О ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ БОЛЯ — БОРА

М. Г. Любарский

1. Известная теорема Боля [1] — Бора [2] утверждает, что какова бы ни была почти-периодическая (п.—п.) функция $f(t)$, каждое ограниченное решение дифференциального уравнения

$$x_t' = f(t)$$

является п.-п. функцией.

Бор и Нейгебауэр [3] обобщили этот результат на линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Их доказательство непосредственно опирается на теорему Боля — Бора. Другое доказательство этого факта дал Фавар [4]. Он также получил ряд важных результатов, относящихся к линейным дифференциальным операторам с п -п. коэффициентами. Из его теории легко получается (см. п. 4) обобщение теоремы Боля — Бора на этот класс операторов.

Цель настоящей заметки — перенести теорему Боля — Бора на линейные дифференциальные операторы с п.-п. в смысле Левитана (L. п.-п.) коэффициентами. Предварительно в пунктах 6, 7 и 8 для таких операторов устанавливаются теоремы, аналогичные основным теоремам теории Фавара [4]. При этом существенно используются боровские компактификации оси, впервые примененные к изучению L. п.-п. функций Б. Я. Левиным [5].

2. Из теории п -п. функций известно, что с помощью произвольного счетного числового модуля M на вещественной оси можно ввести новую топологию Ω_M, задаваемую согласованной с операцией сложения метрикой, так что сходимость последовательности чисел в этой топологии совпадает со сходимостью на модуле M. Подобные топологии называются боровскими компактификациями оси, так как они превращают вещественную ось в предкомпактную топологическую группу.

Боровские компактификации оси связаны с п.-п. и L. п.-п. функциями следующим замечательным образом.

Класс L. п.-п. (п.-п.) функций с числовым модулем, принадлежащим модулю M, совпадает с классом непрерывных (равномерно непрерывных) в топологии Ω_M функций.

Часть этого утверждения, касающаяся п.-п. функций, установлена Г. Бором [6]. Утверждение о L. п-п. функциях было определено при некоторых ограничениях В. А. Марченко [7] и независимо в полном объеме — Б. Я. Левиным [5].

Вещественную ось, наделенную топологией Ω_M, можно пополнить с помощью процедуры Хаусдорфа. Полученная компактная группа T_M называется компактом Бора.

Пусть $\varphi(t)$ — п.-п. функция, и отвечающий ей числовой модуль принадлежит модулю M. Так как функция $\varphi(t)$ равномерно непрерывна в топологии Ω_M, то ее можно единственным образом, сохраняя непрерывность, продолжить на весь компакт Бора T_M. Полученную функцию будем обозначать той же буквой φ.

Рассмотрим семейство функций, заданных на вещественной оси,

$$H\{\varphi(t)\} = \{\varphi_h(t) = \varphi(t+h)\}_{h \in T_M}.$$

Легко видеть, что семейство $H\{\varphi\}$ состоит из п.-п. функций. Числовой модуль каждой функции из этого семейства совпадает с модулем функции $\varphi(t)$. Семейство $H\{\psi\}$, порожденное любой функцией $\psi \in H\{\varphi\}$, совпадает с исходным семейством $H\{\varphi\}$.

Нетрудно также установить, что семейство $H\{\varphi\}$ не зависит от выбора модуля M, коль скоро этот модуль содержит модуль функции $\varphi(t)$.

3. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор

$$L^m x = \overset{m}{x_t} + A_1(t)\overset{m-1}{x_t} + \cdots + A_m(t)\bar{x},$$

действующий в пространстве m раз непрерывно дифференцируемых функций $x(t): R^1 \to R^n$. Если матрицы-коэффициенты $\{A_i(t)\}_{i=1,\ldots,m}$ являются L. п.-п., в частности, п.-п. функциями, то будем называть этот оператор L. п.-п. оператором или п.-п. оператором соответственно.

Назовем числовым модулем ML^m оператора L^m арифметическую сумму всех числовых модулей, отвечающих матрицам $\{A_i(t)\}_{i=1,\ldots,m}$. Обозначим через ΩL^m боровскую компактификацию оси, определяемую модулем ML^m, а через TL^m — соответствующий этой компактификации оси компакт Бора.

Предположим, что L^m есть п.-п. оператор. Фавар показал, что наряду с этим оператором полезно рассматривать следующее семейство операторов:

$$H\{L^m\} = \{L_p^m x = \overset{m}{x_t} + A_{1,p}(t)\overset{m-1}{x_t} + \cdots + A_{m,p}(t)x\}_{p \in TL^m},$$

где матрицы $\{A_{i,p}\}_{i=1,\ldots,m}$ определяются соотношениями

$$A_{i,p}(t) = A_i(t+p) \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Каждый оператор из семейства $H\{L^m\}$ является п.-п. оператором. Отвечающий ему числовой модуль совпадает с модулем ML^m.

Для линейного дифференциального оператора

$$L^1 x = x_t' + A(t)x$$

с п.-п. матрицей $A(t)$ Фавар ввел следующее определение.

Определение 1. *П.-п. оператор L^1 удовлетворяет условию разделенности, если каждое нетривиальное ограниченное решение $x(t)$ уравнения*

$$L^1 x = 0 \tag{а}$$

отделено от нуля, т. е. $\inf\limits_{\in R^1} \|x(t)\| > 0$.

