А. В. ПОГОРЕЛОВ (Харьков)

ОДНОЗНАЧНАЯ ОПРЕДЕЛЁННОСТЬ БЕСКОНЕЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

1. В 1936 г. С. Э. Кон-Фоссен[1] поставил следующий вопрос: существуют ли однозначно определённые бесконечные выпуклые поверхности? Если да, то существуют ли бесконечные выпуклые поверхности, допускающие изгибания? В 1941 г. С. П. Оловянишников[2] доказал, что бесконечные выпуклые поверхности с полной кривизной меньшей 2π являются далеко не однозначно определёнными и допускают достаточно свободные изгибания. В 1947 г. А. Д. Александровым и автором этой заметки была доказана однозначная определённость широкого класса бесконечных выпуклых поверхностей вращения*) и, таким образом, был впервые дан нетривиальный пример однозначно определённых бесконечных выпуклых поверхностей.

В этой заметке мы рассмотрим вопрос однозначной определённости регулярных (трижды непрерывно дифференцируемых) бесконечных выпуклых поверхностей. Для того чтобы сформулировать основной результат, мы введём одно понятие, которым будем неоднократно пользоваться. Пусть F — бесконечная, полная, с положительной всюду гауссовой кривизной поверхность. Мы будем говорить, что поверхность F расположена над плоскостью xy, если каждая прямая, перпендикулярная к этой плоскости, либо не пересекает поверхности, либо пересекает её только в одной точке, а вся поверхность находится в полупространстве $z > 0$. Можно показать, что любая бесконечная выпуклая поверхность с положительной всюду гауссовой кривизной может быть расположена над плоскостью xy в указанном выше смысле. Если поверхность F расположена над плоскостью xy, то её уравнение может быть записано в виде $z = \varphi(x, y)$, причём функция φ определена для точек выпуклой области плоскости xy, в которую проектируется поверхность.

Теорема 1. *Пусть F_1 — бесконечная, трижды непрерывно дифференцируемая выпуклая поверхность с положительной гауссовой кривизной; $\psi(h)$ — полная кривизна той части поверхности F_1, которая находится под плоскостью $z = h > 0$; $l(h)$ — длина кривой пересечения упомянутой выше плоскости и поверхности. Тогда, если $[2\pi - \psi(h)]\, l(h) \to 0$ при $h \to \infty$, всякая выпуклая трижды непрерывно дифференцируемая поверхность F_2, изометричная F_1, либо равна F_1, либо равна её зеркальному изображению.*

Укажем, что приведённая выше теорема верна при более общих предположениях. Именно, относительно поверхности F_2 заранее можно не делать никаких предположений, кроме выпуклости, а условие трёхкратной дифференцируемости поверхности F_1 можно ослабить до требования только ограниченности удельной кривизны**). Однако дока-

*) Работа печатается в «Матем. сборнике».

**) Выпуклая поверхность называется поверхностью ограниченной удельной кривизны, если для любой области G на поверхности отношение её сферического изображения к площади самой области равномерно ограничено.

зательство теоремы в таких предположениях значительно сложнее и будет помещено вместе с доказательством других теорем однозначной определённости в другом месте.

Доказательству теоремы со всеми подробностями мы предпошлём изложение метода предлагаемого доказательства.

Допустим, теорема неверна, тогда существует поверхность F_2, изометричная F_1, не конгруентная ни F_1, ни её зеркальному изображению. Расположим поверхность F_2 так же, как поверхность F_1, над плоскостью xy. Не ограничивая общности, можно считать, что поверхности F_1 и F_2 одинаково ориентированы. В самом деле, если поверхности F_1 и F_2 противоположно ориентированы, то зеркальным отображением поверхности F_2 в какой-нибудь плоскости можно получить поверхность F_2^*, которая будет изометрична F_1, одинаково с ней ориентирована, но не равна ни F_1, ни её зеркальному изображению.

