СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ КВАЗИУНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

А. В. Кужель

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе вводится понятие характеристической матрицы-функции и изучается спектр широкого класса линейных ограниченных операторов (K_r-операторы), действующих в пространстве с индефинитной метрикой (определение и необходимые свойства которого приведены в § 1).

Одним из основных результатов работы является теорема умножения характеристических матриц-функций и критерий изоморфизма K_r-операторов, которые дают возможность построить треугольную модель (аналог спектрального разложения) для K_r-операторов, действующих в в гильбертовом пространстве, а также для нерастягивающих операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой «конечного ранга» (пространство $\Pi_\varkappa$).

Отметим, что в гильбертовом пространстве понятие характеристической матрицы-функции квазиунитарного оператора было введено М. С. Лившицем [1, 2]. Затем в работе М. С. Лившица и В. П. Потапова [3] для некоторых классов сцеплений была установлена теорема умножения характеристических матриц-функций.

Автором [4] понятие характеристической матрицы-функции было введено в несколько ином виде, чем в [3]. При этом были использованы идеи работ М. С. Бродского и М. С. Лившица [5, 6], что дало возможность доказать теорему умножения в более общем виде, чем в [3].

Здесь понятие характеристической матрицы-функции вводится так же, как и в [4]. Однако теорема умножения устанавливается не для «специальных» сцеплений, как это делалось в [4], а в самом общем виде.

Основные результаты статьи (без доказательств) опубликованы в сообщениях [7, 8]. При этом предполагалсеь, что рассматриваемые операторы действуют в пространстве $\Pi_\varkappa$. Здесь же аналогичные результаты устанавливаются для более общих, чем $\Pi_\varkappa$, пространств, что, однако, почти не усложняет рассуждения и конечные результаты.

Автор считает своим долгом выразить благодарность М. Г. Крейну, И. С. Иохвидову, Ю. П. Гинзбургу, Ю. Л. Шмульяну и другим участникам семинара при Одесском инженерно-строительном институте, принявшим участие в обсуждении излагаемых здесь результатов (в случае пространств $\Pi_\varkappa$) и указавшим автору на неточности, которые были допущены в его предыдущих публикациях.

§ 1. K_r-ОПЕРАТОРЫ

В этом параграфе введено понятие квазиунитарного оператора, а также ряд вспомогательных понятий (α-базис, матрица искажения и др.).

Показано, что матрица искажения произвольного K_r-оператора является неособенной матрицей.

1. Пространство с индефинитной метрикой. Пусть H — гильбертово пространство, (f, g) — скалярное произведение в H, а P — ограниченный самосопряженный непрерывно обратимый оператор, действующий в H. Введем в H метрику, полагая

$$[f, g] = (Pf, g), \quad (f, g \in H). \tag{1.1}$$

Пространство H со скалярным произведением (1.1) является, вообще говоря, пространством с индефинитной (точнее, с эрмитово-индефинитной) метрикой *, которое будем обозначать через Π и говорить соответственно об H-метрике (гильбертова метрика, задаваемая скалярным произведением (f, g)) и Π-метрике (индефинитная метрика, задаваемая скалярным произведением (1.1)). Легко проверить, что определенное так пространство Π является невырожденным.

В дальнейшем важную роль будут играть проекционно-полные подпространства, которые независимо были введены в работах Э. Шайбе [10] и И. С. Иохвидова [11] и детально изучены Ю. П. Гинзбургом и И. С. Иохвидовым [9]. Для нас важно то, что в рассматриваемом пространстве Π произвольное невырожденное конечномерное подпространство является проекционно-полным. При этом, если Π — произвольное (не обязательно конечномерное) проекционно-полное подпространство пространства Π, то подпространство ** $\Pi_2 = \Pi\,[-]\,\Pi_1$ также является проекционно-полным и, кроме того, $\Pi = \Pi_1\,[+]\,\Pi_2$ (см., напр., [9], § 4, п. 3, утв. 5).

2. K_r-операторы. Обозначим через T^0 оператор, сопряженный в Π-метрике к оператору T. Тогда

$$T^0 = P^{-1}T^*P,$$

где T^* — оператор, сопряженный к T в H-метрике.

Воспользовавшись предыдущим соотношением, легко проверить, что свойства знаков сопряжения 0 и * аналогичны.

Определение. *Ограниченный непрерывно обратимый оператор T, действующий в пространстве с индефинитной метрикой Π, называется* квазиунитарным оператором ранга r *(в дальнейшем K_r —* оператором*), если*

$$\dim[(I - T^0T)\,\Pi] = r \quad (0 \leqslant r < \infty).$$

Из этого определения и соотношений

$$\dim[(I - TT^0)\,\Pi] = \dim[T(I - T^0T)\,T^{-1}\Pi] = \dim[(I - T^0T)\,\Pi],$$
$$\dim[(I - T^{-0}T^{-1})\,\Pi] = \dim[T^{-0}(T^0T - I)\,T^{-1}\Pi] = \dim[I - T^0T)\,\Pi]$$

вытекает, что если T есть K_r-оператор, то операторы T^0 и T^{-1} также являются K_r-операторами.

---

* Детальный анализ бесконечномерных пространств с эрмитово-индефинитной (и более общей, билинейной) метрикой дан в работе [9]. Здесь же имеется довольно полная библиография.

** Здесь и в дальнейшем $[-]$ и $[+]$ — знаки соответственно ортогонального дополнения и ортогональной суммы в Π-метрике.

Обозначим через G_T совокупность всех векторов, аннулирующих оператор $I-T^0T$. Многообразие G_T является подпространством, так как оно замкнуто (в силу непрерывности оператора $I-T^0T$) и линейно.

Подпространство G_T назовем областью унитарности оператора T.

Далее, так как оператор $I-T^0T$ самосопряженный (в П-метрике) и аннулируется на подпространстве G_T, то, очевидно,

$$(I-T^0T)\,\Pi \subset \mathfrak{R}_T, \tag{1.2}$$

где $\mathfrak{R}_T = \Pi\,[-]\,G_T$.

Покажем теперь, что имеют место следующие, необходимые для дальнейшего, соотношения:

$$G_{T^0} = G_{T^{-1}} = TG_T, \tag{1.3}$$

$$\mathfrak{R}_{T^0} = \mathfrak{R}_{T^{-1}} = T\mathfrak{R}_T. \tag{1.4}$$

Действительно, пусть $f \in G_{T^0}$ и $\varphi = T^{-1}f$. Тогда

$$(I-T^0T)\,\varphi = T^{-1}\,(I-TT^0)\,f = 0,$$

т. е. $\varphi \in G_T$. Следовательно, $T^{-1}G_{T^0} \subset G_T$ или, что то же, $G_{T^0} \subset TG_T$.

Обратно, пусть $\varphi \in G_T$. Тогда, как вытекает из соотношения

$$(I-TT^0)\,T\varphi = T\,(I-T^0T)\,\varphi = 0,$$

$T\varphi \in G_{T^0}$. Следовательно, $TG_T \subset G_{T^0}$, что и доказывает соотношение $G_{T^0} = TG_T$.

Аналогично, воспользовавшись соотношением

$$I-T^{-0}T^{-1} = -T^{-0}\,(I-T^0T)\,T^{-1},$$

(где $T^{-0} = (T^{-1})^0$), устанавливаем, что $G_{T^{-1}} = TG_T$.

Этим соотношение (1.3) обосновано.

Далее, так как соотношение $\mathfrak{R}_{T^0} = \mathfrak{R}_{T^{-1}}$ очевидно (на основании (1.3)), то остается показать, что

$$\mathfrak{R}_{T^{-1}} = T\mathfrak{R}_T. \tag{1.5}$$

Для этого рассмотрим вектор $\psi \in \mathfrak{R}_{T^{-1}}$. Так как при любом φ из G_T $(I-T^0T)\,\varphi = 0$, или, что то же, $T^{-0}\varphi = T\varphi \in G_{T^{-1}}$ (последнее в силу (1.3)), то, очевидно,

$$[T^{-1}\psi,\ \varphi] = [\psi,\ T\varphi] = 0,$$

откуда вытекает $T^{-1}\psi \in \mathfrak{R}_T$. А это значит, что $T^{-1}\mathfrak{R}_{T^{-1}} \subset \mathfrak{R}_T$, или, что то же, $\mathfrak{R}_{T^{-1}} \subset T\mathfrak{R}_T$.

Обратно, пусть $g \in \mathfrak{R}_T$ и f — произвольный вектор из $G_{T^{-1}}$. На основании (1.3) $f = T\varphi$, где $\varphi \in G_T$. Поэтому

$$[Tg,\ f] = [g,\ T^0T\varphi] = [g,\ \varphi] = 0,$$

откуда вытекает, что $T\mathfrak{R}_T \subset \mathfrak{R}_{T^{-1}}$. Следовательно, соотношение (1.5), а значит, и соотношение (1.4) обоснованы.

Рассмотрим теперь подпространство $\tilde{\mathfrak{R}}_T = \Pi \ominus G_T$ (которое, как легко проверить, связано с подпространством $\mathfrak{R}_T = \Pi\,[-]\,G_T$ соотношением $\tilde{\mathfrak{R}}_T = P\mathfrak{R}_T$), и покажем, что

$$(PA)\,\Pi = \tilde{\mathfrak{R}}_T \quad (A = I - T^0T). \tag{1.6}$$

Действительно, на основании (1.2)

$$(PA)\,\Pi \subset \tilde{\mathfrak{R}}_T. \tag{1.7}$$

Предположим, что $PAg = 0$, где $g \in \tilde{\mathfrak{R}}_T$ $(g \neq 0)$. Тогда $Ag = 0$, т. е. $g \in G_T$. А это невозможно, так как подпространства G_T и $\tilde{\mathfrak{R}}_T$ линейно независимы. Следовательно, на подпространстве $\tilde{\mathfrak{R}}_T$ оператор PA не обращается в нуль. При этом

$$\dim[(PA)\tilde{\mathfrak{R}}_T] = \dim[A\tilde{\mathfrak{R}}_T] \leqslant \dim[A\Pi] = r < \infty.$$

Но тогда

$$\dim[(PA)\tilde{\mathfrak{R}}_T] = \dim\tilde{\mathfrak{R}}_T, \tag{1.8}$$

что на основании (1.7) возможно лишь в случае, когда имеет место соотношение (1.6).