Зададимся произвольной п.-п. функцией $f(t): R^1 \to R^n$. Отвечающий ей числовой модуль обозначим через M_f.

Теорема Фавара. *Если существует ограниченное решение уравнения*

$$L^1 x = f(t), \tag{б}$$

и все операторы семейства $H\{L^1\}$ удовлетворяют условию разделенности, то уравнение (б) *имеет п.-п. решение. Модуль этого решения принадлежит модулю $M_{L^1,f} = M_{L^1} + M_f$* [1].

4. В этом пункте теорема Боля—Бора обобщается на п.-п. операторы произвольного порядка.

---

[1] Знак плюс здесь, как и в дальнейшем, обозначает арифметическую сумму числовых множеств.

Определение 2. *П.-п. оператор L^m называется оператором Боля—Бора в классе п.-п. функций, если (какова бы ни была п.-п. функция $f(t): R^1 \to R^n$) каждое ограниченное решение уравнения*

$$L^m x = f(t) \tag{Б}$$

является п.-п. функцией.

Сформулируем теорему Боля—Бора для п.-п. операторов.

Теорема 1. *Пусть L^m есть п.-п. оператор, обладающий следующим свойством. Для любого оператора $S^m \in H\{L^m\}$ каждое ограниченное решение уравнения*

$$S^m x = 0 \tag{1}$$

является п.-п. функцией. Тогда оператор L^m есть оператор Боля—Бора в классе п.-п. функций[1].

Для п.-п. операторов первого порядка ($m = 1$) доказательство теоремы 1 вытекает из теоремы Фавара и следующей вспомогательной леммы.

Лемма 1. *В условиях теоремы 1 (при $m = 1$) все операторы из семейства $H\{L^1\}$ удовлетворяют условию разделенности.*

Доказательство. Пусть S^1 — произвольный оператор из семейства $H\{L^1\}$, а $x(t)$ — какое-нибудь ограниченное и, следовательно, п.-п. решение уравнения (1). Обозначим через M сумму модулей, отвечающих оператору L^1 и функции $x(t)$. (Напомним, что модули операторов S^1 и L^1 совпадают.) Через Ω и T обозначим соответствующие модулю M боровскую компактификацию оси и компакт Бора.

Предположим, что решение $x(t)$ не отделено от нуля, т. е. существует последовательность $t = \{t_k\}_{k=1,2,\ldots} \subset R^1$ такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \| x(t_k) \| = 0. \tag{2}$$

Лемма будет доказана, если мы установим, что в этом случае $x(t) \equiv 0$.

Последовательность t, рассматриваемая как подмножество компакта T, должна иметь предельные точки. Пусть p — одна из таких точек, а $\{t'_k\}_{k=1,2,\ldots} \subset t$ — подпоследовательность, имеющая эту точку своим пределом.

Очевидно, для любого натурального k выполнено

$$S^1_{t'_k} x_{t'_k}(t) = 0.$$

Матрица оператора $S^1_{t'_k}$ при $k \to \infty$ равномерно стремится к матрице оператора $S_{t'_k}$. Из условия (2) вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} x_{t'_k}(0) = \lim_{k\to\infty} x(t'_k) = 0.$$

---

[1] Автору неизвестно, являются ли условия теоремы 1 необходимыми.

Так как решение дифференциального уравнения непрерывно зависит от коэффициентов и начальных условий, при всех вещественных t имеем

$$\lim_{k\to\infty} x(t+t_k') = \lim_{k\to\infty} x_{t'_k}(t) = 0. \tag{3}$$

Из равномерной непрерывности функции $x(t)$ в топологии Ω следует, что предел (3) достигается равномерно на всей оси. Это и означает, что $x(t)\equiv 0$. Лемма доказана.

Для распространения теоремы 1 на операторы произвольного порядка применим следующий стандартный прием. Запишем уравнение (Б) в виде уравнения первого порядка в фазовом пространстве R^{mn}:

$$\tilde{L}^m u = \tilde{f}, \tag{4}$$

где

$$\tilde{L}^m u = u_t' + Q(t)\,u; \qquad \tilde{t} = \{0, \ldots, 0, f\};$$

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 0 & -I & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & -I & \ldots & 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -I \\ A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & \ldots & A_1 \end{pmatrix};$$

I — единичная матрица порядка n.

Лемма 2. *Если п.-п. оператор L^m удовлетворяет условиям теоремы 1, то и оператор $\tilde{L}^m$ удовлетворяет этим условиям.*

Доказательство. Пусть $S^1 \in H\{\tilde{L}^m\}$ и $u(t)$ есть ограниченное решение уравнения

$$S^1 u = 0.$$

Существует оператор $S^m \in H\{L^m\}$ и ограниченное решение $x(t)$ уравнения (1) такое, что $u(t) = \{x, x_t', \ldots, x_t^{m-1}\}$. Из сделанных предположений вытекает, что функция $x(t)$ является п.-п. функцией. С помощью известной теоремы о производной п.-п. функции [8, стр. 28—29] нетрудно установить, что все компоненты решения $u(t)$ являются п.-п. функциями. Для этого нужно заметить, что производная x_t^m ограничена, как это следует из соотношения (1). Лемма доказана.

Как уже установлено, теорема 1 верна для операторов первого порядка. Таким образом, в условиях леммы 2 оператор $\tilde{L}^m$ является оператором Боля—Бора в классе п.-п. функций. Для завершения доказательства теоремы 1 остается проверить справедливость следующего утверждения.

