УДК 517.54

А. Ф. Гришин, канд. физ.-мат. наук

О СРАВНЕНИИ ДЕФЕКТОВ $\delta_p(a)$

Пусть $f(z)$ — мероморфная функция. Основными объектами неванлинновской теории распределения значений являются следующие величины:

$$m(r,\ f) = m(r,\ \infty,\ f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi,$$

$n(r) = n(r,\ f) = n(r,\ \infty,\ f)$ — считающая функция полюсов — число полюсов функции $f(z)$ в замкнутом круге с центром в нуле радиуса r,

$$N(r) = N(r,\ f) = N(r,\ \infty,\ f) = \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t}\, dt,$$

$$m(r, a, f) = m\left(r, \frac{1}{f-a}\right),$$

$$N(r, a, f) = N\left(r, \frac{1}{f-a}\right),$$

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f).$$

В этой теории изучаются связи между указанными величинами. Важную роль играет понятие дефектного значения. Комплексное число a называется дефектным в смысле Неванлинна для мероморфной функции $f(z)$, если положительная величина $\delta(a, f)$ называемая дефектом a:

$$\delta(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

Функция $m(r, a, f)$ характеризует среднее отклонение мероморфной функции $f(z)$ от комплексного числа a в метрике $L_1\left([0, 2\pi], \frac{1}{2\pi}d\varphi\right)$ на окружности $|z| = r$. В работе [1] В. П. Петренко для характеристики мероморфной функции вводит величину

$$M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|.$$

Величина $\ln^+ M\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ характеризует отклонение на окружности $|z| = r$ функции $f(z)$ от значения a в равномерной метрике $L_\infty(0, 2\pi)$. В. П. Петренко вводит также величину

$$\beta(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\ln^+ M\left(r, \frac{1}{f-a}\right)}{T(r, f)},$$

которую он называет отклонением. Для вновь введенных величин В. П. Петренко строит теорию, аналогичную неванлинновской. В рецензии на работу В. П. Петренко, А. А. Гольдберг указывает на важность в данном круге вопросов метрики L_p.

Пусть

$$m_p(r, f) = \left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\ln^+ |f(re^{i\varphi})|)^p d\varphi\right]^{\frac{1}{p}},$$

$$1 \leqslant p < \infty, \ m_\infty(r, f) = \ln^+ M(r, f),$$

$$m_p(r, a, f) = m_p\left(r, \frac{1}{f-a}\right),$$

$$\delta_p(a, f) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{m_p(r, a, f)}{T(r, f)}.$$

В силу неравенства Гельдера, $\delta_{p_1}(a, f) \leqslant \delta_{p_2}(a, f)$ при $p_1 \leqslant \leqslant p_2$. В частности,

$$\delta(a, f) = \delta_1(a, f) \leqslant \delta_\infty(a, f) = \beta(a, f).$$

В работе [1] ставится вопрос, возможно ли, чтобы $\delta(a, f) = 0$, $\beta(a, f) > 0$ для мероморфной функции конечного порядка. Ниже по наперед заданному значению $p > 1$ будет построена мероморфная функция $f(z)$, которая обладает такими свойствами:

$$\delta_p(\infty, f) = 1, \quad \delta_q(\infty, f) = 0, \quad q < p.$$

Если $p = \infty$, мы получим ответ на вопрос В. П. Петренко.

При построении будет использована идея Пэли [3], построившего пример целой функции $f(z)$ конечного порядка, для которой выполняется равенство

$$\lim_{r\to\infty} \frac{m(r, f)}{\ln M(r, f)} = 0.$$

Пэли в своей работе оценивал максимум модуля частных сумм специальных степенных рядов. Для наших целей нужно уметь оценивать или частные суммы степенных рядов, или так называемые неполные интегралы во всей плоскости. Разработанный в [2] метод позволяет получить нужные оценки. В построениях статьи важную роль будет играть семейство интегралов

$$I_n(z) = \int_0^n \frac{e^{uz}}{\Gamma(1+u)}\,du, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

$$I(z) = \int_0^\infty \frac{e^{uz}}{\Gamma(1+u)}\,du.$$

В [2] получена такая асимптотическая формула для $I_n(z)$:

$$I_n(z) = \begin{cases} I(z) - \gamma \dfrac{e^{nz}}{n!}, & x \leqslant a_n \\ \gamma_1 \dfrac{e^{nz}}{n!}, & x > a_n \\ & z = x + iy, \end{cases}$$

