ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОБЛАСТИ СО СЛОЖНОЙ ГРАНИЦЕЙ. II

В. П. Котляров

В этой работе дается вычисление тензора жесткости для одного частного случая задачи, рассмотренной в статье [1]. А именно, мы будем рассматривать последовательность $\vec{u}^{(n)}(x)$ решений следующих краевых задач:

$$A\vec{u}^{(n)}(x) \equiv \mu\Delta\vec{u}^{(n)}(x) + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{u}^{(n)}(x) = \vec{K}(x), \quad x \in G^{(n)} \tag{1}$$

$$\vec{u}^{(n)}(x) = 0, \quad x \in \partial G^{(n)}, \tag{2}$$

где λ и μ — постоянные Ляме, а область $G^{(n)} = G \setminus F^{(n)}$ лежит в двумерном пространстве R_2. В работе [1] было показано, что, если множество $F^{(n)}$ при $n \to \infty$ попадает в сколь угодно малую окрестность гладкой кривой $\Gamma \subset G$, при определенных условиях последовательность решений $\vec{u}^{(n)}(x)$ краевых задач (1) — (2) сходится почти равномерно к решению $\vec{u}(x)$ следующей задачи:

$$A\vec{u}(x) = \vec{K}(x), \quad x \in G \setminus \Gamma, \tag{3}$$

$$\vec{u}^{+}(x) = \vec{u}^{-}(x) = \vec{u}(x), \ x \in \Gamma, \tag{4}$$

$$\vec{t}^{+}\left(\vec{u}\, x)\right) - \vec{t}^{-}\left(\vec{u}(x)\right) = C(x)\,\vec{u}(x), \ x \in \Gamma, \tag{5}$$

$$\vec{u}(x) = 0, \ x \in \partial G. \tag{6}$$

Возникает вопрос, как найти тензор $C(x)$, фигурирующий в граничном условии (5). Используя метод, предложенный в работе [2], покажем, что при некоторых условиях относительно множества $F^{(n)}$ тензор $C(x)$ может быть вычислен. Имеет место следующая

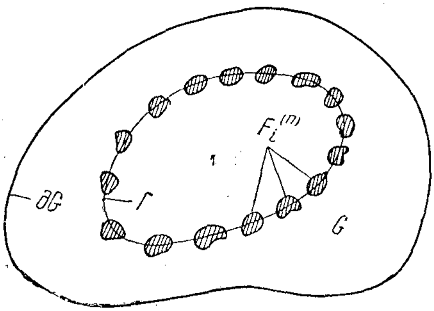

Рис. 1

Теорема. *Пусть множество $F^{(n)}$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$F^{(n)}$ есть объединение конечного числа отдельных связных компонент $F_i^{(n)}$, т. е. $F^{(n)} = \bigcup_i F_i^{(n)}$ (рис. 1).*

2) *Для каждого множества $F_i^{(n)}$ существуют круги $K_{1i}^{(n)}$ и $K_{2i}^{(n)}$ с центрами на кривой Γ и такие, что*

$$K_{1i}^{(n)} \subset F_i^{(n)} \subset K_{2i}^{(n)}.$$

3) *Радиусы этих кругов удовлетворяют неравенствам*

$$aR_{2i}^{(n)} \leqslant R^{(n)} \leqslant bR_{1i}^{(n)},$$

где $R^{(n)}$ — некоторое число, числа a и b постоянны.

4) *Расстояние $R_{ij}^{(n)}$ между множествами $F_i^{(n)}$ и $F_j^{(n)}$ $(i \neq j)$ больше некоторого числа*

$$\overline{R}^{(n)} = \frac{C}{\ln \dfrac{1}{R^{(n)}}},$$

где C — постоянная.

Тогда, если при $n \to \infty$ максимальные диаметры компонент $F_i^{(n)}$ стремятся к нулю, то составляющие тензора $C(x)$ определяются следующим образом:

$$\int_S Cpq\,(x)\, ds_{(x)} = a_{pq}(\lambda, \mu) \lim_{n \to \infty} \frac{N^{(n)}(S)}{\ln \dfrac{1}{R^{(n)}}}, \ p, q = 1, 2, \tag{7}$$

где $a_{pq}(\lambda, \mu) = \dfrac{2\pi(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu}\delta_{pq}$, *$\delta_{pq}$ — символ Кронекера; $N^{(n)}(S)$ — число тел $F_i^{(n)}$, проекции которых на Γ попадают строго внутрь куска $S \subset \Gamma$.*

Доказательство. Построим криволинейный прямоугольник $T(S, \delta)$, образованный нормалями, проведенными к куску $S \subset \Gamma$ в обе стороны от него и длины $\delta > 0$. Обозначим множество $T(S, \delta) \setminus F^{(n)}$ через $T^{(n)}(S, \delta)$. Согласно определению (1. 2, [1]) и условию (1. 3, [1]), нам надо доказать следующее:

$$\lim_{\delta \to 0} \underline{\lim}_{n \to \infty} C_{pq}^{(n)}(S, \delta) = \lim_{\delta \to 0} \overline{\lim}_{n \to \infty} C_{pq}^{(n)}(S, \delta) = $$

$$= a_{pq}(\lambda, \mu) \lim_{n \to \infty} \frac{N^{(n)}(S)}{\ln \frac{1}{R^{(n)}}}; \; p, \; q = 1, 2. \qquad (7')$$