1. Пусть $r_1(u, v)$ — радиус-вектор произвольной точки поверхности F_1, $r_2^*(u, v)$ — радиус-вектор соответствующей по изометрии точке поверхности F_2^* — зеркального изображения поверхности F_2 в плоскости xy. Интерпретируем вектор-функцию $r(u, v)$, заданную для всех значений u, v равенством

$$r(u, v) = r_1(u, v) + r_2^*(u, v)$$

как поверхность и обозначим её Φ. Допустим, что поверхность Φ регулярна; тогда можно показать, что она имеет в каждой точке не положительную кривизну *).

2. Пусть $\gamma_1(h)$ — кривая пересечения плоскости $z = h$ с поверхностью F_1, $\gamma_2(h)$ — соответствующая по изометрии кривая поверхности F_2, $\sigma_1(h)$ — часть поверхности F_1, которая находится под плоскостью $z = h$. Мы покажем, что кривая $\gamma_2(h)$ находится в полосе между двумя параллельными плоскостями $z = c(h) \pm \varepsilon(h)$, причём $\varepsilon(h) \to 0$ при $h \to \infty$.

3. Из п. 2. следует, что параллельным смещением поверхности F_2 в направлении оси z можно добиться того, что расстояния соответствующих по изометрии точек кривых $\gamma_1(h)$ и $\gamma_2(h)$ от плоскости xy будут отличаться не более, чем на $\varepsilon(h)$. Пусть поверхности F_2 дано именно такое смещение. Обозначим

$$\eta(h) = \sup_{(u,v)\subset\sigma_1(h)} |z_1(u, v) - z_2(u, v)|,$$

где $z_1(u, v)$ и $z_2(u, v)$ — компоненты по оси z векторов $r_1(u, v)$ и $r_2(u, v)$. Могут представиться только два случая:

1) $\eta(h) \to 0$, когда $h \to \infty$;

2) найдутся такие h, что $\eta(h) > \varepsilon(h)$.

4. Покажем, что случай 2) исключается. Обозначим $\Phi(h)$ ту часть поверхности Φ, которая соответствует значениям (u, v), принадлежащим $\sigma_1(h)$. Точки границы поверхности $\Phi(h)$ удалены от плоскости xy на расстояние, не большее $\varepsilon(h)$, но некоторые точки поверхности $\Phi(h)$ удалены от этой плоскости на расстояние $\eta(h) > \varepsilon(h)$. Поэтому на поверхности $\Phi(h)$ найдутся точки с положительной гауссовой кривизной, что противоречит п. 1.

5. Рассмотрим теперь случай 1). Так как $\eta(h) \to 0$ при $h \to \infty$, то параллельным смещением поверхности F_2 в направлении оси z можно добиться того, что соответствующие по изометрии точки поверхностей F_1 и F_2 будут одинаково удалены от плоскости xy. Пусть поверхности

---

*) Заранее предположить регулярность поверхности Φ нельзя. Нарушение регулярности может произойти из-за обращения в нуль $r'_u \times r'_v$.

F_2 дано такое смещение. Проведём через две произвольные точки X_1 и Y_1 поверхности F_1 сечение плоскостью, перпендикулярной к плоскости xy. Полученную при этом кривую, соединяющую точки X_1 и Y_1, обозначим γ_1. По изометрии кривой γ_1 соответствует кривая γ_2 на поверхности F_2, соединяющая точки X_2 и Y_2. Пусть $d\,(X_1, Y_1)$ — пространственное расстояние между точками X_1 и Y_1, $d\,(X_2, Y_2)$ — пространственное расстояние между точками X_2 и Y_2. Развернём проектирующий кривую γ_2 в направлении оси z цилиндр на плоскость; при этом кривая γ_2 перейдёт в кривую, конгруентную γ_1. Отсюда следует, что пространственное расстояние между точками X_1 и Y_1 не меньше пространственного расстояния между соответствующими по изометрии точками X_2 и Y_2, т. е.

