ПРЕДКОММУТИРОВАНИЕ ОПЕРАТОРОВ И СВЯЗАННЫЕ С НИМ ВОПРОСЫ ПРОДОЛЖЕНИЯ ЭРМИТОВО-ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ *

И. Е. Овчаренко

Рассмотрим некоторые выпросы, относящиеся к понятию коммутирования (перестановочности) операторов в гильбертовом пространстве. Наиболее простым является случай, когда операторы ограниченные. Ограниченные операторы A и B, действующие в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и переводящие в себя, называются коммутирующими, если выполняется равенство $AB - BA = 0$. В случае, когда какой-либо из операторов является неограниченным, последнему соотношению не удается приписать определенного смысла, так как уже области задания и значения операторов могут не совпадать. Заметим, что такое положение типично для задач квантовой механики. Если один из операторов является ограниченным, принято следующее определение перестановочности [2], [3].

Линейный оператор A, действующий на некотором множестве $\mathfrak{D}(A)$ гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, и ограниченный оператор B, определенный всюду в $\mathfrak{H}$, называются перестановочными, если из $f \in \mathfrak{D}(A)$ следует $Bf \in \mathfrak{D}(A)$ и выполняется равенство $ABf - BAf = 0$.

В случае, когда оператор A самосопряженный, перестановочность его с ограниченным оператором B равносильна коммутированию оператора B с каждым из проекторов спектрального семейства оператора A.

Последнее обстоятельство показывает, что принятое определение перестановочности оправдывает себя, если неограниченный оператор самосопряженный. Однако, когда неограниченный оператор симметрический, то приведенное выше определение перестановочности, как правило, перестает себя оправдывать.

Пусть, к примеру, A целый [4] симметрический оператор с индексами дефекта (1.1), а B — определенный всюду в $\mathfrak{H}$ ограниченный оператор, перестановочный с оператором A. Покажем, что оператор B кратен единичному. В самом деле, из перестановочности вытекает, что каждое подпространство $\mathfrak{M}_z = (A - zI)\,\mathfrak{D}(A)$ инвариантно относительно B. Следовательно, каждое $\mathfrak{N}_{\bar{z}} = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}_z$ инвариантное подпространство для B^*. Так как все $\mathfrak{N}_z$ в нашем случае одномерны, то $B^*\varphi(z) = \alpha(z)\varphi(z)$, $\varphi(z) \in \mathfrak{N}_z$. Из ограниченности B^* вытекает ограниченность функции $\alpha(z)$. Пусть u вещественный целый масштаб оператора A, тогда имеем $(B^*\varphi(z), u) = \alpha(z)(\varphi(z), u)$.

Или же

$$\overline{\alpha(\bar{z})} = \frac{(Bu, \varphi(\bar{z}))}{(u, \varphi(\bar{z}))}.$$

---

* Основные результаты этой статьи были кратко изложены в [1].

Таким образом, $\alpha(z)$, как представляющая функция элемента Bu, есть целая функция. Применяя теорему Лиувилля, убеждаемся, что $\alpha(z) \equiv \equiv \mathrm{const}$. Отсюда $B = \lambda I$.

Нашей ближайшей целью является определение перестановочности в том случае, когда один из операторов симметрический, а второй ограниченный. Мы считаем, что понятие, родственное перестановочности, должно обладать, по крайней мере, следующими свойствами. Во-первых, ограниченные операторы, «перестановочные» с симметрическим, должны образовывать достаточно широкий класс. Во-вторых, ограниченные операторы, «перестановочные» с самосопряженным, должны коммутировать с каждым из проекторов спектрального семейства самосопряженного оператора.

