$.

Векторные пространства $\mathrm{Hom}_{O,\,c}(X;\ F,\ D^p)$ и $\mathrm{Hom}_{O,\,c}(X \setminus S;\ F,\ D^{p+1})$ наделим их обычными топологиями, определяемыми сильными топологиями пространств потоков. Пространство $C^p(\beta)$ наделим топологией произведения, а пространство когомологий $H^pC^*(\beta)$ — топологией факторпространства $\mathrm{Ker}\,\delta^p \,/\, \mathrm{Im}\,\delta^{p-1}$ $(p \geqslant 1)$.

Точную последовательность

$$0 \to \Omega^n \to D^0 \to D^1 \to \cdots,$$

где Ω^n — пучок ростков голоморфных внешних дифференциальных форм степени n на X, продолжим до точной последовательности инъективных резольвент. Пусть

$$0 \to D^p \to L^{p,\,0} \to L^{p,\,1} \to \cdots$$

— соответствующая инъективная резольвента пучка D^p. Положим

$$C^p(\beta^q) = \mathrm{Hom}_{O,\,c}(X;\ F,\ L^{p,\,q}) \times \mathrm{Hom}_{O,\,c}(X \setminus S;\ F,\ L^{p+1,\,q})$$

$$\delta(\varphi,\ \psi) = (\delta\varphi + \beta^q\psi,\ -\delta\psi),$$

где

$$\beta^q : \mathrm{Hom}_{O,\,c}(X \setminus S;\ F,\ L^{*,\,q}) \to \mathrm{Hom}_{O,\,c}(X;\ F,\ L^{*,\,q})$$

— каноническое вложение. Тогда обе спектральные последовательности двойного комплекса $C^*(\beta^*)$ вырождены. Поэтому *векторные пространства* $H^pC^*(\beta)$ *и* $\mathrm{Ext}^p_{O,\,c}(S;\ F,\ \Omega^n)$ *канонически изоморфны.*

Пространства $\mathrm{Ext}^p_{O,\,c}(S;\ F,\ \Omega^n)$ наделим топологиями, индуцированными из соответствующих пространств $H^pC^*(\beta)$ при канонических изоморфизмах. Ассоциированные отделимые пространства обозначим через $\widetilde{\mathrm{Ext}}^p_{O,\,c}(S;\ F,\ \Omega^n)$; они являются сильными сопряженными к некоторым пространствам Фреше и Шварца.

§ 2. Теоремы двойственности

При каждом $p = 0,\ 1,\ \ldots\ n$ топологические векторные пространства $\mathrm{Hom}_{O,\,c}(X;\ F,\ D^{n-p})$ и $\mathrm{Hom}_{O,\,c}(X \setminus S;\ F,\ D^{n-p+1})$ канонически отождествимы с сильными сопряженными соответственно к пространствам $\Gamma(X;\ \varepsilon^p \otimes_0 F)$ и $\Gamma(X \setminus S;\ \varepsilon^{p-1} \otimes_0 F)$ (см. [2]). Следовательно, топологические векторные пространства $C^{n-p}(\beta)$ канонически отождествимы с сильными сопряженными к топологическим векторным пространствам $C^p(\alpha)$. Кроме того, кограничные операторы δ^{n-p} комплекса $C^*(\beta)$ отождествимы с сопряженными к кограничным операторам δ^{p-1} комплекса $C^*(\alpha)$. Итак, имеет место следующая

Теорема 1. *При каждом* $p = 0,\ 1,\ \ldots\ n$ *топологическое векторное пространство* $\widetilde{\mathrm{Ext}}^{n-p}_{O,\,c}(S;\ F,\ \Omega^n)$ *канонически изоморфно сильному сопряженному к топологическому векторному пространству* $\widetilde{H}^p_S(X;\ F)$.

Следствие. *При каждом* $p = 0, 1, \ldots$ *n топологическое векторное пространство* $\widetilde{\mathrm{Ext}}^{n-p}_{O, c}(X;\ F, \Omega^n)$ *канонически изоморфно сильному сопряженному к топологическому векторному пространству* $\widetilde{H}^p(X;\ F)$ (ср. [2]).

Лемма 1. *Пусть* X — *многообразие Штейна и* F, G — *когерентные аналитические пучки на* X. *Тогда векторные пространства* $\mathrm{Ext}^p_O(X;\ F, G)$ *и* $\Gamma(X;\ \mathbf{Ext}^p_O(F, G))$ *канонически изоморфны.*

Доказательство. Воспользуемся спектральной последовательностью

$$E_2^{p,q} = H^p(X;\ \mathbf{Ext}^q_O(F, G)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_O(X;\ F, G).$$

Так как $\mathbf{Ext}^q_O(F, G)$ — когерентные аналитические пучки на многообразии Штейна X, то $E_2^{p,q} = 0$ при $p \neq 0$. Отсюда следует утверждение (ср. [6]).