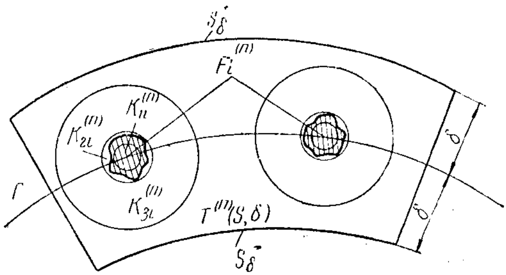

Рис. 2

Докажем это равенство сначала в случае $p = q = 1, 2$. Условие 2) позволяет для каждого множества $F_i^{(n)}$, попавшего внутрь $T(S, \delta)$, построить круг $K_{1i}^{(n)} \subset F_i^{(n)}$ и круг $K_{2i}^{(n)} \supset F_i^{(n)}$ (рис. 2). В силу условий 3) и 4) каждый круг $K_{2i}^{(n)}$ можно погрузить в круг $K_{3i}^{(n)}$ такой, что $K_{3i}^{(n)} \cap K_{3j}^{(n)} = \varnothing$ при $i \neq j$ и выполнено условие

$$R_{3i}^{(n)} \ln \frac{1}{R_{2i}^{(n)}} = C \quad (R_{3i}^{(n)} < \delta).$$

Построим вектор $\vec{u} = (u_1, u_2)$, удовлетворяющий в кольце $K_{3i}^{(n)} \setminus K_{2i}^{(n)}$ однородному уравнению теории упругости, т. е.

$$A\vec{u} \equiv \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} = 0, \qquad (1')$$

и таким граничным условиям:

$$u_1(R_2, \theta) = u_2(R_2, \theta) = 0,$$
$$u_1(R_3, \theta) = 1; \; u_2(R_3, \theta) = 0.$$

Следуя [3], можно найти явный вид такого решения:

$$u_1(r, \theta) = \frac{B}{2}\Big[2\varkappa (R_2^2 + R_3^2) \ln \frac{r}{R_2} + \frac{2}{\varkappa}(R_2^2 - r^2) + $$

$$+ \left(r^2 - (R_2^2 + R_3^2) + \frac{R_2^2 R_3^2}{r^2}\right) \cos 2\theta\Big], \qquad (8)$$

$$u_2(r, \theta) = \frac{B}{2}\left[r^2 - (R_2^2 + R_3^2) + \frac{R_2^2 R_3^2}{r^2}\right]\sin 2\theta, \tag{9}$$

где (r, θ) — полярные координаты точки x;

$$B = \left[\varkappa (R_2^2 + R_3^2) \ln \frac{R_3}{R_2} + \frac{R_2^2 - R_3^2}{\varkappa}\right]^{-1}; \qquad \varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu};$$

индексы i и n опущены. Нетрудно найти, что при $R_{2i}^{(n)} \to 0$ $(n \to \infty)$

$$\int_{K_{3i} \setminus K_{2i}} W\left(\vec{u}(x)\right) dx = a_{11}(\lambda, \mu) \frac{1}{\ln \frac{1}{R_{2i}^{(n)}}} + O\left(\left[\ln \frac{1}{R_{2i}^{(n)}}\right]^{-2}\right). \tag{10}$$

Построим вектор $\vec{\varphi}^1(x)$ следующим образом:

$$\varphi_1^1(x) = \begin{cases} 0, & x \in \bigcup_i K_{2i}^{(n)} \\ u_1(r, \theta), & x \in \bigcup_i \left(K_{3i}^{(n)} \setminus K_{2i}^{(n)}\right) \\ 1, & x \bar{\in} \bigcup_i K_{3i}^{(n)} \end{cases} \tag{11}$$

$$\varphi_2^1(x) = \begin{cases} 0, & x \in \bigcup_i K_{2i}^{(n)} \\ u_2(r, \theta), & x \in \bigcup_i \left(K_{3i}^{(n)} \setminus K_{2i}^{(n)}\right) \\ 0, & x \bar{\in} \bigcup_i K_{3i}^{(n)} \end{cases} \tag{12}$$

Легко видеть, что $\vec{\varphi}^1(x) \in W_1(S, \delta, n)$, где $W_p(S, \delta, n) = \left\{\vec{\varphi}^p : \vec{\varphi}^p \in W_2^1(T^{(n)});\ \vec{\varphi}^p(x) = 0,\ x \in \partial F^{(n)};\ \varphi_k^p(x) = \delta_{pk},\ x \in S_\delta^+ \cup S_\delta^-\right\}$
$p = 1, 2.$

Согласно определению $C_{pq}^{(n)}(S, \delta)$ ([1], (1.2)), будем иметь

$$C_{11}^{(n)}(S, \delta) \leqslant \int_T W\left(\vec{\varphi}^1(x)\right) dx = \sum_i{}' \int_{K_{3i} \setminus K_{2i}} W\left(\vec{u}(x)\right) dx + \int W\left(\vec{\varphi}^1(x)\right) dx,$$

где $\sum_i{}'$ — суммирование по i для тех кругов $K_{3i}^{(n)}$, которые целиком лежат в $T(S, \delta)$, а второе слагаемое — по остальным. В силу (10) второе слагаемое стремится к нулю при $R_{2i}^{(n)} \to 0$, т. е. при $n \to \infty$.