Определение 1. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с плотной в нем областью определения $\mathfrak{D}(A)$, B — ограниченный оператор, определенный всюду в $\mathfrak{H}$. Будем говорить, что операторы A и B предкоммутируют, если при любых f, $g \in \mathfrak{D}(A)$ выполняется равенство*

$$(Bf, Ag) = (Af, B^*g). \tag{1}$$

Покажем, что если A самосопряженный оператор, то предкоммутирование совпадает с коммутированием в принятом смысле. Для этого установим равенство, интересное, возможно, и само по себе. Пусть λ — некоторое невещественное число, V_λ преобразование Кэли оператора A, задаваемое формулами

$$\begin{cases} f = (A - \bar{\lambda}E)h, \\ V_\lambda f = (A - \lambda E)h, \end{cases} \quad h \in \mathfrak{D}(A).$$

Вычислим величины (Bf, g) и $BV_{\bar\lambda}f$, $V_{\bar\lambda}g)$, где f и g произвольные элементы из $\mathfrak{M}_\lambda = (A - \lambda E)\mathfrak{D}(A)$. Векторы f и g могут быть представлены в следующей форме $f = (A - \lambda E)h_1$, $g = (A - \lambda E)h_2$, h_1, $h_2 \in \mathfrak{D}(A)$. Имеем

$$(Bf, g) = (BAh_1, Ah_2) - \lambda(Bh_1, Ah_2) - \bar{\lambda}(BAh_1, h_2) + |\lambda|^2(Bh_1 h_2),$$

$$(BV_{\bar\lambda}f, V_{\bar\lambda}g) = (BAh_1, Ah_2) - \lambda(BAh_1, h_2) -$$

$$- \bar{\lambda}(Bh_1, Ah_2) + |\lambda|^2(Bh_1, h_2).$$

В силу (1) правые части равенств равны, следовательно, при любых f $g \in \mathfrak{M}_\lambda$ справедливо равенство

$$(Bf, g) = (BV_{\bar\lambda}f, V_{\bar\lambda}g). \tag{2}$$

Заметим, что в силу полной обратимости рассуждений из выполнения (2) для любых f, $g \in \mathfrak{M}_\lambda$ следует предкоммутирование A и B. Мы, однако, предпочли взять в качестве исходного определение 1, так как его условия легче проверяются.

Пусть теперь A — самосопряженный оператор. В этом случае $\mathfrak{M}_\lambda$ совпадает со всем пространством $\mathfrak{H}$, а преобразование Кэли оператора A есть унитарный оператор U_λ. Равенство (2) принимает следующий вид:

$$(Bf, g) = (BU_{\bar\lambda}f, U_{\bar\lambda}g), \tag{3}$$

f, g — любые векторы из $\mathfrak{H}$. Отсюда следует, что $BU_{\bar\lambda} = U_{\bar\lambda}B$, а это эквивалентно коммутированию B с каждым из проекторов спектрального семейства оператора A.

Определим понятие блочного расширения ограниченного оператора.

Определение 2. *Пусть* $\tilde{\mathfrak{H}}\,(\tilde{\mathfrak{H}} \supseteq \mathfrak{H})$ *— некоторое гильбертово пространство и* B^+ *— действующий в нем ограниченный оператор. Будем называть* B^+ *блочным расширением оператора* B, *если* $PB^+f = Bf\ (f \in \mathfrak{H})$, *где* P *— оператор ортогонального проектирования* $\tilde{\mathfrak{H}}$ *на* $\mathfrak{H}$.

Теорема 1. *Пусть замкнутый симметрический оператор* A *в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, *обладающий конечной направляющей системой функционалов, предкоммутирует с ограниченным оператором* B. *Тогда существует такое самосопряженное расширение* $\tilde{A}$ *оператора* A, *действующее в пространстве* $\tilde{\mathfrak{H}}\,(\tilde{\mathfrak{H}} \supseteq \mathfrak{H})$, *и такое блочное расширение* B^+ *оператора* B *с той же нормой, что и* B, *которые коммутируют между собой.*

Доказательство. Не нарушая общности можно считать, что $\|B\| = 1$. Образуем множество пар $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{H}$. Алгебраические операции вводим естественным образом, а скалярное произведение определяем равенством

$$(\{\varphi_j\}, \{\psi_j\})_1 = (\varphi_1, \psi_1) + (\varphi_2, \psi_2) + (B\varphi_2, \psi_1) + (B^*\varphi_1, \psi_2). \tag{4}$$

