Харківський національний університет імені В.Н. Каразіна

Сєрікова Ірина Юріївна

УДК 517.518.85; 517.518.88

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ЗАДАЧІ В КЛАСАХ $\mathrm{R}[a,b]$ ТА $S\,[a,b]$

01.01.01 – математичний аналіз

Автореферат
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата фізико-математичних наук

Харків – 2013

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна Міністерства освіти і науки України.

Науковий керівник:
доктор фізико-математичних наук, доцент,
Дюкарев Юрій Михайлович,
Харківський національний університет
імені В.Н. Каразіна, м. Харків,
професор кафедри вищої математики.

Офіційні опоненти:
доктор фізико-математичних наук, професор,
Золотарьов Володимир Олексійович,
Фізико-технічний інститут низьких температур
імені Б.І. Вєркіна НАН України, м. Харків,
провідний науковий співробітник;

доктор фізико-математичних наук, професор
Малютін Костянтин Геннадійович,
Сумський державний університет, м. Суми,
професор кафедри математичного аналізу
і методів оптимізації.

Захист відбудеться «____» ____________ 2013 р. о ______ годині на засіданні спеціалізованої вченої ради К 64.051.11 при Харківському національному університеті імені В.Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, пл. Свободи 4, ауд. 6-52.

З дисертацією можна ознайомитися в Центральній науковій бібліотеці Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна за адресою: 61022, м. Харків, пл. Свободи 4.

Автореферат розісланий «_____» _______________ 2013 р.

Вчений секретар спеціалізованої вченої ради Скорик В.О.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Класи аналітичних функцій $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ було введено М. Г. Крейном[1] у зв’язку з дослідженням проблеми моментів на компактному інтервалі. Ці результати знайшли подальший розвиток та були узагальнені на матричний випадок у роботах Ю.М. Дюкарева, Б. Кирстейна, Б. Фрітцше, А.Е. Чоке Ріверо. Відомо, що проблема моментів може бути сформульована у теоретико-функціональних термінах як інтерполяційна задача в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$. У цих класах можна розглянути близькі до проблеми моментів інтерполяційні задачі типу задачі Неванліни-Піка, Каратеодорі та інші. Зрізані матричні задачі Неванліни-Піка і Каратеодорі в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ було розглянуто Ю.М. Дюкаревим і А.Е. Чоке Ріверо. Разом з тим, залишилася невивченою матрична задача Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$. Проте, саме цей випадок є найбільш цікавим з точки зору аналізу. Тут виникають такі специфічні задачі, як класифікація задач за ступенем їх виродженості, критерії повної невизначеності, опис множини всіх розв’язків у цілком невизначеному випадку. Розв’язок задач такого типу міститься в цій дисертації.

У матричній проблемі моментів на компактному інтервалі залишалась недослідженою мультиплікативна структура резольвентної матриці та пов’язаний з нею покроковий процес розв’язання проблеми, який є аналогом класичного покрокового процесу Шура розв’язання інтерполяційних задач. Ця тематика також була досліджена в дисертації.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Основні наукові результати, викладені в дисертації, отримано в ході виконання НДР «Спектральний аналіз систем операторів та його застосування» (номер державної реєстрації 0112U001060), що виконувалася відповідно до планів науково-дослідної роботи Харківського національного університету імені В.Н. Каразіна.

Мета і задачі дослідження. Метою дисертаційної роботи є розв’язання актуальної математичної задачі Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$, а також дослідження мультиплікативної структури резольвентної матриці та покрокового процесу розв’язання матричної проблеми моментів на компактному інтервалі.

Для досягнення поставленої мети було необхідно розв’язати такі задачі:

1. Дати класифікацію матричної задачі Неванліни-Піка в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ з нескінченою кількістю вузлів інтерполяції за ступенем її виро-

---

[1] Крейн М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман.– М.: Наука, 1973. – 552 с.

дженості. Зокрема, провести детальне дослідження цілком невизначеної задачі.

2. Одержати критерії цілком невизначеної задачі Неванліни-Піка в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ у термінах узагальнених параметрів Стільтьєса та ортонормованих раціональних матриць–функцій (МФ).

3. Дати опис множини розв'язків цілком невизначеної задачі Неванліни-Піка в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ у термінах дробово-лінійних перетворень.

4. Дослідити мультиплікативну структуру резольвентної матриці проблеми моментів і пов'язаний із нею покроковий процес розв'язання проблеми моментів на компактному інтервалі.

Об'єкт дослідження. Об'єктом дослідження є інтерполяційні задачі в класах М.Г. Крейна $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$.

Предмет дослідження. Предметом дослідження є матрична версія інтерполяційної задачі Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$. Предметом дослідження також є мультиплікативна структура резольвентної матриці проблеми моментів та пов'язаний із нею покроковий процес розв'язання проблеми моментів.

Методи дослідження. У дисертації використано: методи теорії ортонормованих раціональних МФ (підрозділи 2.5 та 4.3), методи факторизації J-розтягуючих МФ (підрозділи 2.6, 3.1 та 4.2), методи теорії нескінченних матричних добутків (підрозділи 2.7 та 4.2), принципи компактності для сім'ї аналітичних МФ (підрозділи 2.4 та 4.1).

Наукова новизна одержаних результатів.

1. Наведена класифікація матричної задачі Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ за рангами граничних інтервалів Вейля та впроваджено цілком невизначені задачі.

2. Одержано критерії цілком невизначеності задачі Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ у термінах збіжності рядів із ортонормованих раціональних МФ. Приведено явні формули для ортонормованих раціональних МФ.

3. Одержано критерії цілком невизначеності задачі Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ у термінах збіжності двох матричних рядів, елементи яких є узагальнені параметри Стільтьєса. Отримано явні формули для параметрів Стільтьєса.

4. Дано опис множини всіх розв'язків задачі Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$.

5. Досліджена мультиплікативна структура резольвентної матриці проблеми моментів на компактному інтервалі та пов'язаний із нею покроковий процес розв'язання проблеми моментів.

Практичне значення одержаних результатів. Результати дисертації мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані як для подальшого дослідження задачі Неванліни-Піка в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ і проблеми моментів на компактному інтервалі, так і для аналізу аналогічних інтерполяційних задач типу задачі Крейна–Нудельмана, проблеми моментів Нудельмана, повної проблеми моментів на компактному інтервалі та інших.

Отримані в дисертації результати знайшли подальший розвиток у роботах А.Е. Чоке Рівера, Б. Кирстейна, Б. Фрітцше, Х. Тіле та інших авторів. Матеріали дисертації можуть бути використані при викладанні спецкурсів та проведенні семінарів з інтерполяційних задач та суміжних питань аналізу.

Особистий внесок автора. Результати розділів 2, 3 отримані здобувачем особисто та опубліковані в роботах [1]–[3], [7]–[10]. Результати розділу 4 отримані у співавторстві з науковим керівником, Ю.М. Дюкаревим, та опубліковані у роботах [4]–[6], [11]. У цих роботах здобувачем отримані результати, пов'язані з мультиплікативною структурою резольвентної матриці та ортонормованими раціональними МФ.

Апробація результатів дисертації. Результати дисертації доповідалися та обговорювалися на Міжнародній математичній конференції «International Workshop on Free Boundary Flows and related problems of Analysis» (Київ, 2005), на XII Міжнародній науковій конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2008), на Міжнародній науковій конференції «Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологіях» (Харків, 2011), на «Международной конференции по Современному Анализу» (Донецьк, 2011), на XIV Міжнародній конференції імені академіка М. Кравчука (Київ, 2012).

Результати дисертації доповідались та обговорювались на семінарі у м. Донецьк (Донецький національний університет, керівник − проф. В.О. Деркач), на міжвузівському математичному семінарі у м. Суми (Сумський державний університет, керівники: член-кор. НАН України О. А. Борисенко, проф. К. Г. Малютін).

Публікації. Основні результати дисертаційної роботи містяться у 6-х статтях у фахових виданнях [1]–[6] та в 5 матеріалах і тезах міжнародних математичних конференцій [7]–[11].

Структура і обсяг дисертації. Дисертація складається зі вступу, чотирьох розділів, висновків та списку використаних джерел. Загальний обсяг дисертації складає 126 сторінок. Список літератури займає 13 сторінок і містить 125 найменувань. Результати, що виносяться на захист, сформульовано та доведено в розділах 2 – 4.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ РОБОТИ

У *вступі* обґрунтовано актуальність наукової проблеми, що розглядається в дисертації, визначено мету і задачі дослідження. Подано відомості про апробацію результатів дослідження та публікації автора за темою дисертації.