Отметим, что, как вытекает из (1.6), $A\Pi = \mathfrak{R}_T$ или, что то же,

$$(I - T^0T)\,\Pi = \mathfrak{R}_T. \tag{1.9}$$

3. **α-базис.** Так как оператор $P(I - T^0T)$ самосопряженный в H-метрике, то его можно представить в виде

$$P(I - T^0T) = \sum_{k=1}^{r} (\cdot, \varphi_k)\, J_k \varphi_k, \tag{1.10}$$

где $J_k = \pm 1$, $\varphi_k \in \tilde{\mathfrak{R}}_T$ $(k = 1, 2, \ldots r)$. Используя соотношение (1.10), получим

$$I - T^0T = \sum_{k=1}^{r} [\cdot, h_k],\ J_k h_k, \tag{1.11}$$

где $h_k = P^{-1}\varphi_k \in \mathfrak{R}_T$. Соотношение (1.11) дает возможность ввести следующее

Определение 1.1. *Совокупность векторов*

$$g_1, g_2, \ldots, g_s \quad (s \geqslant r,\ g_k \in \Pi) \tag{1.12}$$

называется α-базисом *K_r-оператора T, если оператор $I - T^0T$ может быть представлен в виде*

$$I - T^0T = \sum_{k,\,l=1}^{s} [\cdot, g_k]\, J_{kl}\, g_l, \tag{1.13}$$

где $J = \| J_{kl} \|$ — некоторая эрмитова и унитарная матрица (матрица коэффициентов).

Существование по меньшей мере одного α-базиса у произвольного K_r-оператора вытекает из соотношения (1.11). При этом, очевидно, α-базис определяется оператором T неоднозначно и может содержать линейно зависимые элементы (в том числе и нулевые).

Не трудно также видеть (на основании (1.9) и (1.13)), что линейная оболочка $\mathfrak{L}$ произвольного α-базиса K_r-оператора T содержит в себе подпространство $\mathfrak{R}_T$ $(\mathfrak{R}_T \subset \mathfrak{L})$. Если же $s = r$, то, очевидно, $\mathfrak{R}_T = \mathfrak{L}$ и α-базис (1.12) линейно независим (так как $\dim \mathfrak{R}_T = r$).

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение:

I. *Пусть* $\{g_k\}_{k=1}^{s}$ — *α-базис оператора* T, J — *соответствующая матрица коэффициентов и* $\Omega = \|\omega_{ki}\|$ — *неособенная матрица, для которой матрица*

$$\tilde{J} = \Omega^{-*} J \Omega^{-1} \tag{1.14}$$

является унитарной и самосопряженной. Тогда совокупность векторов $\{\tilde{g}_k\}_{k=1}^{s}$, *определяемая соотношениями*

$$\tilde{g}_k = \sum_{n=1}^{s} \omega_{kn} g_n \quad (k = 1, 2, \ldots ; s), \tag{1.15}$$

также является α-базисом оператора T. *При этом соответствующая матрица коэффициентов* $\tilde{J} = \|\tilde{J}_{ki}\|$ *определяется соотношением* (1.14).

Действительно, в таком случае на основании (1.13)

$$\sum_{k, i=1}^{s} [\cdot, \tilde{g}_k] \tilde{J}_{ki} \tilde{g}_i = \sum_{n, m=1}^{s} [\cdot, g_n] \Big(\sum_{k, i=1}^{s} \omega_{nk}^{*} \tilde{J}_{ki} \omega_{im} \Big) g_m =$$

$$= \sum_{n, m=1}^{s} [\cdot, g_n] J_{nm} g_m = I - T^0 T,$$

что и доказывает сформулированное утверждение.

4. Матрица искажения. Пусть $G = \|[g_k, g_i]\|$ — матрица Грама системы (1.13), а J — матрица коэффициентов, соответствующая α-базису (1.12). В дальнейшем важную роль играет матрица

$$\tau = I - JG, \tag{1.16}$$

которая называется матрицей искажения оператора T.

Рассмотрим некоторые свойства матрицы искажения.

I. *Матрица искажения неособенная.*

Действительно, предположим, что $x\tau = 0$, или, что то же,

$$xJG = x, \tag{1.17}$$

где $x = \{x_k\}$ — векторная строка. Из (1.17) вытекают соотношения

$$\sum_{n, m=1}^{s} x_m J_{mn} [g_n, g_k] = x_k \quad (k = 1, 2, \ldots, s),$$

которые можно переписать так:

$$x_k = [\varphi, g_k] \quad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{1.18}$$

где

$$\varphi = \sum_{n, m=1}^{s} x_m J_{mn} g_n. \tag{1.19}$$

Подставляя (1.18) в (1.19), получим (на основании (1.13))

$$\varphi = (I - T^0 T) \varphi,$$

откуда, учитывая обратимость оператора T, находим, что $\varphi = 0$. Но тогда на основании (1.18) $x = 0$. А это и значит, что матрица τ неособенная.

II. *Пусть* $\{g_k\}_{k=1}^{s}$ — *α-базис, а* τ — *матрица искажения оператора* T. *Тогда*

$$T^0Tg_k = \sum_{n=1}^{s} \tau_{kn}^{*} g_n \quad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{1.20}$$

где τ_{kn}^{*} — *элемент матрицы* τ^{*}.

Действительно, воспользовавшись соотношением (1.13), получим

$$x - y = xJG, \tag{1.21}$$

где
$x = \{[f, g_k]\}$, $y = \{[Tf, Tg_k]\}$ ($f \in \Pi$) — строчные векторы. Переписывая (1.21) в виде $y = x\tau$, получим следующее соотношение:

$$[Tf, Tg_k] = \sum_{n=1}^{s} [f, g_n]\tau_{nk} \quad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{1.22}$$

из которого и вытекает (1.20).

5. **α-базис оператора** T^0. Пусть $\{g_k\}_{k=1}^{s}$ — α-базис оператора T, а J — соответствующая матрица коэффициентов. Воспользовавшись соотношением

$$I - TT^0 = T(I - T^0T)T^{-1},$$

получим на основании (1.13)

$$I - TT^0 = \sum_{k, i=1}^{s} [\cdot, T^{-0}g_k] J_{ki} Tg_i, \tag{1.23}$$

где в силу (1.20)

$$T^{-0}g_k = \sum_{n=1}^{s} \tau_{kn}^{-*} Tg_n \tag{1.24}$$

(τ_{kn}^{-*} — элемент матрицы τ^{-*}). Подставляя (1.24) в (1.23), придем к соотношению

$$I - TT^0 = \sum_{n, m=1}^{s} [\cdot, Tg_n] d_{nm} Tg_m, \tag{1.25}$$

где d_{nm} — элемент матрицы

$$d = (J\tau)^{-1}. \tag{1.26}$$

При этом, так как матрица d самосопряженная, то она может быть представлена в виде*

$$(J\tau)^{-1} = A^{*}J^{(0)}A, \tag{1.27}$$

где $J^{(0)}$ — некоторая унитарная и самосопряженная матрица, а $A = \| a_{ik} \|$ — неособенная матрица, зависящая от выбора матрицы $J^{(0)}$.

Подставляя (1.26) в (1.25) и учитывая (1.27), получим

$$I - TT^0 = \sum_{k, i=1}^{s} [\cdot, g_k^{(0)}] J_{ki}^{(0)} g_i^{(0)},$$

* Для получения соотношения (1.27) можно воспользоваться представлением $(J\tau)^{-1} = U^{*} \| \lambda_k \delta_{ki} \| U$, где U — некоторая унитарная матрица, а $\{\lambda_k\}_{k=1}^{s}$ — спектр матрицы $(J\tau)^{-1}$.

где

$$g_k^{(0)} = \sum_{n=1}^{s} a_{kn} T g_n \quad (k = 1,2, \ldots, s). \tag{1.28}$$

Таким образом, на основании предыдущего *совокупность* $\{g_k^{(0)}\}_{k=1}^{s}$ *является* α*-базисом оператора* T^0. *При этом соответствующая матрица коэффициентов* $J^{(0)}$ *связана с матрицей* J *соотношением* (1.27).

Найдем теперь матрицу искажения $\tau^{(0)}$ оператора T^0. Так как на основании (1.28) и (1.20) матрица Грама $G^{(0)} = \|[g_k^{(0)}, g_l^{(0)}]\|$ может быть представлена в виде

$$G^{(0)} = AG\tau A^* \quad (G = \|[g_k, g_l]\|),$$

то

$$\tau^{(0)*} = I - AG\tau A^* J^{(0)}. \tag{1.29}$$

При этом на основании (1.27)

$$\tau A^* J^{(0)} = JA^{-1}. \tag{1.30}$$

Следовательно, как вытекает из (1.29), (1.30) и (1.16),

$$\tau^{(0)} = A^{-*} \tau A^*. \tag{1.31}$$

Замечание. В общем случае матрица коэффициентов $J^{(0)}$, определяемая соотношением (1.27), не совпадает с матрицей J. Однако в гильбертовом пространстве α-базисы $\{g_k\}_{k=1}^{s}$ и $\{g_k^{(0)}\}_{k=1}^{s}$ операторов T и T^0 могут быть выбраны так, чтобы соответствующие им матрицы коэффициентов J и $J^{(0)}$ совпадали.