$$d\,(X_1, Y_1) \geqslant d\,(X_2, Y_2).$$

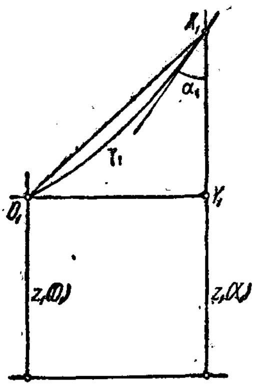
Если теперь поменять ролями поверхности F_1 и F_2, то получим

$$d\,(X_1, Y_1) \leqslant d\,(X_2, Y_2).$$

Следовательно,

$$d\,(X_1, Y_1) = d\,(X_2, Y_2)$$

для любой пары соответствующих по изометрии точек. Но это и значит, что поверхности F_1 и F_2 либо конгруентны, либо одна из них является зеркальным изображением другой.



Фиг. 1.

В действительности мы несколько отклоняемся от намеченной схемы доказательства, но в общем приведённые выше соображения отражают ход доказательства, к которому мы и переходим.

Пусть F_1 и F_2 — две бесконечные выпуклые изометричные поверхности с полной кривизной 2π, расположенные над плоскостью xy. Рассечём поверхность F_1 плоскостью $z = h$, полученную при этом кривую обозначим $\gamma_1(h)$, а соответствующую по изометрии кривую на поверхности F_2 обозначим $\gamma_2(h)$.

Л е м м а 1. *Пусть $\vartheta_2(h)$ — наибольший из углов, образуемых касательными кривой $\gamma_2(h)$ с плоскостью xy. Тогда $\vartheta_2(h) \to 0$, когда $h \to \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксировав на поверхности F_1 точку O_1, соединим её с произвольной точкой X_1 кривой $\gamma_1(h)$ кратчайшей γ_1 на поверхности F_1. По изометрии на поверхности F_2 ей соответствует кратчайшая γ_2, соединяющая точку O_2 с точкой X_2 кривой $\gamma_2(h)$.

Пусть α_1 и α_2 — углы, образованные с осью z касательными кратчайших γ_1 и γ_2 соответственно в точках X_1 и X_2. Опустим из каждой точки кривой γ_1 перпендикуляр на плоскость xy, при этом мы получим цилиндрическую поверхность Z_1. Развернём поверхность Z_1 на плоскость. Как известно[3], кривая γ_1 переходит при этом в выпуклую кривую (фиг. 1). В силу выпуклости кривой γ_1'

$$\cos\alpha_1 \geqslant \frac{X_1Y_1}{X_1O_1}.$$

Но длина отрезка O_1X_1 не больше длины l_1, кратчайшей γ_1. Поэтому

$$\cos\alpha_1 \geqslant \frac{z_1(X_1) - z_1(O_1)}{l_1}.$$

Так как кривая γ_1 является кратчайшей, то её длина

$$l_1 < z_1(X_1) + z_1(O_1) + l\,(h).$$

Отсюда

$$\cos\alpha_1 > \frac{l_1 - 2z_1(O_1) - l(h)}{l_1}.$$

При $h \to \infty$ $l_1 \to \infty$, $\frac{l(h)}{l_1} \to 0$. Поэтому $\alpha_1 < \varepsilon_1$, причём ε_1 как угодно мало, если h достаточно велико. Отсюда следует, что угол, образованный кривыми $\gamma_1(h)$ и γ_1 в точке X_1, отличается от $\frac{\pi}{2}$ меньше, чем на ε_1.

Рассуждая дословно так же относительно кратчайшей γ_2, заключаем, что угол α_2, образованный касательной к ней в точке X_2 и осью z, не превосходит ε_2, причём ε_2 как угодно мало, если достаточно велико h.