Следствие 1. *Если* X — *многообразие Штейна, то топологические векторные пространства* $\mathrm{Ext}^p_O(X;\ F, \Omega^n)$ *отделимы.*

Доказательство. Каноническое отображение

$$\mathrm{Ext}^p_O(X;\ F, \Omega^n) \to \Gamma(X;\ \mathbf{Ext}^p_O(F, \Omega^n))$$

непрерывно и по лемме 1 биективно; кроме того, пространство $\Gamma(X;\ \mathbf{Ext}^p_0(F, \Omega^n))$ отделимо.

Напомним, что *гомологической размерностью* когерентного аналитического пучка F называется верхняя грань проективных размерностей O_x-модулей F_x ($x \in X$).

Следствие 2. *Если* F, G — *когерентные аналитические пучки на многообразии Штейна* X *и* h — *гомологическая размерность пучка* F, *то*

$$\mathrm{Ext}^p_O(X;\ F, G) = 0$$

при $p \geqslant h + 1$ (ср. [6]).

Лемма 2. *Пусть множество* S *компактно и является пересечением относительно компактных, голоморфно полных открытых множеств* U_k ($k = 1, 2, \ldots$) *в* X, *таких, что* $\overline{U}_{k+1} \subset U_k$. *Тогда пространства* $H^p_S(X;\ F)$ *и* $\mathrm{Ext}^p_0(S;\ F, \Omega^n)$ *отделимы.*

Доказательство. Так как существует спектральная последовательность

$$E_2^{p,q} = H^p(S;\ \mathbf{Ext}^q(F, \Omega^n)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_O(S;\ F, \Omega^n),$$

то каноническое отображение

$$\mathrm{Ext}^p_O(S;\ F, \Omega^n) \to \Gamma(S;\ \mathbf{Ext}^p_O(F, \Omega^n))$$

непрерывно и биективно. Наконец, пространство (ср. [7])

$$\Gamma(S;\ \mathbf{Ext}^p_O(F, \Omega^n)) = \varinjlim_k \Gamma(U_k;\ \mathrm{Ext}^p_O(F, \Omega^n))$$

отделимо. Тем самым лемма доказана.

Из теоремы 1 и леммы 2 получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Если множество* S *компактно и является пересечением относительно компактных, голоморфно полных открытых множеств* U_k ($k = 1, 2, \ldots$), *таких, что* $\overline{U}_{k+1} \subset U_k$, *то топологические векторные пространства* $\mathrm{Ext}^{n-p}_O \times (S;\ F, \Omega^n)$ *канонически изоморфны сильным сопряженным соответственно к топологическим векторным пространствам* $H^p_S(X;\ F)$.

Следствие. *Пусть* X — *многообразие Штейна и* S — *голоморфно выпуклое компактное множество в* X. *Тогда топологические векторные пространства* $\mathbf{Ext}^{n-p}_O(S;\ F, \Omega^n)$ *канонически изоморфны сильным сопряженным к топологическим векторным пространствам* $H^p_S(X;\ F)$ (ср. [3]).

Теорема 3. *Пусть множество S компактно и является пересечением относительно компактных, голоморфно полных открытых множеств U_k $(k=1, 2, \ldots)$, таких, что $\overline{U}_{k+1} \subset U_k$. Тогда для когерентного аналитического пучка F гомологической размерности h*

$$H_S^{n-p}(X;\ F) = 0$$

при $p \geqslant h+1$.

Доказательство. Так как канонические отображения

$$\varinjlim_k \operatorname{Ext}_O^p(U_k;\ F,\ \Omega^n) \to \operatorname{Ext}_O^p(S;\ F,\ \Omega^n)$$

биективны, то в силу следствия 2 из леммы 1

$$\operatorname{Ext}_O^p(S;\ F,\ \Omega^n) = 0$$

при $p \geqslant h+1$. Следовательно, кограничный оператор δ^p комплекса $C^*(\beta)$ при $p \geqslant h$ имеет замкнутый образ и потому является гомоморфизмом сильных сопряженных к пространствам Фреше и Шварца. Тогда сопряженные отображения $'\delta^p$ имеют замкнутые образы и потому пространства $H_S^{n-p}(X;\ F)$ при $p \geqslant h$ отделимы, а при $p \geqslant h+1$ — тривиальны.

Следствие. *Каноническое отображение*

$$H^{n-p}(X;\ F) \to H^{n-p}(X \setminus S;\ F)$$

биективно при $p \geqslant h+2$ и инъективно при $p = h+1$ *.