На множестве $\mathfrak{D}(A') = \mathfrak{D}(A) \dotplus \mathfrak{D}(A)$ построенного таким образом предгильбертова пространства* определим оператор $A' = A \dotplus A$. Проверим, что оператор $A \dotplus A$ будет симметрическим. Действительно, если $\varphi_j, \psi_j \in \mathfrak{D}(A)$, $j = 1, 2$, то

$$\begin{aligned}(\{A\varphi_j\}, \{\psi_j\})_1 &= (A\varphi_1, \psi_1) + (A\varphi_2, \psi_2) + (BA\varphi_2, \psi_1) + \\ &+ (B^*A\varphi_1, \psi_2) = (\varphi_1, A\psi_1) + (\varphi_2, A\psi_2) + (B\varphi_2, A\psi_1) + \\ &+ (B^*\varphi_1, A\psi_2) = (\{\varphi_j\}, \{A\psi_j\})_1.\end{aligned}$$

Если система функционалов $\Phi_k(f, \lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ является направляющей [5] для оператора A, то система функционалов $\Phi_k(\varphi_j; \lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2$ является направляющей для оператора A'.

Согласно основному предложению об операторах с направляющими функционалами [5], существует такая неубывающая матрица-функция $T_1(\lambda) = \|\sigma_{jk}(\lambda)\|_{j,k=1}^{2n}$, что будет справедливо равенство

$$(\{\varphi_j\}, \{\psi_j\})_1 = \sum_{j,k=1}^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} a_{jk}(\lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda), \tag{5}$$

где

$$a_{jk}(\lambda) = \begin{cases} \Phi_j(\varphi_1; \lambda)\overline{\Phi_k(\psi_1; \lambda)}, & j, k = 1, 2, \ldots, n \\ \Phi_j(\varphi_1; \lambda)\overline{\Phi_{k-n}(\psi_2; \lambda)}, & j = 1, 2, \ldots, n,\ k = n+1, \ldots, 2n \\ \Phi_{j-n}(\varphi_2; \lambda)\overline{\Phi_k(\psi_1; \lambda)}, & j = n+1, \ldots, 2n,\ k = 1, 2, \ldots, n \\ \Phi_{j-n}(\varphi_2; \lambda)\overline{\Phi_{k-n}(\psi_2; \lambda)}. & j = n+1, \ldots, 2n;\ k = n+1, \ldots, 2n \end{cases}$$

Разобьем матрицу-функцию $\|\sigma_{jk}(\lambda)\|_{j,k=1}^{2n}$ на блоки размера $n \times n$

$$\|\sigma_{jk}(\lambda)\| = \begin{Vmatrix} \Sigma_{11}(\lambda) & \Sigma_{12}(\lambda) \\ \Sigma_{21}(\lambda) & \Sigma_{22}(\lambda) \end{Vmatrix}$$

* Предгильбертово пространство может оказаться неотделимым. Это обстоятельство не отражается на дальнейших рассуждениях.

и образуем матрицу-функцию

$$T(\lambda)=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\sum_{11}(\lambda)+\sum_{22}(\lambda) & \sum_{12}(\lambda)+\sum_{12}(\lambda)\\ \sum_{21}(\lambda)+\sum_{21}(\lambda) & \sum_{11}(\lambda)+\sum_{22}(\lambda)\end{matrix}\right\| = \left\|\begin{matrix}\sum_0(\lambda)\sum_1(\lambda)\\ \sum_{-1}(\lambda)\sum_0(\lambda)\end{matrix}\right\|.$$

Пространство $\mathfrak{H}$ можно считать изометрически вложенным в пространство $L^{(2)}_{\Sigma_0}$. В силу свойств системы направляющих функционалов оператор A переходит в оператор умножения на λ, определенный на вектор-функциях вида $\Phi_i(\varphi;\ \lambda)$, $\varphi\in\mathfrak{D}(A)$, $j=1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Поэтому оператор $\tilde{A}$ умножения на независимую переменную в пространстве $L^{(2)}_{\Sigma_0}$ является самосопряженным расширением оператора A. Так как матрица-функция

$$\left\|\begin{matrix}\sum_0(\lambda) & \sum_1(\lambda)\\ \sum_{-1}(\lambda) & \sum_0(\lambda)\end{matrix}\right\|$$