Так как углы, образованные кривыми $\gamma_1(h)$ и γ_1, $\gamma_2(h)$ и γ_2 соответственно в точках X_1 и X_2, в силу изометрии поверхностей F_1 и F_2 равны, то угол, образуемый касательной к кривой $\gamma_2(h)$ в точке X_2 с плоскостью xy, не больше $\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ и, следовательно, мал, если достаточно велико h. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть F_1 — бесконечная выпуклая поверхность, удовлетворяющая условиям теоремы 1; F_2 — выпуклая поверхность, изометричная F_1, расположенная над плоскостью xy; $z_2(X_2)$ и $z_2(Y_2)$ — расстояния от плоскости xy точек X_2 и Y_2 кривой $\gamma_2(h)$. Тогда*

$$|z_2(X_2) - z_2(Y_2)| < \varepsilon(h),$$

причём $\varepsilon(h) \to 0$, когда $h \to \infty$.

Доказательство. Опустим из каждой точки кривой $\gamma_2(h)$ перпендикуляр на плоскость xy. При этом мы получим цилиндрическую поверхность Z_2. Обозначим s — дугу вдоль кривой $\gamma_2(h)$, приняв за начало отсчёта наиболее удалённую точку этой кривой от плоскости xy; $\varkappa_2(s)$ — кривизна кривой $\gamma_2(h)$ в точке, соответствующей дуге s, $\varkappa_2'(s)$ — геодезическая кривизна $\gamma_2(h)$ в этой точке на поверхности F_2, мы её считаем положительной; $\varkappa_2''(s)$ — геодезическая кривизна кривой $\gamma_2(h)$ на цилиндре Z_2, мы будем считать её положительной, если кривая в этой точке обращена вогнутостью к Z_2. Обозначим $\sigma_2(h)$ область поверхности F_2, ограниченную кривой $\gamma_2(h)$. Проведём в произвольной точке s кривой $\gamma_2(h)$ касательную полуплоскость Π_2' к поверхности F_2 со стороны области $\sigma_2(h)$. Так как $\varkappa_2'(s) > 0$, то угол, образуемый главной нормалью кривой $\gamma_2(h)$ и построенной полуплоскостью, меньше $\frac{\pi}{2}$. Проведём касательную полуплоскость Π_2'' в точке s кривой $\gamma_2(h)$ к цилиндру Z_2 в сторону Z_2.

Так как при достаточно большом h угол, образуемый полуплоскостью Π_2' с плоскостью xy, близок к $\frac{\pi}{2}$, то из леммы 1 следует, что если h достаточно велико, угол, образуемый полуплоскостями Π_2' и Π_2'', мал. Поэтому угол β_2'', образуемый главной нормалью $n_2(s)$ кривой $\gamma_2(h)$ и полуплоскостью Π_2'', больше угла β_2', образуемого полуплоскостью Π_2' и упомянутой главной нормалью, но меньше π. Так как

$$\varkappa_2' = \varkappa_2 \cos\beta_2', \quad \varkappa_2'' = \varkappa_2 \cos\beta_2''$$

и

$$0 < \beta_2' < \beta_2'' < \pi, \quad \text{то } \varkappa_2'' < \varkappa_2'.$$

Обозначим $\delta(s)$ угол, образуемый единичным касательным вектором кривой $\gamma_2(h)$ и плоскостью xy в функции дуги s этой кривой. Имеем

$$\delta(s) = \int_0^s \varkappa_2''(s)\,ds < \int_0^{l(h)} \varkappa_2'(s)\,ds.$$

По теореме Гаусса-Боннэ, применённой к области $\sigma_2(h)$, получаем

$$\int_0^{l(h)} \varkappa_2'(s)\,ds + \psi(h) = 2\pi,$$

где $\psi(h)$ — кривизна области $\sigma_2(h)$ поверхности F_2, или, что то же самое, кривизна части поверхности F_1, которая находится под плоскостью $z=h$. По условию теоремы 1 $2\pi - \psi(h)$ мало, если достаточно велико h. Поэтому

$$z_2(0) - z_2(s) =$$

$$= \int_0^s \sin\delta(s)\,ds \leqslant \int_0^s \delta(s)\,ds < \int_0^s [2\pi - \psi(h)]\,ds < l(h)\,[2\pi - \psi(h)].$$