Действительно, в гильбертовом пространстве α-базис $\{g_k\}_{k=1}^{s}$ можно выбрать* так, чтобы он состоял из попарно ортогональных собственных векторов самосопряженного оператора $I - T^0 T$ (или, что то же, оператора $T^0 T$). Тогда, очевидно, матрицы τ и J являются диагональными. Следовательно, матрицы A и $J^{(0)}$, определяемые соотношением (1.27), также могут быть выбраны диагональными. Кроме того, как вытекает из соотношения

$$\|[Tg_k, Tg_l]\| = G\tau,$$

(которое легко получить, воспользовавшись соотношением (1.20)), матрица τ эрмитово-положительна. Следовательно, учитывая выше изложенное и соотношение (1.27), приходим к выводу, что в рассматриваемом случае $J^{(0)} = J$.

Общий случай (когда матрицы τ и J не диагональные) получается из рассмотренного путем унитарного преобразования α-базиса $\{g_k\}_{k=1}^{s}$ (с учетом соотношений (1.14) и (1.15)).

§ 2. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ МАТРИЦА-ФУНКЦИЯ

Здесь введено понятие характеристической матрицы-функции K_r-оператора T, рассмотрен ряд необходимых для дальнейшего свойств таких матриц-функций, а также выяснена связь между характеристическими матрицами-функциями операторов T и T^0.

---

* См. п. 3 этого параграфа.

1. Характеристическая матрица-функция оператора T. Пусть $\{g_k\}_{k=1}^{s}$ — произвольный α-базис K_r-оператора T, J — соответствующая матрица коэффициентов, а $J^{(0)}$ — матрица коэффициентов некоторого α-базиса оператора T^0, определяемая соотношением (1. 27). Тогда матрицу-функцию $\chi_T(z)$, определяемую соотношением

$$\chi_T(z)\, J^{(0)}\chi_T^*(0) = J - \|[(I - zT^0)^{-1}g_k,\, g_i]\|, \tag{2.1}$$

будем называть* характеристической матрицей-функцией оператора T.

При $z = 0$ соотношение (2.1) перепишется (на основании (1.16)) в виде

$$\chi_T(0)\, J^{(0)}\chi_T^*(0) = J\tau. \tag{2.2}$$

Следовательно, $\chi_T(0)$ — некоторое (неособенное) решение матричного уравнения

$$xJ^{(0)}x^* = J\tau,$$

которое на основании (1.27) разрешимо. В дальнейшем для определенности будем считать, что

$$\chi_T(0) = A^{-1}J^{(0)}, \tag{2.3}$$

где матрица A определяется соотношением (1.27). Пусть теперь $z = \infty$. Тогда, как вытекает из соотношений (2.1) и

$$(I - zT^0)^{-1} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{z}I - T^0\right)^{-1} \tag{2.4}$$

(с учетом того, что оператор T^0 непрерывно обратим),

$$\chi_T(\infty)\, J^{(0)}\chi_T^*(0) = J,$$

откуда на основании (2.3)

$$\chi_T(\infty) = JA^*. \tag{2.5}$$

Далее, легко видеть, что характеристическая матрица-функция $\chi_T(z)$ является аналитической в точке z матрицей-функцией, если $\frac{1}{z}$ не принадлежит спектру оператора T^0.

Пусть $\frac{1}{z_1}$ и $\frac{1}{z_2}$ — регулярные точки оператора T^0,

$$K_z = (I - zT^0)^{-1}$$

и

$$\omega(z) = \chi_T(z)\, J^{(0)}\chi_T^*(0). \tag{2.6}$$

Тогда, на основании (2.1)

$$\omega^*(z_1)\, J\omega(z_2) = I - \|[K_{z_2}g_k,\, g_i]\| - \|[K_{z_1}^{\circledast}g_k,\, g_i]\| + \\ + \|[K_{z_1}^{\circ}g_k,\, g_i]\|\, J\, \|[K_{z_2}g_k,\, g_i]\|, \tag{2.7}$$

* В случае индефинитной метрики это определение несколько отличается от того, которое было принято в (8) (наличием в левой части соотношения (2.1) матрицы $J^{(0)}$ вместо J).

где в силу (1.13)

$$\| [K^{\circ}_{z_1} g_k, g_i] \| J \| [K_{z_2} g_k, g_i] \| = \| \sum_{n, m=1}^{s} [K^{\circ}_{z_1} g_k, g_n] J_{nm} [K_{z_2} g_m, g_i] \| =$$

$$= \| [K_{z_2} \sum_{n, m=1}^{s} [K^{\circ}_{z_1} g_k, g_n] J_{nm} g_m, g_i] \| = \| [K_{z_2} (I - T^0 T) K^{\circ}_{z_1} g_k, g_i] \| . \quad (2.8)$$

Подставим (2.8) в (2.7). Тогда

$$\omega^* (z_1) J \omega (z_2) = J\tau + \| [\{I - K_{z_2} - K^0_{z_1} + K_{z_2} (I - T^0 T) K^{\circ}_{z_1}\} g_k, g_i] \| , \quad (2.9)$$

где τ — матрица искажения оператора T. А так как

$$I - K_{z_2} - K^0_{z_1} + K_{z_2} (I - T^0 T) K^0_{z_1} = (z_1 z_2 - 1) R^{\circ}_{z_1} R_{z_2},$$

где

$$R_z = T K^{\circ}_z = (T^{-1} - \bar{z} I)^{-1},$$

то на основании (2.9)

$$\omega^* (z_1) J \omega (z_2) = J\tau + (\bar{z}_1 z_2 - 1) \| [R_{z_1} g_k, R_{z_2} g_i] \| . \quad (2.10)$$

При $z_1 = \frac{1}{\bar{z}_2} = z$ из соотношения (2.10) на основании (2.6) и (2.2) находим

$$\chi^*_T (z) J \chi_T \left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = J^{(0)}. \quad (2.11)$$

2. Случай H-метрики. Как уже отмечалось (§ 1, п. 6), в случае гильбертова пространства матрицу $J^{(0)}$ можно считать равной J. Тогда, как вытекает из соотношений (2.10), (2.6) и (2.2), в единичном круге $|z| < 1$ матрица-функция $\chi_T (z)$ является J-нерастягивающей, т. е.

$$\chi^*_T (z) J \chi_T (z) < J. \quad (2.12)$$

Это дает возможность получить аналитическое представление для характеристической матрицы-функции K_r-оператора T, действующего в гильбертовом пространстве.

3. Характеристическая матрица-функция оператора T^0. Пусть α-базис $\{g^{(0)}_k\}^s_{k=1}$ оператора T^0 и соответствующая матрица коэффициентов $J^{(0)}$ определяются соотношениями (1.27) и (1.28). Тогда характеристическая матрица-функция $\chi_{T^0} (z)$ оператора T^0 определяется соотношением

$$\chi_{T^0} (z) J \chi^*_{T^0} (0) = J^{(0)} - \| [(I - zT)^{-1} g^{(0)}_k, g^{(0)}_i] \| . \quad (2.13)$$

Подставляя (1.28) в (2.13) и учитывая (1.20), получим

$$\chi_{T^0} (z) J \chi^*_{T^0} (0) = J^{(0)} - A \| [(I - zT)^{-1} g_k, g_i] \| \tau A^* . \quad (2.14)$$

Но, как легко получить из (2.1),

$$\| [(I - zT)^{-1} g_k, g_i] \| = J - \chi_T (0) J^{(0)} \chi^*_T (\bar{z}). \quad (2.15)$$

Поэтому, подставляя (2.15) в (2.14) и учитывая (1.30), придем к соотношению

$$\chi_{T^\circ}(z)J\chi^*_{T^\circ}(0) = A\chi_T(0)\,J^{(0)}\chi^*_T(\bar{z})\,\tau A^*. \tag{2.16}$$

При $z=0$ это соотношение на основании соотношений (2.2) и $J\tau=\tau^*J$, преобразуется к виду

$$\chi_{T^\circ}(0)J\chi^*_{T^\circ}(0) = A\tau^*J\tau A^*,$$

откуда вытекает, что матрица

$$V = \tau A^*\chi^{-*}_{T^\circ}(0)\,J, \tag{2.17}$$

J — унитарна (т. е. $V^*JV=J$). Следовательно, в силу (2.16), (2.17) и (2.3)

$$\chi_{T^\circ}(z) = \chi^*_T(\bar{z})\,V. \tag{2.18}$$

Таким образом, на основании изложенного приходим к следующему утверждению: *если α-базисы $\{g_k\}_{k=1}^s$ и $\{g_k^{(0)}\}_{k=1}^s$ операторов T и T^0 связаны соотношениями* (1.28), *то характеристические матрицы-функции этих операторов связаны соотношением* (2.18), *где V — J — унитарная матрица, определяемая соотношением* (2.17).

§ 3. СЦЕПЛЕНИЯ

1. Сцепления и их свойства. Пусть Π_1 — инвариантное относительно оператора T проекционно-полное подпространство и $\Pi_2=\Pi[-]\Pi_1$. Тогда операторы T и T^0 можно представить в виде

$$T = T_1P_1 + T_2P_2 + \Gamma, \tag{3.1}$$

$$T^0 = T_1^0P_1 + T_2^0P_2 + \Gamma^0, \tag{3.2}$$

где

$$T_1 = T|_{\Pi_1},\quad T_2 = P_2T|_{\Pi_2},\quad \Gamma = P_1TP_2,$$

а P_k — оператор проектирования в Π на $\Pi_k\,(k=1,2)$.

В дальнейшем оператор T будем называть **сцеплением** операторов T_1 и T_2 и писать $T=T_1\gamma T_2$. На основании (3.1) и (3.2) видим, что если $T=T_1\gamma T_2$, то $T^0=T_2^0\gamma T_1^0$.