Лемма 3. *Если оператор $\tilde{L}^m$ является оператором Боля—Бора в классе п.-п. функций, то оператор L^m также является оператором Боля—Бора в этом классе функций.*

Доказательство. Пусть $x(t)$ — произвольное ограниченное решение уравнения (Б). Легко видеть, что функция $u(t) = \{x, x_t', \ldots, x_t^{(m-1)}\}$ есть решение уравнения (4). В силу известной леммы Е. Эсклангона [9] решение $u(t)$ ограничено. По условию доказываемой леммы это решение в таком случае является п.-п. функцией. Следовательно, функция $x(t)$ также является п.-п. функцией. Лемма 3, а вместе с ней и теорема 1, полностью доказаны.

Замечание. Если п.-п. оператор L^m удовлетворяет условиям теоремы 1, все операторы из семейства $H\{L^m\}$, очевидно, также удовлетворяют этим условиям. Поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Чтобы семейство п.-п. операторов $H\{L^m\}$ состояло из операторов Боля—Бора в классе п.-п. функций, необходимо и достаточно, чтобы каждое ограниченное решение уравнения (1) при любом операторе $S^m \in H\{L^m\}$ было п.-п. функцией.*

5. Обобщая результаты Фавара, Б. М. Левитан [10] установил следующую теорему, относящуюся к уравнению (б) с п.-п. оператором L^1 и п.-п. правой частью $f(t)$.

Теорема Б. М. Левитана. *Если уравнение* (б) *имеет ограниченное решение и оператор L^1 удовлетворяет условию разделенности, то уравнение* (б) *имеет ограниченное L. п.-п. решение.*

Если предположить, что матрица оператора L^1 и функция $f(t)$ суть ограниченные L. п.-п. функции[1], утверждение теоремы остается в силе. Оказывается, что в этом случае каждое L. п.-п. решение уравнения (б) ограничено. Поэтому доказательство теоремы, данное Б. М. Левитаном, без изменений переносится на этот случай. По той же причине условие существования ограниченного решения уравнения (б) продолжает оставаться необходимым.

По-иному обстоит дело, если не предполагать ограниченности матрицы оператора L^1 и функции $f(t)$. При этом L. п.-п. решения уравнения (б) могут быть неограниченными, как показывает следующий простой пример.

Неограниченная L. п.-п. функция

$$x(t) = \frac{1}{2 + e^{it} + e^{i\sqrt{2t}}}$$

является решением уравнения

$$x_t' = \frac{e^{it} + \sqrt{2}\, e^{i\sqrt{2t}}}{i\,(2 + e^{it} + e^{i\sqrt{2t}})^2}.$$

Условие существования ограниченного решения уравнения перестает быть необходимым. Доказательство Б. М. Левитана существенно опирается на это условие. Поэтому его нельзя использовать для решения вопроса о существовании неограниченных L. п.-п. решений уравнения (б).

Чтобы обобщить теорему Б. М. Левитана на L. п.-п. операторы с неограниченными коэффициентами, введем несколько определений.

---

[1] Как показал А. Райх [11], класс ограниченных L. п.-п. функций совпадает с классом почти-автоморфных функций, введенных недавно Бохнером.

Определение 3. *Множество* $H \subset R^1$ *называется относительно* (δ-*относительно*) *плотным, если существует такое положительное число* l, *что пересечение множества* H *с любым интервалом длины* l *не пусто (содержит интервал длины* δ).

Определение 4. *Назовем функцию* $x(t): R^1 \to R^n$ *относительно* (δ-*относительно*) *ограниченной, если существует относительно* (δ-*относительно*) *плотное множество* H *такое, что*

$$\sup_{h \in H} \| x(h) \| < +\infty.$$

Определение 5. *Назовем функцию* $x(t): R^1 \to R^n$ *относительно отделенной от нуля, если существует относительно плотное множество* H *такое, что*

$$\inf_{h \in H} \| x(h) \| > 0.$$

Нетрудно показать, что *любая* L. *п.-п. функция является* δ-*относительно ограниченной.* Действительно, в качестве множества H можно выбрать множество ее ε, δ-смещений. Аналогично, *любая* L. *п.-п. функция, отличная от тождественного нуля, относительно отделена от нуля.*

Определение 6. L. *п. п. оператор* L^1 *удовлетворяет условию относительной разделенности, если каждое нетривиальное относительно ограниченное решение уравнения* (а) *относительно отделено от нуля.*

Пусть $f(t)$ — произвольная L. п.-п. функция. Отвечающий ей числовой модуль обозначим через M_f.

Теорема 3. *Если существует относительно ограниченное решение уравнения* (б) *и* L. *п.-п. оператор* L^1 *удовлетворяет условию относительной разделенности, уравнение* (б) *имеет* L. *п.-п. решение. Модуль этого решения принадлежит модулю* $M_{L^1, f} = M_{L^1} + M_f$.

Доказательство этой теоремы основано на методе минимакса, предложенном Фаваром [4]. Кроме того, оно опирается на ряд лемм, выясняющих некоторые свойства относительно ограниченных и отделенных от нуля решений. В следующих двух пунктах мы сформулируем и докажем эти леммы. Оператор L^m и функция $f(t)$ всюду в дальнейшем предполагаются почти-периодическими в смысле Левитана.