Таким образом:

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} C_{11}^{(n)}(S, \delta) \leqslant a_{11}(\lambda, \mu) \overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_i{}' \frac{1}{\ln \frac{1}{R_{2i}^{(n)}}}. \tag{13}$$

Далее построим вектор $\vec{v} = (v_1, v_2)$, удовлетворяющий однородному уравнению (1′) в кольце $K_{3i}^{(n)} \setminus K_{2i}^{(n)}$ и таким граничным условиям:

$$v_1(R_2, \theta) = v_2(R_2, \theta) = 0,$$
$$v_1(R_3, \theta) = 0; \; v_2(R_3, \theta) = 1.$$

Вектор $v(x)$ имеет вид

$$v_1(r, \theta) = \frac{B}{2}\left[r^2 - (R_2^2 + R_3^2) + \frac{R_2^2 R_3^2}{r^2}\right] \sin 2\theta, \tag{14}$$

$$v_2(r, \theta) = \frac{B}{2}\left[2\varkappa (R_2^2 + R_3^2) \ln\frac{r}{R_2} + \frac{2}{\varkappa}(R_2^2 - r^2) - \left(r^2 - (R_2^2 + R_3^2) + \frac{R_2^2 R_3^2}{r^2}\right)\cos 2\theta\right], \tag{15}$$

где индексы i, n опущены. Аналогично предыдущему, построив вектор $\vec{\varphi}^2(x) \in W_2(S, \delta, n)$ по вектору $\vec{v}(x)$, найдем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} C_{22}^{(n)}(S, \delta) \leqslant a_{22}(\lambda, \mu) \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_i{}' \frac{1}{\ln \frac{1}{R_{2i}^{(n)}}}, \tag{16}$$

при этом $a_{22}(\lambda, \mu) = a_{11}(\lambda, \mu)$.

Для доказательства обратных неравенств в качестве множества $F^{(n)}$ возьмем множество $K^{(n)} = \bigcup_i{}' K_{1i}^{(n)}$, где $\bigcup_i{}'$ — означает суммирование по тем значениям i, для которых круги $K_{3i}^{(n)}$ целиком лежат в $T(S, \delta)$. Множество $T(S, \delta)/K^{(n)}$ обозначим через $\overline{T}^{(n)}(S, \delta)$, а классы векторов $W_p(S, \delta, n)$ для множества $\overline{T}^{(n)}(S, \delta)$ обозначим через $\overline{W}_p(S, \delta, n)$, т. е.

$$\overline{W}_p(S, \delta, n) = \left\{\vec{u}^p : \vec{u}^p \in W_2^1\left(\overline{T}^{(n)}\right); \; \vec{u}^p(x) = 0, \; x \in \partial K^{(n)}; \right.$$
$$\left. u_k^p(x) = \delta_{pk}, \; x \in S_\delta^+ \cup S_\delta^-\right\}, \; p = 1,2.$$

Пусть вектор $\vec{h}^1(x) \in \overline{W}_1(S, \delta, n)$ реализует минимум функционала:

$$H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{h}^1\right) = \min_{\bar{g} \in W_1} \int_{\overline{T}^{(n)}} W\left(\vec{g}(x)\right) dx. \tag{17}$$

Поскольку

$$W_1(S, \delta, n) \subset \overline{W}_1(S, \delta, n),$$

то
$$H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{h}^1\right) \leqslant C_{11}^{(n)}(S, \delta).$$

Положим (18)

$$\vec{\alpha}(x) = \vec{e}_1 + \left[\vec{\psi}^1(x) - \vec{e}_1\right]\eta(x),$$

где $\vec{e}_1$ — постоянный вектор (1,0); $\vec{\psi}(x)$ — вектор, построенный по формулам (11) — (12), но при этом функции u_1 и u_2 построены для кольца $K_{3i}^{(n)} \setminus K_{1i}^{(n)}$;

$$\eta(x) = \eta(r) = \eta_1\left(\frac{r}{R_3}\right),$$

где $\eta_1(t)$ — бесконечно дифференцируемая функция, равная 1 при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ и равная нулю при $t \geqslant 1$. Вектор $\vec{h}^1(x)$ будем искать в виде

$$\vec{h}^1(x) = \vec{\alpha}(x) + \vec{\beta}(x). \tag{19}$$

Далее введем вектор

$$\vec{f}(x) = A\vec{\alpha}(x) = \mu\Delta\vec{\alpha}(x) + (\lambda + \mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{\alpha}(x).$$

Он отличен от нуля только на множестве $\bigcup_i{}' \left(K_{3i}^{(n)} \setminus \overline{K}_{3i}^{(n)}\right)$ $\left(\text{где } \overline{K}_{3i}^{(n)} \text{ — круг радиуса } \frac{1}{2}R_{3i}^{(n)}\right)$, так как вне $K_{3i}^{(n)}$ вектор $\vec{\alpha}(x)$ — постоянный, а в кольце $\overline{K}_{3i}^{(n)} \setminus K_{1i}^{(n)}$ вектор $\vec{\alpha}(x) = \vec{\psi}^1(x)$ удовлетворяет уравнению $A\vec{\psi}^1(x) = 0$.

Вектор $\vec{\beta}(x)$ будем искать как минимум функционала

$$H_f\left(\vec{\beta}\right) = \int_{\overline{T}^{(n)}}\left[W\left(\vec{\beta}\right) + \vec{\beta}\cdot\vec{f}\right]dx = \min\int_{\overline{T}^{(n)}}\left[W\left(\vec{\gamma}\right) + \vec{\gamma}\cdot\vec{f}\right]dx, \tag{20}$$

где минимум берется по классу

$$W_0(S, \delta, n) = \left\{\vec{\gamma} : \vec{\gamma} \in W_2^1\left(\overline{T}^{(n)}\right);\ \vec{\gamma}(x) = 0,\ x \in K^{(n)} \cup S_\delta^+ \cup S_\delta^-\right\}.$$

Тогда будем иметь

$$H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{h}^1\right) = H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha} + \vec{\beta}\right) = H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha}\right) + 2H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha},\ \beta\right) + H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\beta}\right).$$

