К ВОПРОСУ ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЙ РЕШЕНИЙ РЕЛЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО И ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЙ

Ли Мун Су

Дифференциальные уравнения с запаздыванием (схема с обратной связью и разрывным оператором (релейная схема) являются в некотором смысле общими уравнениями теории автоматического регулирования. Рассмотрим частный случай общего уравнения автоматического регулирования — уравнение с разрывным оператором. Следуя В. А. Барабшину и Ю. И. Алимову [4], такие уравнения будем называть релейными. Релейные уравнения изучались в работах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8], где приведены обобщения решений релейных уравнений.

Остановимся на определении решения Е. Е. Викторовского [5], рассматривавшего систему уравнений

$$y_i' = f_i(t, y_1(t), \ldots, y_n(t)), \tag{1}$$

где $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ измеримы по $t, y_1, \ldots, y_n$. Решением системы таких уравнений Е. Е. Викторовский называет абсолютно непрерывную вектор-функцию $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$, если

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{mN=0} \inf_{z \in R(y(t), \delta) - N} \{f_i(t, z)\} \leqslant$$

$$\leqslant y_i'(t) \leqslant \lim_{\delta \to 0} \inf_{mN=0} \sup_{z \in R(y(t), \delta) - N} \{f_i(t, z)\} \tag{2}$$

при почти всех t.

Е. Е. Викторовский, доказывая теорему о существовании решения, устанавливает существование верхнего и нижнего решений при $n = 1$ и исследует ряд топологических свойств решений.

При исследовании дифференциального уравнения последнее часто сводится к интегральному уравнению. Например, вопросы, связанные с оценками решений дифференциального уравнения, оказалось удобным исследовать для более общего объекта — интегрального уравнения. В связи со сказанными возникает необходимость изучения релейного интегрального уравнения.

Релейные интегральные уравнения рассматривались в работах [2, 3, 6]. Как и в случае релейного дифференциального уравнения, основным вопросом релейного интегрального уравнения является определение понятия решения.

При сведении системы дифференциальных уравнений (1) к системе интегральных уравнений

$$x(t)=\int\limits_a^t K(t,\ s)\,f(s,\ x(s))\,ds \tag{3}$$

методом Фубини и Трикоми встает вопрос об эквивалентности системы [1] и [3].

Доказательству эквивалентности системы (1) и (3) в смысле определения решения Е. Е. Викторовского и работ [2, 3, 6] посвящена настоящая статья.

Предположим, что

1) если $x=\{x^1,\ \ldots,\ x^n\}$, то $\|x\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x^i|$;

2) если $H(x)=\{H^i(x)\}=\{H^1(x^1,\ \ldots,\ x^n),\ \ldots,H^n(x^1,\ \ldots,\ x^n)\}$ измеримая и почти всюду ограниченная при $\|x\|<C$ вектор-функция, то

$$M_x\{\mathrm{H}(x)\}=\{M_x\{H^i(x)\}\}=$$
$$=\{\lim_{\delta\to 0}\ \inf_{mN=0}\ \sup_{z\in R(x,\ \delta)-N} H^i(z)\}.$$
$$m_x\{H(x)\}=\{m_x\{H^i(x)\}\}=$$
$$=\{\lim_{\delta\to 0}\ \sup_{mN=0}\ \inf_{z\in R(x,\ \delta)-N} H^i(z)\},$$

где $R(x,\ \delta)$ — шар радиуса δ с центром в точке x;

3) в системе дифференциальных уравнений [1]

$$x'(t)=f(t,\ x(t)),\ x(a)=0$$

вектор-функция

$$f(t,\ x)=\{f^1(t,\ x^1,\ \ldots,\ x^n),\ \ldots,\ f^n(t,\ x^1,\ \ldots\ x^n)\}$$

измерима по t при почти всех x и измерима по x при почти всех t в $G:\|x\|<C,\ a\leqslant t<b$, ограничена в $G_1:\|x\|\leqslant C_1<C,\ a\leqslant t\leqslant b_1<b$.

Рассмотрим вспомогательную лемму.

