ЗАПИСКИ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА
ХАРЬКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА им. А. М. ГОРЬКОГО
И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXVIII. Серия 4 1961

О ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВОЙ ФУНКЦИИ МЁБИУСА

Э. М. Жмудь

В 1949 г. в работе [1] С. Дельсартом был построен теоретико-групповой аналог арифметической функции Мёбиуса. Эта функция, аргументом которой является конечная группа, была определена Дельсартом, однако, лишь на абелевых группах*.

Автором настоящей статьи в работе [2] идеи Дельсарта были перенесены на случай неабелевых конечных групп. Но в отличие от работы [1], где строится только одна функция Мёбиуса, в [2] для каждой конечной группы G строится своя функция Мёбиуса, определенная на некотором множестве E_G конечных групп, связанном с группой G. Кроме теоретико-групповой функции Мёбиуса, в [2] рассматриваются также некоторые другие функции, являющиеся аналогами теоретико-числовой функции Эйлера. При этом обнаруживается связь между указанными функциями и теорией изоморфных представлений конечных групп, позволяющая придать этой теории особенно простую и естественную форму.

Небольшой объем статьи [2], однако, явился причиной того, что целый ряд результатов приведен в ней либо с неполными доказательствами, либо же вовсе без доказательств.

В настоящей работе дается развернутое изложение результатов статьи [2], дополненное некоторыми результатами, не содержащимися в последней.

В первом параграфе работы изучается особая алгебра D_G, связанная с заданной конечной группой G, названная автором алгеброй Дельсарта группы G. D_G представляет собой алгебру функций заданных на некотором зависящем от G семействе E_G групп, имеющих общую область операторов Ω. Результаты, полученные в первом параграфе, используются во втором параграфе для построения теоретико-групповой функции Мёбиуса. В третьем параграфе вводятся и изучаются теоретико-групповые функции Эйлера и их обобщения. Четвертый параграф посвящен приложениям теоретико-групповых функций к теории изоморфных линейных представлений конечных групп. Здесь получены новые доказательства основных теорем этой теории (результаты Вайснера, Шода, Кохендорффера, Тазава, Гашюца и др.)

Кроме того, приведены новые доказательства ряда результатов, полученных автором в работах [3] и [4]. В частности, сильно упрощен вывод явных выражений для функций, рассмотренных в § 4 статьи [3]**.

---

* В работе [1] теоретико-групповая функция Мёбиуса используется для подсчета числа подгрупп конечной абелевой группы, обладающих заданной системой инвариантов.

** Другие приложения теоретико-групповой функции Мёбиуса имеются в статье [5].

§ 1. Алгебра Дельсарта конечной группы

1. Пусть $\boldsymbol{G}$ — конечная группа с областью операторов Ω, порождающей все внутренние автоморфизмы группы $\boldsymbol{G}$. Таким образом, все допустимые подгруппы группы $\boldsymbol{G}$ являются ее нормальными делителями.

Группа $\boldsymbol{G}$ порождает целое семейство $E_{\boldsymbol{G}}$ групп с общей областью операторов Ω. В E_G входят сама группа $\boldsymbol{G}$ и все ее допустимые подгруппы $\boldsymbol{H}$, все фактор-группы $\boldsymbol{G}/\boldsymbol{H}$, все допустимые подгруппы таких фактор-групп, а также фактор-группы в этих фактор-группах и т. д. Группы, входящие в E_G, мы будем называть Ω-группами и обозначать малыми латинскими буквами. В виде исключения мы, однако, группу $\boldsymbol{G}$ и ее допустимые подгруппы будем обозначать большими латинскими буквами.

Легко видеть, что среди автоморфизмов, порождаемых в Ω-группе $\boldsymbol{x}$ областью операторов Ω, находятся все внутренние автоморфизмы этой группы. Поэтому допустимые подгруппы группы $\boldsymbol{x}$ являются ее нормальными делителями. По определению множества E_G каждая допустимая подгруппа Ω-группы $\boldsymbol{x}$ также принадлежит к E_G. Обратно, если $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in E_G$ и $\boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{x}$, то $\boldsymbol{y}$ — допустимая подгруппа группы $\boldsymbol{x}$.

Пользуясь обозначением Дельсарта, мы в последнем случае вместо $\boldsymbol{y} \subseteq \boldsymbol{x}$ будем писать $\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{x}$. Для фактор-группы группы $\boldsymbol{x}$ по допустимой подгруппе $\boldsymbol{y}$ будем применять дельсартовское обозначение $\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}$.

Пусть $\boldsymbol{x} \in E_G$. Через $E_{\boldsymbol{x}}$ обозначим множество Ω-групп, которое строится, исходя из группы $\boldsymbol{x}$, подобно тому, как множество E_G строилось, исходя из группы $\boldsymbol{G}$. Очевидно, $E_{\boldsymbol{x}} \subseteq E_G$.

Две Ω-группы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ будем относить к одному и тому же типу, если они операторно изоморфны ($\boldsymbol{x} \cong \boldsymbol{y}$). Так как каждая Ω-группа операторно изоморфна с некоторой фактор-группой $\boldsymbol{H}_1/\boldsymbol{H}_2$, где $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ — допустимые подгруппы группы $\boldsymbol{G}$, то множество E_G распадается на конечное число t_G типов Ω-групп: t_G равно числу типов, к которым относятся все возможные фактор-группы $\boldsymbol{H}_1/\boldsymbol{H}_2$ образованные допустимыми подгруппами группы $\boldsymbol{G}$.

Множество всех типов Ω-групп, порождаемых группой $\boldsymbol{G}$, обозначим через $\boldsymbol{T}_G$; тип, к которому относится единичная подгруппа группы $\boldsymbol{G}$, — через I.

2. Пусть $f(\boldsymbol{x})$ — функция, определенная на множестве E_G и удовлетворяющая следующим условиям:

1) Область значений функции $f(\boldsymbol{x})$ содержится в некотором поле P нулевой характеристики.

2) Если $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ операторно изоморфные Ω-группы, то $f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y})$.

Таким образом, $f(\boldsymbol{x})$ является, по существу, функцией типа A, к которому относится группа $\boldsymbol{x}$. Мы определим $f(A)$ равенством

$$f(A) = f(\boldsymbol{x}),$$

где $\boldsymbol{x}$ — любая группа типа A.

Множество всех функций $f(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющих условиям 1) и 2), обозначим через D_G. Определяя обычным образом операции сложения функций и их умножения на элементы поля P, мы превратим D_G в линейное пространство над полем P. Это пространство имеет размерность t_G, а базис его образуют функции

$$e_A(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \boldsymbol{x} \in A \\ 0, & \text{если } \boldsymbol{x} \bar{\in} A \end{cases}, \tag{1. 1}$$

где A пробегает множество $\boldsymbol{T}_G$ типов Ω-групп. Если $f \in D_G$, то, очевидно,

$$f = \sum_{A \in T_G} f(A) e_A. \tag{2. 1}$$

Определим теперь в D_G умножение функций путем введения операции «свертывания»: если f, $g \in D_G$, $\boldsymbol{x} \in E_G$, то

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = \sum_{d/x} f(d)\, g\left(\frac{x}{d}\right). \tag{3.1}$$

Сумма в правой части (3. 1) распространена на множество всех допустимых подгрупп d группы $\boldsymbol{x}$.

Легко видеть, что определенная таким образом функция $f * g$ принадлежит к множеству D_G. Непосредственно проверяется, что операция свертывания подчиняется ассоциативному закону. Тем самым пространство D_G превращается в ассоциативную алгебру ранга t_G над полем P. Эту алгебру мы будем называть алгеброй Дельсарта группы G*. Алгебра D_G имеет единицу e:

$$e(\boldsymbol{x}) = e_I(\boldsymbol{x}) = \left\{\begin{matrix} 1, & \text{если } \boldsymbol{x} \in I \\ 0, & \text{если } \boldsymbol{x} \overline{\in} I \end{matrix}\right\}. \tag{4.1}$$

Пусть $f \in D_G$. Положим

$$|f| = f(I). \tag{5.1}$$

Если f, $g \in D_G$, $\lambda \in P$, то, как легко видеть,

$$\left\{\begin{matrix} |\lambda f| = \lambda |f| \\ |f + g| = |f| + |g| \\ |f * g| = |f| \cdot |g| \end{matrix}\right\} \tag{6.1}$$

Кроме того,

$$|e| = 1. \tag{7.1}$$

Теорема 1. *Элемент f алгебры D_G тогда и только тогда является нильпотентным, если $|f| = 0$.*

Доказательство. 1) Если f — нильпотентный элемент, то для некоторого натурального m $f^m = 0$ (степень понимается в смысле свертывания). В силу (6. 1) имеем

$$|f|^m = |f^m| = 0,$$

откуда и вытекает, что $|f| = 0$.

2) Пусть $s(f)$ — след элемента f в регулярном представлении алгебры D_G. Тогда

$$s(f) = t_G |f|. \tag{8.1}$$

Действительно, если $A \in T_G$, $h_A = f * e_A$, то в силу (2. 1)

$$f * e_A = \sum_{B \in T_G} h_A(B)\, e_B \tag{9.1}$$

Поэтому элементу f отвечает в регулярном представлении алгебры D_G матрица $\| h_A(B) \|$ порядка t_G (здесь A и B играют роль индексов, определяющих соответственно строку и колонну, на пересечении которых находится элемент $h_A(B)$ матрицы). След этой матрицы равен

$$s(f) = \sum_{A \in T_G} h_A(A). \tag{10.1}$$

---

* Понятие алгебры Дельсарта заданной конечной группы было введено автором настоящей статьи в работе [2]. Самим Дельсартом рассматривалась алгебра бесконечного ранга функций, определенных на всех абелевых группах. Для некоммутативных групп такую алгебру построить не удается, ввиду чего приходится для каждой фиксированной конечной группы G строить свою «локальную» алгебру D_G.

Пусть $x \in A$, $d \mid x$. Замечая, что $\frac{x}{d} \in A$ лишь в случае, если $d = 1_x$ (1_x — единичная подгруппа группы x), и учитывая равенства $f(1_x) = |f|$, $e_A(x) = e_A(A) = 1$, получаем

$$h_A(A) = (f * e_A)(x) = \sum_{d \mid x} f(d)\, e_A\left(\frac{x}{d}\right) = f(1_x)\, e_A(x) = |f|.$$

Таким образом,

$$h_A(A) = |f|,$$

откуда, в силу (10. 1), вытекает соотношение (8. 1).

Из (8, 1) и (6, 1) вытекает, в частности,

$$s(f^m) = t_G |f|^m.$$

Поэтому, если $|f| = 0$, то $s(f^m) = 0$ для любого натурального m. Так как характеристика основного поля P равна нулю, то отсюда вытекает нильпотентность элемента f. При этом, так как алгебра D_G содержит единицу, то

$$f^{t_G} = 0. \tag{11.1}$$

Теорема доказана.