Пусть теперь $g=(T-zI)f\ (f\in\Pi)$. Тогда на основании (3.1),

$$g = (T_1-zI)f_1 + (T_2-zI)f_2 + \Gamma f_2,$$

где $f_k=P_kf\ (k=1,2)$. Следовательно,

$$g_1 = (T_1-zI)f_1 + \Gamma f_2, \tag{3.3}$$

$$g_2 = (T_2-zI)f_2 \quad (g_k=P_kg). \tag{3.4}$$

Обозначим через $\rho(A,B)$ совокупность общих регулярных точек операторов A и B. Тогда имеют место следующие утверждения:

1. Если $T=T_1\gamma T_2$ и $z\in\rho(T_1,T_2)$, то $z\in\rho(T)$.

Действительно, так как $z\in\rho(T_1,T_2)$, то на основании (3.3) и (3.4)

$$f_2 = R_{2z}g_2,\quad f_1 = R_{1z}g_1 - R_{1z}\Gamma R_{2z}g_2, \tag{3.5}$$

где $R_{kz}=(T_k-zI)^{-1}$. Из соотношений (3.5) вытекает, что оператор $T-zI$ отображает взаимно-однозначно пространство Π на себя и что оператор $R_z=(T-zI)^{-1}$ ограничен. Следовательно, $z\in\rho(T)$.

II. *Если* $T = T_1 \gamma T_2$ *и* $z \in \rho(T, T_2)$, *то* $z \in \rho(T_1)$.

Действительно, пусть $g \in \Pi_1$. Тогда, на основании (3. 4) $f_2 = 0$ и, следовательно, (на основании (3. 3)) $(T_1 - zI) f_1 = g$. Учитывая теперь соотношение $(T - zI) f_1 = g$, нетрудно убедиться, что оператор $T_1 - zI$ взаимнооднозначно отображает пространство Π_1 на себя и что оператор $R_{1z} = (T_1 - zI)^{-1}$ ограничен (так как на основании предыдущего $R_{1z} g = R_z g$ при любом g из Π_1). Следовательно, $z \in \rho(T_1)$.

III. *Если* $T = T_1 \gamma T_2$ *и* $z \in \rho(T, T_1)$, *то* $z \in \rho(T_2)$.

Действительно, если $T = T_1 \gamma T_2$, то $T^0 = T_2^0 \gamma T_1^0$. При этом, очевидно, $\bar{z} \in \rho(T^0, T_1^0)$. Но тогда на основании утверждения II $\bar{z} \in \rho(T_2^0)$ или, что то же, $z \in \rho(T_2)$.

2. α-базисы операторов T_1 и T_2. Пусть $\{g_k\}_{k=1}^{s}$ — α-базис K_r-оператора T $(T = T_1 \gamma T_2)$, а J — соответствующая матрица коэффициентов. Воспользовавшись соотношением

$$(I - T^0 T) P_1 = (I - T_1^0 T_1) P_1 - \Gamma^0 T_1 P_1, \tag{3.6}$$

которое вытекает из (3. 1) и (3. 2), получим (на основании (1. 13))

$$(I - T_1^0 T_1) P_1 = P_1 (I - T^0 T) P_1 = \sum_{k,l=1}^{s} [\cdot, g_{1k}] J_{kl} g_{1l}, \tag{3.7}$$

где

$$g_{1k} = P_1 g_k \quad (k = 1, 2, \ldots, s). \tag{3.8}$$

Следовательно, справедливо следующее утверждение:

I. *совокупность векторов* $\{g_{1k}\}_{k=1}^{s}$, *определяемая соотношением* (3. 8), *является α-базисом оператора* T_1. *При этом соответствующая матрица коэффициентов* J_1 *совпадает с матрицей коэффициентов* J *α-базиса* $\{g_k\}_{k=1}^{s}$.

Отметим, что если $0 \in \sigma(T_1)$, где $\sigma(T_1)$ — спектр оператора T_1, то на основании предыдущего, T_1 есть K_{r_1}-оператор $(r_1 \leqslant r)$.

Найдем теперь α-базис оператора T_2. Так как $T^0 = T_2^0 \gamma T_1^0$, то в силу сформулированного выше утверждения α-базис $\{g_{2k}^0\}_{k=1}^{s}$ оператора T_2^0 и соответствующая матрица коэффициентов $J_2^{(0)}$ определяются соотношениями

$$g_{2k}^{(0)} = P_2 g_k^{(0)} \quad (k = 1, 2, \ldots, s); \quad J_2^{(0)} = J^{(0)}, \tag{3.9}$$

где $\{g_k^{(0)}\}_{k=1}^{s}$ — α-базис оператора T^0, а $J^{(0)}$ — соответствующая матрица коэффициентов. При этом можем считать, что α-базис оператора T^0 определяется соотношениями (1. 28), а соответствующая матрица коэффициентов соотношением (1. 27). Тогда, как вытекает из (3. 9), (1. 28) и (3. 1),

$$g_{2k}^{(0)} = \sum_{n=1}^{s} a_{kn} T_2 P_2 g_n \quad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{3.10}$$

где матрицу $A = \| a_{ik} \|$ на основании (2. 3) можно представить в виде

$$A = J^{(0)} \chi_T^{-1}(0). \tag{3.11}$$

Далее, воспользовавшись снова результатами п. 5 (§ 1), получим (по аналогии с (1.28)), что совокупность векторов $\{g_{2k}\}_{k=1}^{s}$, определяемая соотношениями

$$g_{2k} = \sum_{n=1}^{s} b_{kn} T_2^0 g_{2n}^{(0)} \quad (k = 1,2, \ldots, s), \tag{3.12}$$

является α-базисом оператора T_2. При этом (по аналогии с (2.3)), матрицу $B = \| b_{ik} \|$ можно представить в виде

$$B = J_2 \chi_{T_2^0}^{-1}(0), \tag{3.13}$$

где матрица J_2 связана с матрицей $J_2^{(0)}$ соотношением

$$(J_2^{(0)} \tau_2^{(0)})^{-1} = B^* J_2 B \tag{3.14}$$

($\tau_2^{(0)}$ — матрица искажения оператора T_2^0).

Отметим также, что, как вытекает из (3.12), матрица искажения τ_2 оператора T_2 определяется соотношением

$$\tau_2 = B^{-*} \tau_2^{(0)} B^* \tag{3.15}$$

(аналогично тому, как из соотношения (1.28) вытекает (1.31)).

Далее, подставляя (3.10) в (3.12), получим

$$g_{2k} = \sum_{m=1}^{s} c_{km} T_2^0 T_2 P_2 g_m, \tag{3.16}$$

где c_{km} — элементы матрицы

$$C = BA. \tag{3.17}$$

С другой стороны, на основании (1.20)

$$g_{2k} = \sum_{n=1}^{s} (\tau_{kn}^{(2)})^{-*} T_2^0 T_2 g_{2n}, \tag{3.18}$$

где $(\tau_{kn}^{(2)})^{-*}$ — элемент матрицы τ_2^{-*}. Из соотношений (3.16) и (3.18) находим

$$\sum_{n=1}^{s} c_{kn} P_2 g_n = \sum_{n=1}^{s} (\tau_{kn}^{(2)})^{-*} g_{2n},$$

откуда, как нетрудно убедиться, вытекают соотношения

$$g_{2k} = \sum_{n=1}^{s} \sigma_{kn} P_2 g_n \quad (k = 1,2, \ldots, s), \tag{3.19}$$

где σ_{kn} — элементы матрицы

$$\sigma = \tau_2^* BA. \tag{3.20}$$

Для уточнения вида матрицы σ рассмотрим соотношение

$$\chi_T(0) J^{(0)} \chi_T^*(0) = J - \| [P_1 g_k, P_1 g_i] \| - \| [P_2 g_k, P_2 g_i] \|, \tag{3.21}$$

где на оснований (3.8) и (3.19)

$$J - \| [P_1 g_k,\ P_1 g_l] \| = \varkappa_{T_1}(0) J_1^{(0)} \chi_{T_1}^*(0), \tag{3.22}$$

$$\| [P_2 g_k,\ P_2 g_l] \| = \sigma^{-1} G_2 \sigma^{-*} \quad (G_2 = \| [g_{2k},\ g_{2l}] \|). \tag{3.23}$$

Рассматривая соотношения (3.21) — (3.23), видим, что

$$W J^{(0)} W^* = W_1 J_1^{(0)} W_1^* - G_2, \tag{3.24}$$

где

$$W = \sigma \chi_T(0), \quad W_1 = \sigma \chi_{T_1}(0). \tag{3.25}$$

При этом на основании (3.20), (3.11) и (3.9)

$$W J^{(0)} W^* = \tau_2^* B J_2^{(0)} B^* \tau_2, \tag{3.26}$$

где, как легко получить из (3.14),

$$B J_2^{(0)} B^* = J_2 [B^{-*} \tau_2^{(0)} B^*]^{-1}. \tag{3.27}$$

Следовательно, как вытекает из (3.26), (3.27) и (3.15),

$$W J^{(0)} W^* = J_2 \tau_2. \tag{3.28}$$

Подставим (3.28) в (3.24). Тогда на основании (1.16)

$$W_1 J_1^{(0)} W_1^* = J_2. \tag{3.29}$$

Умножая (3.29) слева на $W_1^* J_2$, а справа на $J_2 W_1$, получим

$$x J_1^{(0)} \hat{x} = x \qquad (x = W_1^* J_2 W_1),$$

откуда вытекает, что

$$W_1^* J_2 W_1 = J_1^{(0)}. \tag{3.30}$$

Далее, рассмотрим матрицу $\tilde{J}_2 = \Omega^{-*} J_2 \Omega^{-1}$, где $\Omega = W_1^{-1}$. Тогда на основании (3.30) $\tilde{J}_2 = J_1^{(0)}$ и, следовательно, матрица $\tilde{J}_2$ является унитарной и самосопряженной. Но в таком случае в силу утверждения I (§ I, п. 3) совокупность векторов

$$\tilde{g}_{2k} = \sum_{n=1}^{s} \omega_{kn} g_{2n} \quad (k = 1, 2, \ldots, s;\ \| \omega_{ik} \| = \Omega) \tag{3.31}$$

является α-базисом оператора T_2, а $\tilde{J}_2$ — соответствующей матрицей коэффициентов. При этом на основании (3.19) и (3.31),

$$\tilde{g}_{2k} = \sum_{n=1}^{s} \gamma_{kn} P_2 g_n \quad (k = 1, 2, \ldots, s), \tag{3.32}$$

где матрица $\Gamma = \| \gamma_{ik} \|$ связана с матрицами Ω и σ соотношением

$$\Gamma = \Omega \sigma.$$

А так как $\Omega = W_1^{-1}$, то в силу (3.25)

$$\Gamma = \chi_{T_1}^{-1}(0). \tag{3.33}$$

Таким образом, на основании изложенного приходим к утверждению:

II. *Совокупность векторов* $\{\tilde{g}_{2k}\}_{k=1}^{s}$, *определяемая соотношениями* (3.32), *является* α*-базисом оператора* T_2. *При этом соответствующая матрица коэффициентов* $\tilde{J}_2$ *совпадает с матрицей* $J_1^{(0)}$, *а матрица* $\Gamma = \| \gamma_{lk} \|$ *определяется соотношением* (3.33).