У *першому* розділі наведено огляд літератури за темою дисертаційної роботи.

У *другому розділі* досліджена задача Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції в класі $\mathrm{R}[a,b]$.

Означення 1.1. Класом $\mathrm{R}[a,b]$ називається множина голоморфних МФ $s:\mathbf{C}$, $[a,b]\to\mathbf{C}^{m\times m}$ таких, що

$$\frac{s(z)-s^*(z)}{z-\overline{z}}\geq 0_m \ \forall z\in\mathbf{C}_\pm,\quad s(x)\geq 0_m,\, x\in(-\infty,a),\ s(x)\leq 0_m,\, x\in(b,+\infty).$$

Нехай задана нескінченна послідовність комплексних чисел $Z_\infty=\{z_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathbf{C}_+$ та нескінченна послідовність матриць $\{s_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathbf{C}^{m\times m}$. У задачі Неванліни-Піка треба дати опис усіх МФ $s\in\mathrm{R}[a,b]$ таких, що

$$s(z_j)=s_j\quad \forall j\in\mathbf{N}. \tag{1.2}$$

Множину розв'язків задачі (1.2) позначимо $\mathcal{F}_\infty$. Разом з задачею (1.2) будемо досліджувати зрізану задачу Неванліни-Піка

$$s(z_j)=s_j,\quad 1\leq j\leq n. \tag{1.3}$$

Множину всіх розв'язків задачі (1.3) позначимо $\mathcal{F}_n$. Нехай $\overline{Z}_\infty=\{\overline{z}_j\}_{j=1}^\infty\subset\mathbf{C}_-$, $Z_n=\{z_j\}_{j=1}^n\subset Z_\infty$, $\overline{Z}_n=\{\overline{z}_j\}_{j=1}^n\subset\overline{Z}_\infty$. Нехай

$$T_{(n)}=\begin{bmatrix} z_1I_m & 0_m & \cdots & 0_m\\ 0_m & z_2I_m & \cdots & 0_m\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0_m & 0_m & \cdots & z_nI_m\end{bmatrix}, u_{1,(n)}=\begin{bmatrix}(z_1-a)s_1\\ \vdots\\ (z_n-a)s_n\end{bmatrix}, u_{2,(n)}=\begin{bmatrix}(b-z_1)s_1\\ \vdots\\ (b-z_n)s_n\end{bmatrix},$$

$$R_{T,(n)}(z)=(T_{(n)}-zI_{nm})^{-1}=\begin{bmatrix}(z_1-z)^{-1}I_m & \cdots & 0_m\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0_m & \cdots & (z_n-z)^{-1}I_m\end{bmatrix}, v_{(n)}=\begin{bmatrix}I_m\\ \vdots\\ I_m\end{bmatrix},$$

$$K_{1,(n)}=\left\{\frac{(z_i-a)s_i-(\overline{z}_j-a)s_j^*}{z_i-\overline{z}_j}\right\}_{i,j=1}^n,\ K_{2,(n)}=\left\{\frac{(b-z_i)s_i-(b-\overline{z}_j)s_j^*}{z_i-\overline{z}_j}\right\}_{i,j=1}^n. \tag{1.4}$$

У *підрозділі 2.1* доведено критерій розв'язності задачі Неванліни-Піка.

Теорема 2.1. Для розв'язності інтерполяційної задачі (1.2), необхідно і достатньо, щоб $K_{1,(n)}\geq 0_{nm}$ та $K_{2,(n)}\geq 0_{nm}$ для всіх $n\in\mathbf{N}$.

У *підрозділі 2.2* отримані явні формули для розв'язків Фрідріхса та Крейна. У цьому підрозділі також досліджено властивості $\mathrm{R}_{\infty}[a,b]$-пар.

Означення 1.2. Зрізана задача Неванліни-Піка (1.3) називається цілком невизначеною, якщо $K_{1,(n)} > 0_{nm}, K_{2,(n)} > 0_{nm}$.

Означення 1.3. Резольвентною матрицею задачі (1.3) називається

$$U_{(n)}(z) = \begin{bmatrix} \alpha_{(n)}(z) & \beta_{(n)}(z) \\ \gamma_{(n)}(z) & \delta_{(n)}(z) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I_m + (z-a)v_{(n)}^* R_{T,(n)}^*(a) K_{2,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) u_{2,(n)} & -(z-a)(b-z)v_{(n)}^* R_{T,(n)}^*(a) K_{2,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) v_{(n)} \\ u_{1,(n)}^* R_{T,(n)}^*(a) K_{1,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) u_{1,(n)} & I_m + (z-a)u_{1,(n)}^* R_{T,(n)}^*(a) K_{1,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) v_{(n)} \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Означення 1.4. Пара мероморфних в $\mathbf{C}$, $[a,b]$ МФ $[p,q]$ називається $\mathrm{R}[a,b]$-парою, якщо існує дискретна в $\mathbf{C}$, $[a,b]$ множина D_{pq}, така що:

(i) МФ p і q голоморфні у $\mathbf{C}$, $\{\mathrm{D}_{pq} \cup [a,b]\}$.

(ii) $[p(z), q(z)] \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} > 0_m, z \in \mathbf{C}$, $\{\mathrm{D}_{pq} \cup [a,b]\}$.

(iii) $[(z-a)p(z), q(z)] \dfrac{J}{\imath(\overline{z}-z)} \begin{bmatrix} (\overline{z}-a)p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \ge 0_m, z \in \mathbf{C}_{\pm}$, D_{pq}.

(iv) $[(b-z)p(z), q(z)] \dfrac{J}{\imath(\overline{z}-z)} \begin{bmatrix} (b-\overline{z})p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \ge 0_m, z \in \mathbf{C}_{\pm}$, D_{pq}.

Дві $R\,[a,b]$-пари $[p_1(z), q_1(z)]$, $[p_2(z), q_2(z)]$ називаються еквівалентними, якщо $p_2(z) = Q(z)p_1(z)$, $q_2(z) = Q(z)q_1(z)$, де Q мероморфна МФ. Множину класів еквівалентності $R\,[a,b]$-пар позначимо $R_{\infty}[a,b]$.

Теорема 1.3. Дробово-лінійне перетворення

$$s(z) = \left\{ p(z)\beta_{(n)}(z) + q(z)\delta_{(n)}(z) \right\}^{-1} \left\{ p(z)\alpha_{(n)}(z) + q(z)\gamma_{(n)}(z) \right\} \quad (1.16)$$

задає взаємно однозначне відображення між $\mathcal{F}_n$ та $\mathrm{R}_{\infty}[a,b]$.

Теорема 2.1. Для розв′язності інтерполяційної задачі (1.2), необхідно і достатньо, щоб $K_{1,(n)} \ge 0_{nm}$ і $K_{2,(n)} \ge 0_{nm}$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Означення 2.1. Розв'язками Фрідріхса та Крейна називаються МФ

$$s_{F,(n)}(z) = \delta_{(n)}^{-1}(z)\gamma_{(n)}(z), \; s_{K,(n)}(z) = \beta_{(n)}^{-1}(z)\alpha_{(n)}(z). \quad (2.6)$$

Теорема 2.6. Нехай $s \in \mathcal{F}_n$. Тоді

$$\begin{aligned} 0_m < s_{F,(n)}(x) \le s(x) \le s_{K,(n)}(x), \qquad & \forall x < a, \\ s_{K,(n)}(x) \le s(x) \le s_{F,(n)}(x) < 0_m, \qquad & \forall x > b. \end{aligned} \quad (2.25)$$

У *підрозділі 2.3* вивчаються матричні інтервали Вейля.

Означення 2.4. Матричні інтервали

$$\mathrm{I}_n(x)=\begin{cases}\left[\, s_{F,(n)}(x), s_{K,(n)}(x)\,\right], & x<a,\\ \left[\, s_{K,(n)}(x), s_{F,(n)}(x)\,\right], & x>b\end{cases}$$

називаються інтервалами Вейля в точці x.

Теорема 2.7. Нехай дано зрізану задачу (1.3) та $\mathrm{I}_n(x)$ є інтервалом Вейля в точці $x\in\mathbf{R}$, $[a,b]$. Тоді $\mathrm{I}_n(x)=\{s(x): s\in\mathcal{F}_n\}$.

