ЗАПИСКИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА·ХГУ И ХАРЬКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том XXIII 1952

К ТЕОРИИ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

М. С. Шун

(Харьков)

§ 1

Мы будем рассматривать возможность представления функции $f(x)$ интегралом вида:

$$I = \int_a^b f(t)\, d_t\, \Phi_n(x, t) = I_n(f, x), \tag{1}$$

где $\Phi_n(x, t)$ — функция ограниченной по t вариации.

Функции $f(x)$ принадлежат U_1, т. е. существуют $f(x+0)$ и $f(x-0)$ для любого $x \in [a, b]$, при этом значение функции $f(x)$ в точке разрыва, и, следовательно, в любой точке определим так:

$$f^*(x) = \alpha f(x-0) + \beta f(x+0), \tag{2}$$

где: $\alpha, \beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$.

В дальнейшем под $f(x)$ будем понимать $f^*(x)$.

Пусть $\Phi_n(x, t)$ разложена на функцию скачков и непрерывную компоненту:

$$\Phi_n(x, t) = C_n(x, t) + D_n(x, t).$$

Тогда интеграл (1) определим как сумму:

$$I = \int_a^b f(t)\, d_t\, C_n(x, t) + \sum_k f(x_k)\, \Delta D_n(x, x_k)\,. \tag{3}$$

где x_k — точки роста функции скачков $D_n(x, t)$.

Теорема. Для того, чтобы:

$$\lim_{n\to\infty} I_n(f, x) = f(x),$$

необходимо и достаточно:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Var} \Phi_n(x, t) \Big|_{x+0}^{x+\delta_1} = \beta.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{Var} \Phi_n(x, t) \Big|_{x-\delta_2}^{x-0} = \alpha,$

где: $\delta_{1,2} > 0$ и $x + \delta_1$, $x - \delta_2 \in [a, b]$.

Примечание. Воспользовавшись теоремой Хелли, находим предельную функцию $\Phi_\infty(x, t)$, при этом:

$$\Phi_\infty(x, t) = \begin{cases} 0, & t < x \\ \alpha = 1 - \beta, & t = x \\ 1 & t < x \end{cases}$$

Для доказательства необходимости $f(x)$ выбираем последовательно так:

$$1)\ f(x)=\begin{cases}1, & x_0\leqslant x\leqslant x_0+\delta_1\\ 0, & x<x_0,\ x>x_0+\delta_1,\end{cases}$$

$$2)\ f(x)=\begin{cases}1, & x_0-\delta_2\leqslant x\leqslant x_0\\ 0, & x>x_0,\ \ x<x_0-\delta_2.\end{cases}$$

Следствие:

$$\lim \operatorname{Var}_t \Phi_n(x_0, t)=0 \tag{4}$$

для

$$t\in[x_0-\delta_2,\ x_0+\delta_1].$$

Докажем достаточность.

Пусть $\delta(x_0)=f(x+0)-f(x-0)$.

Тогда из (2) следует:

$$f(x_0)=f(x_0-0)+\beta\delta(x_0)=f(x_0+0)-\alpha\delta(x_0). \tag{5}$$

Рассмотрим остаток:

$$\Delta_n(f, x_0)=f(x_0)-I_n(f, x_0).$$

Из 1) и 2) следует:

$$\Delta_n(f, x_0)=\int\limits_a^b[f(x_0)-f(t)]\,d_t\Phi_n(x_0, t)+\varepsilon_n=$$

$$=\left(\int\limits_{x_0-\delta_2}^{x_0}+\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta_1}\right)[f(x_0)-f(t)]\,d_t\Phi_n(x_0, t)+\varepsilon_n'.$$

Рассмотрим $I_1=\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta_1}[f(x_0)-f(t)]\,d_t\Phi_n(x_0, t)$.

Воспользовавшись (5), имеем:

$$I_1=-\alpha\delta(x_0)\cdot\operatorname{Var}\Phi_n(x_0, t)\Big|_{x_0+0}^{x_0+\delta_1}+\int\limits_{x_0}^{x_0+\delta}[f(x_0+0)-f(t)]\,d_t\Phi_n(x_0, t).$$

Выбирая достаточно малым δ_1 и используя 1), получаем:

$$I_1=-\alpha\delta(x_0)(\beta+\varepsilon_n''),$$

аналогичный подсчет для I_2 дает:

$$I_2=\beta\cdot\delta(x_0)(\alpha+\varepsilon_n''').$$

Соединяя полученные оценки, получаем:

$$\lim_{n\to\infty}\Delta_n(f, x_0)=0.$$

§ 2

Если непрерывная компонента ядра отсутствует, то мы приходим к суммарным формулам.

