ЛИНЕЙНЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР СО СЛУЧАЙНО ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ЖЕСТКОСТЬЮ

Г. Я. Любарский, Ю. Л. Работников

1. Постановка задачи

Движение линейного осциллятора со случайно изменяющейся жесткостью описывается следующим формальным дифференциальным уравнением:

$$\ddot{Q}(t) + [\omega^2 + \alpha(t)]\, Q(t) = 0 \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{1.1}$$

Здесь ω^2 — некоторое положительное число, $\alpha(t)$ — случайная функция, относительно которой мы предполагаем следующее:

$$< \alpha(t) > = 0, \quad < \alpha(t)\,\alpha(t+\tau) > = S\delta(\tau) \quad (S = \mathrm{const} > 0,$$
$$-\infty < t, \quad \tau < \infty);$$

символ $< \cdots >$ означает усреднение по ансамблю. Последнее условие выполняется, если значения функции $\alpha(t)$ в различные моменты времени представляют собой независимые случайные величины. Случайные процессы такого типа часто встречаются, например, в различных радиотехнических проблемах. Уравнение (1.1) можно трактовать как уравнение простого колебательного контура. $Q(t)$ и $\dot{Q}(t)$ также являются случайными функциями.

Цель настоящей статьи — найти и исследовать плотность распределения вероятностей $\Phi(Q, \dot{Q}, t)$.

В силу свойств функции $\alpha(t)$ плотность $\Phi(Q, \dot{Q}, t)$ удовлетворяет уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова [1, 2], которое в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \dot{Q}\frac{\partial\Phi}{\partial Q} - \omega^2 Q\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{Q}} = \frac{S}{2}\, Q^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial\dot{Q}^2}. \tag{1.2}$$

В работе найдено приближенное решение задачи Коши для уравнения (1.2) в предположении, что

$$\frac{\varepsilon}{\omega} \ll 1 \quad \left(\varepsilon \equiv \frac{S}{\omega^2}\right),$$

и исследованы некоторые свойства этого решения. Предлагаемое решение не претендует на строгость, и авторы хотели бы подчеркнуть, что получение строгого решения этой задачи весьма желательно.

2. Получение приближенного решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова

Для получения приближенного решения уравнения (1.2) удобно сделать замену переменных Q, $\dot{Q}$ и t по формулам:

$$Q = e^x \cos\left(\sqrt{3}\,w - 16\frac{\omega}{\varepsilon}\tau\right),$$
$$\dot{Q} = \omega e^x \sin\left(\sqrt{3}\,w - 16\frac{\omega}{\varepsilon}\tau\right), \tag{2.1}$$
$$t = \frac{16}{\varepsilon}\tau\left(\varepsilon \equiv \frac{S}{\omega^2}\right).$$

Если, кроме того, представить функцию $\Phi[x,\ w,\ \tau]$ в виде:

$$\Phi[x,\ w,\ \tau] = e^{-x}\mathrm{X}(x,\ w,\ \tau),$$

то из уравнения (1.2) получим следующее уравнение относительно функции $\mathrm{X}(x,\ w,\ \tau)$:

$$\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial\tau} = 8\sin^2\beta\cos^2\beta\,\frac{\partial^2\mathrm{X}}{\partial x^2} + \frac{16}{\sqrt{3}}\sin\beta\cos^3\beta\,\frac{\partial^2\mathrm{X}}{\partial x\,\partial w} + \frac{8}{3}\cos^4\beta\,\frac{\partial^2\mathrm{X}}{\partial w^2} +$$
$$+ (8\cos^2\beta - 32\sin^2\beta\cos^2\beta)\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial x} - \frac{32}{\sqrt{3}}\sin\beta\cos^3\beta\,\frac{\partial\mathrm{X}}{\partial w} +$$
$$+ (24\sin^2\beta\cos^2\beta - 8\cos^2\beta)\,\mathrm{X} \quad \left(\beta = \sqrt{3}\,w - 16\frac{\omega}{\varepsilon}\tau\right). \tag{2.2}$$

Из формул (2.1) следует, что функции $\Phi[x,\ w,\ \tau]$ и $\mathrm{X}(x,\ w,\ \tau)$ суть периодические функции w с периодом $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$. Плотность распределения вероятностей в переменных x, w есть $\omega\sqrt{3}\,e^x\mathrm{X}(x,\ w,\ \tau)$.