У *підрозділі 2.4* введено цілком невизначені та вироджені задачі Неванліни-Піка в термінах граничних інтервалів Вейля.

Теорема 2.9. Нехай задано інтерполяційну задачу (1.2). Тоді:

1. Існують рівномірні на компактах $K\subset\mathbf{C}$, $[a,b]$ границі

$$s_{K,(\infty)}(z):=\lim_{n\to\infty}s_{K,(n)}(z)\in\mathcal{F}_\infty,\quad s_{F,(\infty)}(z):=\lim_{n\to\infty}s_{F,(n)}(z)\in\mathcal{F}_\infty. \tag{2.36}$$

2. Для всіх $s\in\mathcal{F}_\infty$ виконуються нерівності

$$0_m<\ s_{F,(\infty)}(x)\le s(x)\le s_{K,(\infty)}(x),\quad x<a,$$
$$s_{K,(\infty)}(x)\le s(x)\le s_{F,(\infty)}(x)<0_m,\ \ x>b.$$

Означення 2.6. МФ $s_{F,(\infty)}$ та $s_{K,(\infty)}$ називаються розв'язками Фрідріхса та Крейна інтерполяційної задачі (1.2).

Означення 2.7. Матричні інтервали

$$\mathrm{I}_\infty(x)=\begin{cases}\left[\, s_{F,(\infty)}(x), s_{K,(\infty)}(x)\,\right], & x<a,\\ \left[\, s_{K,(\infty)}(x), s_{F,(\infty)}(x)\,\right], & x>b,\end{cases}$$

називаються граничними інтервалами Вейля задачі (1.2).

Теорема 2.10. Має місто рівність $\{s(x): s\in\mathcal{F}_\infty\}=\mathrm{I}_\infty(x)$, $x\in\mathbf{R}$, $[a,b]$.

Означення 2.8. Інтерполяційна задача (1.2) називається цілком невизначеною, якщо всі граничні інтервали Вейля є невиродженими.

Теорема 2.11. Для цілком невизначеності інтерполяційної задачі (1.2), необхідно, щоб граничні інтервали Вейля були невиродженими при всіх $x\in\mathbf{R}$, $[a,b]$ і достатньо, щоб хоча б для одного $x_0\in\mathbf{R}$, $[a,b]$ був невиродженим відповідний граничний інтервал Вейля $\mathrm{I}_\infty(x_0)$.

У *підрозділі 2.5* отримано критерій цілком невизначеності задачі Неванліни-Піка в термінах ортонормованих МФ. Маємо

$$K_{r,(n)}=\begin{bmatrix}K_{r,(n-1)} & B_{r,(n)}\\ B^*_{r,(n)} & \dfrac{s_{r,n}-s^*_{r,n}}{z_n-\overline{z}_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_{(n-1)m} & 0_{(n-1)m\times m}\\ B^*_{r,(n)}K^{-1}_{r,(n-1)} & I_m\end{bmatrix}\times$$
$$\times\begin{bmatrix}K_{r,(n-1)} & 0_{(n-1)m\times m}\\ 0_{m\times(n-1)m} & \hat{K}_{r,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{(n-1)m} & K^{-1}_{r,(n-1)}B_{r,(n)}\\ 0_{m\times(n-1)m} & I_m\end{bmatrix},$$

де

$$\hat{K}_{r,n}=\frac{s_{r,n}-s_{r,n}^{*}}{z_n-\bar{z}_n}-B_{r,(n)}^{*}K_{r,(n-1)}^{-1}B_{r,(n)},\quad r=1,2. \tag{2.39}$$

Розглянемо раціональні МФ ($n>1, r=1,2$)

$$P_{r,(1)}(z)=K_{r,(1)}^{-\frac{1}{2}}R_{T,(1)}(z),\; P_{r,(n)}(z)=\hat{K}_{r,n}^{-\frac{1}{2}}\left[-B_{r,(n)}^{*}K_{r,(n-1)}^{-1}\; I_m\right]R_{T,(n)}(z)v_{(n)}. \tag{2.44}$$

Означення 2.9. МФ $P_{r,(n)}$ називаються ортонормованими раціональними МФ, асоційованими з цілком невизначеною задачею (1.3).

Теорема 2.14. Для того, щоб задача Неванліни-Піка (1.2) була цілком невизначеною, необхідно, щоб для всіх $x\in\mathbf{R}$, $[a,b]$ збігалися ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty}P_{1,(j)}^{*}(x)P_{1,(j)}(x),\; \sum_{j=1}^{\infty}P_{2,(j)}^{*}(x)P_{2,(j)}(x) \tag{2.47}$$

і достатньо, щоб ряди (2.47) збігалися хоча б для одного $x_0\in\mathbf{R}$, $[a,b]$.

У *підрозділі 2.6* досліджено множники Бляшке-Потапова. Нехай

$$w_1=(z_1-a)s_1,\quad w_n=(z_n-a)s_n-(z_n-a)B_{1,(n)}^{*}K_{1,(n-1)}^{-1}R_{T,(n-1)}(a)u_{1,(n-1)},$$

$$\hat{v}_1=I_m,\; \tilde{w}_n=\frac{b-z_n}{z_n-a}w_n,\; \hat{v}_n=I_m-(z_n-a)B_{2,(n)}^{*}K_{2,(n-1)}^{-1}R_{T,(n-1)}(a)v_{(n-1)}. \tag{2.49}$$

Означення 2.10. МФ

$$b_n(z)=\begin{bmatrix} I_m-(z-a)\dfrac{\hat{v}_n^{*}}{\bar{z}_n-a}\hat{K}_{2,n}^{-1}\dfrac{\tilde{w}_n}{z_n-z} & -(z-a)(z-b)\dfrac{\hat{v}_n^{*}}{\bar{z}_n-a}\hat{K}_{2,n}^{-1}\dfrac{\hat{v}_n}{z_n-z} \\ \dfrac{w_n^{*}}{\bar{z}_n-a}\hat{K}_{1,n}^{-1}\dfrac{w_n}{z_n-z} & I_m+(z-a)\dfrac{w_n^{*}}{\bar{z}_n-a}\hat{K}_{1,n}^{-1}\dfrac{\hat{v}_n}{z_n-z} \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

називаються узагальненими множниками Бляшке-Потапова ($n\in\mathbf{N}$).

Теорема 2.17. Резольвентна матриця (2.5) припускає зображення

$$U_{(n)}(z)=b_n(z)\times\cdots\times b_1(z),\qquad n\in\mathbf{N}. \tag{2.61}$$

У *підрозділі 2.7* отримано критерій цілком невизначеності задачі (1.2).

Теорема 2.18. Для множників Бляшке-Потапова (2.54) маємо

$$b_n(x)=\begin{bmatrix} T_n^{-1^{*}}(x) & 0_m \\ 0_m & T_n(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & N_n(x) \\ 0_m & I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ M_n(x) & I_m\end{bmatrix}, x\in\mathbf{R},\; [a,b], \tag{2.62}$$

$$T_n(x)=I_m+(x-a)\frac{w_n^{*}}{\bar{z}_n-a}\hat{K}_{1,n}^{-1}\frac{\hat{v}_n}{z_n-x},$$

$$N_n(x)=\frac{(x-a)^2(x-b)}{(b-a)|z_n-x|^2}\hat{v}_n^{*}\hat{K}_{1,n}^{-1}\hat{v}_n+\frac{(x-a)(x-b)^2}{(b-a)|z_n-x|^2}\hat{v}_n^{*}\hat{K}_{2,n}^{-1}\hat{v}_n, \tag{2.63}$$

$$M_n(x)=\frac{a-b}{|z_n-a|^2}w_n^{*}\hat{K}_{2,n}^{-1}\left\{(x-b)\hat{K}_{2,n}^{-1}+(x-a)\hat{K}_{1,n}^{-1}\right\}^{-1}w_n.$$

Позначимо

$$\hat{M}_1(x)=M_1(x), \hat{N}_1(x)=N_1(x), \hat{T}_j=T_j\times\cdots\times T_1, 1\le j\le n,$$

$$\hat{M}_j(x)=\hat{T}_{j-1}^{-1}(x)M_j(x)\hat{T}_{j-1}^{-1^*}(x),\ \ \hat{N}_j(x)=\hat{T}_{j-1}^{*}(x)N_j(x)\hat{T}_{j-1}(x),\ \ 2\le j\le n. \quad (2.65)$$

Означення 2.11. МФ ($x_0\in\mathbf{R}\backslash[a,b]$)

$$\hat{U}_{(n)}(z)=\begin{pmatrix}\hat{T}_1^*(x_0) & 0_m\\ 0_m & \hat{T}_1^{-1}(x_0)\end{pmatrix}U_{1,(n)}(z),\ z\in\mathbf{C}\ ,\ \ \{[a,b]\cup Z_n\cup \overline{Z}_n\} \qquad (2.66)$$

називається нормованою резольвентною матрицею задачі (1.3).