Лемма. *Пусть $f_1(t,\ x)$ непрерывна по x при почти всех t, а $f_2(t,\ x)$ ограничена при почти всех t и x в G_1. Тогда справедливы равенства*

$$M_x\{f_1(t,\ x)+f_2(t\ x)\}=f_1(t,\ x)+M_x\{f_2(t,\ x)\} \tag{4}$$

и

$$m_x\{f_1(t,\ x)+f_2(t,\ x)\}=f_1(t,\ x)+m_x\{f_2(t,\ x)\} \tag{5}$$

при почти всех t.

Доказательство. Пусть E — множество точек t, при которых условия леммы не выполняются. Очевидно, $mE=0$. Тогда при любом $t\overline{\in}E$ имеем

$$\inf_{mN=0}\ \sup_{y\in R(x_1\delta)-N}\{f_1(t,\ y)+f_2(t,\ y)\}\leqslant$$
$$\leqslant\inf_{mN=0}\{\sup_{y\in R(x_1\delta)-N} f_1(t,\ y)+\sup_{y\in R(x,\delta)-N} f_2(t,\ y)\}.$$

Так как $f_1(t,\ x)$ непрерывна по x, то

$$\sup_{y\in R(x,\delta)-N} f_1(t,\ y)=\sup_{y\in R(x,\delta)} f_1(t,\ y).$$

Итак,

$$\inf_{mN=0}\ \sup_{y\in R(x,\delta)-N}\{f_1(t,\ y)+f_2(t,\ y)\}\leqslant$$
$$\leqslant\inf_{mN=0}\{\sup_{y\in R(x,\delta)} f_2(t,\ y)+\sup_{y\in R(x,\delta)-N} f_2(t,\ y)\}\leqslant$$
$$\leqslant\sup_{y\in R(x,\delta)} f_1(t,\ y)+\inf_{mN=0}\ \sup_{y\in R(x,\delta)-N} f_2(t,\ y).$$

В силу непрерывности $f_1(t, x)$ по x

$$\sup_{y\in R(x,\delta)} f_1(t, y) \text{ стремится к } f_1(t, x) \text{ при } \delta\to 0.$$

Тогда имеем

$$M_x\{f_1(t, x)+f_2(t, x)\} \leqslant f_1(t, x)+M_x\{f_2(t, x)\}.$$

С другой стороны,

$$\inf_{mN=0}\sup_{y\in R(x,\delta)-N} f_1(t, y)+\inf_{mN=0}\sup_{y\in R(x,\delta)-N} f_2(t, y)\leqslant$$

$$\leqslant \inf_{mN=0}\{\sup_{y\in R(x,\delta)-N} f_1(t, y)+\sup_{y\in R(x,\delta)-N} f_2(t, y)\}=$$

$$=\inf_{mN=0}\{\sup_{y\in R(x,\delta)} f_1(t, y)+\sup_{y\in R(x,\delta)-N} f_2(t, y)\}=$$

$$=\inf_{mN=0}\sup_{y\in R(x,\delta)-N}\{\sup_{y\in R(x,\delta)} f_1(t, y)+f_2(t, y)\}.$$

При $\delta\to 0$ имеем

$$f_1(t, x)+M_x\{f_2(t, x)\}\leqslant M_x\{f_1(t, x)+f_2(t, x)\}.$$

Итак,

$$M_x\{f_1(t, x)+f_2(t, x)\}=f_1(t, x)+M_x\{f_2(t, x)\}.$$

Аналогично доказывается равенство (5). Лемма доказана.

Пусть $A(t)$ — $n\times n$ матрица с суммируемыми функциями a_{ij}, $i, j=1, 2, \ldots, n$. Задача (1) эквивалентна задаче

$$x'(t)+A(t)\,x(t)=A(t)\,x(t)+f(t, x(t)),$$
$$x(a)=0 \tag{6}$$

Пусть $K_A(t, s)$ — матрица Коши системы

$$x'(t)+A(t)\,x(t)=0.$$

Покажем, что задача (1) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$x(t)=\int_a^t K_A(t, s)\,[A(s)\,x(s)+f(s, x(s))]\,ds. \tag{7}$$

Теорема. *Системы* (1) и (7) *эквивалентны в смысле определения решения Е. Е. Викторовского и определения решения работ* [2, 3, 6].