Отсюда для любой пары точек s_1 и s_2 кривой $\gamma_2(h)$ получаем

$$|z_2(s_1) - z_2(s_2)| < 2l(h)\,[2\pi - \psi(h)];$$

но по предположению $l(h)\,[2\pi - \psi(h)] \to 0$ при $h \to \infty$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Пусть F — поверхность с положительной всюду гауссовой кривизной; $z = z(x, y)$ — уравнение поверхности F в прямоугольных декартовых координатах; τ — поле бесконечно малого изгибания поверхности F; $\xi(x, y)$, $\eta(x, y)$, $\zeta(x, y)$ — компоненты этого поля по осям x, y и z. Тогда поверхность, уравнение которой $z = \zeta(x, y)$, имеет в каждой точке неположительную гауссову кривизну.*

Доказательство. Так как τ — поле бесконечно малого изгибания поверхности F, то

$$d\boldsymbol{r}\,d\tau = 0,$$

где $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор поверхности F. Это уравнение эквивалентно следующей системе:

$$\xi_x + z_x\zeta_x = 0; \quad \eta_y + z_y\zeta_y = 0;$$
$$\xi_y + \eta_x + z_x\zeta_y + z_y\zeta_x = 0.$$

Исключая из этой системы функции $\xi(x, y)$ и $\eta(x, y)$, получаем для функции $\zeta(x, y)$ следующее уравнение:

$$t\zeta_{xx} - 2s\zeta_{xy} + r\zeta_{yy} = 0, \tag{*}$$

где r, s, t — общепринятые обозначения для вторых производных функции $z(x, y)$.

Так как поверхность F имеет в каждой точке положительную кривизну и, следовательно, $rt - s^2 > 0$, то, как известно, из уравнения (*) следует

$$\zeta_{xx}\zeta_{yy} - \zeta_{xy}^2 \leqslant 0,$$

но это и значит, что поверхность, уравнение которой $z = \zeta(x, y)$, имеет неположительную кривизну. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть F_1 и F_2 — две бесконечные, изометричные, одинаково ориентированные выпуклые поверхности, расположенные над плоскостью xy; $z_1(X)$ — расстояние от плоскости xy произвольной точки X поверхности F_1; $z_2(X)$ — расстояние от плоскости xy соответствующей по изометрии точки поверхности F_2,*

$$m = \sup_{z_1(X) \leqslant h} |z_1(X) - z_2(X)|.$$

Найдётся такая точка X, *что* $z_1(X)=h$, а

$$|z_1(X)-z_2(X)|=m.$$

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно. Тогда для всех точек X, для которых $z_1(X)=h$, $|z_1(X)-z_2(X)|<m$. Не ограничивая общности, можно считать, что для некоторых точек X $z_1(X)-z_2(X)=m$.

Обозначим M_1 множество точек X поверхности F_1, для которых $z_1(X)-z_2(X)=m$, M_2 — соответствующее по изометрии множество поверхности F_2. Мы будем различать два случая:

1. Множество M_1 состоит только из одной точки X_1, в которой касательная плоскость к поверхности F_1 параллельна плоскости xy.

2. Множество M_1 содержит точки, в которых касательные плоскости не параллельны плоскости xy.

Рассмотрим сначала первый случай. Имеем

$$dz_1(X_1)=0,\ d[z_1(X_1)-z_2(X_1)]=0.$$

Отсюда $dz_2(X_1)=0$. Следовательно, касательная плоскость к поверхности F_2 в точке X_2, соответствующей по изометрии точке X_1, тоже параллельна *плоскости* xy. *Поворотом около оси* z *и параллельным переносом* совместим поверхности F_1 и F_2 точками X_1 и X_2 и соответствующими по изометрии направлениями в этих точках.

Рассмотрим поверхность F, векторное уравнение которой для X, близких X_1,

$$r(X)=r_1(X)+r_2(X),$$

где $r_1(X)$ — радиус-вектор произвольной точки X поверхности F_1, а $r_2(X)$ — радиус-вектор соответствующей по изометрии точки поверхности F_2. Поверхность F в точках, соответствующих X, близким к X_1, имеет положительную гауссову кривизну*). Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что векторное поле $\tau(X)=r_1(X)-r_2(X)$ является полем бесконечно-малого изгибания поверхности F. Действительно,

$$dr(X)\,d\tau(X)=d[r_1(X)+r_2(X)]\,d[r_1(X)-r_2(X)]=dr_1^2(X)-dr_2^2(X)=0$$

в силу изометрии поверхностей F_1 и F_2.