6. Пусть $x(t): R^1 \to R^n$ — m раз непрерывно дифференцируемая функция, заданная на системе интервалов $\{[a_k, b_k]\}_{k=1, 2, \ldots}$. Введем обозначение

$$\mu_i(k) = \sup_{t \in [a_k, b_k]} \| x^{(i)}(t) \|$$

$$(i = 0, 1, \ldots, m; \ k = 1, 2, \ldots).$$

Лемма 4. *Пусть а) функция $x(t)$ ограничена на системе интервалов $\{[a_k, b_k]\}_{k=1, 2, \ldots}$; б) длины интервалов этой системы превосходят число $\delta > 0$; в) для некоторого значения индекса $i = i_1 \neq 0$ выполнено*

$$\lim_{k \to \infty} \mu_{i_1}(k) = \infty. \tag{5}$$

Тогда для всех $i = 0, 1, \ldots, m-1$

$$\lim_{k \leftarrow \infty} \frac{\mu_i(k)}{\mu_m(k)} = 0. \tag{6}$$

Доказательство этой леммы легко вытекает из неравенства Э. Ландау и Ж. Адамара ([12, стр. 388—391] и [13, стр. 17—19]).

Обозначим через $I(l)$ отрезок вещественной оси $[-l, l]$.

Лемма 5. *Пусть $f(t)$ есть L. п.-п. функция, и отвечающий ей числовой модуль принадлежит модулю M. Тогда любому числу $l > 0$ можно сопоставить окрестность нуля $U \in \Omega_M$ такую, что функция $f(t)$ ограничена на множестве $I(l) + U$.*

Доказательство. Зададимся произвольным числом $l > 0$. Функция $f(t)$, очевидно, ограничена на отрезке $I(l)$. По теореме Марченко — Левина функция $f(t)$ непрерывна в топологии Ω_M. Поэтому каждой точке $t \in I(l)$ можно сопоставить окрестность нуля $U_t \in \Omega_M$, так что

$$\sup_{\vartheta \in t + U_t} \| f(\vartheta) - f(t) \| < 1.$$

В силу компактности отрезка $I(l)$ в топологии Ω_M из покрытия $\{U_t + t\}_{t \in I(l)}$ можно выбрать конечное подпокрытие. Обозначим через U пересечение всех окрестностей нуля, входящих в это конечное подпокрытие. Множество U является окрестностью нуля, принадлежащей топологии Ω_M. Легко видеть, что функция $f(t)$ ограничена на множестве $I(l) + U$.

Лемма 6. *Если H есть произвольное δ-относительно плотное множество, а $f(t)$ — L. п.-п. функция, то существует δ-относительно плотное множество $H_1 \subset H$, на котором функция $f(t)$ ограничена.*

Доказательство. Пусть число $l > 0$ таково, что каждый интервал на оси длины l содержит интервал длины δ, принадлежащий множеству H. Рассмотрим множество $H_1 = H \cap \{I(l) + U\}$, где U — окрестность нуля, существование которой установлено леммой 5. Функция $f(t)$ ограничена на множестве H_1. Остается доказать, что это множество δ-относительно плотно.

Воспользуемся тем фактом, что любое открытое в топологии Ω_M множество является относительно плотным на оси[1]. Поэтому существует число $l_1 > 0$ такое, что любой интервал длины l_1 имеет непустое пересечение с окрестностью U.

[1] Это утверждение эквивалентно теореме Кроникера [8, стр. 106—109].

Пусть произвольный интервал (a, b) имеет длину $l + l_1$. Покажем, что он содержит по крайней мере один интервал длины δ, принадлежащий множеству H_1.

Интервал $(a, a + l_1)$ по определению числа l_1 содержит точку $t \in U$. Заметим, что интервал $(t, t + l)$ принадлежит множеству $I(l) + U$ и в свою очередь содержит один интервал длины δ, принадлежащий множеству H. Таким образом, найденный интервал длины δ принадлежит одновременно множеству H_1 и интервалу (a, b). Лемма доказана.

Лемма 7. *Если решение $x(t)$ уравнения* (Б) *ограничено на некотором δ-относительно плотном множестве H, то существует δ-относительно плотное множество $H_1 \subset H$, на котором функция $x(t)$ ограничена вместе со своими производными до порядка m включительно*[1].

Доказательство. Из леммы 6 вытекает, что существует δ-относительно плотное множество $H_1 \subset H$, на котором ограничены все матрицы L. п.-п. оператора L^m и свободный член $f(t)$. Очевидно, множество H_1 можно выбрать так, чтобы оно представляло собой систему интервалов, длины которых не меньше чем δ.

Если не все производные функции $x(t)$ (до порядка m включительно) ограничены на множестве H_1, то на некоторой подсистеме интервалов $\{[a_k, b_k]\}_{k=1, 2, \dots} \subset H_1$ выполнено соотношение (5). В силу леммы 4 для всех $i = 0, 1, \dots, m-1$ справедливо соотношение (6). Так как матрицы $\{A_i(t)\}_{i=1, \dots, m}$ и функция $f(t)$ ограничены на множестве H_1, из равенств (6) вытекает, что $x(t)$ не может быть решением уравнения (Б). Полученное противоречие показывает, что на множестве H_1 функция $x(t)$ ограничена вместе со своими производными до порядка m включительно. Лемма доказана.