Приведем еще одно доказательство теоремы 1, основывающееся на более элементарных соображениях и уточняющее соотношение (11, 1). Назовем *длиной* Ω-группы x длину композиционного ряда ее допустимых подгрупп. Обозначим через $E_G^{(l)}$ множество всех Ω-групп, длина которых не превосходит целого числа $l \geqslant 0$. В частности, $E_G^{(0)}$ — множество всех Ω-групп типа I (т. е. множество всех единичных Ω- групп), $E_G^{(1)}$ — множество всех Ω-простых Ω-групп (т. е. Ω-групп, не содержащих нетривиальных допустимых подгрупп). Если l_G — длина группы G, то, очевидно,

$$E_G^{(0)} \subset E_G^{(1)} \subset \ldots \subset E_G^{(l_G)} = E_G.$$

Пусть $f_0, f_1, \ldots, f_{l_G}$ — функции из D_G, удовлетворяющие условию

$$|f_i| = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, l_G). \tag{12.1}$$

Положим

$$f^{(i)} = f_0 * f_1 * \ldots * f_i. \tag{13.1}$$

Так как $|f^{(0)}| = |f_0| = 0$, то

$$f^{(0)}(x) = 0, \text{ если } x \in E_G^{(0)}. \tag{14.1}$$

Далее, в силу (14. 1)

$$f^{(1)}(x) = (f_0 * f_1)(x) = \sum_{d \mid x} f_0(d)\, f_1\left(\frac{x}{d}\right) = 0$$

для каждой группы $x \in E_G^{(1)}$. Применяя метод полной индукции, докажем, что

$$f^{(i)}(x) = 0, \text{ если } x \in E_G^{(i)}. \tag{15.1}$$

Допуская соотношение (15. 1) уже доказанным для некоторого индекса i, получаем для любой группы $x \in E_G^{(i+1)}$

$$f^{(i+1)}(x) = (f^{(i)} * f_{i+1})(x) = \sum_{d \mid x} f^{(i)}(d)\, f_{i+1}\left(\frac{x}{d}\right) = 0. \tag{16.1}$$

Действительно, если $d = x$, то

$$f^{i}(d)\, f_{i+1}\left(\frac{x}{d}\right) = f^{(i)}(x)\, f_{i+1}\left(\frac{x}{x}\right) = f^{(i)}(x)\, |f_{i+1}| = 0.$$

Если же d не совпадает с x, то $d \in E_G^{(i)}$ и, следовательно, в силу индуктивного предположения, $f^{(i)}(d) = 0$. Таким образом, и в этом случае $f^{(i)}(d) f_{i+1}\left(\frac{x}{d}\right) = 0$.

Тем самым справедливость (16. 1) доказана. Вместе с тем доказана справедливость (15. 1) для любого $i = 0, 1, 2, \ldots, l_G$. В частности, полагая $i = l_G$ и замечая, что $E_G^{(l_G)} = E_G$, получаем

$$f^{(l_G)}(x) = 0. \ (x \in E_G)$$

Следовательно,

$$f_0 * f_1 * \ldots * f_{l_G} = 0,$$

каковы бы ни были функции f_i, удовлетворяющие условию $|f_i| = 0$. В частности, если $|f| = 0$, то

$$f^{l_G + 1} = 0. \tag{17.1}$$

Тем самым снова доказана теорема 1.

Покажем, что алгебра D_G содержит такой нильпотентный элемент f, что $f^{l_G} \neq 0$. С этой целью достаточно в качестве f взять функцию равную нулю на I и единице на всех остальных типах. Тогда

$$f^2(x) = \begin{Bmatrix} 0, & \text{если} \quad x \in E_G^{(1)} \\ > 0, & \text{если} \quad x \overline{\in} E_G^{(1)} \end{Bmatrix}.$$

Допустим, уже доказано, что для некоторого $\kappa \leqslant l_G$

$$f^{\kappa}(x) = \begin{Bmatrix} 0, & \text{если} \quad x \in E_G^{(\kappa-1)} \\ > 0, & \text{если} \quad x \overline{\in} E_G^{(\kappa-1)} \end{Bmatrix}. \tag{18.1}$$

Тогда для $x \overline{\in} E_G^{(\kappa)}$

$$f^{\kappa+1}(x) = (f^{\kappa} * f)(x) = \sum_{d|x} f^{\kappa}(d) f\left(\frac{x}{d}\right) > 0. \tag{19.1}$$

Действительно, так как длина группы x равна самое меньшее $\kappa + 1$, то x содержит допустимую подгруппу $\mathbf{d}_0$ длины κ. Но тогда, в силу (18. 1), $f^{\kappa}(d_0) > 0$.

Кроме того, так как $\frac{x}{d_0} \overline{\in} I$ то $f\left(\frac{x}{d_0}\right) = 1$. Следовательно, слагаемое $f^{\kappa}(d_0) f\left(\frac{x}{d_0}\right)$ суммы $\sum_{d|x} f^{\kappa}(d) f\left(\frac{x}{d}\right)$ положительно. Так как все остальные слагаемые этой суммы неотрицательны, то (19. 1) доказано. Тем самым (18. 1) доказано для каждого $\kappa \leqslant l_G$. В частности,

$$f^{l_G}(x) = \begin{Bmatrix} 0, & \text{если} \quad x \in E_G^{(l_G-1)} \\ > 0, & \text{если} \quad x \overline{\in} E_G^{(l_G-1)} \end{Bmatrix}.$$

Ввиду того, что $E_G^{(l_G-1)}$ не совпадает с $E_G^{(l_G)}$, то $f^{l_G} \neq 0$. Именно, $f^{l_G}(G) \neq 0$.

Таким образом, доказано следующее дополнение к теореме 1.

Теорема 2. *Наименьший показатель m, обладающий тем свойством, что для каждого нильпотентного элемента f алгебры D_G имеет место $f^m = 0$, равен $l_G + 1$, где l_G — длина композиционного ряда допустимых подгрупп группы G.*

Приведем теперь ряд результатов, вытекающих из теоремы 1,

Теорема 3. *Радикал W алгебры D_G состоит из всех таких ее элементов f, что $|f| = 0$.*

Доказательство. Если $f \in W$, то f нильпотентен и, следовательно, $|f| = 0$. Если, наоборот, $|f| = 0$, то $|f * g| = |f| \cdot ||g| = 0$ для любого $g \in D_G$. Следовательно элемент $f * g$ нильпотентен для любого $g \in D_G$. Это показывает, что f собственно нильпотентный элемент, откуда и вытекает, что $f \in W$.

Теорема 4. *Если l_G — длина композиционного ряда допустимых подгрупп группы $\boldsymbol{G}$, то для радикала W алгебры D_G имеет место $W^{l_G} \neq 0$, $W^{l_G+1} = 0$.*

Доказательство. Вытекает из теоремы 2 и из второго доказательства теоремы 1.

Теорема 5. *Алгебра D_G разлагается в прямую сумму ее радикала W и поля Pe, изоморфного с основным полем P:*

$$D_G = Pe + W. \tag{20.1}$$

Доказательство. Если $f \in D_G$, то на основании (6.1) и (7.1) $|f - |f|e| = |f| - |f| \cdot |e| = 0$. Следовательно $w = f - |f|e \in W$. Таким образом, $f = |f| \cdot e + w$, где $|f|e \in Pe$, $w \in W$. Это показывает, что $D_G = Pe + W$. Сумма здесь является прямой, так как, очевидно, $Pe \cap W = 0$.

Теорема 6. *Элемент f алгебры D_G тогда и только тогда имеет обратный, если $|f| \neq 0$.*

Доказательство. 1) Если $f * g = e$, то в силу (6.1) и (7.1) $|f| \cdot |g| = 1$, откуда вытекает, что $|f| \neq 0$.

2) Допустим, что $|f| \neq 0$. Пользуясь теоремой 5, представим f в виде

$$f = |f|(e - w)$$

где $w \in W$. Пусть $w^m = 0$ (можно взять, например, $m = l_G + 1$, либо $m = t_G$).

Полагая

$$q = \frac{1}{|f|}(e + w + w^2 + \ldots + w^{m-1})$$

и замечая, что

$$(e - w)(e + w + w^2 + \ldots + w^{m-1}) = (e + w + w^2 + \ldots + w^{m-1})(e - w) = \\ = e - w^m = e,$$

находим

$$f * g = g * f = e.$$

Следовательно, для элемента f существует обратный элемент

$$f^{-1} = \frac{1}{|f|}(e + w + w^2 + \ldots + w^{m-1}),$$

где

$$w = e - \frac{1}{|f|}f,$$

Теорема доказана*.

Выясним теперь условия, при которых алгебра D_G является коммутативной.

Теорема 7. *Алгебра D_G является коммутативной тогда и только тогда, если каждая группа $\boldsymbol{x} \in E_G$ обладает следующим свойством: существует взаимно однозначное отображение α множества R_x допустимых подгрупп группы $\boldsymbol{x}$ на себя такое, что*

1. α является инволюцией, т. е. для каждой подгруппы $\boldsymbol{y} \in R_x$ имеет место $(\boldsymbol{y}^\alpha)^\alpha = \boldsymbol{y}$ ($\boldsymbol{y}^\alpha$ — образ подгруппы $\boldsymbol{y}$ при отображении α).

2. Если $\boldsymbol{y} \in R_x$, то

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}^\alpha} \cong \boldsymbol{y}. \tag{21.1}$$

* Другое доказательство этой теоремы дано в статье [2].

Доказательство. 1) Предположим, что для каждой группы $\boldsymbol{x} \in E_G$ существует отображение α, удовлетворяющее условию 2. Если $f, g \in D_G$, то

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = \sum_{d \mid x} f(d) g\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{d \mid x} f(\boldsymbol{d}^\alpha) g\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}^\alpha}\right) = \sum_{d \mid x} f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}}\right) g(\boldsymbol{d}) = (g * f)(\boldsymbol{x}),$$

откуда вытекает, что $f * g = g * f$. Таким образом, достаточным является уже одно лишь условие 2.

2) Докажем теперь необходимость условий 1 и 2. Пусть $\boldsymbol{x} \in E_G$, A и B — некоторые типы Ω — групп. Обозначим через $R_x(A, B)$ множество всех допустимых подгрупп y группы x, для которых имеет место $\boldsymbol{y} \in A$, $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}} \in B$. Количество элементов множества $R_x(A, B)$ обозначим через $r_x(A, B)$. Множества $R_x(A, B)$ для различных пар типов A, B, очевидно, попарно не пересекаются, объединение же всех этих множеств совпадает с множеством R_x допустимых подгрупп группы $\boldsymbol{x}$.

Если алгебра D_G коммутативна, то, в частности, для любой пары типов A, B имеет место

$$e_A * e_B = e_B * e_A.$$

Таким образом, для любой группы $x \in E_G$ имеет место

$$\sum_{d \mid x} e_A(d)\, e_B\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}}\right) = \sum_{d \mid x} e_B(\boldsymbol{d})\, e_A\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}}\right).$$

Пользуясь (1, 1), отсюда получаем

$$r_x(A, B) = r_x(B, A).$$

Следовательно, между множествами $R_x(A, B)$ и $R_x(B, A)$ можно установить взаимно однозначное соответствие. Если группе $\boldsymbol{y} \in R_x(A, B)$ отвечает в этом соответствии группа $\boldsymbol{y}' \in R_x(B, A)$, положим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}' &= \boldsymbol{y}^\alpha, \\ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y}'^\alpha. \end{aligned} \tag{22.1}$$

При этом в случае пары (A, A), полагаем, например, $\boldsymbol{y}^\alpha = \boldsymbol{y}$. Устанавливая отображение (22.1) для каждой пары типов A, B допустимых подгрупп группы $\boldsymbol{x}$, получим отображение α множества R_x на себя, удовлетворяющее условиям 1) и 2) теоремы 7.