Поскольку в левой части уравнения (2.2) стоит производная по «медленному» времени $\tau = \frac{\varepsilon}{16}t$, а коэффициенты в правой части уравнения зависят от «быстрого» времени t $\left(16\frac{\omega}{\varepsilon}\tau = \omega t\right)$, то целесообразно воспользоваться методом усреднения. Усредняя коэффициенты уравнения (2.2) по «быстрому» времени, получим уравнение[1]:

$$\frac{\partial\mathrm{X}_0}{\partial\tau} = \frac{\partial^2\mathrm{X}_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathrm{X}_0}{\partial w^2} - \mathrm{X}_0 \quad (\mathrm{X}_0 = \mathrm{X}_0(x,\ w,\ \tau)). \tag{2.3}$$

Заменой $\mathrm{X}_0 = \Omega e^{-\tau}$ уравнение (2.3) сводится к двумерному уравнению теплопроводности. Используя известное решение задачи Коши для всей плоскости, легко найти функцию $\mathrm{X}_0(x,\ w,\ \tau)$:

$$\mathrm{X}_0(x,\ w,\ \tau) = \frac{e^{-\tau}}{4\pi\tau}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{X}(\xi,\ \eta)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2+(w-\eta)^2}{4\tau}}\,d\xi\,d\eta, \tag{2.4}$$

где $\mathrm{X}(x,\ w)$ есть периодическая по w с периодом $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ функция, совпадающая в полосе $0 \leqslant w \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ с функцией $\mathrm{X}(x,\ w,\ 0) = e^x\Phi[x,\ w,\ 0]$.

С помощью решения (2.4) легко найти функцию $\Phi(Q,\ \dot{Q},\ t)$. Однако бо́льший интерес представляет получение плотности распределения вероят-

[1] Строгое обоснование такой процедуры авторам неизвестно.

ностей $\Psi(\mathscr{E}, w, t)$ в переменных энергия — фаза $\mathscr{E} = \frac{1}{2}(\dot{Q}^2 + \omega^2 Q^2) = \frac{\omega^2}{2} e^{2x}, w$. Учитывая, что в переменных x, w плотность распределения вероятностей равна $\omega\sqrt{3}e^x \mathrm{X}(x, w, \tau)$ и что $\tau = \frac{\varepsilon t}{16}$, можно получить

$$\Psi(\mathscr{E}, w, t) = \left[\omega\sqrt{3}e^x \mathrm{X}(x, w, \tau)\frac{\partial(x, w)}{\partial(\mathscr{E}, w)}\right]_{x=\frac{1}{2}\cdot\ln\frac{2\mathscr{E}}{\omega^2}, \ \tau=\frac{\varepsilon t}{16}},$$

т. е.

$$\Psi(\mathscr{E}, w, t) = \frac{2e^{-\frac{\varepsilon t}{16}}}{\pi\varepsilon t\sqrt{\mathscr{E}}}\int_0^\infty d\mathscr{E}' \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \frac{\Psi(\mathscr{E}', \eta)}{\sqrt{\mathscr{E}'}} \exp\left\{-\frac{\left(\ln\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}'}\right)^2 + 4(w-\eta)^2}{\varepsilon t}\right\}. \quad (2.5)$$

Следует заметить, что $\Psi(\mathscr{E}, w)$ есть периодическая по w с периодом $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ функция, совпадающая в полосе $0 \leqslant w \leqslant \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ с плотностью распределения вероятностей $\Psi(\mathscr{E}, w, 0)$.