Обозначим через $\Omega_{L^m, f}$ боровскую компактификацию оси, отвечающую модулю $M_{L^m, f} = M_{L^m} + M_f$, где M_f — модуль L. п.-п. функции $f(t): R^1 \to R^n$.

Лемма 8. *Пусть $x(t)$ есть решение уравнения* (Б), *и величина* $\sum\limits_{k=0}^{m-1} \| x^{(k)}(t) \|$ *ограничена на каком-нибудь относительно плотном множестве H. Тогда решение $x(t)$ локально ограничено в топологии $\Omega_{L^m, f}$.*

Доказательство этой леммы можно провести, не ограничивая общности, лишь для дифференциальных операторов первого порядка.

Пусть число $l > 0$ таково, что любой интервал длины l содержит по крайней мере одну точку из множества H. Из леммы 5 легко вытекает, что существует окрестность нуля $U \in \Omega_{L^1, f}$ такая, что матрица $A(t)$ и функция $f(t)$ ограничены на множестве $I(l) + U$.

---

[1] Лемма 7 является обобщением на случай δ-относительно ограниченных функций одной известной леммы Е. Эсклангона [8].

Покажем, что решение $x(t)$ при выполнении условия доказываемой леммы ограничено в окрестности U. Зададимся для этого произвольным числом $t_0 \in U$. По определению числа l отрезок $[t_0 - l, t_0]$ содержит точку $h_0 \in H$. Интегрируя соотношение (δ) от h_0 до t $(h_0 \leqslant t \leqslant t_0)$, получим

$$\| x(t) \| \leqslant \int_{h_0}^{t} \| A(\vartheta) \| \, \| x(\vartheta) \| \, d\vartheta + \int_{h_0}^{t} \| f(\vartheta) \| \, d\vartheta +$$

$$+ \| x(h_0) \| \leqslant \int_{h_0}^{t} \| A(\vartheta) \| \, \| x(\vartheta) \| \, d\vartheta + \int_{t_0 - l}^{t_0 + l} \| f(\vartheta) \| \, d\vartheta +$$

$$+ \sup_{h \in H} \| x(h) \|.$$

Введем обозначения

$$c_1(t_0) = \int_{t_0 - l}^{t_0 + l} \| f(\vartheta) \| \, d\vartheta + \sup_{h \in H} \| x(h) \|,$$

$$c_2(t_0) = \int_{t_0 - l}^{t_0 + l} \| A(\vartheta) \| \, d\vartheta.$$

Так как $t_0 \in U$, отрезок $[t_0 - l, t_0 + l]$ принадлежит множеству $I(l) + U$, на котором функции $A(t)$ и $f(t)$ ограничены. Поэтому существуют отличные от $+\infty$ числа c_1 и c_2 такие, что $c_1(t_0) \leqslant c_1$ и $c_2(t_0) \leqslant c_2$ для всех $t_0 \in U$.

Таким образом,

$$\| x(t) \| \leqslant \int_{h_0}^{t} \| A(\vartheta) \| \, \| x(\vartheta) \| \, d\vartheta + c_1.$$

Вследствие известной леммы Гронуолла приходим к следующему неравенству:

$$\| x(t_0) \| \leqslant c_1 \exp \left\{ \int_{h_0}^{t_0} \| A(\vartheta) \| \, d\vartheta \right\} \leqslant$$

$$\leqslant c_1 \exp \left\{ \int_{t_0 - l}^{t_0 + l} \| A(\vartheta) \| \, d\vartheta \right\} \leqslant c_1 \exp \{ c_2 \},$$

которое показывает, что функция $x(t)$ ограничена в окрестности нуля U.

Чтобы показать ограниченность функции $x(t)$ в некоторой окрестности произвольной точки $t_1 \in R^1$, нужно применить проведенное выше рассуждение к функции $x_1(t) = x(t - t_1)$. Лемма доказана.

Уже отмечалось, что любое множество U, открытое в топологии какой-нибудь боровской компактификации оси Ω, относительно плотно. Более того, это множество является δ-относительно плотным. Действительно, существует окрестность $V \in \Omega$ и число $\delta > 0$ такие, что $V + t \subset U$ при всех $t \in (-\delta/2, \delta/2)$.

Таким образом, из лемм 7 и 8 вытекает следующее утверждение.

Лемма 9. *Чтобы решение $x(t)$ уравнения* (Б) *являлось δ-относительно ограниченной функцией, необходимо и достаточно, чтобы существовало относительно плотное множество H, на котором ограничена величина* $\sum_{k=0}^{m-1} \| x^{(k)}(t) \|$.

Лемма 10. *Пусть Ω есть боровская компактификация оси. Если дважды непрерывно дифференцируемая функция $\xi(t): R^1 \to R^1$ непрерывна в точке ϑ относительно топологии Ω и, кроме того, $\xi''(t)$ ограничена в какой-нибудь окрестности $U \in \Omega$ точки ϑ, то $\xi'(t)$ непрерывна в этой точке относительно топологии Ω.*

Эта лемма в несколько более общей форме доказана в [14].