где

$$I(z) = \begin{cases} e^{e^z} + O\left(\dfrac{1}{z}\right), & z \in D \\ O\left(\dfrac{1}{z}\right) \; z \overline{\in} D, & z \to \infty, \end{cases}$$

$$D = \{z : |y| < \pi, \quad x > 0\},$$

$$\gamma = (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{h''(z, n)}} \psi(a) = (1 + o(1)) \frac{1}{h'(z, n)} \varphi(a), \quad n \to \infty,$$

$$\gamma_1 = (1 + o(1)) \frac{1}{\sqrt{h''(z, n)}} \psi(-a) = (1 + o(1)) \frac{1}{h'(z, n)} \varphi(-a),$$

$$a = \frac{h'(z, n)}{\sqrt{h''(z, n)}}, \quad \sqrt{h''(z, n)} > 0,$$

$$h(z, u) = \ln \Gamma(1 + u) - uz,$$

$$\psi(a) = \int_0^\infty e^{-\left(\frac{1}{2}u^2 + au\right)} du,$$

$$\varphi(a) = a\psi(a), \quad \psi(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\lim_{\substack{a \to \infty \\ \operatorname{Re} a \geqslant 0}} \varphi(a) = 1,$$

$$a_n = \frac{\Gamma'(1 + n)}{\Gamma(1 + n)} = \ln n + o(1), \quad n \to \infty.$$

Используя эти данные, получим ассимптотические формулы для $m_p(r, I_n)$. При $|z| \leqslant b_n = \frac{1}{n} \ln n! = \ln n - 1 + o(1)$ величина

$$\left| \gamma \frac{e^{nz}}{n!} \right| \leqslant 1 + o(1), \quad n \to \infty.$$

Поэтому для таких z

$$m_p(r, I_n) = (1 + o(1))\, m_p(r, I) =$$

$$= (1 + o(1))\, B_p r^{-\frac{1}{p}} e^r, \quad n \to \infty, \ r \to \infty, \tag{1}$$

$$B_p^p = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p y\, dy, \quad p < \infty, \ B_\infty = 1.$$

При $|z| \geqslant \ln^2 n$

$$m_p(r, I_n) = (1 + o(1))\, B_p n r. \tag{2}$$

Кроме того, очевидно, что при $r \to \infty$, $n \to \infty$

$$m_\infty(r, I_n) \leqslant (1 + o(1))\, e^r, \quad r \leqslant a_n, \tag{3}$$

$$m_\infty(r, I_n) = (1 + o(1))\, (nr - \ln n!), \quad r \geqslant a_n. \tag{4}$$

Далее мы рассмотрим функцию

$$\bar{I}_n(z) = I_n\left(\frac{z}{\sqrt[3]{n}}\right).$$

Покажем, что для всех n справедлива такая оценка:

$$|\bar{I}_n(z)| \leqslant C e^{r^3}. \tag{5}$$

Во-первых,

$$e^{\frac{r}{\sqrt[3]{n}}} \leqslant r^3 + 2 \text{ при } r \leqslant a_n \sqrt[3]{n},$$

Кроме того,

$$n^{2/3}r - \ln n! < r^3, \quad n \geqslant 3.$$

Из этих оценок, а также из (3) и (4) следует, что по крайней мере при $n \geqslant n_0$ и $r \geqslant r_0 \sqrt[3]{n}$

$$|\bar{I}_n(z)| < 9e^{r^3}.$$

Учитывая, что

$$\sup_n \max_{|z| \leqslant r_0} |I_n(z)| \leqslant C_1,$$

получим, что (5) справедливо при $n \geqslant n_0$ и для всех r. Так как для всякого фиксированного n оценка (5) справедлива, то из доказанного результата вытекает справедливость (5) с некоторой константой C при всех n и при всех r. На следующем этапе мы введем еще одну функцию $N(r)$. Обозначим