Теорема 2.19. Для того, щоб інтерполяційна задача (1.2) була цілком невизначеною, необхідно і достатньо, щоб ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty}\hat{M}_j(x_0),\qquad \sum_{j=1}^{\infty}\hat{N}_j(x_0) \qquad (2.69)$$

збігалися у фіксованій точці $x_0\in\mathbf{R}$, $[a,b]$.

У *підрозділі 2.8* описано всі розв’язки цілком невизначеної задачі (1.2).

Теорема 2.20. Нехай $\hat{U}_{(n)}$ є нормованою резольвентною МФ цілком невизначеної інтерполяційної задачі (1.2). Тоді:

1. Існують рівномірні на компактах $K\subset\mathbf{C}$, $[a,b]$ границі

$$\hat{U}_{(\infty)}(z):=\lim_{n\to\infty}\hat{U}_{(n)}(z),\qquad \hat{U}_{(\infty)}^{-1}(z):=\lim_{n\to\infty}\hat{U}_{(n)}^{-1}(z) \qquad (2.73)$$

і МФ $\hat{U}_{(\infty)}$ та $\hat{U}_{(\infty)}^{-1}$ голоморфні у $z\in\mathbf{C}$, $\{[a,b]\cup Z_\infty\cup\overline{Z}_\infty\}$.

2. Для кожної МФ $s\in\mathcal{F}_\infty$ виконана система ОМН В.П. Потапова

$$\left[s_r(z), I_m\right]\frac{\hat{U}_{r,(\infty)}^{-1}(z)J\hat{U}_{r,(\infty)}^{-1^*}(z)}{\imath(\overline{z}-z)}\begin{bmatrix}s_r^*(z)\\ I_m\end{bmatrix}\ge 0,\ \ z\in\mathbf{C}_\pm\ ,\ \ \{Z_\infty\cup\overline{Z}_\infty\},\ r=1,2. \quad (2.74)$$

Тут $s_1(z)=(z-a)s(z),\ s_2(z)=(b-z)s(z)$,

$$\hat{U}_{1,(\infty)}=\begin{pmatrix}\left(\dfrac{1}{z-a}\right)I_m & 0_m\\ 0_m & I_m\end{pmatrix}\hat{U}_{(\infty)}\begin{pmatrix}(z-a)I_m & 0_m\\ 0_m & I_m\end{pmatrix}.$$

$$\hat{U}_{2,(\infty)}=\begin{pmatrix}\left(\dfrac{1}{b-z}\right)I_m & 0_m\\ 0_m & I_m\end{pmatrix}\hat{U}_{(\infty)}\begin{pmatrix}(b-z)I_m & 0_m\\ 0_m & I_m\end{pmatrix}. \qquad (2.75)$$

Навпаки, нехай МФ s голоморфна в $\mathbf{C}_+$, D та побудовані за нею МФ s_1 і s_2 задовольняють системі ОМН (2.74). Тоді $s\in\mathcal{F}_\infty$.

3. Дробово-лінійне перетворення

$$s(z)=\left\{p(z)\beta_{(\infty)}(z)+q(z)\delta_{(\infty)}(z)\right\}^{-1}\left\{p(z)\alpha_{(\infty)}(z)+q(z)\gamma_{(\infty)}(z)\right\} \qquad (2.76)$$

здійснює взаємно однозначне відображення між $\mathcal{F}_\infty$ та $\mathrm{R}_\infty[a,b]$. Тут $\alpha_{(\infty)}$, $\beta_{(\infty)},\gamma_{(\infty)},\delta_{(\infty)}$ – квадратні блоки нормованої резольвентної МФ.

У *розділі 3* досліджено мультиплікативну структуру резольвентної матриці проблеми моментів. Розглянемо послідовність комплексних $m \times m$ матриць $\{s_j\}_{j=0}^{l}$. У проблемі моментів треба описати всі неспадні МФ $\sigma:[a,b] \to \mathbf{C}_H^{m\times m}, \sigma(a)=0$, $\sigma(t-0)=\sigma(t)$, $t\in(a,b]$ такі, що

$$\int_a^b t^j d\sigma(t) = s_j, \qquad 0 \le j \le l. \tag{1.17}$$

Множину σ позначимо через M_l. З $\sigma \in \mathrm{M}_l$ пов'яжемо асоційовану МФ

$$s(z) = \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t-z}. \tag{1.18}$$

Множину таких МФ s позначимо F_l. Впровадимо блочні матриці

$$T_{(n)} = \begin{bmatrix} 0_m & \cdots & 0_m & 0_m \\ I_m & \cdots & 0_m & 0_m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0_m & \cdots & I_m & 0_m \end{bmatrix}, v_{(n)} = \begin{bmatrix} I_m \\ 0_m \\ \vdots \\ 0_m \end{bmatrix}, u_{(n)} = -\begin{bmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}, \ \tilde{H}_{1,(n)} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdots & s_n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \cdots & s_{2n} \end{bmatrix},$$

$$R_{T,(n)}(z) = (I_{m(n+1)} - zT_{(n)})^{-1} = \begin{bmatrix} I_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ zI_m & I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^n I_m & z^{n-1} I_m & \cdots & I_m \end{bmatrix}, \tilde{H}_{2,(n)} = \begin{bmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_{n+1} \\ s_2 & s_3 & \cdots & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n+1} \end{bmatrix}, \tag{1.19}$$

$$u_{1,(n)} = R_{T,(n)}^{-1}(a)u_{(n)}, \ u_{2,(n)} = -R_{T,(n)}^{-1}(b)u_{(n)},$$

$$H_{1,(n)} = -a\tilde{H}_{1,(n)} + \tilde{H}_{2,(n)}, H_{2,(n)} = b\tilde{H}_{1,(n)} - \tilde{H}_{2,(n)}.$$

Означення 1.5. Проблема моментів (1.17) називається цілком невизначеною, якщо $H_{1,(\mathrm{n})} > 0,\ H_{2,(\mathrm{n})} > 0$.

Означення 1.6. Резольвентною матрицею задачі (1.17) називається

$$U_{(n)}(z) = \begin{bmatrix} \alpha_{(n)}(z) & \beta_{(n)}(z) \\ \gamma_{(n)}(z) & \delta_{(n)}(z) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I_m - (z-a)u_2^* R_T^*(\overline{z}) H_2^{-1} R_T(a) v & u_1^* R_T^*(\overline{z}) H_1^{-1} R_T(a) u_1 \\ (z-a)(z-b) v^* R_T^*(\overline{z}) H_2^{-1} R_T(a) v & I_m + (z-a) v^* R_T^*(\overline{z}) H_1^{-1} R_T(a) u_1 \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

Теорема 1.4. Дробово-лінійне перетворення

$$s(z) = U_{(n)}(z)\left\{\begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix}\right\} = \left\{\alpha_{(n)}(z)p(z) + \beta_{(n)}(z)q(z)\right\}\left\{\gamma_{(n)}(z)p(z) + \delta_{(n)}(z)q(z)\right\}^{-1} \tag{1.22}$$

задає взаємно однозначне відображення між $\mathrm{R}_\infty[a,b]$ та $\mathrm{F}_{2\mathrm{n}+1}$.

У *підрозділі 3.1* досліджено мультиплікативну структуру резольвентної матриці проблеми моментів. Нехай

$$H_{r,(n)} = \begin{bmatrix} H_{r,(n-1)} & B_{r,(n)} \\ B_{r,(n)}^* & C_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ B_{r,(n)}^* H_{r,n}^{-1} & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{r,(n-1)} & 0_{nm\times m} \\ 0_{m\times nm} & \hat{H}_{r,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{nm} & H_{r,n}^{-1} B_{r,(n)} \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

де $\hat{H}_{r,n} = C_r - B^*_{r,(n)} H^{-1}_{r,(n-1)} B_{r,(n)}$, $r = 1,2$.