Следствие. *Если Ω-группа* $\boldsymbol{x}$ *вполне приводима (т. е. разлагается в прямое произведение Ω-простых подгрупп), $f, g \in D_G$, то*

$$(f * g)(\boldsymbol{x}) = (g * f)(\boldsymbol{x}), \tag{23.1}$$

т. е. на вполне приводимых Ω-группах функции алгебры D_G коммутируют. Если, в частности, вполне приводима группа $\boldsymbol{G}$, *то алгебра D_G коммутативна.*

Доказательство. Множество R_x допустимых подгрупп вполне приводимой Ω-группы $\boldsymbol{x}$ допускает, как известно, структурные антиавтоморфизмы α, удовлетворяющие условиям 1) и 2) теоремы 7. Следовательно, имеет место соотношение (23.1) (см. первую часть доказательства теоремы 7). Если группа $\boldsymbol{G}$ вполне приводима, то вполне приводимыми являются все группы $\boldsymbol{x} \in E_G$. Поэтому алгебра D_G коммутативна.

§ 2. Теоретико-групповая функция Мёбиуса-Дельсарта

1. Обозначим через u функцию, тождественно равную на E_G единице. Очевидно, $u \in D_G$. Так как $|u| = 1$, то в силу теоремы 5 в D_G имеется элемент, обратный к u. Обозначим этот элемент через μ_D, а соответствующую функцию $\mu_D(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{G})$ назовем функцией Мёбиуса-Дельсарта

группы $\boldsymbol{G}^*$. Поскольку в дальнейшем группа G будет фиксированной, мы будем пользоваться упрощенным обозначением $\mu_D(\boldsymbol{x}|G) = \mu_D(\boldsymbol{x})$. В силу определения функции Мебиуса-Дельсарта

$$\mu_D * u = u * \mu_D = e$$

или

$$\sum_{d|x} \mu_D(\boldsymbol{d}) = \sum_{d|x} \mu_D\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } \boldsymbol{x} \in I \\ 0, & \text{если } \boldsymbol{x} \bar{\in} I \end{cases}. \tag{1.2}$$

Если $f \in D_G$, $g = f * u$, то $f = g * \mu_D$. Таким образом, получается теоретико-групповой аналог арифметической формулы обращения Дедекинда: если для всех $\boldsymbol{x} \in E_G$

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{d|x} f(\boldsymbol{d}), \tag{2'.2}$$

то

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{d|x} g(\boldsymbol{d})\, \mu_D\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}}\right). \tag{2''.2}$$

Наряду с (2.2) имеет место «дуальная» формула обращения: если для всех $\boldsymbol{x} \in E_G$

$$g(\boldsymbol{x}) = \sum_{d|x} f\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}}\right), \tag{3'.2}$$

то

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{d|x} g\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}}\right) \mu_D(\boldsymbol{d}). \tag{3''.2}$$

Эти соотношения равносильны вытекающим друг из друга соотношениям $g = u * f$, $f = \mu_D * g$.

Формулы (2.2) и (3.2) мы будем называть *формулами обращения Дедекинда-Дельсарта*.

Ниже (п° 4) будет получено явное выражение для функции $\mu_D(\boldsymbol{x}\,|\,\boldsymbol{G})$. Изложим необходимые для решения этой задачи сведения об Ω-простых и о вполне приводимых Ω-группах.

2. В первом параграфе Ω-простые Ω-группы были определены, как Ω-группы, не содержащие нетривиальных допустимых подгрупп. Отсюда вытекает, что Ω-простые группы не имеют нетривиальных характеристических подгрупп и, следовательно, являются элементарными группами. Абелевы Ω-простые группы являются группами типа $(p, p \ldots)$, где p — простое число. Кольцо эндоморфизмов абелевой Ω-простой группы порядка p^r является конечным полем, содержащим p^g элементов, где g — степень этого поля, относительного простого поля Π характеристики p. Как можно показать, r делится на g.

Вполне приводимая Ω-группа $\boldsymbol{x}$ разлагается в прямое произведение Ω-простых Ω-подгрупп. Число сомножителей в таком разложении назовем *Ω-рангом* группы $\boldsymbol{x}$.

Допустимая подгруппа $\boldsymbol{y}$ Ω-группы $\boldsymbol{x}$ называется *Ω-характеристической*, если подгруппа $\boldsymbol{y}$ инвариантна относительно всех операторных автоморфизмов группы $\boldsymbol{x}$. Вполне приводимая Ω-группа $\boldsymbol{x}$ разлагается, как известно, в прямое произведение своих минимальных Ω-характеристических подгрупп, причем среди сомножителей этого разложения содержатся все

* Введенная только что функция $\mu_D(\boldsymbol{x}\,|\,G)$ отличается от теоретико-групповой функции Мёбиуса, введенной Дельсартом [1], прежде всего в том отношении, что последняя определена на всех конечных абелевых группах, между тем как функция $\mu_D(\boldsymbol{x}|G)$ для каждой конечной группы своя.

минимальные Ω-характеристические подгруппы группы $\boldsymbol{x}$ *. Минимальные Ω-характеристические подгруппы вполне приводимой Ω-группы $\boldsymbol{x}$ характеризуются следующим свойством: две Ω-простые подгруппы группы $\boldsymbol{x}$ операторно изоморфны тогда и только тогда, если они содержатся в одной и той же минимальной Ω-характеристической подгруппе группы $\boldsymbol{x}$.

Обозначим через M_x множество всех Ω-простых допустимых подгрупп Ω-группы $\boldsymbol{x}$. Разложение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ вполне приводимой Ω-группы $\boldsymbol{x}$ в прямое произведение допустимых подгрупп $\boldsymbol{x}_1$ и $\boldsymbol{x}_2$ назовем р а с щ е п л е н и е м $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \cdot \boldsymbol{x}_2)$, если $M_x = M_{x_1} \cup M_{x_2}$. Назовем вполне приводимую Ω-группу $\boldsymbol{x}$ Ω-э л е м е н т а р н о й, если она не допускает никаких нетривиальных расщеплений**. Вполне приводимая Ω-группа $\boldsymbol{x}$, как можно показать, тогда и только тогда является Ω-элементарной, если все группы множества M_x операторно изоморфны. Ω-элементарные группы характеризуются также следующим свойством: вполне приводимая Ω-группа $\boldsymbol{x}$ тогда и только тогда является Ω-элементарной, если она не содержит нетривиальных Ω-характеристических подгрупп. Минимальные Ω-характеристические подгруппы вполне приводимой Ω-группы $\boldsymbol{x}$ суть ее максимальные Ω-элементарные допустимые подгруппы.

В дальнейшем обнаруживается, что в ряде вопросов существенную роль играют лишь абелевы Ω-элементарные Ω-группы, в то время как роль неабелевых Ω-элементарных Ω-групп весьма незначительна. Это связано, прежде всего, с тем обстоятельством, что неабелевы Ω-элементарные Ω-группы являются Ω-простыми группами.

Абелева Ω-элементарная Ω-группа $\boldsymbol{x}$ является группой типа $(p, p \ldots)$, где p — простое число.

Если $n = \Omega$-ранг абелевой Ω-элементарной группы $\boldsymbol{x}$, p^r порядок входящих в $\boldsymbol{x}$ Ω-простых подгрупп, то порядок группы $\boldsymbol{x}$ равен p^{rn}. Так как все входящие в $\boldsymbol{x}$ Ω-простые подгруппы операторно изоморфны, то изоморфны их поля эндоморфизмов. В частности, все эти поля имеют одну и ту же степень g относительно простого поля Π характеристики p. Числа n, r, p и g мы будем называть Ω-и н в а р и а н т а м и Ω-элементарной группы $\boldsymbol{x}$. Если K — поле эндоморфизмов одной из Ω-простых подгрупп Ω-элементарной группы Ω-ранга n, то как можно показать, множество допустимых подгрупп этой группы структурно изоморфно с множеством подпространств некоторого линейного n-мерного пространства над полем K. Пользуясь этим обстоятельством, можно показать, что количество допустимых подгрупп заданного Ω-ранга ν, содержащихся в абелевой Ω-элементарной группе $\boldsymbol{x}$ с Ω-инвариантами n, p, r и g, равно

$$N_\nu(\boldsymbol{x}) = \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{p^{gn} - p^{g\lambda}}{p^{g\nu} - p^{g\lambda}} \tag{4.2}$$

В заключение отметим, что указанное выше разложение вполне приводимой Ω-группы $\boldsymbol{x}$ в прямое произведение минимальных Ω-характеристических подгрупп является расщеплением***.

3. Введем теперь понятия Ω-цоколя и Ω-антицоколя группы $\boldsymbol{x} \in E_G$:

Ω-ц о к о л е м Ω-группы $\boldsymbol{x}$ назовем композит s_x всех Ω-простых допустимых подгрупп группы $\boldsymbol{x}$; Ω-а н т и ц о к о л е м Ω-группы $\boldsymbol{x}$ назовем фактор-группу $s_x^* = \dfrac{x}{x_0}$ группы $\boldsymbol{x}$ по пересечению $\boldsymbol{x}_0$ всех ее максимальных допустимых подгрупп.

* В статье [2] минимальные Ω-характеристические подгруппы вполне приводимой Ω-группы называются Ω-когерентами этой группы.

** В [2] Ω-элементарные Ω-группы называются н е р а с щ е п л я е м ы м и.

*** Доказательство всех отмеченных выше фактов (в применении к цоколю конечной группы) см. в [3].

Понятия Ω-цоколя и Ω-антицоколя являются, очевидно, дуальными друг другу. Ω-цоколь и Ω-антицоколь вполне приводимы. Для Ω-цоколя это очевидно, а для Ω-антицоколя вытекает из следующего предложения:

Лемма 1. *Группа* $\boldsymbol{x} \in E_G$ *тогда и только тогда является вполне приводимой, если ее максимальные допустимые подгруппы взаимно просты.*

Доказательство. 1) Пусть x — вполне приводимая Ω-группа и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2$ и $\times \ldots \times \boldsymbol{x}_n$ — ее разложение в прямое произведение Ω-простых групп. Подгруппы

$$\boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{x}_1 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_{i-1} \times \boldsymbol{x}_{i+1} \times \ldots \times \boldsymbol{x}_n$$

являются максимальными допустимыми подгруппами группы $\boldsymbol{x}$, так как $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{m}_i} \cong \boldsymbol{x}_i$. Так как, вместе с тем, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \boldsymbol{m}_i = \mathbf{1}_x$, то пересечение всех максимальных допустимых подгрупп группы $\boldsymbol{x}$ совпадает с $\mathbf{1}_x$.