Из леммы 3 следует, что поверхность Φ, координаты точек которой

$$x=\frac{x_1(X)+x_2(X)}{2},\quad y=\frac{y_1(X)+y_2(X)}{2},\quad z=\frac{z_1(X)-z_2(X)}{2},$$

имеет неположительную кривизну. Пусть ω_ε — множество точек поверхности F_1, удалённых от X_1 на расстояние, не большее ε, Φ_ε — поверхность, заданная приведённой выше системой равенств при $X\subset\omega_\varepsilon$.

Так как X_1 — единственная точка, для которой $z_1(X)-z_2(X)=0$, то край поверхности Φ_ε находится под плоскостью xy. Поэтому можно провести плоскость Π, параллельную xy, между плоскостью xy и краем поверхности Φ_ε.

Сместим параболоид $x^2+y^2+z=0$ в направлении положительных z настолько, чтобы вся поверхность Φ_ε оказалась внутри параболоида. Будем теперь прижимать аффинно параболоид к плоскости Π. При этом, так как край поверхности Φ_ε находится под плоскостью Π, в некоторый момент параболоид коснётся поверхности Φ_ε. Но в точке касания поверхность Φ_ε имеет положительную кривизну. Мы пришли к противоречию.

*) Это следует хотя бы из того, что поверхности F_1 и F_2 в точках X_1 и X_2 имеют положительную кривизну, обе поверхности одинаково ориентированы и соответствующие по изометрии направления в этих точках совпадают.

Рассмотрим теперь второй случай. Итак, пусть множество M_1 содержит точки, в которых касательные плоскости не параллельны плоскости xy. Пусть X_1 — наиболее удалённая от плоскости xy точка множества M_1. Очевидно, касательная плоскость в точке X_1 не параллельна плоскости xy. Рассечём поверхность F_1 плоскостью Π_1, параллельной плоскости xy, проходящей через точку X_1, поверхность F_2 рассечём плоскостью Π_2, параллельной плоскости xy, проходящей через точку X_2 множества M_2, соответствующую по изометрии X_1. Множество M_1 не содержит точек, лежащих выше плоскости Π_1, по построению. Покажем, что множество M_2 не имеет точек, лежащих выше плоскости Π_2. В самом деле, если бы точка Y_2 множества M_2 лежала выше плоскости Π_2, то соответствующая ей точка Y_1 множества M_1 должна лежать выше плоскости Π_1, так как $z_1(Y_1) - z_2(Y_1) = m$; но это невозможно.

Итак, все точки множества M_2 лежат не выше плоскости Π_2.

В точке X_1 имеем

$$d[z_1(X) - z_2(X)] = dz_1(X) - dz_2(X) = 0.$$

Отсюда следует, что в точках X_1 и X_2 соответствующие по изометрии направления поверхностей F_1 и F_2 образуют с плоскостью xy одинаковые углы; поэтому поворотом около оси z и параллельным переносом можно расположить поверхности F_1 и F_2 так, что точки X_1 и X_2 будут совпадать с началом координат O, соответствующие по изометрии направления в точке O совпадут, и части $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$ поверхностей F_1 и F_2, которые отрезаются плоскостями Π_1 и Π_2, будут находиться в полупространстве $x \leqslant 0$. Расположим поверхности F_1 и F_2 именно таким образом. Обозначим $\overline{M}$ минимальное выпуклое множество точек плоскости xy, содержащее проекции поверхностей $\overline{F}_1$ и $\overline{F}_2$.