Лемма 11. *Если решение уравнения* (Б) *является L. п.-п. функцией, все производные этого решения до порядка m включительно являются L. п.-п. функциями.*

Доказательство. L. п.-п. решение $x(t)$ уравнения (Б) является δ-относительно ограниченным. По лемме 7 существует относительно плотное множество, на котором это решение ограничено вместе со своими производными до порядка m включительно. Перейдем к уравнению (4) и применим лемму 8. Получим, что все производные до порядка m включительно локально ограничены в топологии $\Omega_{L^m, f}$. Производная $x_t^{(m)}$ также локально ограничена в этой топологии, что следует из соотношения (Б). Для завершения доказательства остается сослаться на лемму 10.

7. В этом пункте выясняются некоторые свойства относительно отделенных от нуля решений однородного уравнения (а).

Лемма 12. *Если решение $x(t)$ уравнения* (а) *относительно отделено от нуля, то оно локально отделено от нуля в топологии Ω_{L^1}, т. е. у каждой точки $t_1 \in R^1$ существует окрестность $U \in \Omega_{L^1}$, в которой функция $x(t)$ отделена от нуля:* $\inf\limits_{t \in U} \| x(t) \| > 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что $t_1 = 0$. Пусть H относительно плотное множество, на котором функция $x(t)$ отделена от нуля. Сохраним все построения, проведенные при доказательстве леммы 8, и воспользуемся неравенством

$$\| x(t) \| \leqslant \int_{t_0}^{t} \| A(\vartheta) \| \| x(\vartheta) \| d\vartheta + \| x(t_0) \|,$$

где $t_0 \in U$, $h_0 \in H \cap [t_0, t_0 + l]$, $t \in [t_0, h_0]$.

Применив лемму Гронуолла, получим

$$\| x(h_0) \| \leqslant \| x(t_0) \| \cdot \exp\left\{ \int_{t_0}^{h_0} \| A(\vartheta) \| d\vartheta \leqslant \right.$$

$$\left. \leqslant \| x(t_0) \| \exp\left\{ \int_{t_0-l}^{t_0+l} \| A(\vartheta) \| d\vartheta \right\} \leqslant \| x(t_0) \| \exp\{c_2\}.$$

Отсюда имеем

$$\| x(t_0) \| \geqslant \frac{\| x(h_0) \|}{\exp\{c_2\}} \geqslant \exp\{-c_2\} \inf_{h \in H} \| x(h) \|$$

при любом $t_0 \in U$. Лемма доказана.

Из леммы 8 вытекает, что *множество относительно ограничен-* *решений однородного уравнения* (а) *образует линейное простран-*. Действительно, если решение $x_1(t)$ и $x_2(t)$ относительно огра-ны, то по лемме 8 существует окрестность из топологии Ω_{L^1}, которой они оба ограничены. Следовательно, в этой окрестности ничена и любая их линейная комбинация. Так как каждое ытое в топологии Ω_{L^1} множество относительно плотно на оси, линейные комбинации решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ относительно ограничены.

Заметим еще, что в силу конечномерности пространства относительно ограниченных решений однородного уравнения (а) можно выбрать окрестность нуля, принадлежащую топологии $\Omega_{L^1, f}$, в которой ограничены все относительно ограниченные решения уравнения (б).

Лемма 13. *Если L. п.-п. оператор L^1 удовлетворяет условию относительной разделенности, то в топологии Ω_{L^1} существует окрестность нуля, в которой все относительно ограниченные решения уравнения* (а), *кроме тривиального, отделены от нуля.*

Доказательство. Пусть $U \in \Omega_{L^1}$ — окрестность нуля, в которой ограничены все относительно ограниченные решения однородного уравнения (а). Множество этих решений мы можем рассматривать как некоторое конечномерное линейное пространство Введем в пространстве $\mathfrak{X}$ естественную норму

$$\| x \|_1 = \sup_{t \in U} \| x(t) \| \quad (x \in \mathfrak{X}). \tag{7}$$

Выберем последовательность окрестностей нуля $V = \{V_k\}_{k=1, 2, \ldots} \subset \Omega_{L^1}$ таких, что какова бы ни была окрестность нуля $G \in \Omega_{L^1}$, начиная с некоторого значения индекса k, выполнено $V_k \subset G$.

Обозначим через S единичную сферу в пространстве $\mathfrak{X}$ и покажем, что в топологии Ω_{L^1} существует окрестность нуля, в которой отделены от нуля все функции из S. Действительно, пусть это не так. Тогда последовательности V можно сопоставить последовательность функций $z = \{z_k(t)\}_{k=1, 2, \ldots} \subset S$ так, что

$$\inf_{t \in V_k} \| z_k(t) \| \leqslant 1/k.$$

Сфера S компактна в топологии, определяемой новой нормой (7). Поэтому можно выбрать последовательность $\{z_k^1\}_{k=1, 2, \ldots} \subset z$ так, что предел

$$\lim_{k \to \infty} z_k^1(t) = z(t)$$

существует и достигается равномерно в окрестности U. Функция $z(t)$ принадлежит сфере S и поэтому не может быть тождественным нулем. По условию доказываемой леммы функция $z(t)$ в таком случае относительно отделена от нуля. Из леммы 12 следует, что существует окрестность нуля $G \in \Omega_{L^1}$ такая, что

$$\inf_{t \in G} \| z(t) \| > 0. \tag{8}$$

Однако, начиная с некоторого значения индекса k, $V_k \subset G \cap U$ и, значит,

$$\inf_{t \in G} \| z(t) \| \leqslant \inf_{t \in V_k} \| z(t) \| \leqslant \inf_{t \in V_k} \| z_k^1(t) \| + \\ + \sup_{t \in U} \| z(t) - z_k^1(t) \|.$$

Выражение, стоящее в правой части этого неравенства, стремится к нулю при $k \to \infty$. Это несовместимо с неравенством (8). Полученное противоречие, доказывает, что в топологии Ω_{L^1} существует окрестность нуля, в которой отделены от нуля все функции из сферы S. Любую функцию $x \in \mathcal{X}$ можно представить в виде $x(t) = \beta \cdot z(t)$ $(z \in S,\ \beta \in R^1)$. Тем самым лемма 13 доказана.