$$\varphi_p(t) = \left[t \frac{d}{dt} B_p\left(\frac{t}{\sqrt[3]{n}}\right)^{-\frac{1}{p}} e^{\frac{t}{\sqrt[3]{n}}}\right] \sim B_p\left(\frac{t}{\sqrt[3]{n}}\right)^{1-\frac{1}{p}} e^{\frac{t}{\sqrt[3]{n}}}, \quad \frac{t}{\sqrt[3]{n}} \to \infty,$$

$$n(t) = \begin{cases} 0, \ 0 \leqslant t < \frac{1}{2} a_n \sqrt[3]{n} = r_1, \\ \varphi_p(t), \ r_1 \leqslant t < r_2 = \frac{3}{4} a_n \sqrt[3]{n}, \\ n(r_2 - 0), \quad t \geqslant r_2, \end{cases}$$

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt.$$

Функция $N(r)$ обладает следующими свойствами:

$$N(r) \leqslant (1 + o(1))\, m_p(r, \bar{I}_n), \quad n \to \infty \tag{6}$$

$$N(r_2) = (1 + o(1))\, m_p(r_2, \bar{I}_n), \quad n \to \infty \tag{7}$$

$$N(r) = o(1)\, m_p(r, \bar{I}_n), \quad r > b_n \sqrt[3]{n}, \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Первые два свойства очевидны. Относительно третьего заметим, что при $r > r_2$

$$N(r) = N(r_2) + n(r_2) \ln \frac{r}{r_2} =$$

$$= (1 + o(1))\, B_p\left(\frac{3}{4} \ln n\right)^{-\frac{1}{p}} n^{\frac{3}{4}} \left[1 + \frac{3}{4} \ln n \ln \frac{r}{r_2}\right]. \tag{9}$$

И при $r < (\ln^2 n)\sqrt[3]{n}$

$$N(r) \leqslant (1 + o(1)) B_p n^{3/4} \ln^2 n.$$

А при $r > b_n \sqrt[3]{n}$

$$m_p(r, \bar{I}_n) > m_p\left(b_n \sqrt[3]{n}, \bar{I}_n\right) = (1 + o(1)) B_p \frac{1}{e} (\ln n)^{-\frac{1}{p}} n.$$

Таким образом, при $r \leqslant \sqrt[3]{n} \ln^2 n$ свойство (8) доказано. При $r > \sqrt[3]{n} \ln^2 n$ оно следует из (2).

Пусть t_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ — множество всех точек роста функции $n(t)$. Построим функцию

$$\Pi_n(z) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1 - \dfrac{z}{t_k e^{i\theta_k}}}{1 - \dfrac{z}{t_k e^{-i\theta_k}}}.$$

Величины $\theta_k > 0$ возьмем такими маленькими, что будет выполняться неравенство

$$|\Pi_n(z) - 1| < \frac{1}{2}$$

вне объединения кругов, каждый из которых содержит хотя бы одну из точек $t_k e^{\pm i\theta_k}$, причем сумма радиусов этих кругов не превосходит наперед заданное $\varepsilon > 0$.

Обозначим

$$P_n(z) = \bar{I}_n(z) \Pi_n(z).$$

Числа θ_k мы выберем так, чтобы еще выполнялись неравенства

$$m_n(r, \bar{I}_n - P_n) \leqslant 1 \tag{10}$$

при

$$r \leqslant a_{n'} \sqrt[3]{n'}, \quad n' = 2^n,$$

$$m_\infty(r_2, \bar{I}_n - P_n) \leqslant 1, \tag{11}$$

что можно сделать, так как на окружности $|z| = r_2$ нет полюсов функции $P_n(z)$. Тогда для любого фиксированного $p < \infty$ справедливо

$$m_p(r, P_n) \sim m_p(r, \bar{I}_n), \quad p < n, \quad m_p(r, \bar{I}_n) \to \infty. \tag{12}$$

Кроме того,

$$m_\infty(r, P_n) \geqslant m_\infty(r, \bar{I}_n), \tag{13}$$

так как $\hat{I}_n(z)$ принимает максимальное по модулю значение на окружности $|z| = r$ в точке r, а $|\Pi_n(r)| = 1$. Выбрав $n_1 = 2$, $n_{s+1} = 2^{n_s}$, строим функции

$$R(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} R_k(z) \quad R_k(z) = P_{n_k}(z),$$

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_k(z), \quad Q_k(z) = \bar{I}_{n_k}(z).$$

Из неравенств (5) и (9) следует, что $Q(z)$ — целая, а $R(z)$ — мероморфная функции порядка не выше 3.