2) Допустим, что максимальные допустимые подгруппы группы $\boldsymbol{x}$ взаимно просты. Тогда в группе $\boldsymbol{x}$ найдется такая система максимальных допустимых подгрупп $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_n$, что

$$\bigcap_{\alpha=1}^{n} \boldsymbol{m}_\alpha = 1_x, \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{x}_i = \bigcap_{\alpha \neq i} \boldsymbol{m}_\alpha \neq 1_x. \ (i = 1, \ldots, n). \tag{6.2}$$

Из (5.2) и (6.2) вытекает: $\boldsymbol{x}_i \bigcap \boldsymbol{m}_i = 1_x$ $(i = 1, \ldots, n)$. Следовательно, в силу максимальности подгрупп $\boldsymbol{m}_i$ имеем

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i \times \boldsymbol{m}_i\,. \ (i = 1, \ldots, n) \tag{7.2}$$

Так как $\boldsymbol{x}_\alpha \subseteq \boldsymbol{m}_i$ $(\alpha \neq i)$, то $\boldsymbol{x}_i \bigcap \prod\limits_{\alpha \neq i} \boldsymbol{x}_\alpha = 1_x$. Поэтому произведение $\prod\limits_{\alpha=1}^{n} \boldsymbol{x}_\alpha$ является прямым. Далее, из (7.2) и максимальности подгрупп $\boldsymbol{m}_i$ вытекает Ω-простота подгрупп $\boldsymbol{x}_i$. Остается показать, что $\prod\limits_{\alpha=1}^{n} \boldsymbol{x}_\alpha = \boldsymbol{x}$. С этой целью заметим, что

$$\bigcap_{\alpha=1}^{i-1} \boldsymbol{m}_\alpha \not\subseteq \boldsymbol{m}_i, \ (i = 2, \ \ldots, \ n) \tag{8.2}$$

Действительно, из $\bigcap\limits_{\alpha=1}^{i-1} \boldsymbol{m}_\alpha \subseteq \boldsymbol{m}_i$ вытекало бы $\bigcap\limits_{\alpha \neq i} \boldsymbol{m}_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha=1}^{n} \boldsymbol{m}_\alpha = 1_x$, что противоречит условию (6.2). Из (8.2) и максимальности подгруппы $\boldsymbol{m}_i$ вытекает $\left(\bigcap\limits_{\alpha=1}^{i-1} \boldsymbol{m}_\alpha\right) \boldsymbol{m}_i = \boldsymbol{x}$. Следовательно,

$$\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{m}_i} \cong \frac{\bigcap\limits_{\alpha=1}^{i-1} \boldsymbol{m}_\alpha}{\bigcap\limits_{\alpha=1}^{i} \boldsymbol{m}_\alpha}. \tag{9.2}$$

Введем для порядка группы $\boldsymbol{y}$ обозначение $[\boldsymbol{y}]$. Полагая

$$A_i = \left[\bigcap_{\alpha=1}^{i} \boldsymbol{m}_\alpha\right], \quad (i = 1 \ldots, n)$$

из (9.2) получаем

$$\left[\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{m}_i}\right] = \frac{A_{i-1}}{A_i}.$$

Так как в силу (7.2) $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{m}_i} \cong \boldsymbol{x}_i$, то

$$[\boldsymbol{x}_i] = \frac{A_{i-1}}{A_i}, \quad (i = 2, \ldots, n)$$

откуда, замечая, что $A_1 = [\boldsymbol{m}_1] = \frac{[\boldsymbol{x}]}{[\boldsymbol{x}_1]}$, $A_n = \left[\bigcap_{\alpha=1}^{n} \boldsymbol{m}_\alpha\right] = 1$, находим

$$[\boldsymbol{x}] = [\boldsymbol{x}_1][\boldsymbol{x}_2]\ldots[\boldsymbol{x}_n].$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \times \boldsymbol{x}_2 \times \ldots \times \boldsymbol{x}_n,$$

чем и доказывается полная приводимость группы $\boldsymbol{x}$.

Из доказанной леммы вытекает полная проводимость Ω-антицоколя любой Ω-группы $\boldsymbol{x}$. Действительно, пересечение всех максимальных допустимых подгрупп группы $\boldsymbol{s}_x^* = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}_0}$, очевидно, совпадает с ее единицей.

В дальнейшем понадобится еще

Лемма 2. *Если $\boldsymbol{d}$ — допустимая подгруппа Ω-группы $\boldsymbol{x}$, то группа $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}}$ тогда и только тогда вполне приводима, если $\boldsymbol{d}$ содержит $\boldsymbol{x}_0$.*

Доказательство. 1) Если $\boldsymbol{d}$ содержит $\boldsymbol{x}_0$, то, очевидно, $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}} \cong \frac{\boldsymbol{s}_x^*}{\boldsymbol{d}^*}$, где $\boldsymbol{d}^* = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{x}_0}$. Полная приводимость группы $\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}}$ поэтому следует из полной проводимости Ω-антицоколя $\boldsymbol{s}_x^*$.

2) Если группа $\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}}$ вполне приводима, то в силу леммы 1 пересечение ее максимальных допустимых подгрупп $\overline{\boldsymbol{m}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{m}}_t$ совпадает с $1_{\overline{x}}$. Если подгруппы $\overline{\boldsymbol{m}}_1, \ldots, \overline{\boldsymbol{m}}_t$ являются в естественном гомоморфизме группы $\boldsymbol{x}$ на $\overline{\boldsymbol{x}}$ образами подгрупп $\boldsymbol{m}_1, \ldots, \boldsymbol{m}_t$ (являющихся, очевидно, максимальными допустимыми подгруппами группы $\boldsymbol{x}$), то $\bigcap_{\alpha=1}^{t} \boldsymbol{m}_\alpha = \boldsymbol{d}$. Следовательно, $\boldsymbol{d}$ содержит $\boldsymbol{x}_0$, что и доказывает лемму.

3. Найдем явное выражение для функции $\mu_D(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{G})$. С этой целью определим на множестве E_G функцию $\Psi(\boldsymbol{x})$ следующим образом:

1) $\Psi(\boldsymbol{x}) = 1$, если $\boldsymbol{x} \in I$,
2) $\Psi(\boldsymbol{x}) = 0$, если группа $\boldsymbol{x}$ не является вполне приводимой,
3) $\Psi(\boldsymbol{x}) = -1$, если $\boldsymbol{x}$ — Ω-простая группа,
4) $\Psi(\boldsymbol{x}) = (-1)^n p^{\frac{n(n-1)}{2}g}$, если $\boldsymbol{x}$ — абелева Ω-элементарная Ω-группа с Ω-инвариантами n, p, r и g*,
5) $\Psi(\boldsymbol{x}) = \Psi(\boldsymbol{x}_1)\Psi(\boldsymbol{x}_2)$, если $\boldsymbol{x}$ вполне приводима, причем $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \circ \boldsymbol{x}_2$.

* Условия 3) и 4) не противоречат друг другу, так как в случае, когда $\boldsymbol{x}$ — абелева Ω-простая группа, для нее $n = 1$ и условие 4 дает $\Psi(x) = -1$.

Покажем, что функция $\Psi(x)$ тождественна с функцией Мёбиуса — Дельсарта группы G. Заметим прежде всего, что $\Psi(x_1) = \Psi(x_2)$, если $x_1 \cong x_2$. Следовательно, $\Psi \in D_G$.

Остается проверить, что функция $\Psi(x)$ удовлетворяет условию

$$\Psi * u = e. \tag{10.2}$$

Полагая $\Theta = \Psi * u$, запишем условие (10.2) в виде

$$\Theta(x) = \begin{Bmatrix} 1, \text{ если } x \in I \\ 0, \text{ если } x \overline{\in} I \end{Bmatrix}. \tag{11.2}$$

С помощью соотношения

$$\Theta(x) = \sum_{d \mid x} \Psi(d), \tag{12.2}$$

пользуясь свойством 2) функции $\Psi(x)$, получаем

$$\Theta(x) = \Theta(s_x), \tag{13.2}$$

где s_x — Ω-цоколь группы x. Так как $x \in I$ тогда и только тогда, если $s_x \in I$, то в силу (13.2) и полной приводимости Ω-цоколя достаточно проверить справедливость соотношения (11.2) для того случая, когда x вполне приводимая группа.

Из свойства 5) функции $\Psi(x)$ и соотношения (12.2) вытекает:

$$\Theta(x) = \Theta(x_1)\,\Theta(x_2), \tag{14.2}$$

если x — вполне приводимая Ω-группа и $x = x_1 \circ x_2$. Действительно, нетрудно показать, что когда d_1 и d_2 независимо друг от друга пробегают множества допустимых подгрупп групп x_1 и x_2, то $d = d_1 \circ d_2$ пробегает множество всех допустимых подгрупп группы x. Поэтому

$$\Theta(x) = \sum_{d_1|x_2,\ d_2|x_2} \Psi(d_1 \circ d_2) = \sum_{d_1|x_1,\ d_2|x_2} \Psi(d_1)\,\Psi(d_2) = \Theta(x_1)\,\Theta(x_2).$$

Из (14.2) вытекает, что справедливость (11.2) для сомножителей x_1 и x_2 влечет за собой справедливость этого соотношения для группы x.

Так как каждая вполне приводимая Ω-группа расщепляется на Ω-элементарные группы, то достаточно установить справедливость соотношения (11.2) для Ω-элементарных групп. Пусть x — Ω-элементарная группа. Так как, в силу свойства 1) функции $\Psi(x)$, для $x \in I$ соотношение (11.2) становится тривиальным, то мы будем считать, что $x \overline{\in} I$. Если группа x не является абелевой, то, как было отмечено в п° 2, она является Ω-простой. Поэтому в силу свойств 1) и 3) функции $\Psi(x)$ имеем:

$$\Theta(x) = \Psi(1_x) + \Psi(x) = 0.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае соотношение (11.2) имеет место. Пусть теперь x — абелева Ω-элементарная группа Ω-ранга $n \geqslant 1$. Тогда, используя свойство 4) функции $\Psi(x)$, получаем

$$\Theta(x) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu}\, p^{\frac{\nu(\nu-1)}{2} g} N_{\nu}(x), \tag{15.2}$$

где $N_{\nu}(x)$ — число допустимых подгрупп группы x, имеющих заданный Ω-ранг ν. Введем в рассмотрение функцию $F_n(v, t)$ переменных v и t:

$$F_n(v, t) = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu}\, v^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}} G_{n;\,\nu}(v)\, t^{\nu}, \tag{16.2}$$

где

$$G_{n,\nu}(v) = \prod_{\lambda=0}^{\nu-1} \frac{v^n - v^\lambda}{v^\nu - v^\lambda}.$$

Полная индукция по n дает

$$F_n(v, t) = \prod_{\nu=0}^{n-1} (1 - v^{\nu} t). \tag{17.2}$$

Замечая, что в силу (4.2)

$$N_\nu(\boldsymbol{x}) = G_{n,\nu}(p^g),$$

из (15.2) — (17.2) получаем

$$\Theta(\boldsymbol{x}) = F_n(p^g, 1) = 0.$$

Тем самым доказательство соотношения (11.2), а потому и (10.2) завершено. Вместе с тем доказано, что $\Psi(\boldsymbol{x}) = \mu_D(\boldsymbol{x} \mid G)$. Таким образом,

$$\mu_D(\boldsymbol{x} \mid G) = \begin{cases} 1, & \text{если } \boldsymbol{x} \in I, \\ 0, & \text{если группа } \boldsymbol{x} \text{ не является вполне приводимой}, \\ -1, & \text{если } \boldsymbol{x} \text{ — } \Omega\text{-простая группа}, \\ (-1)^n p^{\frac{n(n-1)}{2} g}, & \text{если } \boldsymbol{x} \text{ — абелева } \Omega\text{-элементарная с } \Omega\text{-инвариантами } n, p, r \text{ и } g. \end{cases} \tag{18.2}$$

Кроме того,

$$\mu_D(\boldsymbol{x} \mid G) = \mu_D(\boldsymbol{x}_1 \mid G)\, \mu_D(\boldsymbol{x}_2 \mid G), \tag{19.2}$$

если $\boldsymbol{x}$ вполне приводима и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \circ \boldsymbol{x}_2$.