Лемма 14. *Если для решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ уравнения* (б) *в некоторой точке $t \in R^1$ выполнено соотношение*

$$\lim_{k \to \infty} x_1(t + \tau_k) = x_2(t), \tag{9}$$

где последовательность $\{\tau_k\}_{k=1,2,\ldots} \subset R^1$ сходится к нулю в топологии $\Omega_{L^1,f}$, то соотношение (9) *выполнено во всех точках оси.*

Доказательство. В силу теоремы Марченко — Левина матрица $A(t)$ и функция $f(t)$ непрерывны в топологии $\Omega_{L^1,f}$. Следовательно,

$$\lim_{k \to \infty} A(t + \tau_k) = A(t),$$

$$\lim_{k \to \infty} f(t + \tau_k) = f(t),$$

причем предел достигается равномерно на каждом отрезке как на компактном в топологии $\Omega_{L^1,f}$ множестве. Далее остается сослаться на известную теорему о непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от коэффициентов и начальных условий. Лемма доказана.

8. Перейдем к доказательству теоремы 3 из п. 5. Пусть $G \in \Omega_{L^1,f}$ — окрестность, в которой ограничены все относительно ограниченные решения уравнения (а) или (б), и отделены от нуля все относительно ограниченные решения уравнения (а).

Определение 7. *Назовем решение* $x_1(t)$ *неоднородного уравнения* (б) *минимальным, если*

$$g = \sup_{t \in G} \| x_1(t) \| \leqslant \sup_{t \in G} \| x(t) \|$$

для любого относительно ограниченного решения $x(t)$ *уравнения* (б).

Легко видеть, что минимальное решение существует, коль скоро существует хотя бы одно относительно ограниченное решение уравнения (б). Покажем, что в предположениях теоремы 3 существует только одно минимальное решение.

Действительно, пусть кроме решения $x_1(t)$ свойством минимальности обладает отличное от него решение $x_2(t)$. Имеем

$$\left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x_1 - x_2}{2} \right\|^2 = \frac{\| x_1 \|^2 + \| x_2 \|^2}{2} \leqslant g. \qquad (10)$$

Функция $\frac{x_1 - x_2}{2}$ есть решение однородного уравнения (а), ограниченное в окрестности G. Следовательно,

$$\inf_{t \in G} \left\| \frac{x_1 - x_2}{2} \right\| > 0.$$

Из этого неравенства, а также из (10) вытекает, что

$$\sup_{t \in G} \left\| \frac{x_1 + x_2}{2} \right\| < g.$$

Так как функция $\frac{x_1 + x_2}{2}$ — относительно ограниченное решение неоднородного уравнения (б), то последнее неравенство противоречит определению минимального решения.

Итак, минимальное решение единственно в условиях теоремы 3. Покажем, что оно является L. п.-п. функцией. Зададимся для этого произвольной последовательностью $\tau = \{\tau_k\}_{k=1,2,\dots} \subset R^1$, стремящейся к нулю в топологии $\Omega_{L^1, f}$, и рассмотрим последовательность $\{x_1(\tau_k\}_{k=1,2,\dots}$. Эта последовательность n-мерных векторов ограничена и поэтому имеет предельные точки. Пусть $\{\tau'_k\}_{k=1,2,\dots} \subset \tau$ такая подпоследовательность, на которой достигается какая-нибудь предельная точка ξ, т. е.

$$\lim_{k \to \infty} x_1(\tau'_k) = \xi. \qquad (11)$$

Обозначим через $x_2(t)$ решение уравнения (б) с начальными условиями $x_2(0) = \xi$. Из леммы 14 следует, что для любого $t \in R^1$ выполнено

$$\lim_{k \to \infty} x_1(t + \tau'_k) = x_2(t).$$

Поэтому $x_2(t)$ является минимальным решением и, следовательно, совпадает с $x_1(t)$. Возвращаясь к равенству (11), получим, что каждая предельная точка ограниченной последовательности $\{x_1(\tau_k)\}_{k=1, 2, \ldots}$ совпадает с $x_1(0)$. Значит, эта последовательность имеет предел

$$\lim_{k \to \infty} x_1(\tau_k) = x_1(0).$$

Снова применяя лемму 14, получим, что каждой точке $t \in R^1$ выполнено соотношение

$$\lim_{k \to \infty} x_1(t + \tau_k) = x_1(t).$$

Так как последовательность τ, сходящаяся в топологии $\Omega_{L^1, f}$ к нулю, была выбрана произвольно, то из последнего равенства и теоремы Марченко—Левина следует, что минимальное решение $x_1(t)$ есть L п.-п. функция, а отвечающий ей числовой модуль принадлежит модулю $M_{L^1, f}$. Теорема доказана.