Если плотность распределения вероятностей $\Psi(\mathscr{E}, w, 0)$ усреднить по w, то получим функцию

$$\overline{\Psi}(\mathscr{E}, t) = \int_0^{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}} \Psi(\mathscr{E}, w, t)\,dw = \frac{e^{-\frac{\varepsilon t}{16}}}{\sqrt{\pi\varepsilon t\mathscr{E}}}\int_0^\infty \frac{\overline{\Psi}(\mathscr{E}', 0)}{\sqrt{\mathscr{E}'}} e^{-\frac{(\ln\mathscr{E} - \ln\mathscr{E}')^2}{\varepsilon t}}\,d\mathscr{E}'. \quad (2.6)$$

Здесь $\overline{\Psi}(\mathscr{E}, 0)$ есть усредненная по w начальная плотность распределения вероятностей $\Psi(\mathscr{E}, w, 0)$.

3. Некоторые свойства функции $\overline{\Psi}(\mathscr{E}, t)$.

Выясним ряд свойств плотности распределения вероятностей $\overline{\Psi}(\mathscr{E}, t)$, предполагая, что она в начальный момент отлична от нуля лишь в некоторой области $0 < \mathscr{E}_0' \leqslant \mathscr{E} \leqslant \mathscr{E}_0'' < \infty$.

а) С помощью формулы (2.6) нетрудно показать, что среднее значение величины $\mathscr{E}^\varkappa(t)$ ($\mathscr{E}(t)$ — энергия осциллятора в момент t; $-\infty < \varkappa < \infty$) выражается формулой:

$$< \mathscr{E}^\varkappa(t) > = \int_0^\infty \mathscr{E}^\varkappa \overline{\Psi}(\mathscr{E}, t)\,d\mathscr{E} = < \mathscr{E}^\varkappa(0) > e^{\frac{\varepsilon t}{4}(\varkappa^2+\varkappa)} \quad (-\infty < \varkappa < \infty). \quad (3.1)$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$< \mathscr{E}^{-1}(t) > = < \mathscr{E}^{-1}(0) >. \quad (3.2)$$

Величина $< \mathscr{E}^\varkappa(t) >$ возрастает вместе с t, если $\varkappa$ — отрицательное число, меньшее (-1), или любое положительное число. Величина $<\mathscr{E}^\varkappa(t)>$ убывает с ростом t, если $-1 < \varkappa < 0$. Наконец, при $\varkappa = 0$ равенство (3.1) переходит в условие нормировки:

$$\int_0^\infty \overline{\Psi}(\mathscr{E}, t)\,d\mathscr{E} = 1.$$

Последнее равенство показывает, что, несмотря на приближенный характер найденных выражений для плотностей распределения вероятностей $\Psi(\mathscr{E}, w, t)$ и $\overline{\Psi}(\mathscr{E}, t)$, условие нормировки выполняется точно.

б) Используя (3.1), легко получить соотношение:

$$\sqrt{<[\mathscr{E}(t)-<\mathscr{E}(t)>]^2>}=e^{\frac{3}{4}\varepsilon t}\sqrt{<\mathscr{E}^2(0)>-<\mathscr{E}(0)>^2e^{-\frac{\varepsilon t}{2}}}.$$

Следовательно, как абсолютный, так и относительный разброс значений энергии возрастает вместе с t.

в) Вероятность того, что энергия $\mathscr{E}$ осциллятора находится в области $0\leqslant\mathscr{E}\leqslant\mathscr{E}_0$ равна

$$\int\limits_0^{\mathscr{E}_0}\overline{\Psi}(\mathscr{E},\ t)\,d\mathscr{E}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\mathscr{E}_0'}^{\mathscr{E}_0''}\overline{\Psi}(\mathscr{E}',\ 0)\,d\mathscr{E}'\int\limits_{-\infty}^{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon t}}\ln\frac{\mathscr{E}_0}{\mathscr{E}'}-\frac{\sqrt{\varepsilon t}}{4}}\exp(-x^2)\,dx. \qquad (3.3)$$

Напомним, что начальная плотность распределения вероятностей $\overline{\Psi}(\mathscr{E},\ 0)$ предполагается отличной от нуля лишь в области $0<\mathscr{E}_0'\leqslant\mathscr{E}\leqslant\mathscr{E}_0''<\infty$.