Нехай матриці $w_{1,n}$ та $\hat{v}_n$, $n \in \mathbf{N}$ визначені формулами

$$w_{1,n} = -s_n - B^*_{1,(n)} H^{-1}_{1,(n-1)} R_{T,(n-1)}(a) u_{1,(n-1)},\ w_{1,0} = u_{1,(0)} = -s_0,$$
$$\hat{v}_n = a^n I_m - B^*_{2,(n)} H^{-1}_{2,(n-1)} R_{T,(n-1)}(a) v_{(n-1)},\ \hat{v}_0 = I_m,\ w_{2,n} = -w_{1,n}. \qquad (3.3)$$

Означення 3.1. Множниками Бляшке-Потапова називаються МФ

$$b_0(z) = U_0(z), \quad b_k(z) = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_k(z) & \hat{\beta}_k(z) \\ \hat{\gamma}_k(z) & \hat{\delta}_k(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m - (z-a) w^*_{2,k} \hat{H}^{-1}_{2,k} \hat{v}_k & w^*_{1,k} \hat{H}^{-1}_{1,k} w_{1,k} \\ (z-a)(z-b) \hat{v}^*_k \hat{H}^{-1}_{2,k} \hat{v}_k & I_m + (z-a) \hat{v}^*_k \hat{H}^{-1}_{1,k} w_{1,k} \end{bmatrix}. \qquad (3.10)$$

Теорема 3.1. Резольвентна матриця допускає зображення

$$U_{(n)}(z) = b_0(z) \times b_1(z) \times \cdots \times b_n(z). \qquad (3.11)$$

У *підрозділі 3.3* введено узагальнені параметри Шура і описано шурівський покроковий процес розв'язання проблеми моментів.

Означення 3.2. Узагальненими параметрами Шура називаються матриці

$$\hat{s}_{0,0} = s_0, \quad \hat{s}_{0,k} = \frac{1}{b-a} \hat{v}_k^{-1} \left((b-a) s_{2k} - B^*_{1,(k)} H^{-1}_{1,(k-1)} B_{1,(k)} - B^*_{2,(k)} H^{-1}_{2,(k-1)} B_{2,(k)} \right) \hat{v}_k^{-1*}, \ k > 0 \qquad (3.24)$$

$$\hat{s}_{1,0} = s_1, \quad \hat{s}_{1,k} = \frac{1}{b-a} \hat{v}_k^{-1} \left((b-a) s_{2k+1} - b B^*_{1,(k)} H^{-1}_{1,(k-1)} B_{1,(k)} - a B^*_{2,(k)} H^{-1}_{2,(k-1)} B_{2,(k)} \right) \hat{v}_k^{-1*}, \quad k > 0,$$

тут $\hat{H}_{1,k}, \hat{H}_{2,k}, \hat{v}_k$ визначаються формулами (3.1) та (3.3).

Теорема 3.2. Множина всіх асоційованих МФ $s \in \mathrm{F}_{2n+1}$ є суперпозицією дробово-лінійних перетворень

$$s(z) = b_0(z) \left\{ \cdots \left\{ b_n(z) \left\{ \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \right\} \right\} \cdots \right\}. \qquad (3.29)$$

У *розділі 4* розглянуто задачу Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції в класі $S\,[a,b]$.

Означення 1.7. Класом $S\,[a,b]$ називається множина голоморфних МФ $s : \mathbf{C}$, $[a,b] \to \mathbf{C}^{m\times m}$ таких, що $\dfrac{s(z) - s^*(z)}{z - \bar{z}} \ge 0, \quad s(x) \ge 0,\ x \in \mathbf{R}$, $[a,b]$.

Теорема 1.5. МФ $s \in S\,[a,b]$ тоді і тільки тоді, коли

$$s(z) = (b-z) \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t-z}. \qquad (1.23)$$

Тут $\sigma : [a,b] \to \mathbf{C}^{m\times m}_H$ – неспадна МФ обмеженої варіації.

Нехай задано нескінченну послідовність попарно різних комплексних чисел $Z_\infty = \{z_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbf{C}_+$ і нескінченну послідовність матриць $\{s_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathbf{C}^{m\times m}$. У задачі Неванліни-Піка треба описати усі МФ $s \in S\,[a,b]$ такі, що

$$s(z_j) = s_j, \quad \forall j \in \mathbf{N}. \qquad (1.24)$$

Множину всіх розв'язків задачі (1.24) позначимо F_{∞}. Разом із (1.24) будемо розглядати зрізану задачу Неванліни–Піка.

$$s(z_j) = s_j, \qquad 1 \le j \le n. \tag{1.25}$$

Множину всіх розв'язків задачі (1.25) позначимо F_n. Нехай

$$T_{(n)} = \begin{bmatrix} z_1 I_m & 0_m & \cdots & 0_m \\ 0_m & z_2 I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & 0_m & \cdots & z_n I_m \end{bmatrix}, \tilde{s}_j = \frac{z_j - a}{b - z_j} s_j,\ v_{(n)} = \begin{bmatrix} I_m \\ \vdots \\ I_m \end{bmatrix},$$

$$R_{T,(n)}(z) = (T_{(n)} - zI_{mn})^{-1} = \begin{bmatrix} (z_1 - z)^{-1} I_m & \cdots & 0_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0_m & \cdots & (z_n - z)^{-1} I_m \end{bmatrix},$$

$$K_{1,(n)} = \left\{ \frac{s_i - s_j^*}{z_i - \overline{z}_j} \right\}_{i,j=1}^{n},\ K_{2,(n)} = \left\{ \frac{\tilde{s}_i - \tilde{s}_j^*}{z_i - \overline{z}_j} \right\}_{i,j=1}^{n}, u_{1,(n)} = \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}, u_{2,(n)} = \begin{bmatrix} \tilde{s}_1 \\ \vdots \\ \tilde{s}_n \end{bmatrix}.$$

Означення 1.9. Зрізана задача Неванліни-Піка (1.25) називається цілком невизначеною, якщо $K_{1,(\mathrm{n})} > 0,\ K_{2,(\mathrm{n})} > 0.$

Означення 1.10. Резольвентною матрицею задачі (1.25) називається

$$U_{(n)}(z) = \begin{bmatrix} \alpha_{(n)}(z) & \beta_{(n)}(z) \\ \gamma_{(n)}(z) & \delta_{(n)}(z) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_m - (z-b)v_{(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) K_{2,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) u_{2,(n)} & (z-a)v_{(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) K_{2,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) v_{(n)} \\ (z-b)u_{1,(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) K_{1,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) u_{1,(n)} & (I_m + (z-b)u_{1,(n)}^* R_{T,(n)}^*(b) K_{1,(n)}^{-1} R_{T,(n)}(z) v_{(n)} \end{bmatrix}. \tag{1.28}$$

Означення 1.11. Пара $m \times m$ МФ $[p(z), q(z)]$ називається $S\,[a,b]$-парою, якщо існує дискретна в $\mathbf{C}$, $[a,b]$ множина D_{pq}, така, що

1. МФ $p,\ q$ голоморфні в $\mathbf{C}$, $\{D_{pq} \cup [a,b]\}$.

2. $\left[p(z), q(z)\right] \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} > 0,\ z \in \mathbf{C},\ \{D_{pq} \cup [a,b]\}.$

3. $\left[p(z), q(z)\right] \dfrac{J}{\iota(\overline{z} - z)} \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \ge 0, \qquad z \in \mathbf{C}_{\pm},\ D_{pq}.$

4. $\left[\dfrac{z-a}{b-z} p(z), q(z)\right] \dfrac{J}{\iota(\overline{z} - z)} \begin{bmatrix} \dfrac{\overline{z} - a}{b - \overline{z}} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \ge 0, \quad z \in \mathbf{C}_{\pm},\ D_{pq}.$

Нехай $m \times m$ МФ Q мероморфна і мероморфно обернена у $\mathbf{C}$, $[a,b]$. Дві $S\,[a,b]$-пари $\left[p_1(z), q_1(z)\right]$, $\left[p_2(z), q_2(z)\right]$ називаються еквівалентними, якщо

$p_2(z)=Q(z)p_1(z),\ q_2(z)=Q(z)q_1(z)$. Множину класів еквівалентності $S\,[a,b]$-пар позначимо $S_\infty[a,b]$.

Теорема 1.7. Дробово-лінійне перетворення

$$s(z)=\left\{p(z)\beta_{(n)}(z)+q(z)\delta_{(n)}(z)\right\}^{-1}\left\{p(z)\alpha_{(n)}(z)+q(z)\gamma_{(n)}(z)\right\} \tag{1.31}$$

задає взаємно однозначне відображення між F_n та $S_\infty[a,b]$.