Учитывая свойства векторов $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$ и первую формулу Бетти, получаем

$$2H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha}, \vec{\beta}\right) = \int_{\overline{T}^{(n)}}\vec{\beta}\cdot A\vec{\alpha}\,dx = \int_{\overline{T}^{(n)}}\vec{\beta}\cdot\vec{f}\,dx.$$

Следовательно,

$$H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{h}^1\right) = H_f\left(\vec{\beta}\right) + H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha}\right).$$

Вектор $\vec{\beta}$ реализует минимум функционала H_f (20), а величина $H_{\bar{T}(n)}(\vec{\alpha})$ — постоянна. Значит, вектор $\vec{h}^1$ реализует минимум функционала (17). В силу (18) можем записать

$$C_{11}^{(n)}(S, \delta) \geqslant H_{\bar{T}(n)}\left(\vec{h}^1\right) \geqslant H_{\bar{T}(n)}\left(\vec{\alpha}\right) - 2\sqrt{H_{\bar{T}(n)}\left(\vec{\alpha}\right)} \times$$
$$\times \sqrt{H_{\bar{T}(n)}\left(\vec{\beta}\right)} + H_{\bar{T}(n)}\left(\vec{\beta}\right).$$

Отсюда

$$\sqrt{C_{11}^{(n)}(S, \delta)} \geqslant \sqrt{H_{\bar{T}(n)}\left(\vec{\alpha}\right)} - \sqrt{H_{\bar{T}(n)}\left(\vec{\beta}\right)}. \qquad (21)$$

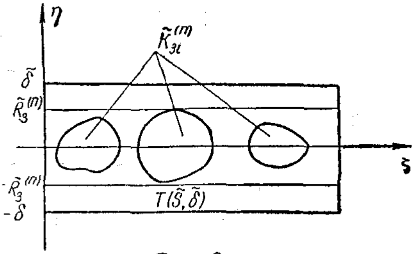

Рис. 3

Оценим второе слагаемое сверху. Так как $\vec{\beta}$ дает минимум функционалу (20), то

$$0 \geqslant H_{\bar{T}(n)}\left(\vec{\beta}\right) + \left(\vec{\beta}, \vec{f}\right) \geqslant H_{\bar{T}(n)}\left(\vec{\beta}\right) - \max_{x \in D}\left|\vec{f}(x)\right| \int_D \left|\vec{\beta}(x)\right| dx, \quad (22)$$

где $D \subset \bigcup_i K_{3i}^{(n)}$ — носитель вектора $\vec{f}(x)$. Оценим последний интеграл

$$\int_D \left|\vec{\beta}(x)\right| dx \leqslant \sum_i \int_{K_{3i}} \left|\vec{\beta}(x)\right| dx \leqslant \sqrt{\pi} \sum_i R_{3i}^{(n)} \left[\int_{K_{3i}} \left|\vec{\beta}(x)\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\pi}\, R_3^{(n)} \sqrt{N_i^{(n)}(S)} \left[\sum_i \int_{K_{3i}} \left|\vec{\beta}(x)\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad (23)$$

где $R_3^{(n)} = \max R_{3i}^{(n)}$, $N_i^{(n)}$ — число кругов $K_{3i}^{(n)}$, лежащих целиком в $T(S, \delta)$. В силу гладкости кривой Γ можно указать такое преобразование $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ с якобианом $I(\xi, \eta) \neq 0$, что множество $T(S, \delta)$ в плоскости (x, y) перейдет в прямоугольник $\tilde{T}\left(\tilde{S}, \tilde{\delta}\right)$ в плоскости (ξ, η). При этом будем считать, что прямоугольник $\tilde{T}\left(\tilde{S}, \tilde{\delta}\right)$ расположен симметрично относительно координатной оси ξ (рис. 3). Тогда можем записать

$$\sum_i \int_{K_{3i}} \left|\vec{\beta}(x, y)\right|^2 dx dy = \sum_i \int_{K_{3i}} \left|\vec{\beta}[x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)]\right|^2 |I(\xi, \eta)|\, d\xi d\eta \leqslant$$
$$\leqslant \int_{-\tilde{R}_3^{(n)}}^{\tilde{R}_3^{(n)}} \int_0^{d(\tilde{S})} \left|\vec{\beta}(\xi, \eta)\right|^2 |I(\xi, \eta)|\, d\xi d\eta,$$

где $2\widetilde{R}_3^{(n)}$ — максимальный из диаметров множества $\widetilde{K}_{3i}^{(n)}$, являющегося образом круга $K_{3i}^{(n)}$, а $d(\widetilde{S})$ — длина $\widetilde{S}$. Так как $\vec{\beta}(\xi, \eta) = 0$ при $\eta = -\widetilde{\delta}$, то из неравенства Шварца будем иметь

$$\left|\vec{\widetilde{\beta}}(\xi, \eta)\right|^2 \leqslant 2\widetilde{\delta} \int\limits_{-\widetilde{\delta}}^{\widetilde{\delta}} \sum_{k=1}^{2} \left|\frac{\partial \beta_k(\xi, t)}{\partial t}\right|^2 dt.$$

Отсюда получаем

$$\sum_i \int\limits_{K_{3i}} \left|\vec{\beta}(x)\right|^2 dx \leqslant 2\widetilde{\delta} \int\limits_{-\widetilde{R}_3^{(n)}}^{\widetilde{R}_3^{(n)}} \int\limits_0^{d(\widetilde{S})} \int\limits_{-\widetilde{\delta}}^{\widetilde{\delta}} \sum_{k=1}^{2} \left|\frac{\partial \beta_k(\xi, t)}{\partial t}\right|^2 |I(\xi, \eta)|\, dt\, d\xi\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant 4C_1 R_3^{(n)} \delta D_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\beta}\right) \leqslant \frac{4C_1 C_0}{\mu_0} R_3^{(n)} \delta H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\beta}\right), \tag{24}$$

где постоянная C_0 из неравенства Корна, а μ_0 — из положительной определенности оператора A.