Обозначим

$$q_s = a_{n_s} \sqrt[3]{n_s}, \quad r_{1s} = \frac{1}{2} q_s,$$

$$r_{2s} = \frac{3}{4} q_s, \quad r_{3s} = b_{n_s} \sqrt[3]{n_s}.$$

Тогда по крайней мере для всех достаточно больших s справедливы следующие достаточно простые оценки:

$$\left| \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} R_k(z) \right| \leqslant C_2 \frac{\pi^2}{4}, \quad r \leqslant q_s, \tag{14}$$

$$\left| \sum_{k=s+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} Q_k(z) \right| \leqslant C_2 \frac{\pi^2}{6}, \quad r \leqslant q_s, \tag{15}$$

$$C_2 = \sup_n \max_{|z| \leqslant 1} |I_n(z)|,$$

$$\left| \sum_{k=1}^{s-2} \frac{1}{k^2} R_k(z) \right| \leqslant e^{2n_{s-2}^{2/3} r}, \quad r \geqslant q_{s-1}, \tag{16}$$

$$\left| \sum_{k=1}^{s-2} \frac{1}{k^2} Q_k(z) \right| \leqslant e^{2n_{s-2}^{2/3} r}, \quad r \geqslant q_{s-1}, \tag{17}$$

$$\sum_{k=1}^{s-2} N_k(r) \leqslant \frac{1}{s} N_{s-1}(r) \quad r > r_{2,\, s-1}, \tag{18}$$

где

$$N_k(r) = N(r, R_k).$$

Пусть

$$A_s(z) = \frac{1}{(s-1)^2} R_{s-1}(z) + \frac{1}{s^2} R_s(z),$$

$$B_s(z) = \frac{s^2}{(s-1)^2} Q_{s-1}(z) + Q_s(z).$$

Тогда при $p < \infty$

$$m_p^p(r,\ A_s) = (1 + o(1))\left(m_p^p(r, Q_{s-1}) + m_p^p(r,\ Q_s)\right),\ q_{s-1} \leqslant r \leqslant q_s. \quad (19)$$

Во-первых, из (10) следует, что

$$m_p(r,\ A_s) = (1 + o(1)\, m_p(r,\ B_s).$$

Далее на сегменте $q_{s-1} \leqslant r \leqslant \sqrt[3]{n_s}$

$$Q_s(z) = O(1).$$

И поэтому (19) очевидно. При $\sqrt[3]{n_s} \leqslant r \leqslant r_{3s}$

$$m_p^p(r,\ B_s) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\theta| \leqslant \alpha} (\ln^+ | B_s(re^{i\theta}) |)^p\, d\theta +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\theta| \geqslant \alpha} (\ln^+ | B_s(re^{i\theta}) |)^p\, d\theta, \qquad \sin\alpha = \frac{\pi}{2r}.$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\sigma} \left(\ln^+ \left| \left(\frac{s}{s-1}\right)^2 Q_{s-1}(re^{i\theta}) \right|\right)^p d\theta =$$

$$= \begin{cases} (1 + o(1))\, m_p^p(r,\ Q_{s-1}), & \sigma = \{\theta : |\theta| \geqslant \alpha\}, \\ o(1)\, m_p^p(r,\ Q_{s-1}), & \sigma = \{\theta : |\theta| \leqslant \alpha\}. \end{cases} \quad (20)$$

Кроме того, при $|\theta| > \alpha$ $Q_s(z) = O(1)$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\theta| \geqslant \alpha} (\ln^+ | B_s(re^{i\theta}) |)^p d\theta = (1 + o(1))\, m_p^p(r,\ Q_{s-1}).$$