Розв'язками Фрідрихса та Крейна називаються МФ

$$s_{K,(n)}(z)=\beta_{(n)}^{-1}(z)\alpha_{(n)}(z)\in\mathrm{F}_n,\ s_{F,(n)}(z)=\delta_{(n)}^{-1}(z)\gamma_{(n)}(z)\in\mathrm{F}_n. \tag{4.1}$$

Теорема 4.3. Розв'язки Фрідрихса та Крейна (4.1) припускають зображення ($z\in\mathbf{C}$, $[a,b]$)

$$s_F(z)=(b-a)u_1^*R_T^*(b)\left[K_2+\frac{z-a}{z-b}K_1\right]^{-1}R_T(b)u_1, \tag{4.2}$$

$$s_K(z)=\frac{1}{b-a}\left\{v^*R_T^*(b)\left[K_2+\frac{z-b}{z-a}R_T^{-1}(a)R_T(b)K_1R_T^*(b)R_T^{-1^*}(a)\right]^{-1}R_T(b)v\right\}^{-1}. \tag{4.3}$$

Теорема 4.5. Нехай дано цілком невизначену задачу (1.25). Тоді

$$0_m<s_{F,(n)}(x)\le s_{(n)}(x)\le s_{K,(n)}(x)\quad \forall s_{(n)}\in\mathrm{F}_n,\ \forall x\in\mathbf{R},\ [a,b]. \tag{4.7}$$

Означення 4.1. Матричним інтервалом Вейля в точці x називається

$$\mathrm{I}_{(n)}(x)=\left[\,s_{F,(n)}(x),s_{K,(n)}(x)\,\right],x\in\mathbf{R},\ [a,b].$$

Теорема 4.6. Нехай F_∞, F_n є розв'язками задачі (1.24) та (1.25). Тоді:

1. Існують рівномірні на компактах $K\subset\mathbf{C}$, $[a,b]$ границі

$$s_{K,(\infty)}(z):=\lim_{n\to\infty}s_{K,(n)}(z)\in\mathrm{F}_\infty,\quad s_{F,(\infty)}(z):=\lim_{n\to\infty}s_{F,(n)}(z)\in\mathrm{F}_\infty.$$

2. Для всіх $s\in\mathrm{F}_\infty$ виконуються нерівності, $x\in\mathbf{R}$, $[a,b]$

$$0_m<s_{F,(\infty)}(x)\le s(x)\le s_{K,(\infty)}(x).$$

Означення 4.2. Матричний інтервал $\mathrm{I}_\infty(x):=\left[\,s_{F,(\infty)}(x),s_{K,(\infty)}(x)\,\right]$ називається граничним інтервалом Вейля задачі (1.24) у точці $x\in\mathbf{R}$, $[a,b]$.

Теорема 4.7. Нехай $\mathrm{I}_\infty(x)$ позначає граничний інтервал Вейля в точці $x\in\mathbf{R}$, $[a,b]$. Тоді $\{s(x):s\in\mathrm{F}_\infty\}=\mathrm{I}_\infty(x),\ \forall x\in\mathbf{R}$, $[a,b]$.

Означення 4.3. Гранична інтерполяційна задача (1.24) називається цілком невизначеною, якщо для всіх $x\in\mathbf{R}$, $[a,b]$ граничні інтервали Вейля $\mathrm{I}_\infty(x)$ є невиродженими.

Теорема 4.9. Для того, щоб гранична інтерполяційна задача (1.24) була цілком невизначеною, необхідно, щоб при всіх $x_0\in\mathbf{R}$, $[a,b]$ граничні інтервали Вейля були невироджені і достатньо, щоб хоча б для одного $x_0\in\mathbf{R}$, $[a,b]$ був невиродженим граничний інтервал Вейля $\mathrm{I}_\infty(x_0)$.

У *підрозділі 4.2* досліджено мультиплікативну структуру резольвентної матриці і приведено опис розв'язків задачі Неванліни-Піка в класі $S\,[a,b]$.

Нехай

$$K_{r,(n+1)}=\begin{bmatrix} K_{r,(n)} & B_r \\ B_r^* & \dfrac{s_{r,n+1}-s_{r,n+1}^*}{z_{n+1}-\overline{z}_{n+1}} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I_{nm} & 0_{nm\times m} \\ B_r^* K_{r,(n)}^{-1} & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K_{r,(n)} & 0_{nm\times m} \\ 0_{m\times nm} & \hat{K}_{r,n+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{nm} & K_{r,(n)}^{-1}B_r \\ 0_{m\times nm} & I_m \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

де $\hat{K}_{r,n+1}=\dfrac{s_{r,n+1}-s_{r,n+1}^*}{z_{n+1}-\overline{z}_{n+1}}-B_r^* K_{r,(n)}^{-1}B_r$, $r=1,2$.

Розглянемо $m\times m$ матриці

$$w_1=s_1, w_{n+1}=s_{n+1}-(z_{n+1}-b)B_1^* K_{1,(n)}^{-1}R_{T,(n)}(b)u_{1,(n)},$$

$$\hat{v}_1=I_m, \hat{v}_{n+1}=I_m-(z_{n+1}-b)B_2^* K_{2,(n)}^{-1}R_{T,(n)}(b)v_{(n)},\ \tilde{w}_n=\frac{z_n-a}{b-z_n}w_n. \quad (4.18)$$

Впровадимо множники Бляшке-Потапова

$$b_n(z)=\begin{bmatrix} I_m-(z-b)\dfrac{\hat{v}_n^*}{\overline{z}_n-b}\hat{K}_2^{-1}\dfrac{\tilde{w}_n}{z_n-z} & (z-a)\dfrac{\hat{v}_n^*}{\overline{z}_n-b}\hat{K}_2^{-1}\dfrac{\hat{v}_n}{z_n-z} \\ (z-b)\dfrac{w_n^*}{\overline{z}_n-b}\hat{K}_1^{-1}\dfrac{w_n}{z_n-z} & I_m+(z-b)\dfrac{w_n^*}{\overline{z}_n-b}\hat{K}_1^{-1}\dfrac{\hat{v}_n}{z_n-z} \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

де w_n та $\hat{v}_n$ визначені у (4.15).

Теорема 4.10. Резольвентна матриця (1.27) припускає зображення

$$U_{(n)}(z)=b_n(z)\times\cdots\times b_1(z). \quad (4.26)$$

Теорема 4.11. Множник Бляшке-Потапова $b_n(x)$ припускає уявлення

$$b_n(x)=\begin{bmatrix} T_n^{-1^*}(x) & 0_m \\ 0_m & T_n(x) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & N_n(x) \\ 0_m & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & 0_m \\ M_n(x) & I_m \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

де

$$T_n(x)=I_m+(x-b)\frac{w_n^*}{\overline{z}_n-b}\hat{K}_{1,n}^{-1}\frac{\hat{v}_n}{z_n-x},$$

$$N_n(x)=\frac{(x-a)(x-b)}{(b-a)|z_n-x|^2}\hat{v}_n^*\hat{K}_{1,n}^{-1}\hat{v}_n+\frac{|x-a|^2}{(b-a)|z_n-x|^2}\hat{v}_n^*\hat{K}_{2,n}^{-1}\hat{v}_n, \quad (4.28)$$

$$M_n(x)=\frac{b-a}{|z_n-b|^2}w_n^*\hat{K}_{2,n}^{-1}\left\{\frac{x-a}{x-b}\hat{K}_{2,n}^{-1}+\hat{K}_{1,n}^{-1}\right\}^{-1}\hat{K}_{1,n}^{-1}w_n.$$

Позначимо через

$$\hat{M}_1(x)=M_1(x), \hat{N}_1(x)=N_1(x), \hat{T}_j=T_j\times\cdots\times T_1, 1\le j\le n,$$

$$\hat{M}_j(x)=\hat{T}_{j-1}^{-1}(x)M_j(x)\hat{T}_{j-1}^{-1^*}(x),\ 2\le j\le n, \quad (4.29)$$

$$\hat{N}_j(x)=\hat{T}_{j-1}^*(x)N_j(x)\hat{T}_{j-1}(x),\ 2\le j\le n.$$

Наступна теорема узагальнює класичний критерій Стильтьєса.