Из неравенств (23) — (24) имеем

$$\int\limits_D \left|\vec{\beta}(x)\right| dx \leqslant \sqrt{C\delta \left(R_3^{(n)}\right)^2 N_i^{(n)}(S)\, H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\beta}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sqrt{\delta}\, R_3^{(n)} \sqrt{H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\beta}\right)}, \tag{25}$$

поскольку $N_i^{(n)}(S) \leqslant d(S) / R_3^{(n)}$, при этом постоянная C_1 от n и δ не зависит.

Оценим теперь $\max\left|\vec{f}(x)\right|$. Рассмотрим

$$f_1(x) = \left[A\vec{\alpha}(x)\right]_1 = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_1^2} + \mu \frac{\partial^2 \alpha_1}{\partial x_2^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 \alpha_2}{\partial x_1 \partial x_2} =$$

$$= (\lambda + 2\mu)\left[\frac{\partial^2 \psi_1^1}{\partial x_1^2}\eta + 2\frac{\partial \psi_1^1}{\partial x_1}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + (\psi_1^1 - 1)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2}\right] +$$

$$+ \mu\left[\frac{\partial^2 \psi_1^1}{\partial x_2^2}\eta + 2\frac{\partial \psi_1^1}{\partial x_2}\frac{\partial \eta}{\partial x_2} + (\psi_1^1 - 1)\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2}\right] +$$

$$+ (\lambda + \mu)\left[\frac{\partial^2 \psi_2^1}{\partial x_1 \partial x_2}\eta + \frac{\partial \psi_2^1}{\partial x_2}\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2^1}{\partial x_1}\frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \psi_2^1 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1 \partial x_2}\right].$$

Заметим, что производная по любому направлению от функций $\eta(x)$ допускает оценку

$$D^m\eta(x)=O\left(\left[R_{3i}^{(n)}\right]^{-m}\right),\quad \frac{R_{3i}^{(n)}}{2}\leqslant r\leqslant R_{3i}^{(n)}.$$

Используя явный вид функции $\psi_1^1(r,\theta)$ (11) и учитывая, что $R_{1i}^{(n)}=o\left(R_{3i}^{(n)}\right)$, нетрудно получить

$$D^l\psi_1^1(r,\theta)=O\left(\left[\left(R_{3i}^{(n)}\right)^l\ln\frac{1}{R_{1i}^{(n)}}\right]^{-1}\right),\quad \frac{R_{3i}^{(n)}}{2}\leqslant r\leqslant R_{3i}^{(n)}.\quad l=1,2.$$

Следовательно,

$$f_1(x)=O\left(\left[\left(R_{3i}^{(n)}\right)^2\ln\frac{1}{R_{1i}^{(n)}}\right]^{-1}\right),\quad \frac{R_{3i}^{(n)}}{2}\leqslant r\leqslant R_{3i}^{(n)}.$$

Совершенно аналогично можно показать, что

$$f_2(x)=O\left(\left[\left(R_{3i}^{(n)}\right)^2\ln\frac{1}{R_{1i}^{(n)}}\right]^{-1}\right),\quad \frac{R_{3i}^{(n)}}{2}\leqslant r\leqslant R_{3i}^{(n)}.$$

Значит,

$$\max|\vec{f}(x)|=O\left(\left[\left(R_{3i}^{(n)}\right)^2\ln\frac{1}{R_{1i}^{(n)}}\right]^{-1}\right),\quad \frac{R_{3i}^{(n)}}{2}\leqslant r\leqslant R_{3i}^{(n)}.\tag{26}$$

Из неравенств (22), (25) и (26) получаем

$$0\geqslant H_{\overline{T}(n)}\left(\vec{\beta}\right)-\frac{C_2\sqrt{\delta}}{R_{3i}^{(n)}\ln\frac{1}{R_{1i}^{(n)}}}\sqrt{H_{\overline{T}(n)}\left(\vec{\beta}\right)}.$$

В силу условий 3) и 4)

$$R_{3i}^{(n)}\ln\frac{1}{R_{1i}^{(n)}}\geqslant C=\mathrm{const}.$$

Таким образом,

$$0\geqslant H_{\overline{T}(n)}\left(\vec{\beta}\right)-2C_3\sqrt{\delta}\sqrt{H_{\overline{T}(n)}\left(\vec{\beta}\right)}=$$
$$=\left(\sqrt{H_{\overline{T}(n)}\left(\vec{\beta}\right)}-C_3\sqrt{\delta}\right)^2-C_3^2\delta.$$

Отсюда

$$H_{\overline{T}(n)}\left(\vec{\beta}\right)\leqslant 4C_3^2\delta,\tag{27}$$

причем постоянная C_3 от δ, n не зависит.

В неравенстве (21) остается оценить снизу $H_{\overline{T}(n)}\left(\vec{\alpha}\right)$.