Имеем

$$\| \ln^+ |f + g| \| \leqslant \| \ln^+ |f| \| + \| \ln^+ |g| \| + (2\alpha)^{\frac{1}{p}} \ln 2,$$

$$\| \ln^+ |f| \| \leqslant \| \ln^+ |f + g| \| + \| \ln^+ |g| \| + (2\alpha)^{\frac{1}{p}} \ln 2,$$

где

$$\| \varphi \| = \left(\int\limits_{-\alpha}^{\alpha} |\varphi|^p\, d\theta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из этих неравенств и из (20) следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\theta| < \alpha} (\ln^+ | B_s(re^{i\theta}) |)^p\, d\theta = (1 + o(1))\, (m_p(r,\ Q_s) +$$

$$+ o(1)\, m_p(r,\ Q_{s-1}))^p.$$

Таким образом,

$$m_p^p(r,\ B_s) = (1 + o(1))\, m_p^p(r,\ Q_{s-1}) +$$

$$+ [(1 + o(1))\, m_p(r,\ Q_s) + o(1)\, m_p(r,\ Q_{s-1})]^p =$$

$$= (1 + o(1))\, [m_p^p(r,\ Q_{s-1}) + m_p^p(r,\ Q_s)].$$

И соотношение (19) на сегменте $[\sqrt[3]{n_s},\ r_{3s}]$ доказано При $r_{3s} \leqslant \leqslant r \leqslant q_s$

$$m_p(r,\ Q_{s-1}) < n_{s-1}^{2/3} r \leqslant (1 + o(1))\, n_{s-1}^{2/3} n_s^{1/3} \ln n_s =$$

$$= o(1)\, B_p(b_{n_s})^{-\frac{1}{p}} e^{b_{n_s}} = o(1)\, m_p(r_{3s},\ Q_s) = o(1)\, m_p(r,\ Q_s).$$

Из этого неравенства следует справедливость (19) на сегменте $[r_{3s},\ q_s]$, а значит, и на всем сегменте $[q_{s-1},\ q_s]$.

Теперь из (14), (16), (19) следует, что при $q_{s-1} \leqslant r \leqslant q_s$

$$m_p^p(r,\ R) = (1 + o(1)) \left[m_p^p(r,\ Q_{s-1}) + m_p^p(r,\ Q_s)\right]. \tag{21}$$

Мы проводили рассуждения при $p < \infty$. Если $p = \infty$, то

$$m_\infty(r,\ A_s) = (1 + o(1)) \max_j m_\infty(r,\ R_j), \quad j = s-1,\ s. \tag{22}$$

Если

$$\Delta = \left| \frac{M(r,\ Q_s)}{M(r,\ Q_{s-1})} - 1 \right| > 0{,}5,$$

то (22) очевидно. Если же $\Delta \leqslant 0{,}5$, то тогда

$$r = \frac{1}{3}(1 + o(1)) \sqrt[3]{n_s} \ln n_s$$

и (22) следует из того, что

$$m_\infty(r,\ Q_{s-1}) = (1 + o(1) \ln |Q_{s-1}(re^{i\alpha})|, \quad \sin\alpha = \frac{\pi}{2r},$$

а

$$Q_s(re^{i\alpha}) = O(1), \quad s \to \infty.$$

Теперь из (11), (13), (14), (16), (22), следует, что при $q_{s-1} \leqslant \leqslant r \leqslant q_s$

$$m_\infty(r,\ R) \geqslant (1 + o(1)) \max_j m_\infty(r,\ Q_j), \quad j = s-1,\ s, \tag{23}$$

$$m_\infty(r_{2s},\ R) = (1 + o(1))\, m_\infty(r_{2s},\ Q_s). \tag{24}$$

Пусть теперь $1 < p \leqslant \infty$ — произвольное наперед заданное число. Строим функцию $R(z)$, причем при построении функции $N(r)$ используем функцию $\varphi_p(t)$, где p — выбранное нами число. Вычислим дефект $\delta_p(\infty,\ R)$.