3. Оператор Γ. Так как $\Gamma = P_1 T P_2$ и, следовательно, $\Gamma^0 = P_2 T^0 P_1$, то на основании (3.6)

$$\Gamma^0 T_1 P_1 = -P_2 (I - T^0 T) P_1. \tag{3.34}$$

Но тогда, как вытекает из (3.31) и (1.13),

$$\Gamma^0 = -\sum_{k,l=1}^{s} [\,\cdot\,, T_1^{-0} g_{1k}] J_{kl} P_2 g_l, \tag{3.35}$$

откуда

$$\Gamma = -\sum_{k,l=1}^{s} [\,\cdot\,, P_2 g_k] J_{kl} T_1^{-0} g_{1l}. \tag{3.36}$$

§ 4. ТЕОРЕМА УМНОЖЕНИЯ

Результаты предыдущих параграфов дают возможность обосновать следующее утверждение:

Теорема 4.1. (Теорема умножения). *Пусть* K_r*-оператор* T *есть сцепление квазиунитарных операторов* T_1 *и* T_2, *а* $\frac{1}{z}$ — *общая регулярная точка этих операторов. Тогда в некоторых* α*-базисах характеристические матрицы-функции операторов* T, T_1 *и* T_2 *связаны между собой соотношением*

$$\chi_T(z) = \chi_{T_1}(z)\, \chi_{T_2}(z)\, U, \tag{4.1}$$

где U — постоянная $J^{(0)}$ — унитарная матрица.

Доказательство*. По определению характеристическая матрица-функция $\chi_T(z)$ K_r-оператора T определяется соотношением

$$\chi_T(z)\, J^{(0)} \chi_T^*(0) = J - \| [K_z g_k, g_l] \|, \tag{4.2}$$

где

$$K_z = (I - zT^0)^{-1}. \tag{4.3}$$

Положим $\varphi_k = K_z g_k$. Тогда на основании (4.3) и (3.2)

$$g_k = \varphi_k - zT_1^0 P_1 \varphi_k - zT_2^0 P_2 \varphi_k - z\Gamma^0 P_1 \varphi_k. \tag{4.4}$$

А так как по условию точка $\bar{z}^{-1}$ является регулярной точкой для операторов T_1 и T_2, то, как вытекает из (4.4),

$$P_1 \varphi_k = K_{1z} P_1 g_k, \tag{4.5}$$

$$P_2 \varphi_k = K_{2z} P_2 g_k + zK_{2z} \Gamma^0 P_1 \varphi_k, \tag{4.6}$$

где

$$K_{iz} = (I - zT_i^0)^{-1} \qquad (i = 1,2).$$

---

* Приводимое здесь доказательство существенно отличается от ранее опубликованного доказательства теоремы умножения в случае H-метрики [4].

Далее, как было показано ранее (§ 3, п. 2), совокупность векторов $g_{1k}=P_1 g_k\,(k=1,2,\ldots,s)$ является α-базисом оператора T_1, причем соответствующая матрица коэффициентов J_1 совпадает с матрицей J. Но тогда на основании предыдущего

$$\chi_T(z)J^{(0)}\chi_T^*(0)=J-\|[P_1\varphi_k,\ P_1 g_i]\|-\|[P_2\varphi_k,\ P_2 g_i]\|=$$
$$=\chi_{T_1}(z)\,J_1^{(0)}\chi_{T_1}^*(0)-\|[P_2\varphi_k,\ P_2 g_i]\|, \tag{4.7}$$

где в силу (4.6)

$$\|[P_2\varphi_k,\ P_2 g_i]\|=\|[K_{22}P_2 g_k,\ P_2 g_i]\|+z\,\|[K_{22}\Gamma^0 P_1\varphi_k,\ P_2 g_i]\|. \tag{4.8}$$

Воспользовавшись теперь соотношением (3.35), получим

$$\|[K_{22}\Gamma^0 P_1\varphi_k,\ P_2 g_i]\|=-\|[P_1\varphi_k,\ T_1^{-0} g_{1i}]\|\,J\,\|[K_{22}P_2 g_k,\ P_2 g_i]\|, \tag{4.9}$$

где на основании (1.25)

$$\|[P_1\varphi_k,\ T_1^{-0} g_{1i}]\|=\|[P_1\varphi_k,\ T_1 g_{1i}]\|\,\tau_1^{-1}. \tag{4.10}$$

Следовательно, как вытекает из соотношений (4.8) — (4.10),

$$\|[P_2\varphi_k,\ P_2 g_i]\|=\{I-z\|[P_1\varphi_k,\ T_1 g_{1i}]\|\,\tau_1^{-1}J\}\,\|[K_{22}P_2 g_k,\ P_2 g_i]\|. \tag{4.11}$$

Далее, так как

$$zT_1^0(J-zT_1^0)^{-1}=-J+(I-zT_1^0)^{-1},$$

то, как легко проверить, воспользовавшись соотношениями (4.5), (1.16) и $J=J_1$,

$$I-z\,\|[P_1\varphi_k,\ T_1 g_{1i}]\|\,\tau_1^{-1}J=\chi_{T_1}(z)\,J_1^{(0)}\chi_{T_1}^*(0)\,\tau_1^{-1}J_1. \tag{4.12}$$

При этом, так как

$$\chi_{T_1}(0)\,J_1^{(0)}\chi_{T_1}^*(0)=J_1\tau_1,$$

то

$$J_1^{(0)}\chi_{T_1}^*(0)\,\tau_1^{-1}J_1=\chi_{T_1}^{-1}(0). \tag{4.13}$$

Подставляя теперь (4.12) в (4.11) и учитывая (4.13), получим

$$\|[P_2\varphi_k,\ P_2 g_i]\|=\chi_{T_1}(z)\,\chi_{T_1}^{-1}(0)\,\|[K_{22}P_2 g_k,\ P_2 g_i]\|. \tag{4.14}$$

Это дает возможность переписать соотношение (4.7) так:

$$\chi_T(z)\,J^{(0)}\chi_T^*(0)=\chi_{T_1}(z)\,\{J_1^{(0)}-\chi_{T_1}^{-1}(0)\,\|[K_{22}P_2 g_k,\ P_2 g_i]\|\chi_{T_1}^{-1*}(0)\}\,\chi_{T_1}^*(0),$$

откуда, на основании утверждения 1 (§ 3, п. 2) вытекает, что

$$\chi_T(z)\,J^{(0)}\chi_T^*(0)=\chi_{T_1}(z)\,\chi_{T_2}(z)\,J_2^{(0)}\chi_{T_2}^*(0)\,\chi_{T_1}^*(0). \tag{4.15}$$

Положив в последнем соотношении $z=0$ и воспользовавшись равенством $J_2^{(0)}=J^{(0)}$ (на основании (3.9)), придем к соотношению

$$UJ^{(0)}U^*=J^{(0)}, \tag{4.16}$$

где

$$U\doteq\chi_{T_2}^{-1}(0)\,\chi_{T_1}^{-1}(0)\,\chi_T(0). \tag{4.17}$$

Подставляя теперь в (4.15) соотношение

$$\chi^*_{T_1}(0)\,\chi^*_{T_2}(0) = U^{-*}\chi^*_T(0),$$

которое вытекает из (4.17), получим

$$\chi_T(z) = \chi_{T_1}(z)\,\chi_{T_2}(z)\,J_2^{(0)}U^{-*}J^{(0)}. \tag{4.18}$$

А так как $J_2^{(0)} = J^{(0)}$, то на основании (4.16)

$$J_2^{(0)}U^{-*}J^{(0)} = U. \tag{4.19}$$

Подставляя (4.19) в (4.18), получим соотношение (4.1), что и завершает доказательство теоремы.

§ 5. ПРОСТАЯ ЧАСТЬ K_r-ОПЕРАТОРА

Основным результатом этого параграфа является теорема 5.2.

1. Дополнительное подпространство. Пусть G_T — область унитарности K_r-оператора T. Обозначим через Π_T наиболее широкое подпространство из G_T, в котором оператор T индуцирует унитарный оператор. В дальнейшем подпространство Π_T будем называть дополнительным подпространством оператора T. Таким образом, на основании определения дополнительное подпространство Π_T оператора T удовлетворяет таким условиям:

$$\Pi_T \subset G_T, \quad T\Pi_T = \Pi_T. \tag{5.1}$$

Теорема 5.1. *Дополнительные подпространства операторов* T, T^0 и T^{-1} совпадают, т. е. $\Pi_T = \Pi_{T^0} = \Pi_{T^{-1}}$.