Доказательство. Пусть $x(t)$ решение системы (1) в смысле Викторовского, т. е. $x(a)=0$, $x(t)$ абсолютно непрерывная вектор-функция и выполняются неравенства

$$m_x\{f(t, x(t))\}\leqslant x'(t)\leqslant M_x\{f(t, x(t))\} \tag{8}$$

при почти всех t. В силу свойства абсолютно непрерывной функции $x'(t)$ существует почти всюду и суммируема. Тогда суммируема и

$$x'(t)+A(t)\,x(t)=R(t).$$

Используя формулу Коши, получим

$$x(t)=\int^t K_A(t, s)\,R(s)\,ds. \tag{9}$$

Прибавим к обеим частям неравенства (8) $A(t) \cdot x(t)$

$$m_x\{f(t, x(t))\} + A(t) \cdot x(t) \leqslant x'(t) + \\ + A(t)x(t) \leqslant M_x\{f(t, x(t))\} + A(t) \cdot x(t). \tag{10}$$

Используя лемму, из (10) получим

$$m_x\{f(t, x(t))\} + A(t)x(t) \leqslant R(t) \leqslant \\ \leqslant M_x\{f(t, x(t))\} + A(t)x(t)\}. \tag{11}$$

Итак, $x(t)$ удовлетворяет равенству (9), где суммируемая $R(t)$ функция удовлетворяет неравенствам (11), т. е. $x(t)$ — решение системы (7) в смысле работ [2, 3, 6].

Пусть $x(t)$ — решение системы (7) в смысле работ [2, 3, 6], т. е.

$$x(t) = \int_a^t K_A(t, s)R(s)\,ds, \tag{12}$$

где

$$m_x\{A(s)x(s) + f(s, x(s))\} \leqslant R(s) \leqslant \\ \leqslant M_x\{A(s)x(s) + f(s, x(s))\}$$

при почти всех s. Дифференцируя (12) (что законно в силу свойства функции Коши) имеем

$$x'(t) = \int_a^t K'_A(t, s)R(s)\,ds + R(s). \tag{13}$$

Тогда из (12) и (13) следует

$$x'(t) + A(t) \cdot x(t) = \\ = \int_a^t [K'_A(t, s) + A(s)K_A(t, s)]\,R(s)\,ds + R(t).$$

Но так как $K_A(t, s)$ решение системы

$$x'(t) + A(t)x(t) = 0,$$

то

$$K'_A(t,s) + A(t) \cdot x(t) = 0.$$

Итак,

$$x'(t) + A(t) \cdot x(t) = R(t),$$

или

$$m_x\{A(t) \cdot x(t) + f(t, x(t))\} \leqslant x'(t) + A(t)x(t) \leqslant M_x\{A(t) \cdot x(t) + f(t, x(t))\}$$

при почти всех t. Используя лемму, получим

$$m_x\{f(t, x(t))\} \leqslant x'(t) \leqslant M_x\{f(t, x(t))\}$$

при почти всех t. Итак, $x(t)$ — решение системы (1) в смысле определения решения Е. Е. Викторовского.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Айзерман, Ф. Р. Гантмахер. Устойчивость решений системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Труды IV Всесоюзного математического съезда, том 4., изд. АН СССР, 1963.

2. Н. В. Азбелев, Ли Мун Су, Р. К. Рагимханов. К вопросу об определении понятия решения интегрального уравнения с разрывным оператором. ДАН СССР, т. 171, № 2, 1966, 247—250.

3. Н. В. Азбелев, Ли Мун Су, Р. К. Рагимханов. Defining the concept of a solution to an integral eguation withe discontinuous operator soviet Math. Dokl. vol. 7. (1966), № 6, 1437—1440.

4. В. Д. Барбащин, Ю. И. Алимов. К теории релейных дифференциальных уравнений. «Изв. вузов, Математика», № 1, 1962.

5. Е. Е. Викторовский. Об одном обобщении понятия интегральных кривых для разрывного поля направлений. «Матем. сб.», 34 (76), 1954.

6. Ли Мун Су, Р. К. Рагимханов. К вопросу об уравнениях Вольтерра с разрывным оператором в правой части. «Изв. вузов. Математика», № 2, (57), 1967, 26—34.

7. Ю. К. Солнцев. Об устойчивости по Ляпунову положений равновесия системы двух дифференциальных уравнений в случае разрывных правых частей. «Уч. зап. МГУ, Математика», 4, вып. 148, 1951.

8. А. Ф. Филиппов. Дифференциальное уравнение с разрывной правой частью. «Матем. сб.», 54 (93), 1960.

Поступила 4 января 1971 г.