5. Пусть $\boldsymbol{x} \in E_G$, M_x — множество всех Ω-простых подгрупп группы $\boldsymbol{x}$, $T \subseteq M_x$, $\mu(T) = (-1)^t$, где t — число членов системы T (если T пусто, то $\mu(T) = 1$), c_T — композит всех групп системы T (если T пусто, то $c_T = 1_x$). Обозначим, кроме того, через $\hat{E}_G$ множество всех вполне приводимых Ω-групп.

Покажем, что

$$\mu_D(\boldsymbol{x} \mid G) = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{c_T = \boldsymbol{x}} \mu(T), \text{ если } \boldsymbol{x} \in \hat{E}_G \\ 0, \text{ если } \boldsymbol{x} \,\bar{\in}\, \hat{E}_G \end{array} \right\}. \tag{20.2}$$

С этой целью определим на E_G функцию $f(\boldsymbol{x})$ равенством

$$f(\boldsymbol{x}) = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{c_T = \boldsymbol{x}} \mu(T), \text{ если } \boldsymbol{x} \in \hat{E}_G \\ 0, \text{ если } \boldsymbol{x} \,\bar{\in}\, \hat{E}_G \end{array} \right\}.$$

Из определения функции $f(\boldsymbol{x})$ вытекает, что $f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2)$, если $\boldsymbol{x}_1 \cong \boldsymbol{x}_2$. Следовательно, $f \in D_G$. Далее, так как $\boldsymbol{x} \in I$ тогда и только тогда, если $s_x \in I$, то

$$\sum_{d \mid x} f(\boldsymbol{d}) = \sum_{d \mid s_x} \sum_{c_T = d} \mu(T) = \sum_{T \subseteq M_x} \mu(T) = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ если } \boldsymbol{x} \in I \\ 0, \text{ если } \boldsymbol{x} \,\bar{\in}\, I \end{array} \right\}.$$

Поэтому $f * u = e$, откуда вытекает, что $f(\boldsymbol{x}) = \mu_D(\boldsymbol{x} \mid G)$.

Пусть теперь N_x — множество всех максимальных допустимых подгрупп группы $\boldsymbol{x}$, $T \subseteq N_x$, $\mu(T) = (-1)^t$, где t — число членов системы T,

d_T — пересечение всех групп системы T (если T пусто, то $d_T = x$). Имеет место соотношение, дуальное соотношению (20.2):

$$\mu_D(x \mid G) = \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{d_x = 1_x} \mu(T), \text{ если } x \in \hat{E}_G \\ 0, \text{ если } x \,\overline{\in}\, \hat{E}_G \end{array} \right\}. \tag{21.2}$$

Доказательство соотношения (21.2) аналогично доказательству (20.2). При этом используется второе из двух соотношений (1.2), которым удовлетворяет функция $\mu_D(x \mid G)$, а вместо Ω-цоколя появляется Ω-антицоколь группы x.

§ 3. Теоретико-групповые функции Эйлера

1. Как и в § 2.2, через $[y]$ мы будем обозначать порядок Ω-группы y. Пусть k — натуральное число, $x \in E_G$. Функциями Эйлера—Дельсарта k-го порядка и соответственно I и II рода группы G назовем функции

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x \mid G) = \mu_D(x \mid G) * [x]^k = \sum_{d \mid x} \left[\frac{x}{d}\right]^k \mu_D(d \mid G), \tag{1'.3}$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x \mid G) = [x]^k * \mu_D(x \mid G) = \sum_{d \mid x} [d]^k \mu_D\left(\frac{x}{d} \middle| G\right). \tag{1''.3}$$

В дальнейшем в обозначениях этих функций группа G будет, как правило, опускаться.

При $k = 1$ мы будем называть эти функции просто функциями Эйлера-Дельсарта I и II рода группы G:

$$\varphi_{\mathrm{I}}(x) = \varphi_{\mathrm{I}}^{(1)}(x), \quad \varphi_{\mathrm{II}}(x) = \varphi_{\mathrm{II}}^{(1)}(x).$$

Если x — вполне приводимая Ω-группа, то в силу следствия теоремы 7 имеем $[x]^k * \mu_D(x) = \mu_D(x) * [x]^k$. Поэтому на вполне приводимых Ω-группах x эбе функции Эйлера-Дельсарта совпадают, и можно опустить индексы I, II:

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x) = \varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x) = \varphi^{(k)}(x).$$

Функции $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x)$ и $\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x)$ совпадают тождественно, если алгебра D_G коммутативна. Это, например, имеет место тогда, когда группа G абелева либо вполне приводима.

Из формул обращения (2.2) и (3.2) вытекают следующие отношения для функций $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x)$ и $\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x)$:

$$\sum_{d \mid x} \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}\left(\frac{x}{d}\right) = [x]^k, \quad \sum_{d \mid x} \varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(d) = [x]^k. \tag{2.3}$$

2. Найдем явные выражения для функций $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x)$ и $\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x)$. Пусть s_x и s_x^* — Ω-цоколь и Ω-антицоколь группы x. Докажем следующие соотношения:

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x) = \left[\frac{x}{s_x}\right]^k \varphi^{(k)}(s_x), \tag{3'.3}$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x) = \frac{[x]^k}{[s_x^*]^k} \varphi^{(k)}(s_x^*), \tag{3''.3}$$

сводящие изучение функций $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x)$ и $\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x)$ к случаю, когда x — вполне приводимая группа. Соотношение (3'.3) непосредственно вытекает из

(1.3), если заметить, что в силу (18.2) $\mu_D(\boldsymbol{d})$ отлично от нуля лишь при условии, если $\boldsymbol{d} \mid \boldsymbol{s}_x$:

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{d \mid s_x} \left[\frac{x}{d}\right]^k \mu_D(\boldsymbol{d}) = \frac{[x]^k}{[s_x]^k} \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{s}_x) = \frac{[x]^k}{[s_x]^k} \varphi^{(k)}(\boldsymbol{s}_x).$$

Приступая к выводу соотношения (3″.3), перепишем (1″.3) в виде

$$\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{d \mid x}{}' [d]^k \mu_D\left(\frac{x}{d}\right), \tag{4.3}$$

где сумма Σ' распространена на такие допустимые подгруппы $\boldsymbol{d}$ группы $\boldsymbol{x}$, для которых фактор-группа $\frac{x}{d}$ вполне приводима. Пусть, как и в п° 2 второго параграфа, $\boldsymbol{x}_0$ — пересечение всех максимальных допустимых подгрупп группы $\boldsymbol{x}$. В силу леммы 2 (§ 2.2) и (4.3) имеем:

$$\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{d \mid x,\ x_0 \mid d} [\boldsymbol{d}]^k \mu_D\left(\frac{x}{d}\right) = [\boldsymbol{x}_0]^k \sum \left[\frac{d}{x_0}\right]^k \mu_D\left(\frac{\frac{x}{x_0}}{\frac{d}{x_0}}\right) =$$

$$= [\boldsymbol{x}_0]^k \sum_{d^* \mid s_x^*} [d^*]^k \mu_D\left(\frac{s_x^*}{d^*}\right) = \frac{[x]^k}{[s_x^*]^k} \varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(s_x^*) = \frac{[x]^k}{[s_x^*]^k} \varphi^{(k)}(\boldsymbol{s}_x^*).$$

Таким образом, доказано и соотношение (3″.3).

Так как Ω-цоколь и Ω-антицоколь группы $\boldsymbol{x}$ вполне приводимы, то соотношения (3′.3) и (3″.3) сводят изучение функций $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{x})$ и $\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{x})$ к тому случаю, когда группа $\boldsymbol{x}$ вполне приводима. В этом случае, как было указано выше,

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \varphi^{(k)}(\boldsymbol{x}).$$

Теорема 8. *Если $\boldsymbol{x}$ — вполне приводимая Ω-группа, то*

$$\varphi^{(k)}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} [\boldsymbol{x}]^k - 1, \text{ если } \boldsymbol{x} \text{ — } \Omega\text{-простая группа}, & (5'.3) \\ \prod\limits_{\nu=0}^{n-1} (p^{kr} - p^{\nu g}), \text{ если } \boldsymbol{x} \text{ — абелева, } \Omega\text{-элементарная группа} & \\ \qquad \text{с } \Omega\text{-инвариантами } n,\ p,\ r \text{ и } g, & (5''.3) \\ \varphi(\boldsymbol{x}_1)\varphi(\boldsymbol{x}_2), \text{ если } \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 \circ \boldsymbol{x}_2. & (5'''.3) \end{cases}$$

Доказательство 1). Если $\boldsymbol{x}$ — Ω-простая группа, то на основании (1″.3) (или (1′.3)) получаем

$$\varphi^{(k)}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]^k - 1.$$

2) Если $\boldsymbol{x}$ — абелева Ω-элементарная группа с Ω-инвариантами n, p, r и g, то в силу (1′.3) и (18.2)

$$\varphi^{(k)}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]^k \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu p^{\frac{\nu(\nu-1)}{2} g} N_\nu(\boldsymbol{x}) p^{-kr\nu}. \tag{6.3}$$

Замечая, что сумма, стоящая в правой части (6.3), равна $F_n(p^g, p^{-kr})$, где $F_n(v, t)$ — функция, введенная в п° 2 второго параграфа, в силу (17.2) получаем

$$\varphi^{(k)}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{x}]^k \prod_{\nu=0}^{n-1} (1 - p^{\nu g - kr}). \tag{7.3}$$

Учитывая, что $[x] = p^{nr}$, из (7.3) получаем (5″.3).

3) Соотношение (5‴.3) вытекает из (1.3) и замечания, сделанного при выводе соотношения (14.2).

Теорема, таким образом, доказана.

3. Из (5′.1) вытекает, что если x — неабелева Ω-простая группа, то $\varphi^{(k)}(x) \neq 0$. Если x абелева Ω-элементарная группа, то, на основании сказанного в § 2.2, $\frac{kr}{g}$ есть целое число. Соотношение (5″.3) поэтому показывает, что в рассматриваемом случае $\varphi^{(k)}(x) \neq 0$ тогда и только тогда, если $n \leqslant \frac{kr}{g}$.

Наконец, так как произвольная вполне приводимая Ω-группа x допускает расщепление на Ω-элементарные группы (минимальные характеристические подгруппы группы x), то в силу (5‴.3) и сделанных только что замечаний, имеет место

Теорема 9. *Если x вполне приводимая Ω-группа, то $\varphi^{(k)}(x \mid G) \neq 0$ тогда и только тогда, если для каждой абелевой минимальной Ω-характеристической подгруппы группы x имеет место $n \leqslant \frac{kr}{g}$ (n — Ω-ранг минимальной характеристической подгруппы, p^{nr} — ее порядок, g — степень поля эндоморфизмов любой ее Ω-простой допустимой подгруппы).*

Из теоремы 9 и соотношений (3.3), (4.3), пользуясь мультипликативностью функций $\varphi^{(k)}(x)$ (соотношение (5‴.3)) получаем:

Теорема 10. *Если $x \in E_G$, то $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x \mid G) \neq 0$ ($\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x \mid G) \neq 0$) тогда и только тогда, если для каждой абелевой минимальной Ω-характеристической подгруппы Ω-цоколя (соответственно Ω-антицоколя) группы x имеет место $n \leqslant \frac{kr}{g}$ (n, r и g — Ω-инварианты минимальной Ω-характеристической подгруппы).*

4. Функции $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x)$ и $\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x)$ выше были определены соотношениями (1.3). Приведем здесь другие выражения для этих функций, более удобные для их фактического вычисления.