После этого, так же как и в первом случае, вводим в рассмотрение поверхность Φ_ε. Эта поверхность не имеет точек, лежащих выше плоскости xy, но есть точки, лежащие в этой плоскости, например, начало координат. Плоскость xy является касательной плоскостью поверхности Φ_ε. Те точки поверхности Φ_ε, которые лежат в плоскости xy, принадлежат множеству $\overline{M}$. В самом деле, если $z_1(X) - z_2(X) = 0$, то $X \subset M_1$, соответствующая X по изометрии точка принадлежит M_2. Так как $M_1 \subset F_1$ и $M_2 \subset \overline{F}_2$, точка с координатами

$$x = \frac{1}{2}[x_1(X) + x_2(X)], \quad y = \frac{1}{2}[y_1(X) + y_2(X)]$$

принадлежит $\overline{M}$. Отсюда следует, что та часть края поверхности Φ_ε, которая проектируется на плоскость xy вне $\overline{M}$, лежит ниже плоскости xy. Проведём в плоскости xy прямую g, параллельную оси y, со стороны $x < 0$. Прямая g отрезает от области $\overline{M}$ сегмент σ, который стягивается к точке O, когда прямая g приближается к оси y. Выбрав достаточно малым число ε, проведём прямую g настолько близко к оси y, чтобы сегмент σ охватывался проекцией края поверхности Φ_ε на плоскость xy. Проведём теперь через прямую g плоскость Π, образующую малый угол α с плоскостью xy, так, чтобы начало координат было над плоскостью Π. Если угол α взять достаточно малым, то весь край поверхности Φ_ε будет находиться под плоскостью Π. После этого, так же как и в первом случае, показываем, что на поверхности Φ_ε есть точка с положительной гауссовой кривизной, а это невозможно.

Лемма 4 доказана полностью.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. В силу леммы 2 параллельным переносом поверхности F_2 можно добиться того, что если $z_1(X) = h$,

$|z_1(X)-z_2(X)|\leqslant\varepsilon(h)$, причём $\varepsilon(h)$ как угодно мало, если достаточно велико h. Согласно лемме 4, если при $z_1(X)=h$

$$|z_1(X)-z_2(X)|\leqslant\varepsilon(h),$$

то при $z_1(X)<h$ также

$$|z_1(X)-z_2(X)|\leqslant\varepsilon(h).$$

Так как $\varepsilon(h)\to 0$ при $h\to\infty$, то параллельным сдвигом поверхности F_2 можно добиться того, что для всех X будет

$$z_1(X)-z_2(X)=0.$$

Итак, можно считать, что соответствующие по изометрии точки поверхностей F_1 и F_2 одинаково удалены от плоскости xy.

Проведём через две произвольные точки P_1 и Q_1 поверхности F_1 сечение плоскостью, перпендикулярной к плоскости xy. В сечении получим плоскую кривую γ_1, соединяющую точки P_1 и Q_1. По изометрии на поверхности F_2 кривой γ_1 соответствует кривая γ_2, соединяющая точки P_2 и Q_2. Проведём через кривую γ_2 цилиндрическую поверхность Z с образующими, параллельными оси z. Так как поверхности F_1 и F_2 изометричны и $z_1(X)=z_2(X)$ при всех X, то при развёртывании цилиндра Z на плоскость кривая γ_2 перейдёт в кривую, конгруентную γ_1. Отсюда следует, что пространственное расстояние между точками P_2 и Q_2 не больше пространственного расстояния между точками P_1 и Q_1. Поменяв ролями поверхности F_1 и F_2, заключаем, что пространственное расстояние между точками P_2 и Q_2 не меньше пространственного расстояния между точками P_1 и Q_1. Так как точки P_1 и Q_1 взяты произвольно, то поверхности F_1 и F_2 либо конгруентны, либо одна из них является зеркальным изображением другой.

Теорема доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. С. Э. Кон-Фоссен, Изгибание поверхностей в целом, «Успехи матем. наук», 1936, вып. 1.
2. С. П. Оловянишников, «Матем. сборник» 1946, т. 18 (60), № 3.
3. И. М. Либерман, ДАН, 1941, т. 32, № 5.