Доказательство. Достаточно воспользоваться точной последовательностью когомологий

$$\cdots \to H_S^k(X;\ F) \to H^k(X;\ F) \to H^k(X \setminus S;\ F) \to H_S^{k+1}(X;\ F) \to \cdots.$$

Лемма 3. *Пусть S — аналитическое множество в X комплексной размерности d. Тогда для любого аналитического пучка L на X*

$$H_c^p(S;\ L) = 0$$

при $p \geqslant d+1$ (ср. [8]).

Доказательство. Пусть S' — многообразие регулярных точек множества S. Так как когомологическая размерность имеет по существу локальный характер, то при доказательстве равенств

$$H_c^p(S';\ L) = 0 \quad (p \geqslant d+1)$$

можно считать, что S' — аналитическое множество в области U пространства C^n, задаваемое уравнениями $z_{d+1} = \cdots = z_n = 0$. Так как тогда каждая голоморфная функция на S' продолжается естественным образом до голоморфной функции в некоторой окрестности множества S', то пучок $O_{S'}$ можно считать подпучком в $O \mid S'$. Но тогда пучок $L \mid S'$ допускает мягкую резольвенту

$$0 \to L \mid S' \to (L \mid S') \otimes_{O_{S'}} \varepsilon_{S'} \xrightarrow{1 \otimes d''} \cdots$$

длины d, определяемую дифференциальными формами на S'. Тем самым предыдущее утверждение доказано. Рассуждая теперь по индукции, можем счи-

*) В частном случае, когда X — область в C^n и $F = O$, этот результат был получен Фридманом [4].

тать, что утверждение леммы доказано для аналитических множеств размерности, меньшей d. Тогда, в частности,

$$H_c^p(S \setminus S'; L) = 0 \quad (p \geqslant d).$$

Утверждение леммы следует теперь из точной последовательности когомологий, связанной с замкнутым множеством $S \setminus S'$.

Лемма 4. *Пусть S — аналитическое множество в X комплексной размерности d и пусть F — когерентный аналитический пучок на X гомологической размерности h. Тогда для любого аналитического пучка L на X*

$$\mathrm{Ext}^p_{O,c}(S; F, L) = 0$$

при $p \geqslant d + h + 1$.

Доказательство. Воспользуемся спектральной последовательностью

$$E_2^{p,q} = H_c^p(S, \mathbf{Ext}_O^q(F, L)) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}_{O,c}(S; F, L).$$

Очевидно, что $E_2^{p,q} = 0$, если $p \geqslant d + 1$ или $q \geqslant h + 1$; отсюда следует утверждение леммы.

Теорема 4. *Пусть S — аналитическое множество комплексной размерности d и F — когерентный аналитический пучок гомологической размерности h. Тогда*

$$H_S^{n-p}(X; F) = 0$$

при $p \geqslant d + h + 1$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Следствие. *Каноническое отображение*

$$H^{n-p}(X; F) \to H^{n-p}(X \setminus S; F)$$

биективно при $p \geqslant d + h + 2$ и инъективно при $p = d + h + 1$ (ср. [5]).

В частности, при $F = O$ и $p = n$ получаем отсюда классическую теорему Римана о продолжении голоморфных функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Grothendieck. Les invariants cohomologiques globaux et locaux relatifs a un sousespace ferme, Semin. geometrie algebr. Bois — Marie, 1962 (1968), 6—18.
2. В. Д. Головин. Теоремы двойственности для когомологий комплексных многообразий. Функциональный анализ и его приложения, 4, № 1 (1970) 33—41.
3. C. Bănică, O. Stănăşilă, Sur la cohomologie des faisceaux analytiques cohérents à support dans un compact holomorphe — convexe, C. r. Acad. sci. Paris, 270, № 18 (1970), A1174—A1177.
4. A. Friedman. Solvability of the first Cousin problem and vanishing of higher cohomology groups for domains which are not domains of holomorphy, II, Bull. Amer, Math. Soc., 72, № 3 (1966), 505—507.
5. G. Scheja. Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen, Math. Annalen, 144, № 4 (1961), 345—360.
6. C. Bănică, O. Stănăşilă. Sur la profondeur d'un faisceau analytique cohérent sur un espace de Stein, C. r. Acad. sci. Paris, 269, № 15 (1969), A636—A639.
7. Д. А. Райков. О двух классах локально выпуклых пространств. Тр. Воронежск. сем. по функц. анализу, 5 (1957), 22—34.
8. H.—J. Reiffen, Riemannsche Hebbarkeitssätze für Cohomologieklassen mit kompaktem Träger, Math. Annalen, 164, № 3 (1966), 272—279.

Поступила 6 января 1971 г.