Пусть M_x, N_x, T, $\mu(T)$, G_T и d_T имеют смысл, указанный в § 2.5. Тогда

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x \mid G) = \sum_{T \subseteq M_x} \mu(T) \left[\frac{x}{c_T}\right]^k, \tag{8′.3}$$

$$\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x \mid G) = \sum_{T \subseteq N_x} \mu(T) \, [d_T]^k. \tag{8″.3}$$

Действительно, в силу (20.2) и (3.3)

$$\sum_{T \subseteq M_x} \mu(T) \left[\frac{x}{c_T}\right]^k = \sum_{d \mid s_x} \left[\frac{x}{d}\right]^k \sum_{c_T = d} \mu(T) = \sum_{d \mid s_x} \left[\frac{x}{d}\right]^k \mu_D(d) =$$

$$= \frac{[x]^k}{[s_x]^k} \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(s_x) = \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x).$$

Точно так же в обозначениях § 2.3 имеем:

$$\sum_{T \subseteq N_x} \mu(T) \, [d_T]^k = \sum_{x_0 \mid d} [d]^k \sum_{d_T = d} \mu(T) = [x_0]^k \sum_{d^* \mid s_x^*} [d^*]^k \mu_D\left(\frac{s_x^*}{d^*}\right) =$$

$$= [x_0]^k \varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(s_x^*) = \varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x).$$

Здесь $d^* = \frac{d}{x_0}$ и $s_x^* = \frac{x}{x_0}$ — Ω-антицоколь группы x.

5. В случае, если G — абелева группа, выражения для $\mu_D(x \mid G)$, $\varphi^{(k)}(x \mid G)$ и $\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x \mid G)$ упрощаются. Область операторов Ω можно в этом

случае считать пустой. Ω-элементарные группы превращаются в обычные абелевы элементарные группы. Степень g поля эндоморфизмов Ω-простой группы теперь равна единице. Алгебра D_G становится коммутативной, и поэтому

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{x}\,|\,G) = \varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{x}\,|\,G) = \varphi^{(k)}(\boldsymbol{x}\,|\,G).$$

Значение функции $\mu_D(\boldsymbol{x}\,|\,G)$ на группе $\boldsymbol{x} \in E_G$ теперь уже не зависит от группы $\boldsymbol{G}$ и вполне определяется самой группой $\boldsymbol{x}$. Это дает возможность определить теоретико-групповую функцию Мёбиуса на множестве всех абелевых групп. Таким образом, мы приходим к функции, рассмотренной С. Дельсартом в работе [1].

Подобным образом можно определить на множестве всех абелевых групп и функцию Эйлера. В обозначении полученной таким образом функции группа G уже должна быть опущена по существу.

Из теоремы 10 вытекает, что $\varphi^{(k)}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ тогда и только тогда, если ранги всех силовских подгрупп цоколя $\boldsymbol{s}_x$ группы $\boldsymbol{x}$ не превосходят k. Отсюда, в частности, вытекает, что $\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ тогда и только тогда, если группа $\boldsymbol{x}$ циклическая. При выполнении этого условия $\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = \varphi([\boldsymbol{x}])$, где $\varphi(\ )$ — теоретико-числовая функция Эйлера.

§ 4. Приложения к теории линейных представлений конечных групп

1. Пусть k — натуральное число. Назовем **k-системой** Ω-группы $\boldsymbol{x}$ всякую систему, состоящую из k элементов группы $\boldsymbol{x}$. Множество всех k-систем группы $\boldsymbol{x}$ обозначим через $Q_x^{(k)}$. Через $\boldsymbol{m}_X$ обозначим минимальную из допустимых подгрупп группы $\boldsymbol{x}$, содержащих k-систему $X \in Q_x^{(k)}$. Системы X_1, $X_2 \in Q_x^{(k)}$ будем называть *эквивалентными* ($X_1 \approx X_2$), если $\boldsymbol{m}_{X_1} = \boldsymbol{m}_{X_2}$. Множество $Q_x^{(k)}$, очевидно, распадается на некоторое число классов эквивалентных k-систем *.

Два элемента a и b Ω-группы $\boldsymbol{x}$ будем считать принадлежащими к одному и тому же *Ω-классу*, если существует оператор $\omega \in \Omega$, переводящий a в b (т. е. $b = a^{\omega}$). Очевидно, Ω-группа тогда и только тогда порождается некоторой системой своих Ω-классов, если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{m}_X$, где $X \in Q_x^{(k)}$.

Множество всех Ω-групп, порождаемых k Ω-классами, обозначим через $U_G^{(k)}$. Обозначим, кроме того, через $F_x^{(k)}$ множество всех k-систем $X \in Q_x^{(k)}$, для которых имеет место $\boldsymbol{m}_X = \boldsymbol{x}$, т. е. которые, как мы будем говорить, *определяют группу* $\boldsymbol{x}$. Множество $F_x^{(k)}$ непусто тогда и только тогда, если $\boldsymbol{x} \in U_G^{(k)}$. Число элементов (т. е. систем) в $F_x^{(k)}$ обозначим через $f_x^{(k)}$. Если $\boldsymbol{x} \in U_G^{(k)}$, то $F_x^{(k)}$ представляет собой некоторый класс k-систем и $f_x^{(k)}$ равно порядку этого класса.

Так как из $\boldsymbol{x}_1 \cong \boldsymbol{x}_2$ следует $f_{x_1}^{(k)} = f_{x_2}^{(k)}$, то $f_x^{(k)}$ является функцией из D_G. Из определения этой функции вытекает, что сумма $\sum\limits_{d|x} f_d^{(k)}$ равна количеству $[\boldsymbol{x}]^k$ всех систем $X \in Q_x^{(k)}$:

$$\sum_{d|x} f_d^{(k)} = [\boldsymbol{x}]^k. \tag{1.4}$$

Отсюда с помощью формулы обращения (2.2) получаем

$$f_x^{(k)} = \varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{x}\,|\,G). \tag{2.4}$$

---

* Частный случай введенного здесь понятия класса k-систем рассматривался в работе автора [3].

Таким образом, имеет место

Теорема 11. *$\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{x}|G)=0$, если $\boldsymbol{x}\,\overline{\in}\,U_G^{(k)}$; если же $\boldsymbol{x}\in U_G^{(k)}$, то $\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{x}|G)$ равно порядку класса k-систем, определяющих группу $\boldsymbol{x}$.*

В частности, отсюда вытекает

Теорема 12. *Группа $\boldsymbol{x}\in E_G$ тогда и только тогда порождается k Ω-классами, если $\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{x}|G)\neq 0$.*

Принимая во внимание теорему 10, отсюда получаем:

Теорема 13. *Группа $\boldsymbol{x}\in E_G$ тогда и только тогда порождается k Ω-классами, если Ω-инварианты n, r и g каждой абелевой минимальной Ω-характеристической подгруппы Ω-антицоколя группы $\boldsymbol{x}$ удовлетворяют неравенству $\frac{ng}{r}\leqslant k$.*

2. Пусть P — алгебраически замкнутое поле нулевой характеристики и $\Gamma_{x,1},\ \ldots,\ \Gamma_{x,\rho(x)}$ — полная система представителей классов неприводимых в поле P представлений группы $\boldsymbol{x}$. Обозначим через $\nu_{x,\alpha}$ и $\boldsymbol{j}_{x,\alpha}$ соответственно степень и ядро гомоморфизма представления $\Gamma_{x,\alpha}$. Пусть, далее, $[\alpha]=[\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_k]$, где $1\leqslant\alpha_i\leqslant\rho(x)$ $(i=1,\ \ldots,\ k)$. Положим

$$\nu_{x,[\alpha]}=\prod_{i=1}^{k}\nu_{x,\alpha_i},\tag{3.4}$$

$$\boldsymbol{j}_{x,[\alpha]}=\bigcap_{i=1}^{k}\boldsymbol{j}_{x,\alpha_i}.\tag{4.4}$$

Легко видеть, что $\boldsymbol{j}_{x,[\alpha]}$ — суть ядра гомоморфизмов линейных представлений группы $\boldsymbol{x}$, распадающихся на k неприводимых компонент. Действительно, $\boldsymbol{j}_{x,[\alpha]}$ есть ядро гомоморфизма представления $\Gamma_{x,\alpha_1}+\ldots+\Gamma_{x,\alpha_k}$. Назовем подгруппу $\boldsymbol{y}$ группы $\boldsymbol{x}$ *k-ядром* последней, если для некоторого $[\alpha]$ $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{j}_{x,[\alpha]}$.

Пусть $\boldsymbol{y}$ — произвольная подгруппа группы $\boldsymbol{x}\in E_G$. Обозначим через $\hat{\boldsymbol{y}}$ максимальную допустимую подгруппу группы $\boldsymbol{y}$ (очевидно, $\hat{\boldsymbol{y}}=\bigcap\limits_{\omega\in\Omega}\boldsymbol{y}^{\omega}$). Легко видеть, что если $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ — подгруппы группы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_1\cap\boldsymbol{y}_2$, то $\hat{\boldsymbol{y}}=\hat{\boldsymbol{y}}_1\cap\hat{\boldsymbol{y}}_2$.