Теорема 4.12. Для того, щоб інтерполяційна задача (1.24) була цілком невизначеною, необхідно і достатньо, щоб для фіксованої точки $x_0 \in \mathbf{R}$, $[a,b]$ збігалися ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty} \hat{M}_j(x_0), \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \hat{N}_j(x_0). \tag{4.33}$$

Нормованою резольвентною матрицею задачі (1.25) називається

$$\hat{U}_{(n)}(z) = \begin{pmatrix} \hat{T}_n^*(x) & 0_m \\ 0_m & \hat{T}_n^{-1}(x) \end{pmatrix} U_{1,(n)}(z),\ z \in \mathbf{C},\ \ \{[a,b] \cup Z_n \cup \overline{Z}_n\}. \tag{4.31}$$

Теорема 4.13. Існують наступні границі рівномірні на компактах $K \subset \mathbf{C}\acute{\Gamma}\{[a,b] \cup Z_{(\infty)} \cup \overline{Z}_{(\infty)}\}$ $\hat{U}_{(\infty)}(z) := \lim_{n\to\infty} \hat{U}_{(n)}(z),\ \hat{U}_{(\infty)}^{-1}(z) := \lim_{n\to\infty} \hat{U}_{(n)}^{-1}(z)$ і МФ $\hat{U}_{(\infty)}(z)$ та $\hat{U}_{(\infty)}^{-1}(z)$ є голоморфними МФ, $z \in \mathbf{C}$, $\{[a,b] \cup Z_\infty \cup \overline{Z}_\infty\}$.

Теорема 4.15. Нехай $\hat{U}_{(\infty)}(z) = \begin{bmatrix} \alpha_{(\infty)}(z) & \beta_{(\infty)}(z) \\ \gamma_{(\infty)}(z) & \delta_{(\infty)}(z) \end{bmatrix}$. Тоді формула

$$s(z) = \left\{ p(z)\beta_{(\infty)}(z) + q(z)\delta_{(\infty)}(z) \right\}^{-1} \left\{ p(z)\alpha_{(\infty)}(z) + q(z)\gamma_{(\infty)}(z) \right\}$$

задає взаємно однозначне відображення між F_∞ та $\mathrm{S}_\infty[a,b]$.

У *підрозділі 4.3* отримано критерій цілком невизначеності задачі Неванліни-Піка у термінах ортонормованих МФ. Нехай ($n > 1, r = 1,2$)

$$P_{r,(1)}(z) = K_{r,(1)}^{-\frac{1}{2}} R_{T,(1)}(z),\ \ P_{r,(n)}(z) = \hat{K}_{r,n}^{-\frac{1}{2}} \left[-B_{r,(n)}^* K_{r,(n-1)}^{-1} \ \ I \right] R_{T,(n)}(z) v_{(n)}. \tag{4.40}$$

Теорема 4.17. Нехай МФ $s \in \mathrm{F}_{\max\{k,\,p\}}$. Тоді ($r = 1,2$, σ визначається (1.23))

$$\int_a^b P_{r,(k)}(t)(b-t)\left\{\frac{t-a}{b-t}\right\}^{r-1} d\sigma(t) P_{r,(p)}^*(t) = \begin{cases} I_{m\times m}, k = p, \\ 0_{m\times m}, k \neq p. \end{cases} \tag{4.41}$$

Теорема 4.18. Для того, щоб задача Неванліни-Піка (4.2) була цілком невизначеною, необхідно, щоб при всіх $x \in \mathbf{R}$, $[a,b]$ збігалися ряди

$$\sum_{j=1}^{\infty} P_{1,(j)}^*(x) P_{1,(j)}(x),\ \ \sum_{j=1}^{\infty} P_{2,(j)}^*(x) P_{2,(j)}(x) \tag{4.43}$$

і, достатньо, щоб ряди (4.43) збігалися хоча б при одному $x_0 \in \mathbf{R}$, $[a,b]$.

ВИСНОВКИ

Отримані в дисертації результати дозволяють зробити висновок, що усі цілі дисертації досягнуті і розв’язані усі поставлені перед здобувачем задачі. Основою для такого висновку є наступне.

1. Отримано критерії розв’язності задач Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$.

2. Наведено класифікацію матричних задач Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ за рангами граничних інтервалів Вейля і наведено означення цілком невизначеної задачі.

3. Отримано критерії цілком невизначеності задач Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ у термінах збіжності рядів з ортонормованих раціональних МФ. Приведено явні формули для ортонормованих раціональних МФ.

4. Досліджено мультиплікативну структуру резольвентних матриць задач Неванліни-Піка в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ і отримано явні формули для узагальнених параметрів Стільтьєса. Доведено узагальнений критерій Стільтьєса цілком невизначеності задач Неванліни-Піка з нескінченною кількістю вузлів інтерполяції.

5. У термінах дробово-лінійних перетворень уперше наведено опис множини всіх розв’язків цілком невизначених задач Неванліни-Піка з нескінченним числом вузлів інтерполяції в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$. Для резольвентних матриць отримано зображення у вигляді нескінченного добутку узагальнених множників Бляшке-Потапова.

6. Досліджено мультиплікативну структуру резольвентної матриці матричної проблеми моментів на компактному інтервалі і пов'язаний із нею покроковий процес шурівського типу розв’язання проблеми моментів.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ РОБІТ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Серикова И.Ю. Интервалы Вейля, ассоциированные с задачей Неванлинны-Пика в классе $\mathrm{R}[a,b]$ / И.Ю. Серикова // Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2005. – № 711. – С. 37 – 54.

2. Serikova I.Yu. Indeterminacy criteria for the Nevanlinna-Pick interpolation problem in class $\mathrm{R}[a,b]$ / I.Yu. Serikova // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2006. – Т. 3, № 4. – С. 126 – 142.

3. Серикова И.Ю. Мультипликативная структура резольвентной матрицы проблемы моментов на компактном интервале (случай четного количества моментов) / И.Ю. Серикова // Вісник Харківського національного університету, серія «Математика, прикладна математика і механіка». – 2007. – № 790. – С. 133 – 140.

4. Dyukarev Yu. M. Friedrichs and Krein solutions of the Nevanlinna-Pick interpolation problem in the class $S\,[a,b]$ / Yu. M. Dyukarev, I. Yu. Serikova //

Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2004. – Т. 1, № 3. – С. 55 – 66.

5. Дюкарев Ю. М. О вполне неопределенности задачи Неванлинны-Пика в классе $S\,[a,b]$ / Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова // Известия высших учебных заведений. Математика. – 2007. – № 11 (546). – С. 19–30.

6. Дюкарев Ю. М. Ортогональные на компактном интервале рациональные матрицы-функции / Ю. М. Дюкарев, И. Ю. Серикова // Український математичний журнал. – 2007. – Т. 59, № 6. – С. 764-770.

7. Серикова И. Ю. Ортогональные на компактном интервале рациональные матрицы-функции, ассоциированные с задачей Неванлинны-Пика в классе $\mathrm{R}[a,b]$ / И.Ю. Серикова // XII International scientific kravchuk conference, 15 – 17 May 2008: conference materials. – Kyiv. – 2008. – P. 787.

8. Серикова И. Ю. Критерий вполне неопределенности задачи Неванлинны-Пика в классе $\mathrm{R}[a,b]$ в терминах ортогональных МФ / И.Ю. Серикова // Современные проблемы математики и ее приложения в естественных науках и информационных технологиях: межд. конф., 17 – 22 апреля 2011 г.: тезисы докладов. – Харьков. – 2011. – С. 211–212.

9. Серикова И. Ю. Мультипликативная структура резольвентной матрицы проблемы моментов на компактном интервале / И. Ю. Серикова // International conference in modern analysis, June 20–23, 2011: abstracts. – Donetsk. – 2011. – P. 101.

10. Серикова И. Ю. Пошаговое решение степенной проблемы моментов на компактном интервале / И.Ю. Серикова // XIV Міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука: міжн. наук. конф., 19 – 21 квітня 2012 р.: матеріали конференції. – Київ. – 2012. – Т. 2. – С. 221–222.

11. Dyukarev Yu. M. On the uniqueness for the Nevanlinna-Pick interpolation problem in the class $S\,[a,b]$ / Yu. M. Dyukarev, I. Yu. Serikova // International Workshop on Free Boundary Flows and related problems of Analysis, 25 – 30 September 2005: abstracts. – Kiev. – 2005. – P. 12–13.