При $\mathscr{E}_0''<\mathscr{E}_0<\infty$ вероятность из (3.3) монотонно убывает с ростом t. Следовательно, вероятность значений энергии, бо́льших любого фиксированного $\mathscr{E}_0>\mathscr{E}_0''$, монотонно возрастает и ко времени $t\sim\frac{\omega}{\varepsilon^2}$ (при условии $\mathscr{E}_0\ll\mathscr{E}_0'e^{\frac{\omega}{4\varepsilon}}$) отличается от единицы не более, чем на величину порядка $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\omega}}e^{-\frac{\omega}{16\varepsilon}}$.

Из сопоставления этого факта с формулой (3.2) следует, что у некоторой части осцилляторов энергия убывает с ростом t.

Пусть в формуле (3.3) $0<\mathscr{E}_0<\mathscr{E}_0'$. Тогда верхний предел внутреннего интеграла в (3.3) проходит через максимум в момент $t_0=\frac{4}{\varepsilon}\ln\frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}_0}$. Поэтому сам интеграл проходит через максимум в момент $t_{\max}$ такой, что

$$\frac{4}{\varepsilon}\ln\frac{\mathscr{E}_0'}{\mathscr{E}_0}<t_{max}<\frac{4}{\varepsilon}\ln\frac{\mathscr{E}_0''}{\mathscr{E}_0}.$$

Из этих неравенств следует, что с уменьшением $\mathscr{E}_0$ $t_{\max}$ возрастает, т. е. чем меньшая область энергий $0\leqslant\mathscr{E}\leqslant\mathscr{E}_0$ рассматривается, тем дольше будет возрастать та часть всех осцилляторов, у которой энергии осцилляторов $\mathscr{E}$ лежат в этой области.

г) С помощью формулы (2.6) можно оценить момент $T_{\max}$ прохождения максимума плотности $\overline{\Psi}(\mathscr{E},\ t)$ через точку $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0$, лежащую вне области $\mathscr{E}_0'\leqslant\mathscr{E}\leqslant\mathscr{E}_0''$. При $\mathscr{E}_0''<\mathscr{E}_0<\infty$ верны следующие оценки $T_{\max}$:

$$\frac{4}{\varepsilon}\left[\sqrt{1+\left(\ln\frac{\mathscr{E}_0}{\mathscr{E}_0''}\right)^2}-1\right]<T_{\max}<\frac{4}{\varepsilon}\left[\sqrt{1+\left(\ln\frac{\mathscr{E}_0}{\mathscr{E}_0'}\right)^2}-1\right]. \qquad (3.4)$$

При $0<\mathscr{E}_0<\mathscr{E}_0'$ знаки в неравенствах (3.4) следует изменить на противоположные.

д) $<\ln\frac{\mathscr{E}(t)}{\mathscr{E}_0}>=<\ln\frac{\mathscr{E}(0)}{\mathscr{E}_0}>+\frac{\varepsilon t}{4}$ (значение $\mathscr{E}=\mathscr{E}_0$ лежит вне интервала $\mathscr{E}_0'\leqslant\mathscr{E}\leqslant\mathscr{E}_0''$).

е) $<\frac{1}{\sqrt{\mathscr{E}(t)}}\ln\frac{\mathscr{E}(t)}{\mathscr{E}_0}>=<\frac{1}{\sqrt{\mathscr{E}(0)}}\ln\frac{\mathscr{E}(0)}{\mathscr{E}_0}>e^{-\frac{\varepsilon t}{16}}$ ($\mathscr{E}_0$ — то же, что и в случае д)).

Две последние формулы — частные случаи более общего соотношения

$$< \mathscr{E}^{\varkappa}(t) \ln \frac{\mathscr{E}(t)}{\mathscr{E}_0} > = \Big[< \mathscr{E}^{\varkappa}(0) \ln \frac{\mathscr{E}(0)}{\mathscr{E}_0} > +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\varkappa + \frac{1}{2}\right) < \mathscr{E}^{\varkappa}(0) > \varepsilon t \Big] e^{\frac{\varepsilon t}{4}(\varkappa^2 + \varkappa)}.$$

Авторы приносят благодарность А. С. Бакаю за ряд полезных советов.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Чандрасекхар. Стохастические проблемы в физике и астрономии (перев. с англ.). Изд-во иностр. лит., М. (1947).
2. А. Н. Колмогоров. «Усп. матем. наук», вып. 5 (1938), 5—41.