Если $\hat{\boldsymbol{y}}=1_x$, то, очевидно, $\boldsymbol{y}$ не содержит ни одной Ω-простой допустимой подгруппы группы $\boldsymbol{x}$. Допустимую подгруппу $\boldsymbol{z}$ группы $\boldsymbol{x}$ будем называть ее *Ω-k-ядром*, если для некоторого $[\alpha]$ $\boldsymbol{z}=\hat{\boldsymbol{j}}$, где $\boldsymbol{j}$ — k-ядро группы $\boldsymbol{x}$. Так как $\hat{\boldsymbol{j}}_{x,[\alpha]}=\bigcap\limits_{i=1}^{k}\hat{\boldsymbol{j}}_{x,\alpha_i}$, то каждое Ω-k-ядро есть пересечение k Ω-1-ядер (последние мы будем называть сокращенно *Ω-ядрами*). Рассмотрим теперь функцию

$$h(x)=\sum_{\hat{j}_{x,[\alpha]}=1x}\nu_{x,[\alpha]}^{2}.\tag{5.4}$$

Так как, очевидно, $h(\boldsymbol{x}_1)=h(\boldsymbol{x}_2)$, если $\boldsymbol{x}_1\cong\boldsymbol{x}_2$, то $h(\boldsymbol{x})\in D_G$ (D_G — алгебра Дельсарта группы G над полем представлений P). Далее, если $\boldsymbol{d}$ — допустимая подгруппа группы $\boldsymbol{x}$, то, как легко видеть,

$$h\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{d}}\right)=\sum_{\hat{j}_{x,[\alpha]}=d}\nu_{x,[\alpha[}^{2}.$$

Отсюда, пользуясь вытекающим из (3.4) и теории характеров соотношением

$$\sum_{[\alpha]}\nu_{x,[\alpha]}^{2}=[\boldsymbol{x}]^{k},$$

получаем

$$\sum_{d \mid x} h\left(\frac{x}{d}\right) = [x]^k. \tag{6.4}$$

Из (6.4) с помощью формулы обращения (3.2) получаем $h(x) = \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x \mid G)$. Таким образом,

$$\sum_{j_{x,[\alpha]}=1_x} \nu^2_{x,[\alpha]} = \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x \mid G). \tag{7.4}$$

Из (7.4) вытекает

Теорема 14. *Если $x \in E_G$, то $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(x \mid G) \neq 0$ тогда и только тогда, если единичная подгруппа 1_x группы x является ее Ω-k-ядром, или, что то же самое, если группа x допускает линейное представление, распадающееся на k неприводимых компонент, ядро гомоморфизма которого не содержит ни одной Ω-простой допустимой подгруппы группы x.*

Теорема 14 в некотором смысле дуальна теореме 12 предыдущего пункта. Введем понятие Ω-k-антиядра группы $x \in E_G$, дуальное понятию Ω-k-ядра. Пусть $X \in Q_x^{(k)}$. Обозначим через n_X минимальный из нормальных делителей группы x, содержащих k-систему X. Очевидно, $n_X \subseteq m_X$. Назовем подгруппу y группы x k-антиядром последней, если $y = n_X$, где $X \in Q_x^{(k)}$. В частности, 1-антиядра группы x будем называть просто ее антиядрами. Очевидно k-антиядра группы x суть подгруппы, порождаемые k ее классами сопряженных элементов. Обозначим, далее, через $\check{y}$ минимальную из допустимых подгрупп группы x, содержащую подгруппу y. Легко видеть, что если $y = \{y_1, y_2\}$ — наименьшее общее кратное подгрупп y_1 и y_2, то $\check{y} = \check{y}_1\check{y}_2$. Будем называть допустимую подгруппу z группы x Ω-k-антиядром последней, если $z = \check{y}$, где y — k-антиядро группы x. В частности, Ω-1-антиядра будем называть Ω-антиядрами. Если $y = n_X$, где $X \in Q_x^{(k)}$, то в силу сделанного выше замечания $\check{y} = m_X$. Следовательно, Ω-k-антиядра группы x суть подгруппы вида m_X, где $X \in Q_x^{(k)}$. Другими словами, это подгруппы, порождаемые k Ω-классами группы x. Если $s_1, s_2, \ldots, s_k$ — элементы группы x, образующие k-систему X, то, очевидно, $m_X = m_{s_1} m_{s_2} \ldots m_{s_k}$, т. е. m_X есть композит Ω-1-антиядер $m_{s_1}, \ldots, m_{s_k}$. Таким образом, каждое Ω-k-антиядро есть композит k Ω-антиядер. Из сказанного ясно, что способ образования Ω-k-антиядер из антиядер дуален способу образования Ω-k-ядер из ядер гомоморфизмов $j_{x,\alpha}$, неприводимых представлений группы x. Теорема 12 допускает, очевидно, следующую формулировку, дуальную по отношению к формулировке теоремы 14:

Теорема 12а. *Если $x \in E_G$, то $\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(x \mid G) \neq 0$ тогда и только тогда, если группа x является Ω-k-антиядром.*

3. Допустим, что Ω совпадает с группой внутренних автоморфизмов группы G. Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_\rho$ — полная система неприводимых в поле P представлений группы G; ν_i — степень, J_i — ядро гомоморфизма представления Γ_i. Полагая в (3.4) и (4.4) $x = G$ и вводя обозначения $\nu_{[\alpha]} = \nu_{G,[\alpha]}$, $J_{[\alpha]} = j_{G,[\alpha]}$, будем иметь:

$$\nu_{[\alpha]} = \prod_{i=1} \nu_{\alpha_i}, \tag{8.4}$$

$$J_{[\alpha]} = \bigcap^{k} J_{\alpha_i}. \tag{9.4}$$

В силу сделанного выше допущения относительно области операторов Ω, множество Ω-k-ядер группы $\boldsymbol{G}$ совпадает с множеством ее k-ядер, а множество Ω-k-антиядер совпадает с множеством k-антиядер, т. е. подгрупп, порождаемых k-классами сопряженных элементов группы $\boldsymbol{G}$ (для Ω-групп, отличных от $\boldsymbol{G}$, это уже не имеет место). Принимая в (7.4) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{G}$ и замечая, что $\check{\boldsymbol{J}}_{[\alpha]} = \boldsymbol{J}_{[\alpha]}$ (как нормальные делители, эти подгруппы являются допустимыми подгруппами группы $\boldsymbol{G}$), получаем (мы полагаем $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{G}) = \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{x})$):

$$\sum_{J_{[\alpha]}=1_G} \nu_{[\alpha]}^2 = \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{G}). \tag{10.4}$$

Принимая в (7.4) $\boldsymbol{x} = \frac{G}{H}$, где $\boldsymbol{H}$ — нормальный делитель группы $\boldsymbol{G}$, получаем следующее соотношение:

$$\sum_{J_{[\alpha]}=H} \nu_{[\alpha]}^2 = \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}\left(\frac{G}{H}\right). \tag{11.4}$$

В случае $k = 1$ имеем:

$$\sum_{J_{\alpha}=H} \nu_{\alpha}^2 = \varphi_{\mathrm{I}}\left(\frac{G}{H}\right). \tag{12.4}$$

Из (11.4) вытекает

Теорема 15. *Нормальный делитель* $\boldsymbol{H}$ *группы* $\boldsymbol{G}$ *тогда и только тогда является ее k-ядром, если* $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}\left(\frac{G}{H}\right) \neq 0$.

Теорема 12а приводит к дуальному утверждению:

Теорема 15а. *Нормальный делитель* $\boldsymbol{H}$ *группы* $\boldsymbol{G}$ *тогда и только тогда является ее k-антиядром, если* $\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{H}) \neq 0$.

Из теоремы 15 вытекает, в частности,

Теорема 16. *Группа* $\boldsymbol{G}$ *тогда и только тогда допускает изоморфное представление, распадающееся на k абсолютно неприводимых компонент, если* $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(G) \neq 0$.

Пусть $\boldsymbol{S}$ — цоколь группы $\boldsymbol{G}$ ($\boldsymbol{S}$ вместе с тем является Ω-цоколем группы G). Ввиду полной приводимости цоколя, $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{S}) = \varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{S}) = \varphi^{(k)}(\boldsymbol{S})$. Соотношение (3.3) поэтому дает

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{G}) = \left[\frac{G}{S}\right]^k \varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{S}). \tag{13.4}$$

Отсюда и из теорем 16 и 15а вытекает (так как k-антиядра группы $\boldsymbol{G}$ суть подгруппы, порождаемые k ее классами сопряженных элементов),

Теорема 17*. *Группа* G *тогда и только тогда допускает изоморфные представления, распадающиеся на k абсолютно неприводимых компонент, если цоколь* $\boldsymbol{S}$ *группы* $\boldsymbol{G}$ *порождается k ее классами сопряженных элементов.*

Эта теорема допускает также следующую формулировку: *единичная подгруппа группы* $\boldsymbol{G}$ *тогда и только тогда является k-ядром, если цоколь группы* $\boldsymbol{G}$ *является k-антиядром.*

Далее, теоремы 16 и 10 приводят к следующему результату, принадлежащему Тазава**:

Теорема 18. *Группа* $\boldsymbol{G}$ *тогда и только тогда допускает изоморфные представления, распадающиеся на k абсолютно неприводимых компонент, если Ω-инварианты n, r и g каждой абелевой минимальной Ω-характеристической подгруппы цоколя группы* $\boldsymbol{G}$ *удовлетворяют неравенству* $k \geqslant \frac{ng}{r}$.

* Другие доказательства этой теоремы даны в [2] и [3].

** См. [6], а также [2] и [3].

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{N}$ — соответственно абелева и неабелева компоненты цоколя группы $\boldsymbol{G}$ ($\boldsymbol{A}$ — композит всех абелевых, $\boldsymbol{N}$ — всех неабелевых минимальных нормальных делителей группы $\boldsymbol{G}$). Тогда имеет место расщепление цоколя.

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A} \circ \boldsymbol{N}.$$

Разложение подгруппы $\boldsymbol{A}$ в прямое произведение ее силовских подгрупп $\boldsymbol{Q}_1$, $\boldsymbol{Q}_2$, ... также является расщеплением:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_1 \circ \boldsymbol{Q}_2 \circ \ \ldots$$

Следовательно,

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{N} \circ \boldsymbol{Q}_1 \circ \boldsymbol{Q}_2 \circ \ \ldots$$

Отсюда, на основании свойства (5‴.3) функции $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{x})$,

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{S}) = \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{N}) \prod_{Q} \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{Q}),$$

где $\boldsymbol{Q}$ пробегает множество всех силовских подгрупп группы $\boldsymbol{A}$. Так как $\boldsymbol{N}$ расщепляется на неабелевы минимальные нормальные делители и так как на последних в силу (5′.3) функция $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}$ отлична от нуля, то $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{N}) \neq 0$. Следовательно, $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{S})$, а потому (в силу (13.4) и $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{G})$, отлично от нуля тогда и только тогда, если $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{Q}) \neq 0$ для каждой силовской подгруппы $\boldsymbol{Q}$ группы $\boldsymbol{A}$. Так как, с другой стороны, в силу (7.4)

$$\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{Q}) = \sum_{\hat{J}_{Q,\,[\alpha]} = 1_G} {}^{2}_{Q,\,[\alpha]},$$

то $\varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{Q}) \neq 0$ тогда и только тогда, если в $\boldsymbol{Q}$ найдется подгруппа $\boldsymbol{J}_{Q,\,[\alpha]}$, не содержащая ни одного минимального нормального делителя группы $\boldsymbol{G}$. Если, в частности, $k = 1$ и $\boldsymbol{Q}$ — p-группа, то $\boldsymbol{J}_{Q,\,\alpha}$ (как ядра гомоморфизмов неприводимых представлений группы $\boldsymbol{Q}$) суть подгруппы индекса p в $\boldsymbol{Q}$. Отсюда, пользуясь теоремой 16, получаем следующую теорему, принадлежащую Вайснеру [7]:

Теорема 19. *Группа $\boldsymbol{G}$ тогда и только тогда допускает изоморфные абсолютно неприводимые представления, если в каждой силовской подгруппе $\boldsymbol{Q}$ абелевой компоненты цоколя группы $\boldsymbol{G}$ найдется подгруппа $\boldsymbol{Q}'$ простого индекса (в $\boldsymbol{Q}$), не содержащая ни одного минимального нормального делителя группы $\boldsymbol{G}$.*