В качестве примера мы рассмотрим интерполяционный процесс Фейера.

В этом случае:

$$I_n(f, x)=\sum_1^n f(x_k^{(n)})h_k^{(n)}(x),$$

где:

$$h_k^{(n)}=\frac{1-xx_k^{(n)}}{n^2}\left[\frac{T_n(x)}{x-x_k^{(n)}}\right]^2,\qquad T_n(x)=\cos(n\arccos x).$$

Покажем, что этот процесс расходится даже для функций ограниченной вариации, для чего нужно определить асимптотическое поведение сумм:

$$\sum_{x_k<x} h_k^{(n)}(x) = \operatorname{Var} \Phi_n(x, t)\Big|_a^{x-0}, \quad \sum_{x>x_k} h_k^{(n)}(x) = \operatorname{Var} \Phi_n(x, t)\Big|_{k+0}^{b}.$$

Положим:

$$x = \cos\theta, \quad x_k = \cos\theta_k, \quad \theta_k = \left(k - \frac{1}{2}\right) l, \quad l = \frac{\pi}{n}, \quad \theta_k < \theta < \theta_{k+1},$$

следовательно,

$$\theta = \theta_k + \tau_n l.$$

Тогда

$$h_k^{(n)}(x) = \frac{1 - \cos\theta \cos\theta_k}{(\cos\theta - \cos\theta_k)^2} \cdot \frac{\sin^2 \pi\tau_n}{n^2} = \frac{\sin^2 \pi\tau_n}{n^2}\left[\frac{1}{(\theta - \theta_k)^2} + 0(1)\right].$$

Итак, остается оценить сумму $\sum_{s=1}^{k} \frac{1}{(\theta - \theta_s)^2}$.

Так как при фиксированном $x \neq \pm 1$ $k \to \infty$ вместе с n, то

$$\sum_{s=1}^{k} \frac{1}{(\theta - \theta_s)^2} = \frac{1}{l^2} \sum_{s=1}^{k} \frac{1}{(k - s + \tau_n)^2} = \frac{n^2}{\pi^2}\left[\sum_{s=1}^{n} \frac{1}{(s + \tau_n)^2} + \varepsilon_n\right] =$$

$$= \frac{n^2}{\pi^2}\left\{\frac{d^2 \ln \Gamma(\tau_n)}{d\tau_n^2} + \varepsilon_n'\right\}.$$

Поэтому:

$$\operatorname{Var} \Phi_n(x, t)\Big|_{x+0}^{b} = \frac{\sin^2 \pi\tau_n}{n^2} \cdot \frac{n^2}{\pi^2}\left\{\frac{d^2 \ln \Gamma(\tau_n)}{d\tau_n^2} + \varepsilon_n'\right\} = \varphi(\tau_n) + \varepsilon_n''.$$

Но функция $\varphi(t) = \frac{\sin^2 \pi t}{\pi^2} \frac{d^2 \ln \Gamma(t)}{dt^2}$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi(t) + \varphi(1 - t) \equiv 1,$$

поэтому $\varphi(t)$ в интервале $(0,1)$ монотонно убывает от 1 до 0.

Значит, уравнение $\varphi(t) = \beta$ имеет единственный корень t_0 $(0 \leqslant t_0 \leqslant 1)$. Но для произвольного x, $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n \neq 0$, что доказывает расходимость процесса.

Можно только утверждать, что для любых α и β $(0 \leqslant \alpha, \beta, \alpha + \beta = 1)$ и для любых $x \in [-1, +1]$ существуют подпоследовательности $I_{n_p}(x, f)$, сходящееся к $\alpha f(x + 0) + \beta f(x - 0)$ для каждой функции ограниченной вариации.

Для доказательства достаточно заметить, что можно выбрать последовательность сегментов $[\theta_k^{(n_p)}, \theta_{k+1}^{(n_p)}]$, стягивающихся к θ и таких, что

$$\theta_k^{(n_p)} + \theta_{k+1}^{(n_p)} = 2\theta + (1 - 2t_0 + \varepsilon_{n_p}) l,$$

где

$$\varphi(t_0) = \beta.$$

В этом случае $\tau_n \to \beta$, что обеспечивает выполнение условий 1) и 2).