Доказательство. Покажем вначале, что

$$\Pi_T = \Pi_{T^0}. \tag{5.2}$$

Действительно, если $\varphi \in \Pi_T$, то

$$\varphi = T\psi \quad (\psi \in \Pi_T). \tag{5.3}$$

Следовательно,

$$T^0\varphi = T^0T\psi = \psi, \tag{5.4}$$

(так как $\psi \in G_T$). Это значит, что $T^0\Pi_T \subset \Pi_T$.

Обратно, пусть $\varphi \in \Pi_T$. Так как $T^0T\varphi = \varphi$, то $T^0\psi = \varphi$, где $\psi = T\varphi \in \Pi_T$. А это значит, что $\Pi_T \subset T^0\Pi_T$.

Таким образом, на основании предыдущего

$$T^0\Pi_T = \Pi_T. \tag{5.5}$$

При этом, как вытекает из (5.3) и (5.4), при любом φ из Π_T

$$(I - TT^0)\,\varphi = T\psi - T\psi = 0, \tag{5.6}$$

т. е. $\varphi \in G_{T^0}$. Следовательно. $\Pi_T \subset G_{T^0}$ и в Π_T, на основании (5.5) и (5.6) оператор T^0 индуцирует унитарный оператор. А это значит, что $\Pi_T \subset \Pi_{T^0}$.

Если же в предыдущих рассуждениях заменить оператор T на T^0, то придем к соотношению $\Pi_{T^0} \subset \Pi_T$. Этим соотношение (5.2) обосновано.

Покажем теперь, что

$$\Pi_{T^0} = \Pi_{T^{-1}}. \tag{5.7}$$

Действительно, пусть $f \in \Pi_{T^0}$. Тогда из соотношения $(I - TT^0)f = 0$ вытекает, что

$$T^{-1}f = T^0 f. \tag{5.8}$$

Это значит, что

$$T^{-1}\Pi_{T^0} = T^0\Pi_{T^0} = \Pi_{T^0}. \tag{5.9}$$

Воспользовавшись соотношениями (5.8) и (5.9), приходим к заключению, что в подпространстве Π_{T^0} оператор T^{-1} индуцирует унитарный оператор. Кроме того, на основании (1.3) $\Pi_{T^0} \subset G_{T^{-1}}$ (так как $\Pi_{T^0} \subset G_{T^0}$). Таким образом, как вытекает из предыдущих рассуждений, $\Pi_{T^0} \subset \Pi_{T^{-1}}$. Аналогично устанавливается, что $\Pi_{T^{-1}} \subset \Pi_{T^0}$. Соотношение (5.7), а вместе с ним и сформулированная теорема доказаны.

2. **Основное подпространство.** Основным подпространством оператора T называется подпространство $\Pi_p = \Pi[-]\Pi_T$, где Π_T — дополнительное подпространство оператора T. Покажем, что

$$T\Pi_p = \Pi_p. \tag{5.10}$$

Действительно, пусть $f \in \Pi_p$. Так как на основании (5.5) $T^0\Pi_T = \Pi_T$, то при любом $\varphi \in \Pi_T$

$$[Tf, \varphi] = [f, T^0\varphi] = 0.$$

Следовательно, $T\Pi_p \subset \Pi_p$.

Пусть снова $f \in \Pi_p$. Так как $D_{T^{-1}} = \Pi$, то в Π существует такой вектор ψ, что $f = T\psi$. Тогда при любом $\varphi \in \Pi_T$

$$[\psi, T^0\varphi] = [f, \varphi] = 0,$$

откуда вытекает, что $\psi \in \Pi_p$. Следовательно, $\Pi_p \subset T\Pi_p$, что и доказывает отношение (5.10).

Теорема 5.2. *Основное подпространство Π_p K_r-оператора T совпадает с замыканием линейной оболочки системы всех многообразий вида $T^n\mathfrak{N}_T$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), где $\mathfrak{N}_T = \Pi[-]G_T$.*

Доказательство. а) Прежде всего заметим, что $\mathfrak{N}_T \subset \Pi_p$. Это вытекает из того, что $\Pi_T \subset G_T$ и, следовательно, подпространства $\mathfrak{N}_T$ и Π_T ортогональны. Но тогда на основании (5.10)

$$T^n\mathfrak{N}_T \subset \Pi_p \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{5.11}$$

Далее, так как на основании (5.10) $T^{-1}\Pi_p = \Pi_p$, то, очевидно,

$$T^n\mathfrak{N}_T \subset \Pi_p \quad (n = -1, -2, \ldots). \tag{5.12}$$

Обозначим теперь через Π_p' замыкание линейной оболочки, о которой идет речь в лемме. Тогда, как вытекает из определения подпространства Π_p' и из замкнутости операторов T и T^{-1},

$$T\Pi_p' = \Pi_p'. \tag{5.13}$$

б) Рассмотрим теперь подпространство $\Pi_T' = \Pi\,[-]\,\Pi_p'$. Так как на основании (5.11) и (5.12) $\Pi_p' \subset \Pi_p$, то, очевидно,

$$\Pi_T \subset \Pi_T'. \tag{5.14}$$

Покажем, что $T^0\Pi_T' = \Pi_T'$. Действительно, пусть $f \in \Pi_T'$. Тогда в силу (5.13) при любом $\varphi \in \Pi_p'$

$$[T^0 f, \varphi] = [f, T\varphi] = 0,$$

откуда $T^0\Pi_T' \subset \Pi_T'$.

Пусть снова $f \in \Pi_T'$. Так как $D_{T^{-0}} = \Pi$, то в Π существует такой вектор ψ, что $f = T^0\psi$. При этом для любого $\varphi \in \Pi_p'$

$$[\psi, T\varphi] = [f, \varphi] = 0,$$

откуда вытекает (на основании (5.13)), что $\psi \in \Pi_T'$. Следовательно, $\Pi_T' \subset T^0\Pi_T'$, или, учитывая предыдущее, $T^0\Pi_T' = \Pi_T'$.

Таким образом, подпространство Π_T' инвариантно относительно оператора T^0, и при этом в Π_T' оператор T^0 индуцирует унитарный оператор. Последнее вытекает из того, что на основании (1.4) $\mathfrak{N}_{T^0} = T\mathfrak{N}_T$ и, следовательно, $\mathfrak{N}_{T^0} \subset \Pi_p'$. Поэтому $\Pi_T' \subset G_{T^0}$, а значит, при любых f и g из Π_T'

$$[T^0 f, T^0 g] = [f, g].$$

Предыдущие рассуждения показывают, что $\Pi_T' \subset \Pi_{T^0}$, или на основании теоремы 5.1

$$\Pi_T' \subset \Pi_T. \tag{5.15}$$

Из соотношений (5.14) и (5.15) вытекает следующее: $\Pi_T' = \Pi_T$. Но тогда, очевидно, $\Pi_p' = \Pi_p$, что и доказывает теорему.

3. Простая часть K_r-оператора. Таким образом, на основании изложенного K_r-оператор T индуцирует в основном подпространстве Π_p некоторый оператор T_p, который, как легко видеть, также есть K_r-оператор (так как α-базисы операторов T и T_p совпадают). Оператор $T_p = T|_{\Pi_p}$ будем называть *простой частью* оператора T. В том случае, когда $\Pi_p = \Pi$, оператор T называется *простым*.

Таким образом, по определению простой оператор совпадает со своей простой частью ($T = T_p$). Если при этом Π — невырожденное пространство, то дополнительное подпространство Π_T оператора T не содержит отличных от нуля векторов.

Отметим однако, что в случае индефинитной метрики подпространство Π_p может пересекаться и, в частности, совпадать с дополнительным подпространством Π_T. В последнем случае, как легко видеть, подпространство Π_p (или, что то же, подпространство Π_T) совпадает со своим изотропным подпространством. Если при этом исходное пространство Π невырождено, то оператор T, очевидно, имеет нетривиальное инвариантное подпространство Π_p (ср. с теоремой 7.1).

Отметим также, что если подпространство Π_T (или Π_p) является проекционно-полным, то пространство Π распадается в ортогональную сумму $\Pi = \Pi_T\,[+]\,\Pi_p$, где на основании предыдущего подпространства Π_T и Π_p инвариантны относительно оператора T. Следовательно, в этом случае изучение оператора T сводится к изучению унитарного оператора $U = T|_{\Pi_T}$ и простого оператора $T_p = T|_{\Pi_p}$.

§ 6. КРИТЕРИЙ ИЗОМОРФИЗМА (КОСОИЗОМОРФИЗМА)

Здесь введено понятие изоморфизма и косоизоморфизма линейных операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой, а также найдено условие изоморфизма (косоизоморфизма) произвольных K_r-операторов (теорема 6.1).

1. Изоморфизм и косоизоморфизм операторов. Пусть линейный оператор V отображает пространство Π_1 на пространство Π_2 и при любых f и g из Π_1 удовлетворяет условию

$$[Vf, Vg]_2 = \theta [f, g]_1, \tag{6.1}$$

где $\theta = \pm 1$, а $[x, y]_k$ — скалярное произведение в пространстве $\Pi_k (k = 1,2)$. Тогда при $\theta = 1$ оператор V называется изометрическим, а при $\theta = -1$ — косоизометрическим.

Отметим, что в том случае, когда пространства Π_1 и Π_2 являются невырожденными, оператор V, удовлетворяющий соотношению (6.1), связан со своим сопряженным равенством $V^0 V = \theta I$. Следовательно, в этом случае оператор V обратим и при этом,

$$V^0 = \theta V^{-1}. \tag{6.2}$$

Условимся операторы A_1 и A_2, действующие соответственно в пространствах Π_1 и Π_2, называть изоморфными, если существует изометрический оператор V, отображающий Π_1 на Π_2 (или Π_2 на Π_1) и такой что $VA_1 = A_2 V$ (или, соответственно, $A_1 V = VA_2$). Аналогично определяется косоизоморфизм операторов.