АНОТАЦІЯ

Сєрікова І.Ю. Інтерполяційні задачі в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$.– Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата фізико-математичних наук за спеціальністю 01.01.01 – математичний аналіз. – Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна, Харків, 2013.

У дисертації досліджено матричну задачу Неванліни-Піка з нескінченним числом вузлів інтерполяції в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$. Отримано необхідні і достатні умови розв'язності цих задач. Дано класифікацію ступеня виродження інтерполяційної задачі з нескінченним числом вузлів інтерполяції в

класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$ у термінах рангів граничних інтервалів Вейля. Зокрема, введено поняття цілком невизначеної інтерполяційної задачі. Отримано критерії цілком невизначеності в термінах збіжності рядів з ортонормованих раціональних МФ. Здобуто явні формули, що виражають ортонормовані МФ через інтерполяційні дані. Крім того, знайдено критерії цілком невизначеності в термінах збіжності рядів з узагальнених параметрів Стільтьєса. Для параметрів Стільтьєса знайдено явні формули. Наведено опис множини розв'язків цілком невизначених інтерполяційних задач в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\,[a,b]$.

Досліджено мультиплікативну структуру резольвентної матриці проблеми моментів. Отримано явні формули для множників Бляшке-Потапова. Приведено покрокове вирішення матричної проблеми моментів на компактному інтервалі. Знайдено явні формули для параметрів Шура.

Ключові слова: задача Неванліни-Піка, проблема моментів, цілком невизначена задача, вироджена задача, добуток Бляшке-Потапова, нескінченні матричні добутки, покроковий процес Шура.

АННОТАЦИЯ

Серикова И.Ю. Интерполяционные задачи в классах $\mathrm{R}[a,b]$ **и** $S\,[a,b]$**.**– Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – математический анализ. – Харьковский национальный университет имени В.Н. Каразина, Харьков, 2013.

Диссертационная работа посвящена исследованию интерполяционных задач в классах М.Г. Крейна $\mathrm{R}[a,b]$ и $S\,[a,b]$. Типичными интерполяционными задачами являются матричные задачи Неванлинны-Пика с бесконечным числом узлов интерполяции в классах $\mathrm{R}[a,b]$ и $S\,[a,b]$, а также матричная проблема моментов на компактном интервале. Матричная проблема моментов с помощью теоремы Гамбургера-Неванлинны сводится к описанию матриц-функций класса $\mathrm{R}[a,b]$ с заданными коэффициентами асимптотического разложения. Таким образом, матричная проблема моментов может быть представлена как интерполяционная задача для матриц-функций класса $\mathrm{R}[a,b]$ с кратным узлом интерполяции в бесконечности.

Результаты диссертации существенно дополняют теорию интерполяции исследованием задач Неванлинны-Пика с бесконечным числом узлов интерполяции в классах $\mathrm{R}[a,b]$ и $S\,[a,b]$. Этот случай является наиболее интересным с точки зрения математического анализа, так как приводит к необходи-

мости классификации бесконечных задач по степени их вырожденности, введению понятия вполне неопределенности, исследованию сходимости бесконечных матричных произведений и рядов. Для решения этих задач используются методы теории J-растягивающих аналитических матриц-функций, факторизации матриц-функций, основных матричных неравенств и другие теоретико-функциональные методы.

В диссертации исследована матричная задача Неванлинны-Пика с бесконечным числом узлов интерполяции в классах М.Г. Крейна $\mathrm{R}[a,b]$ и $S\,[a,b]$. В терминах неотрицательности блочных матриц Пика получены необходимые и достаточные условия разрешимости этих задач. Найдены явные формулы для решений Фридрихса и Крейна как для усеченной, так и для бесконечной задачи Неванлинны-Пика. Доказаны экстремальные свойства решений Фридрихса и Крейна. С помощью этих решений определены предельные матричные интервалы Вейля для усеченной задачи и предельные интервалы Вейля для задачи Неванлинны-Пика с бесконечным числом узлов интерполяции. Доказано, что матричные интервалы Вейля совпадают с множеством значений решений интерполяционных задач. Дана классификация степени вырожденности задачи с бесконечным числом узлов интерполяции в классах $\mathrm{R}[a,b]$ и $S\,[a,b]$ в терминах рангов предельных матричных интервалов Вейля. В частности, введено понятие вполне неопределенной интерполяционной задачи с бесконечным числом узлов интерполяции. Получены критерии вполне неопределенности матричной задачи Неванлинны-Пика с бесконечным числом узлов интерполяции в терминах сходимости рядов из ортонормированных рациональных МФ. Найдены явные формулы, выражающие эти МФ через интерполяционные данные. Доказаны критерии вполне неопределенности матричной задачи Неванлинны-Пика с бесконечным числом узлов интерполяции в терминах сходимости рядов из обобщенных матричных параметров Стилтьеса. Этот критерий является аналогом классического критерия Стилтьеса вполне неопределенности проблемы моментов. Для обобщенных матричных параметров Стилтьеса найдены явные формулы, выражающие эти параметры через интерполяционные данные. Дано описание множества решений вполне неопределенных матричных интерполяционных задач Неванлинны-Пика с бесконечным числом узлов интерполяции в классах $\mathrm{R}[a,b]$ и $S\,[a,b]$ в терминах дробно-линейных преобразований.

В проблеме моментов на компактном интервале оставались неисследованными мультипликативная структура резольвентной матрицы и связанный с нею пошаговый процесс решения проблемы моментов шуровского типа. В диссертации получено разложение резольвентной матрицы проблемы моментов на компактном интервале в произведение множителей Бляшке-Потапова, которые являются квадратичными функциями с матричными коэффициента-

ми. В исследованных ранее интерполяционных задачах множители Бляшке-Потапова были линейными функциями. Найдены явные формулы, выражающие множители Бляшке-Потапова через интерполяционные данные. Определены параметры Шура и получено представление множителей Бляшке-Потапова через параметры Шура. Приведено пошаговое решение проблемы моментов на компактном интервале, которое является аналогом классического пошагового процесса Шура решения интерполяционных задач.

Ключевые слова: задача Неванлинны-Пика, проблема моментов, вполне неопределенная задача, вырожденная задача, произведение Бляшке-Потапова, бесконечные матричные произведения, пошаговый процесс Шура.

ABSTRACT

Serikova I.Yu. Interpolation problems in the class $\mathrm{R}[a,b]$ and $S\,[a,b]$. – Manuscript.

A dissertation for a PhD Degree in Physical and Mathematical Sciences, specialty 01.01.01 – Mathematical Analysis. – Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, 2013.

In the dissertation the matrix Nevanlinna-Pick problem with an infinite number of interpolation points in the classes $\mathrm{R}[a,b]$ and $S\,[a,b]$ is investigated. Necessary and sufficient solvability conditions for these problems have been proved.

The criterion of complete indetermination for the interpolation problem in terms of convergence of two series, where the elements are orthogonal systems of rational matrix function (MF), has been obtained. Explicit formulas expressing this MF through interpolation data has been proved. The generalized Stieltjes criterion in terms of two series convergence has been also proved. An explicit formula for generalized Stieltjes parameters has been found. The set of solutions of complete indetermination interpolation problem in the classes $\mathrm{R}[a,b]$ and $S\,[a,b]$ in terms of linear fractional transformations has been obtained.

The multiplicative structure of the resolvent matrix moment problem on a compact interval has been investigated. The explicit formulas for generalized Blaschke-Potapov factors have been obtained. Step by step process solution matrix moment problem on a compact interval has been considered.

Keywords: Nevanlina-Pick problem, the moment problem, complete indetermination interpolation problem, Blaschke-Potapov product, infinite matrix products, step by step Shur process.

Наукове видання

Сєрікова Ірина Юріївна

«Інтерполяційні задачі в класах $\mathrm{R}[a,b]$ та $S\ [a,b]$»

Формат 60x84/16. Ум. друк. арк. 0.9. Тир. 100 прим. Зам. 210-13.
Підписано до друку 14.05.13. Папір офсетний.

Надруковано з макету замовника у СПД ФО Бровін О.В.
61022, м. Харків, вул. Трінклера, 2, корп.1, к.19. Т. (057) 758-01-08, (066) 822-71-30
Свідоцтво про внесення суб'єкта до Державного реєстру
видавців та виготовників видавничої продукції серія ДК 3587 від 23.09.09 р.

СТИЛЬ-ИЗДАТ
ТИПОГРАФИЯ
www.stil-izdat.com