Запишем

$$H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha}\right) = \int_{\overline{T}^{(n)}} W\left(\vec{\alpha}(x)\right) dx = \int_{\overline{T}^{(n)}} \eta^2(x)\, W\left(\vec{\psi}^1(x)\right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\overline{T}^{(n)}} \eta(x) \sum_{j,\,k,\,l,\,m=1}^{3} c_{jklm}(x)\, \Delta_{jk}(x)\, \varepsilon_{lm}\left(\vec{\psi}^1(x)\right) dx +$$

$$+ \frac{1}{8}\int_{\overline{T}^{(n)}} \sum_{j,\,k,\,l,m=1}^{3} c_{jklm}(x)\, \Delta_{jk}(x)\, \Delta_{lm}(x)\, dx, \qquad (28)$$

где

$$c_{jjjj} = \lambda + 2\mu;\quad c_{jjkk} = \lambda;\quad c_{jkjk} = \mu;\quad j \neq k,$$

а все остальные коэффициенты $c_{jklm} = 0$;

$$\Delta_{jk}(x) = \left(\psi_j^1(x) - \delta_{1j}\right)\frac{\partial\eta(x)}{\partial x_k} + \left(\psi_k^1(x) - \delta_{1k}\right)\frac{\partial\eta(x)}{\partial x_j}.$$

Учитывая, что $\eta(x) \equiv 1$ при $0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{2} R_{3i}^{(n)}$ и $\eta(x) \equiv 0$ при $r > R_{3i}^{(n)}$, получим

$$H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha}\right) \geqslant \sum_i{}' \Bigg\{ \int_{\overline{K}_{3i}\setminus K_{1i}} W\left(\vec{\psi}^1\right) dx - \int_{K_{3i}\setminus \overline{K}_{3i}} W\left(\vec{\psi}^1\right) dx -$$

$$- \frac{(\lambda + 2\mu)}{4}\left(R_3^{(n)}\right)^2 \left[a_i b_i + a_i^2\right] \Bigg\},$$

где

$$a_i = \max |\Delta_{jk}(x)|;\quad b_i = \max \left|\varepsilon_{jk}\left(\vec{\psi}^1(x)\right)\right|,$$

а максимум берется по всем $x \in K_{3i}^{(n)} \setminus \overline{K}_{3i}^{(n)}$ и $1 \leqslant j,\ k \leqslant 2$. Из свойств функции $\eta(x)$ и вектора $\vec{\psi}^1(x)$ вытекает, что при

$$R_{1i}^{(n)} = o\left(R_{3i}^{(n)}\right) \text{ и } \frac{1}{2} R_{3i}^{(n)} \leqslant r \leqslant R_{3i}^{(n)}$$

имеют место оценки

$$a_i = O\left(\left[R_{3i}^{(n)} \ln \frac{1}{R_{1i}^{(n)}}\right]^{-1}\right),$$

$$b_i = O\left(\left[R_{3i}^{(n)} \ln \frac{1}{R_{1i}^{(n)}}\right]^{-1}\right).$$

Следовательно,

$$\int_{K_{3i}\setminus \overline{K}_{3i}} W\left(\vec{\psi}^1(x)\right) dx = O\left(\left[\ln \frac{1}{R_{1i}^{(n)}}\right]^{-2}\right)$$

Наконец, в силу условий 3) и 4) и того, что

$$N_i^{(n)}(S) \leqslant d(S)/\overline{R}^{(n)},$$

получаем

$$H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{a}\right) \geqslant \sum_i{}' \int_{\overline{K}_{3i} \setminus K_{1i}} W\left(\vec{\psi}^1\right) dx - O\left(\left[\ln \frac{1}{R_{1i}^{(n)}}\right]^{-1}\right). \quad (29)$$

Значение интеграла легко вычисляется, если учесть, что

$$R_{1i}^{(n)} = o\left(R_{3i}^{(n)}\right):$$

$$\sum_i{}' \int_{\overline{K}_{3i} \setminus K_{1i}} W\left(\vec{\psi}^1(x)\right) dx \geqslant a_{11}(\lambda, \ \mu) \sum_i{}' \frac{1}{\ln \frac{1}{R_{1i}^{(n)}}} - O\left(\left[\ln \frac{1}{R_{1i}^{(n)}}\right]^{-1}\right). \quad (30)$$

Таким образом, неравенства (21), (27), (29) и (30) дают

$$\sqrt{C_{11}^{(n)}(S, \ \delta)} \geqslant \sqrt{a_{11}(\lambda, \ \mu) \sum_i{}' \frac{1}{\ln \frac{1}{R_{1i}^{(n)}}} - O\left(\frac{1}{\ln \frac{1}{R_{1i}^{(n)}}}\right)} - 2C_3\sqrt{\delta}.$$

Отсюда получаем

$$\lim_{\delta \to 0} \varliminf_{n \to \infty} C_{11}^{(n)}(S, \ \delta) \geqslant a_{11}(\lambda, \ \mu) \lim_{n \to \infty} \sum_i{}' \frac{1}{\ln \frac{1}{R_{1i}^{(n)}}}. \quad (31)$$

Совершенно аналогично, построив вектор

$$\vec{h}^2(x) \in \overline{W}_2(S, \ \delta, \ n),$$

покажем:

$$\lim_{\delta \to 0} \varliminf_{n \to \infty} C_{22}^{(n)}(S, \ \delta) \geqslant a_{22}(\lambda, \ \mu) \lim_{n \to \infty} \sum_i{}' \frac{1}{\ln \frac{1}{R_{1i}^{(n)}}}, \quad (32)$$

причем

$$a_{11}(\lambda, \ \mu) = a_{22}(\lambda, \ \mu).$$

В силу условия 3) имеем

$$\sum_i{}' \frac{1}{\ln \frac{1}{R_{2i}^{(n)}}} \leqslant \frac{N^{(n)}(S)}{\ln \frac{1}{R^{(n)}} + \ln a}, \quad (33)$$

$$\sum_i{}' \frac{1}{\ln \frac{1}{R_{1i}^{(n)}}} \geqslant \frac{N^{(n)}(S)}{\ln \frac{1}{R^{(n)}} + \ln b}, \quad (34)$$

где $N^{(n)}(S)$ — число тел $F_i^{(n)}$, проекции которых на Γ попадают строго внутрь куска $S \subset \Gamma$.