В том случае, когда пространства Π_1 и Π_2 невырожденные, соотношение $VA_1 = A_2 V (A_1 V = VA_2)$ можно переписать в виде

$$A_1 = V^{-1} A_2 V \quad (A_1 = VA_2 V^{-1}),$$

или, на основании (7.2),

$$A_1 = \theta V^0 A_2 V \quad (A_1 = \theta VA_2 V^0).$$

2. Критерий изоморфизма (косоизоморфизма). Можно показать, что если K_r-операторы T_1 и T_2 изоморфны или косоизоморфны и оператор V из предыдущего пункта обратим, то в некоторых α-базисах характеристические матрицы-функции операторов T_1 и T_2 совпадают (с точностью до постоянных матричных множителей). Однако для нас представляет интерес следующее, в некотором смысле обратное, утверждение:

Теорема 6.1. *Пусть характеристические матрицы-функции K_r-операторов T и T' совпадают. Тогда при $J = J'$ простые части этих операторов изоморфны, а при $J = -J'$ — косоизоморфны*.*

Доказательство. По условию

$$\chi_T(z) = \chi_{T'}(z), \quad J = \theta J' \quad (\theta = \pm 1). \tag{6.3}$$

Но тогда, как вытекает из соотношений (2.4) и (6.3), матрицы коэффициентов $J^{(0)}$ и $J'^{(0)}$ также связаны соотношением

$$J^{(0)} = \theta J'^{(0)}. \tag{6.4}$$

---

* Здесь J и J' — матрицы коэффициентов, соответствующие α-базисам, в которых рассматриваются характеристические матрицы-функции операторов T и T'.

Следовательно, в соотношениях

$$J - \chi_T(z) J^{(0)}\chi_T^*(0) = \| [K_z g_k, g_i] \| \quad (K_z = (I - zT^0)^{-1}),$$
$$\theta J' - \theta\chi_{T'}(z) J'^{(0)}\chi_{T'}^*(0) = \theta \| [K_z' g_k', g_i'] \| \quad (K_z' = (I - zT'^0)^{-1})$$

левые, а значит, и правые части равны, т. е.

$$\| [K_z g_k, g_i] \| = \theta \| [K_z' g_k', g_i'] \|. \tag{6.5}$$

Далее, на основании (2.8)

$$\| [K_z^0 g_k, g_i] \| J^{-1} \| [K_\lambda g_k, g_i] \| = \| [K_\lambda (I - T^0 T) K_z^0 g_k, g_i] \|,$$
$$\| [K_z'^0 g_k', g_i'] \| J' \| [K_\lambda' g_k', g_i'] \| = \| [K_\lambda' (I - T'^0 T') K_z'^0 g_k', g_i'] \|,$$

откуда, учитывая (6.3) и (6.5), приходим к соотношению

$$\| [K_\lambda (I - T^0 T) K_z^0 g_k, g_i] \| = \theta \| [K_\lambda' (I - T'^0 T') K_z'^0 g_k', g_i'] \|. \tag{6.6}$$

Воспользовавшись теперь разложением резольвенты ограниченного оператора в ряд Лорана (см., напр., [12], стр. 445), получим следующие разложения операторов K_ξ и K_ξ' в окрестности 0 и ∞:

$$K_\xi = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi T^0)^n, \quad K_\xi' = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi T'^0)^n \quad (|\xi| < \rho), \tag{6.7}$$

$$K_\xi = -\sum_{n=1}^{\infty} (\xi T^0)^{-n}, \quad K_\xi' = -\sum_{n=1}^{\infty} (\xi T'^0)^{-n} \quad (|\xi| > R), \tag{6.8}$$

где ρ и R — некоторые вещественные числа. Подставляя полученные выражения в различных комбинациях в (6.6) и приравнивая коэффициенты при $\lambda^n z^m$, получим такие соотношения:

$$\| [(I - T^0 T) T^m g_k, T^n g_i] \| = \theta \| [(I - T'^0 T') T'^m g_k', T'^n g_i'] \|$$
$$(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

или, что то же,

$$\| [T^m g_k, T^n g_i] \| - \| [T^{m+1} g_k, T^{n+1} g_i] \| =$$
$$= \theta \| [T'^m g_k', T'^n g_i'] \| - \theta \| [T'^{m+1} g_k', T'^{n+1} g_i'] \| \tag{6.9}$$
$$(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Аналогично из (6.5) на основании (6.7) и (6.8) вытекает, что

$$\| [T^m g_k, g_i] \| = \theta \| [T'^m g_k', g_i'] \| \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \tag{6.10}$$

Применяя теперь индукцию по n, придем в силу (6.9) и (6.10) к соотношениям

$$\| [T^m g_k, T^n g_i] \| = \theta \| [T'^m g_k', T'^n g_i'] \| \tag{6.11}$$
$$(n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Далее, определим в основном подпространстве Π_ρ оператора T оператор V, полагая

$$V(T^n g_k) = T'^n g_k' \quad (k = 1, 2, \ldots, s; \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{6.12}$$

Тогда на основании теоремы 5.2 оператор V отображает всюду плотное многообразие из Π_p на всюду плотное многообразие из Π'_p. Кроме того, на основании (6.11) и (6.12)

$$[V(T^m g_k),\ V(T^n g_i)] = \theta\,[T^m g_k,\ T^n g_i]. \qquad (6.13)$$

Расширяя оператор V по непрерывности, получим линейный оператор (который снова обозначим через V), отображающий в силу (6.13) изометрически (при $\theta = 1$) или косоизометрически (при $\theta = -1$) подпространство Π_p на Π'_p. При этом на основании (6.12)

$$V(TT^n g_k) = T'V(T^n g_k)$$

или, что то же,

$$VTf = T'Vf \quad (f = T^n g_k \in \Pi_p;\ \ k = 1,2,\ldots,s;\ \ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots). \qquad (6.14)$$

А так как $T|_{\Pi_p} = T_p$, где T_p — простая часть оператора T, то соотношение (6.14) можно переписать в виде

$$VT_p f = T'_p Vf, \qquad (6.15)$$

откуда и вытекает, что простые части T_p и T'_p операторов T и T' изоморфны (при $\theta = 1$) или косоизоморфны (при $\theta = -1$).

§ 7. ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ

Если K_r-оператор T действует в гильбертовом пространстве, то, как можно убедиться, при $r > 0$ его характеристическая матрица-функция не может быть тождественно постоянной матрицей *. Однако в пространстве с индефинитной метрикой отмеченное свойство уже не сохраняется. При этом операторы с тождественно постоянной характеристической матрицей-функцией обладают следующим свойством:

Теорема 7.1. *Пусть характеристическая матрица-функция K_r-оператора T, действующего в невырожденном пространстве* Π, *является постоянной матрицей. Тогда оператор T имеет нетривиальное инвариантное подпространство, которое совпадает со своей изотропной частью.*

Доказательство. По условию $\chi_T(z) = \text{const}$. Следовательно, правая часть равенства (2.1) не зависит от z, т. е.

$$\|[(I - zT^0)^{-1} g_k,\ g_i]\| \equiv c. \qquad (7.1)$$

При $z = \infty$ из соотношения (7.1) на основании (2.4) вытекает, что $c = 0$. После этого, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 6.1, придем к соотношениям

$$[T^m g_k,\ T^n g_i] = 0 \quad (n,\ m = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots;\ \ k,\ i = 1,\ 2,\ldots,s). \qquad (7.2)$$

Зафиксировав в (7.2) m и k, получим

$$[T^m g_k,\ T^n g_i] = 0 \quad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ldots;\ \ i = 1,\ 2,\ldots,s).$$

---

* Действительно, в таком случае матрица $\|((I - zT^0)^{-1} g_k,\ g_i)\|$ не зависит от z. Поэтому, положив $z = 0$ и $z = \infty$, получим $\|(g_k,\ g_i)\| = 0$. А это в H-метрике при $r > 0$ невозможно.

А это значит на основании теоремы 5.2, что вектор $T^m g_k$ ортогонален (в П-метрике) всюду плотному в подпространстве Π_p многообразию. Отсюда легко получить, что $T^m g_k \perp \Pi_p$. Кроме того (на основании теоремы 5.2), $T^m g_k \in \Pi_p$. Следовательно, при любом целом m вектор $T^m g_k$ ($k = 1, 2, \ldots, s$) является изотропным вектором в подпространстве Π_p. Отсюда, учитывая теорему 5.2, легко получить, что любой вектор из подпространства Π_p является изотропным в этом подпространстве. Другими словами, подпространство Π_p совпадает со своей изотропной частью. Кроме того, на основании соотношения (5.10) подпространство Π_p инвариантно относительно оператора T. Это и доказывает сформулированную теорему.

Следствие. *Характеристическая матрица-функция простого K_r-оператора T, действующего в невырожденном пространстве* П, *не является постоянной матрицей.*

Это вытекает из определения простого K_r-оператора и предыдущей теоремы.

§ 8. СПЕКТР. НЕРАСТЯГИВАЮЩИЕ ОПЕРАТОРЫ

Здесь введено понятие (+)-собственных, (—)-собственных и (0)-собственных значений, а также рассмотрены некоторые свойства собственных значений (в частности, связь с нулями определителя характеристической матрицы-функции).

1. Классификация дискретного спектра. Условимся собственное значение z оператора T называть (+)-собственным значением, если соответствующий собственный вектор f положителен (т. е. $[f, f] > 0$). Аналогично вводится понятие (—)-собственных и (0)-собственных значений.