Замечание. Если предположить, что матрица $A(t)$ и функция $f(t)$ являются п.-п. функциями Г. Бора, теорема 3 переходит в теорему Б. М. Левитана. Действительно, нетрудно показать с помощью леммы Гронуолла, что если упомянутые функции суть ограниченные L. п.-п. функции, в частности, п.-п. функции Г. Бора, любое относительно ограниченное решение уравнения (а) или (б) ограничено на оси, а любое относительно отделенное от нуля решение уравнения (а) отделено от нуля на всей оси.

9. Сформулируем и докажем теорему Боля—Бора для L. п.-п. операторов произвольного порядка.

Определение 8. *L. п.-п. оператор L^m называется оператором Боля—Бора в классе L. п.-п. функций, если какова бы ни была L. п.-п. функция $f(t): R^1 \to R^n$, каждое δ-относительно ограниченное решение уравнения* (Б) *является L. п.-п. функцией.*

Теорема 4. *Чтобы L. п.-п. оператор L^m являлся оператором Боля—Бора в классе L. п.-п. функций, необходимо и достаточно, чтобы каждое δ-относительно ограниченное решение уравнения*

$$L^m x = 0 \tag{A}$$

было L. п.-п. функцией.

Необходимость условия этой теоремы очевидна. Докажем его достаточность.

Заметим, что при $m = 1$ мы находимся в условиях применения теоремы 3. Действительно, любое нетривиальное относительно ограниченное решение уравнения (а) в силу леммы 9 δ-относительно ограничено. По условию доказываемой теоремы это решение является L.п.-п. функцией и, следовательно, относительно отделено от нуля.

Из теоремы 3 легко вытекает утверждение теоремы 4 в случае $m = 1$.

Для распространения теоремы 4 на L. п.-п. операторы произвольного порядка, как и в случае п.-п. операторов, перейдем к уравнению (4) и воспользуемся следующей леммой.

Лемма 15. Чтобы L. п.-п. оператор L^m являлся оператором Боля—Бора, в классе L. п.-п. функций необходимо и достаточно, чтобы оператор L^m являлся оператором Боля—Бора в том же классе функций.

Необходимость. Пусть оператор L^m является оператором Боля—Бора в классе L. п.-п. функций. Рассмотрим произвольное δ-относительно ограниченное решение $u(t)$ уравнения

$$\tilde{L}^m u = 0.$$

Существует ограниченное и, следовательно, L. п.-п. решение $x(t)$ уравнения (А) такое, что $u(t) = \{x, x_t', \ldots, x_t^{(m-1)}\}$. В силу леммы 11 все компоненты решения $u(t)$ являются L. п.-п. функциями.

Таким образом, оператор $\tilde{L}^m$ удовлетворяет условиям теоремы 4. Так как последняя доказана для операторов первого порядка, то $\tilde{L}^m$ есть оператор Боля—Бора в классе L. п.-п. функций.

Достаточность. Пусть $\tilde{L}^m$ есть оператор Боля—Бора в классе L. п.-п. функций, и $x(t)$ — произвольное δ-относительно ограниченное решение уравнения (Б). Легко видеть, что функция $u(t) = \{x, x_t', \ldots, x_t^{(m-1)}\}$ является решением уравнения (4). В силу леммы 7 решение $u(t)$ δ-относительно ограничено. В наших предположениях $u(t)$ в таком случае является L. п.-п. функцией. Следовательно, функция $x(t)$ также является L. п.-п. функцией. Лемма 15, а вместе с ней теорема 4 полностью доказаны.

Автор пользуется случаем выразить глубокую благодарность Б. Я. Левину за постоянный интерес к работе и ценные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. Bohl. Ueber eine Differentialgleichung der Störungstheorie. Crelles Journ., **131**, 1906.

2. H. Bohr. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, I Teil, Acta math., **45**, 1925.

3. H. Bohr und O. Neugebauer. Ueber lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite, Gött. Nachr, 1926.

4. J. Favard, Sur les équations differentielles à coefficients presque — périodiques. Acta math., **51**, 1927.

5. Б. Я. Левин. О почти-периодических функциях Левитана, УМЖ, 1949, № 1.

6. H. Bohr. Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen. II Teil, Acta math., **46**, 1925.

7. В. А. Марченко. Применение метода суммирования Фейера—Бохнера к обобщенным рядам Фурье. ДАН СССР, **53**, 1946, № 1.

8. Б. М. Левитан. Почти-периодические функции. М., ГИТТЛ, 1953.

9. E. Esclangon. Sur les intégrales bornées d'une équation différentielle linéaire. C. R. Ac. de sc., Paris, **160**, 1915.

10. Б. М. Левитан. Новое обобщение почти-периодических функций Г. Бора. «Зап. Харьковск. матем. об.-ва», **15**, 1938, № 2.

11. A. Reich. Die vorkompacten Gruppen und das Fastperiodizital, Math. Z., **116** (1970), 218.

12. Г. Х. Харди, Дж. Литтльвуд и Г. Полиа. Неравенства, ИЛ, 1948.

13. М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд и Ю. С. Колесов. Нелинейные почти-периодические колебания. М., «Наука», 1970.

14. М. Г. Любарский. О неопределенном интеграле почти-периодической по Левитану функции. «Теория функций, функциональный анализ и их приложения», вып. 16. Изд-во Харьковск. ун-та, 1972.

Поступила 9 ноября 1971 г.