Наконец, из неравенств (13), (16), (31) — (34) получим

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}} C_{pp}^{(n)}(S, \delta) = \lim_{\delta\to 0}\underline{\lim_{n\to\infty}} C_{pp}^{(n)}(S, \delta) =$$

$$= a_{pp}(\lambda, \mu)\lim_{n\to\infty}\frac{N^{(n)}(S)}{\ln\frac{1}{R^{(n)}}}, \quad p = 1, 2, \tag{35}$$

т. е. имеем равенство (7′) в случае $p = q$.

Перейдем к доказательству равенства (7′) в случае $p \neq q$. Пусть $\vec{v}^1 \in W_1(S, \delta, n)$, $\vec{v}^2 \in W_2(S, \delta, n)$ и реализующие минимум функционалов

$$H_{T(n)}\left(\vec{v}^i\right) = \int_{T(n)} W\left(\vec{v}^i(x)\right)dx, \quad i = 1, 2$$

в классах $W_1(S, \delta, n)$ и $W_2(S, \delta, n)$ соответственно. Тогда по определению (1. 2) [1] имеем

$$C_{12}^{(n)}(S, \delta) = C_{21}^{(n)}(S, \delta) = H_{T(n)}\left(\vec{v}^1, \vec{v}^2\right). \tag{36}$$

Пусть

$$\vec{\varphi}^1 \in W_1(S, \delta, n) \text{ и } \vec{\varphi}^2 \in W_2(S, \delta, n)$$

есть векторы, с помощью которых были получены оценки (13) и (16), а $\vec{h}^1 \in \overline{W}_1(S, \delta, n)$ и $\vec{h}^2 \in \overline{W}_2(S, \delta, n)$ — векторы, которые давали оценки (31) и (32). Покажем, что имеют место неравенства

$$H_{\overline{T}(n)}\left(\vec{h}^1, \vec{h}^2\right) - \varepsilon_1(n, \delta) \leqslant H_{T(n)}\left(\vec{v}^1, \vec{v}^2\right) \leqslant H_{T(n)}\left(\vec{\varphi}^1, \vec{\varphi}^2\right) + \varepsilon_2(n, \delta), \tag{37}$$

причем

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\varepsilon_1(n, \delta) = \lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\varepsilon_2(n, \delta) = 0.$$

Предварительно установим такие неравенства:

$$H_{\overline{T}(n)}\left(\vec{h}^1 + \vec{h}^2\right) \leqslant H_{T(n)}\left(\vec{v}^1 + \vec{v}^2\right) \leqslant H_{T(n)}\left(\vec{\varphi}^1 + \vec{\varphi}^2\right). \tag{38}$$

Действительно, согласно построению $\vec{h}^1$ и $\vec{h}^2$, реализовали минимум функционалов $H_{\overline{T}(n)}$ в классах $\overline{W}_1(S, \delta, n)$ и $\overline{W}_2(S, \delta, n)$ соответственно. Отсюда следует, что их сумма

$$\vec{h}^1 + \vec{h}^2 \in \overline{W}_{1,2}(S, \delta, n) = \Big\{\vec{h} : \vec{h} \in W_2^1(T^{(n)});$$

$$\vec{h}(x) = 0, \ x \in K^{(n)}; \ h_1(x) = h_2(x) = 1, \ x \in S_\delta^+ \cup S_\delta^-\Big\}$$

реализует минимум функционала $H_{\overline{T}(n)}$ в классе $\overline{W}_{1,\,2}(S,\ \delta,\ n)$. Очевидно, вектор

$$\vec{v}^1+\vec{v}^2\in W_{1,\,2}(S,\ \delta,\ n)=\Big\{\vec{v}:\vec{v}\in W_2^1(T^{(n)});$$

$$\vec{v}(x)=0,\ x\in\partial F^{(n)};\ v_1(x)=v_2(x)=1,\ x\in S_\delta^+\cup S_\delta^-\Big\}.$$

Продолженный нулем на множество $F^{(n)}$ вектор

$$\vec{v}^1+\vec{v}^2\in\overline{W}_{1,\,2}(S,\ \delta,\ n)$$

и потому верно левое неравенство (38). Из свойств $\vec{\varphi}^1$ и $\vec{\varphi}^2$ вытекает, что

$$\vec{\varphi}^1+\vec{\varphi}^2\in W_{1,\,2}(S,\ \delta,\ n).$$

Но вектор $\vec{v}^1+\vec{v}^2$ сообщает минимум функционалу $H_{T^{(n)}}$ в классе $W_{1,\,2}(S,\ \delta,\ n)$. Следовательно, верно правое неравенство (38).