Пусть z_0 — произвольное (+)-собственное или (—)-собственное значение K_r-оператора T, а f — соответствующий собственный вектор. Тогда одномерное подпространство Π_1, натянутое на вектор f, является невырожденным. При этом подпространство $\Pi_2 = \Pi [-] \Pi_1$ также является невырожденным. Следовательно, оператор T является сцеплением операторов $T_1 = T|_{\Pi_1}$ и $T_2 = P_2 T|_{\Pi_2}$, а характеристическая матрица-функция оператора T на основании теоремы умножения связана с характеристическими матрицами-функциями операторов T_1 и T_2 соотношением

$$\chi_T(z) = \chi_{T_1}(z)\chi_{T_2}(z)\,U, \tag{8.1}$$

где U — некоторая постоянная $J^{(0)}$ — унитарная матрица. При этом (§ 3, п. 2) α-базис оператора T_1 состоит из векторов $g_{1k} = P_1 g_k$ ($k = 1, 2, \cdots s$), где $\{g_k\}_{k=1}^{s}$ — α-базис оператора T.

В нашем случае, как легко убедиться,

$$g_{1k} = \theta\,[g_k, e]\,e, \tag{8.2}$$

где e — «единичный» вектор пространства Π_1, нормированный условием $[e, e] = \theta$ ($\theta = \pm 1$). Подставляя (8.2) в выражение для характеристической матрицы-функции оператора T_1 и воспользовавшись легко проверяемым соотношением

$$(I - zT^0)^{-1} g_{1k} = \frac{1}{1 - z\bar{z}^0}\, g_{1k},$$

получим

$$\chi_{T_1}(z)\, J_1^{(0)} \chi^*_{T_1}(0) = J_1 - \frac{\theta}{1 - z\bar{z}_0}\, \| [g_k, e][e, g_i] \|. \tag{8.3}$$

Если теперь ввести вектор

$$\varepsilon = ([e, g_1], [e, g_2], \cdots; [e, g_s]), \tag{8.4}$$

то соотношение (8.3) перепишется в виде

$$\chi_{T_1}(z) J_1^{(0)} \chi_{T_1}^*(0) = J_1 - \frac{\theta}{1 - z\bar{z}_0} \varepsilon^* \varepsilon. \tag{8.5}$$

При этом в силу (1.13) и (8.4),

$$(1 - |z_0|^2)\theta = \varepsilon J_1 \varepsilon^*. \tag{8.6}$$

Воспользовавшись соотношениями (8.5) и (8.6), легко получить

$$\chi_{T_1}(z) J_1^{(0)} \chi_{T_1}^*(0) J_1 \varepsilon^* = \frac{z_0 - z}{1 - z\bar{z}_0} \bar{z}_0 \varepsilon^*.$$

Следовательно,

$$\chi_{T_1}(z_0) J_1^{(0)} \chi_{T_1}^*(0) J_1 \varepsilon^* = \vec{0},$$

где $\vec{0}$ — нулевой вектор-столбец. А так как матрицы $J_1^{(0)}$, $\chi_{T_1}^*(0)$ и J_1 — неособенные, а вектор ε^* при $|z_0| \neq 1$ не нулевой (что вытекает из соотношения (8.6)), то последнее соотношение возможно лишь при условии

$$\det \chi_{T_1}(z_0) = 0. \tag{8.7}$$

Это дает возможность обосновать следующее утверждение:

Теорема 8.1. *Пусть z_0 — (+)-собственное или (—)-собственное значение K_r-оператора T, не лежащее на окружности $|z| = 1$. Если при этом $\frac{1}{\bar{z}_0}$ — регулярная точка оператора T, то* $\det \chi_T(z_0) = 0$.

Доказательство. Воспользовавшись соотношением (8.1), получим

$$\det \chi_T(z_0) = \det \chi_{T_1}(z_0) \det \chi_{T_2}(z_0) \det U, \tag{8.8}$$

где $|\det U| = 1$ (в силу того, что матрица $U\,J^{(0)}$ — унитарна). Далее, по условию $\frac{1}{\bar{z}_0} \in \rho(T)$. Кроме того, как легко видеть, $\frac{1}{\bar{z}_0} \in \rho(T_1)$. Поэтому на основании утверждения III (§ 3, п. 1) $\frac{1}{\bar{z}_0} \in \rho(T_2)$. Но тогда (см. § 2, п. 1) характеристическая матрица-функция $\chi_{T_2}(z)$ оператора T_2 является аналитической матрицей-функцией в точке z_0. Отсюда в частности, вытекает, что

$$|\det \chi_{T_2}(z_0)| < \infty. \tag{8.9}$$

Рассматривая теперь соотношения (8.7) — (8.9), видим, что $\det \chi_T(z_0) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 8.2. *Если* $\det \chi_T(z_0) = 0$, *то* $z_0 \in \sigma(T)$.

Доказательство. Действительно, в таком случае на основании (2.11)

$$\det \chi_T\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right) = \infty.$$

Но тогда, очевидно, (см. § 2, п. 1) точка z_0 не может быть регулярной для оператора T. Следовательно, $z_0 \in \sigma(T)$.

Следствие. *Если спектр K_r-оператора T, не лежащий на единичной окружности $|z|=1$, состоит из собственных значений этого оператора, то нули определителя $\det \chi_T(z)$ (не лежащие на единичной окружности), являются собственными значениями оператора T.*

2. **Нерастягивающие операторы.** Оператор $\overline{T}$, действующий в пространстве Π, называется нерастягивающим, если при любом $f \in \Pi$

$$[Tf, Tf] \leqslant [f, f]. \tag{8.10}$$

Пусть z_0 — собственное значение нерастягивающего оператора T, а f — соответствующий собственный вектор. Тогда на основании изложенного $|z_0|^2 [f, f] \leqslant [f, f]$, откуда вытекает следующее утверждение:

1. *$(+)$-собственные ($(-)$-собственные) значения нерастягивающего оператора T, не лежащие на окружности $|z|=1$, лежат внутри (вне) этой окружности.*

Теорема 8.3. *Собственные векторы нерастягивающего K_r-оператора T, отвечающие (0)-собственным значениям или собственным значениям, лежащим на окружности $|z|=1$, принадлежат области унитарности G_T оператора T.*

Доказательство. Пусть T — нерастягивающий K_r-оператор. Тогда на основании определения (нерастягивающего оператора) и соотношения 1.11) при любом $f \in \Pi$

$$[f, f] - [Tf, Tf] = \sum_{k=1}^{r} |[f, h_k]|^2 J_k \geqslant 0, \tag{8.11}$$

где $\{h_k\}_{k=1}^{r}$ — некоторый линейно независимый (см. § 1, п. 4) α-базис оператора T. Последнее неравенство, как легко видеть, возможно лишь при условии

$$J_k = 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{8.12}$$

Пусть теперь собственное значение z_0 оператора T удовлетворяет условию теоремы, а φ — соответствующий собственный вектор. Тогда, очевидно,

$$[\varphi, \varphi] - [T\varphi, T\varphi] = (1 - |z_0|^2)[\varphi, \varphi] = 0. \tag{8.13}$$

Из соотношений (8.11) и (8.13) при условии (8.12) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{r} |[\varphi, h_k]|^2 = 0,$$

и, следовательно,

$$[\varphi, h_k] = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{8.14}$$

А так как линейная оболочка $\mathfrak{L}$ совокупности $\{h_k\}_{k=1}^{r}$ совпадает с подпространством $\mathfrak{N}_T$ (см. § 1, п. 4), то на основании (8.14), $\varphi \perp \mathfrak{N}_T$, т. е. $\varphi \in G_T$.

Теорема 8.4. *Если простой нерастягивающий K_r-оператор T действует в невырожденном пространстве Π, то он не имеет (0)-собственных значений, а также собственных значений, лежащих на единичной окружности $|z|=1$.*

Доказательство. Пусть, например, z_0 — (0)-собственное значение простого нерастягивающего K_r-оператора T, а φ — соответствующий собственный вектор. Тогда на основании предыдущей теоремы $\varphi \in G_T$,

Следовательно, подпространство Π', натянутое на вектор φ, принадлежит подпространству G_T. При этом, очевидно, в подпространстве Π' оператор T индуцирует унитарный оператор. А это значит, что $\Pi' \subset \Pi_T$, где Π_T — дополнительное подпространство оператора T. Но по условию оператор T простой и Π — невырожденное подпространство. Поэтому (§ 5, п. 3) подпространство Π_T, а значит, и подпространство Π' не содержат отличных от нуля векторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. С. Лившиц. Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве. «Матем. сб.,» 19(61), 239—260, (1946).

2. М. С. Лившиц. Изометрические операторы с равными дефектными числами, квазиунитарные операторы. «Матем. сб.,» 26(68) (1950), 247—264.

3. М. С. Лившиц, В. П. Потапов. Теорема умножения характеристических матриц-функций. ДАН СССР, 72, № 4, (1950), 625—628.

4. А. В. Кужель. Теорема умножения характеристических матриц-функций неунитарных операторов. Научн. докл. высшей школы, 3 (1960), 33—41.

5. М. С. Бродский. Характеристические матрицы-функции линейных операторов. «Матем. сб.,» 39(81), 2 (1956), 179—200.

6. М. С. Бродский и М. С. Лившиц. Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы. «Усп. матем. наук», 13, вып. 1(79) (1958), 3—85.

7. А. В. Кужель. Спектральний аналіз квазіунітарних операторів першого рангу в просторі з індефінітною метрикою. ДАН УРСР, № 8 (1961), 1001—1003.

8. А. В. Кужель. Характеристичні матриці-функції квазіунітарних операторів довільного рангу в просторі з індефінітною метрикою. ДАН УРСР, № 9 (1962), 1135—1138.

9. Ю. П. Гинзбург и И. С. Иохвидов. Исследование по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой. «Усп. матем. наук» 17, вып. 4 (106) (1962), 3—56.

10. E. Scheibe. Über hermitische Formen in topologischen vektorräumen. I. Ann. Acad. Sci. Fenn., AI, 294 (1960).

12. Ф. Рисс и Б. С. Надь. Лекции по функциональному анализу. Изд-во иностр. лит., М., (1954).

Поступила 10 января 1966 г.