4. В работе [4] было показано, что количество m_k k-ядер группы $\boldsymbol{G}$ равно числу ее k-антиядер (или, что то же самое, числу классов k-систем группы $\boldsymbol{G}$). Одно из приведенных в [4] доказательств этого факта основывалось на рассмотрении некоторой системы функций $\{\sigma_i^{(k)}(X \mid \boldsymbol{G})\}$ $i = 1, \ldots, m_k$, заданных на множестве $Q_G^{(k)}$ k-систем X группы $\boldsymbol{G}$. Функции $\sigma_i^{(k)}(X \mid \boldsymbol{G})$ определяются следующим образом. Пусть X — k-система, состоящая из элементов $s_1, s_2, \ldots, s_k$ группы $\boldsymbol{G}$; $[\alpha]$ — система натуральных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, не превосходящих числа ρ классов сопряженных элементов группы $\boldsymbol{G}$. Обозначив через χ_i групповой характер, отвечающий абсолютно неприводимому представлению Γ_i группы $\boldsymbol{G}$, положим

$$\chi_{[\alpha]}(X) = \prod_{i=1}^{k} \chi_{\alpha_i}(s_i). \tag{14.4}$$

В частности, полагая $X = X_E$, где $X_E = \{1, 1, \ldots, 1\}$ — «единичная» k-система, будем иметь:

$$\chi_{[\alpha]}(X_E) = \prod_{i=1}^{k} \nu_{\alpha_i} = \nu_{[\alpha]}.$$

Пусть $I_1^{(k)}, I_2^{(k)}, \ldots, I_{m_k}^{(k)}$ — k-ядра группы G. Сопоставим с k-ядром $I_i^{(k)}$ функцию

$$\sigma_i^{(k)}(X \mid G) = \sum_{J_{[\alpha]} = I_i^{[k]}} \nu_{[\alpha]}\chi_{[\alpha]}(X). \tag{15.4}$$

Система функций $\{\sigma_i^{(k)}(X \mid G)\}$ $(i = 1, \ldots, m_k)$ ортогональна в том смысле, что

$$\sum_{X \in Q_G^{(k)}} \sigma_i^{(k)}(X \mid G)\, \sigma_j^{(k)}(X \mid G) = \delta_{ij} g^k n_i^{(k)},$$

где g — порядок группы G и

$$n_i^{(k)} = \sum_{J_{[\alpha]} = I_i^{(k)}} \nu_{[\alpha]}^2 = \sigma_i^{(k)}(X_E \mid G). \tag{16.4}$$

Функции $\sigma_i^{(k)}(X \mid G)$ замечательны в том отношении, что они постоянны на классах k-систем группы G и образуют полную ортогональную систему в пространстве функций $f(X)$ постоянных на классах k-систем. (Именно отсюда и вытекает равенство между числами k-ядер и k-антиядер группы G). Весьма интересным является также то обстоятельство, что для функций $\sigma_i^{(k)}(X \mid G)$ могут быть получены выражения, совсем не содержащие групповых характеров. Такие выражения были найдены в работе [4] (§ 4, п. 14 и 15). Однако примененный в [4] для их вывода метод сложен и представляется несколько искусственным. Покажем значительно более простое решение той же задачи, основанное на использовании развитого выше аппарата теоретико-групповых функций.

Пусть H — нормальный делитель группы G. Положим

$$\sigma_H^{(k)}(X \mid G) = \sum_{J_{[\alpha]} = H} \nu_{[\alpha]}\chi_{[\alpha]}(X). \tag{17.4}$$

Тогда, очевидно,

$$\sigma_i^{(k)}(X \mid G) = \sigma_{I_i^{(k)}}^{(k)}(X \mid G). \tag{18.4}$$

Пусть, далее,

$$\sigma^{(k)}(X \mid G) = \sigma_{1_G}^{(k)}(X \mid G) = \sum_{J_{[\alpha]} = 1_G} \nu_{[\alpha]}\chi_{[\alpha]}(X), \tag{19.4}$$

$$n^{(k)} = \sigma^{(k)}(X_E \mid G) = \sum_{J_{[\alpha]} = 1_G} \nu_{[\alpha]}^2. \tag{20.4}$$

В силу (10.4)

$$n^{(k)} = \varphi_1^{(k)}(G). \tag{21.4}$$

Обозначив через θ естественный гомоморфизм группы G на фактор-группу $\frac{G}{H}$, будем, как легко видеть, иметь

$$\sigma_H^{(k)}(X \mid G) = \sigma^{(k)}\left(X^\theta \mid \frac{G}{H}\right), \tag{22.4}$$

где X^θ — образ системы X при гомоморфизме θ. Соотношение (22.4) сводит изучение функций $\sigma_H^{(k)}(X \mid G)$ (а потому и функций $\sigma_i^{(k)}(X \mid G)$ к изучению функции $\sigma^{(k)}(X \mid G)$.

Покажем, что

$$\sigma^{(k)}(X \mid G) = \sum_{\substack{H \mid G \\ H \supseteq H_X}} \mu_D(H) \left[\frac{G}{H}\right]^k, \tag{23.4}$$

где H_X означает минимальный из нормальных делителей группы G, содержащих систему X: H пробегает совокупность всех нормальных делителей группы G, содержащих систему X (а потому и подгруппу H_X). Заметим, прежде всего, что, как это легко вытекает из (17.4)

$$\sum_{F \supseteq H} \sigma_F^{(k)}(X \mid G) = \begin{cases} \left[\dfrac{G}{H}\right]^k, \text{ если } H \supseteq H_X \\ 0, \text{ если } H \not\supseteq H_X \end{cases}.$$

(Здесь F пробегает множество нормальных делителей группы G, содержащих H). Поэтому правая часть (23.4) равна

$$\sum_{H \mid G} \mu_D(H) \sum_{F \supseteq H} \sigma_F^{(k)}(X \mid G) = \sum_{F \mid G} \sigma_F^{(k)}(X \mid G) \sum_{H \mid F} \mu_D(H) =$$
$$= \sigma_{1_G}^{(k)}(X \mid G) = \sigma^{(k)}(X \mid G),$$

чем и доказывается соотношение (23.4).

Из (23.4) непосредственно вытекает, что функция $\sigma^{(k)}(X \mid G)$ (а потому, в силу (17.4) и (18.4), также и функции $\sigma_t^{(k)}(X \mid G)$) постоянна на классах k-систем группы G. Действительно, если $X_1 \approx X_2$, то $H_{X_1} = H_{X_2}$ и, следовательно, $\sigma^{(k)}(X_1 \mid G) = \sigma^{(k)}(X_2 \mid G)$.

Заметим, теперь, что если группа G не допускает изоморфных представлений, распадающихся на k неприводимых компонент, то $\sigma^{(k)}(X \mid G) = 0$. Рассмотрим поэтому случай, когда группа G допускает представления, обладающие отмеченным свойством. Тогда в силу (20.4) $n^{(k)} \neq 0$. Положим

$$f(H) = \frac{1}{n^{(k)}} \sum_{Y \in F_H^{(k)}} \sigma^{(k)}(Y \mid G), \tag{24.4}$$

где Y пробегает множество $F_H^{(k)}$ всех k-систем подгруппы H, удовлетворяющих условию $H_Y = H$ ($F_H^{(k)}$ может оказаться пустым множеством). Из (24.4) вытекает

$$\sum_{D \mid H} f(D) \frac{1}{n^{(k)}} \sum_{Y \in Q_H^{(k)}} \sigma^{(k)}(Y \mid G),$$

где D пробегает множество всех содержащихся в H нормальных делителей G, а Y — множество $Q_H^{(k)}$ всех k-систем подгруппы H. Пользуясь известными соотношениями теории характеров, легко показать, что

$$\sum_{Y \in Q_H^{(k)}} \sigma^{(k)}(Y|G) = \begin{cases} n^{(k)}, \text{ если } H = 1_G \\ 0, \text{ если } H \neq 1_G \end{cases}.$$

Поэтому

$$\sum_{D \mid H} f(D) = \begin{cases} 1, \text{ если } H = 1_G \\ 0, \text{ если } H \neq 1_G \end{cases}, \tag{25.4}$$

причем это имеет место для любого нормального делителя H группы G. Так как функция f однозначно определяется свойством (25.4) и так как тем же свойством обладает функция Мёбиуса-Дельсарта, то

$$f(H) = \mu_D(H \mid G). \tag{26.4}$$

Допустим теперь, что X — любая k-система группы G. Положим $H = H_X$. Тогда множество $F_H^{(k)}$ содержит систему X и, следовательно, не

пусто. Так как все системы Y из $F_{\boldsymbol{H}}^{(k)}$ эквивалентны k-системе X, то $\sigma^{(k)}(Y \mid \boldsymbol{G}) = \sigma^{(k)}(X \mid \boldsymbol{G})$ $(Y \in F_H^{(k)})$. Следовательно, в силу (24.4)

$$f(\boldsymbol{H}_x) = f_{\boldsymbol{H}x}^{(k)} \frac{\sigma^{(k)}(X \mid G)}{n^{(k)}}, \tag{27.4}$$

где $f_{\boldsymbol{H}X}^{(k)}$ — число k-систем в $F_{\boldsymbol{H}x}^{(k)}$. Из (27.4) и (26.4) вытекает что $\sigma^{(k)}(X \mid \boldsymbol{G}) = \frac{n^{(k)}}{f_{H_x}^{(k)}} \mu_D(\boldsymbol{H}_X \mid \boldsymbol{G})$. Наконец, замечая, что $h^{(k)} = \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{G})$, $f_{\boldsymbol{H}x}^{(k)} = \varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(H_X \mid \boldsymbol{G})$ (см. (2.4)), получаем окончательно

$$\sigma^{(k)}(X \mid \boldsymbol{G}) = \varphi_{\mathrm{I}}^{(k)}(\boldsymbol{G} \mid \boldsymbol{G}) \frac{\mu_D(\boldsymbol{H}_X \mid G)}{\varphi_{\mathrm{II}}^{(k)}(\boldsymbol{H}_X \mid G)}. \tag{28.4}$$

Пользуясь выражениями (18.2), (5.3) для теоретико-групповых функций Мёбиуса и Эйлера, из (28.4) легко получить соотношение (77.4) статьи [4]. Соотношение же (21.4) эквивалентно соотношению (78.4) той же статьи (оно получается также из (28.4), если положить $X = X_E$).

ЛИТЕРАТУРА

1. S. Delsart. Functions de Möbius sur les group Abelian finis, Annals of Math., 49 (1948), p. 600—609.

2. Э. М. Жмудь. Теоретико-групповая функция Мебиуса—Дельсарта и теория линейных представлений конечных групп, «Изв. высш. учеб. завед.», № 1 (1957), стр. 133—141.

3. Э. М. Жмудь. Об изоморфных линейных представлениях конечных групп. «Матем. сб.» (нов. сер.), т. 38, вып. 4 (1956), стр. 417—430.

4. Э. М. Жмудь. О ядрах гомоморфизмов линейных представлений конечных групп. «Матем. сб.» (нов. сер.), т. 44, вып. 4 (1958), стр. 353—408.

5. Э. М. Жмудь. Об изоморфных неприводимых проективных представлениях конечных групп. «Зап. матем. отд. физ.-матем. фак. и Харьковск. матем. о-ва», т. XXVI (1961).

6. M. Tazawa. Über isomorphe Darstellung der endliche Gruppen, Tôhoku math Tourn 47. № 1 (1940), ss. 87—93.

7. L. Weisner. Condition that a finite group be multiply isomorphic with each of its irreducible representations, Amer. Journ. of Math; 61 (1939), 709—712.