Из неравенства (38) вытекает

$$H_{\overline{T}(n)}\left(\vec{h}^1,\ \vec{h}^2\right)\leqslant H_{T^{(n)}}\left(\vec{v}^1,\ \vec{v}^2\right)+\frac{1}{2}\sum_{p=1}^{2}\left[H_{T^{(n)}}\left(\vec{v}^p\right)-H_{\overline{T}(n)}\left(\vec{h}^p\right)\right]. \quad (39)$$

Так как

$$H_{T^{(n)}}\left(\vec{v}^p\right)=C_{pp}^{(n)}(S,\ \delta),$$

то в силу равенства (35) имеем

$$C_{pp}^{(n)}(S,\ \delta)\leqslant a_{pp}\lim_{n\to\infty}\frac{N^{(n)}(S)}{\ln\dfrac{1}{R^{(n)}}}+\varepsilon_p(n,\ \delta), \quad (40)$$

причем

$$\lim_{\delta\to0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\varepsilon_p(n,\ \delta)=0,\ p=1,\ 2.$$

Из неравенства (21) и оценок (27), (29), (30), (34) вытекает, что

$$H_{\overline{T}(n)}\left(\vec{h}^p\right)\geqslant a_{pp}\lim_{n\to\infty}\frac{N^{(n)}(S)}{\ln\dfrac{1}{R^{(n)}}}-\bar{\varepsilon}_p(n,\ \delta), \quad (41)$$

где

$$\lim_{\delta\to0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\bar{\varepsilon}_p(n,\ \delta)=0;\ p=1,\ 2.$$

Таким образом, неравенства (39) — (41) дают

$$H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{h}^1, \vec{h}^2\right) \leqslant H_{T(n)}\left(\vec{v}^1, \vec{v}^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{2}\left[\varepsilon_p(n, \delta) + \bar{\varepsilon}_p(n, \delta)\right].$$

Аналогичные рассуждения приводят к оценке сверху:

$$H_{T(n)}\left(\vec{v}^1, \vec{v}^2\right) \leqslant H_{T(n)}\left(\vec{\varphi}^1, \vec{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{2}\left[H_{T(n)}\left(\vec{\varphi}^p\right) - H_{T(n)}\left(\vec{v}^p\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant H_{T(n)}\left(\vec{\varphi}^1, \vec{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{2}\left[\varepsilon_p'(n, \delta) + \bar{\varepsilon}_p'(n, \delta)\right],$$

причем

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\varepsilon_p'(n, \delta) = \lim_{\delta\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\bar{\varepsilon}_p'(n, \delta) = 0.$$

Таким образом, неравенства (37) установлены.

Зная явные выражения для $\vec{\varphi}^1(x)$ (11) — (12) и $\vec{\varphi}^2(x)$ (14) — (15), нетрудно найти

$$H_{T(n)}\left(\vec{\varphi}^1, \vec{\varphi}^2\right) = \sum_i{}' \int_{K_{3i}\setminus K_{2i}} W\left(\vec{\varphi}^1, \vec{\varphi}^2\right) dx +$$

$$+ \int_{T(n)\setminus \bigcup_i'(K_{3i})} W\left(\vec{\varphi}^1, \vec{\varphi}^2\right) dx \leqslant O\left(\left[\ln\frac{1}{R_{2i}^{(n)}}\right]^{-1}\right),$$

где, как и ранее, $\sum_i'$ — означает суммирование по тем i, для которых круги $K_{3i}^{(n)}$ целиком лежат в $T(S, \delta)$. Отсюда, согласно (36) и (37), получаем

$$\lim_{\delta\to 0}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,C_{12}^{(n)}(S, \delta) \leqslant 0. \tag{42}$$

Однако

$$H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{h}^1, \vec{h}^2\right) = H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha}^1 + \vec{\beta}^1, \vec{\alpha}^2 + \vec{\beta}^2\right) \geqslant$$

$$\geqslant H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2\right) - \sqrt{H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha}^1\right) H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\beta}^2\right)} -$$

$$- \sqrt{H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha}^2\right) H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\beta}^1\right)} - \sqrt{H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\beta}^1\right) H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\beta}^2\right)}.$$

Используя равенство (28) и последующие оценки, нетрудно получить

$$H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha}^p\right) \leqslant a_{pp}\lim_{n\to\infty}\frac{N^{(n)}(S)}{\ln\frac{1}{R^{(n)}}} + 1.$$

Следовательно, совместно с неравенством (27) имеем

$$H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{h}^1, \vec{h}^2\right) \geqslant H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2\right) - C\sqrt{\delta}, \tag{43}$$

причем C от δ, n не зависит. Проводя те же рассуждения, что и при получении оценки (31), найдем

$$H_{\overline{T}^{(n)}}\left(\vec{\alpha}^1, \vec{\alpha}^2\right) \geqslant -O\left(\left[\ln\frac{1}{R_{1i}^{(n)}}\right]^{-1}\right).$$

Значит, в силу (43) и (36) — (37) имеем

$$\lim_{\delta\to 0}\varliminf_{n\to\infty} C_{12}^{(n)}(S, \delta) \geqslant 0. \tag{44}$$

Наконец, из неравенств (42) и (44) заключаем:

$$\lim_{\delta\to 0}\varliminf_{n\to\infty} C_{12}^{(n)}(S, \delta) = \lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{n\to\infty} C_{12}^{(n)}(S, \delta) = 0,$$

и тем самым равенство (7) доказано полностью.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Е. Я. Хруслову за помощь в работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. П. Котляров. Первая краевая задача для уравнения теории упругости в области со сложной границей. I. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения». См. настоящий сборник.

2. Є. Я. Хруслов. Перша крайова задача для еліптичних самоспряжених операторів в області з дрібнозернистою границею. ДАН УРСР, серія А, 362, 1972.

3. Н. И. Мусхелишвили. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М. — Л., Изд. АН СССР, 1949.

Поступила 28 октября 1970 г.