Для этого при $q_{s-1} \leqslant r \leqslant q_s$ рассмотрим величину

$$a_p(r) = \frac{m_p(r,\ R)}{T(r,\ R)} = \frac{1}{\dfrac{m_1(r,\ R)}{m_p(r,\ R)} + \dfrac{N(r,\ R)}{m_p(r,\ R)}}.$$

Заметим, что из (1), (21) или (24) следует, что

$$m_q(r_{2s},\ R) = o(1)\, m_p(r_{2s},\ R) \quad q < p.$$

Далее при $r \geqslant q_{s-1}$
$$N(r, R) = \sum_{k=1}^{s-1} N_k(r) + N_s(r).$$
Из (8), (18), (21) или (23) следует, что
$$\sum_{k=1}^{s-1} N_k(r) = o(1)\, m_p(r, Q_{s-1}) = o(1)\, m_p(r, R).$$
Таким образом,
$$N(r, R) = N_s(r) + o(1)\, m_p(r, R). \tag{25}$$
Из (7), (21) или (24) следует, что
$$N_s(r_{2s}) = (1 + o(1))\, m_p(r_{2s}, R)$$
Поэтому
$$a_p(r_{2s}) = 1 + o(1), \tag{26}$$
$$a_q(r_{2s}) = o(1), \quad q < p. \tag{27}$$
При
$$q_{s-1} \leqslant r \leqslant r_{1s} \quad N_s(r) = 0,$$
$$m_1(r, R) \leqslant m_p(r, R).$$
Тогда из (25) вытекает, что
$$a_p(r) > 1 + o(1). \tag{28}$$
При $r_{1s} \leqslant r \leqslant r_{3s}$ из (1), (21) или (23) следует, что $m_1(r, R) = o(1)\, m_p(r, R)$, а из (6), (21), (25) или (23) следует, что
$$N(r, R) \leqslant (1 + o(1))\, m_p(r, R).$$
Следовательно, (28) справедливо и в этом случае. При $z_{3s} \leqslant r < q_s$ из (8), (21), (23) или (25) следует, что
$$N(r, R) = o(1)\, m_p(r, R),$$
а значит, справедливость неравенства (28) в этом случае и на всем сегменте $q_{s-1} \leqslant r \leqslant q_s$. Теперь из (26), (27), (28) получаем
$$\delta_p(\infty, R) = 1, \quad \delta_q(\infty, R) = 0,$$
и нужный пример построен.

Сделаем еще два замечания.

1. Целая функция $Q(z)$ обладает свойством Пэли и даже более сильным свойством:
$$\lim_{r \to \infty} \frac{m_q(r, Q)}{m_p(r, Q)} = 0, \quad 1 \leqslant q < p \leqslant \infty$$
сразу для всех p и q.

2. Порядок функции $R(z)$ заключен, очевидно, между 1 и 3. Если провести белее детально исследование, то можно показать,

что $R(z)$ нормального типа относительно $\frac{r^3}{\ln^2 r}$. Мы рассматривали функции

$$\overline{I}_n(z) = I_n\left(\frac{z}{\varphi(n)}\right), \quad \varphi(n) = \sqrt[3]{n}.$$

Если брать другие функции φ, то можно получать и другие порядки. Однако порядок меньший единицы мы не получим. Поэтому уместно заметить, что если все построения статьи делать на основе функции

$$I_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z^k}{\ln^k (k+2)},$$

то можно получить функцию R наперед заданного порядка ρ, в том числе $\rho = 0$, для которой

$$\delta_p(\infty, R) = 1, \quad \delta_q(\infty, R) = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Петренко В. П. Рост мероморфных функций конечного нижнего порядка. — «Изв. АН СССР», сер. мат., 1969, т. 33, вып. 2, с. 414—454.
2. Гришин А. Ф. Асимптотические оценки некоторых интегралов. — Сб. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». Вып. 18, Харьков, 1974, с. 102—115.
3. Paley R. E. A. C. A note of integral functions. — «Proc. Camb. Phil. Soc.», 1932, vol. 28, p. 262—265.