принадлежит классу v_{2n} [5], то $|\Delta\sigma_{ij}(\lambda)|\leqslant\Delta\tau(\lambda)$, $\tau(\lambda)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_{ii}(\lambda)$ и матрицы—функции $\sum_0(\lambda)$ и $\sum_1(\lambda)$ можно представить следующим образом:

$$\sum\nolimits_{jk}^{(0)}(\lambda)=\int\limits_0^{\lambda}S_{jk}(\lambda)\,d\tau(\lambda);\quad \sum\nolimits_{jk}^{(1)}(\lambda)=\int\limits_0^{\lambda}t_{jk}(\lambda)\,d\tau(\lambda).$$

Матрица

$$\left\|\begin{matrix}S & T\\ T^* & S\end{matrix}\right\|$$

является положительно-определенной и ее элементы измеримы относительно функции $\tau(\lambda)$. В силу этого $T=S^{1/2}KS^{1/2}$, где K — матрица, норма которой не превосходит единицы.

Последнее является почти непосредственным следствием теоремы 17 из [6].

Определим теперь форму $(f,\ g)_+$ равенством $(f,\ g)_+=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(fTg^*)\,d\tau(\lambda)$.

Здесь f и g — элементы пространства $L^{(2)}_{\Sigma_0}$, g^* получается из вектор-функции g транспонированием и заменой всех элементов на комплексно сопряженные, Скалярное произведение $(f,\ g)$ может быть записано следующим образом

$$(f,\ g)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(fS^{1/2}S^{1/2}g^*)\,d\tau(\lambda).$$

Так как $T=S^{1/2}KS^{1/2}$, причем $\|K\|\leqslant 1$, то справедливо неравенство $|(f,\ g)_+|\leqslant\|f\|\cdot\|g\|$.

Отсюда следует, что существует оператор B^+ с нормой, не превосходящей единицы, такой что

$$(f,\ g)_+=(B^+f,\ g).$$

Проверим, что оператор B^+ есть блочное расщирение оператора B. Пусть φ — любой вектор из $\mathfrak{H}$. Рассматривая равенства (4) и (5) на векторах вида $\{0;\ \varphi\}$ и $\{\varphi;\ 0\}$ убеждаемся, что

$$(B\varphi,\ \varphi) = (B^+\varphi, \varphi).$$

Так как оператор $\tilde{A}$ есть оператор умножения на независимую переменную в пространстве $L^{(2)}_{\Sigma_0}$, то его предкоммутирование с оператором B^+ проверяется непосредственно. Так как оператор $\tilde{A}$ самосопряженный, то предкоммутирование $\tilde{A}$ и B^+ равносильно их коммутированию. Теорема доказана.

Заметим, что построения предыдущего доказательства являются в некотором смысле модельными. А именно, оказывается, что с точностью до унитарной эквивалентности указанным при доказательстве теоремы способом могут быть получены все неприводимые самосопряженные расширения оператора A и блочные расширения оператора B с той же нормой, что и B, коммутирующие между собой.

В самом деле, пусть $\tilde{A}$ — неприводимое самосопряженное расширение оператора A, $\tilde{E}(t)$ — его спектральная функция, B^+ — блочное расширение оператора B, коммутирующее с $\tilde{A}$ и $\|B^+\| = \|B\| = 1$. В [5] показано, что любая матрица-функция $\|\sigma_{jk}(\lambda)\|_{jk=1}$, принадлежащая классу v_n и задающая представление

$$(f,\ g) = \sum_{j,\ k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_j(f;\ \lambda)\overline{\Phi_k(g;\ \lambda)}\, d\sigma_{j,\,k}(\lambda),$$

может быть получена по формуле

$$\sigma_{jk}(\lambda_0) = \sum_{\mu,\ \nu=1}^{n} \int_{0}^{\lambda_0} \psi^{u}_{\mu j}(\lambda)\, \overline{\psi^{(u)}_{\nu k}(\lambda)}\, (\tilde{E}(\lambda)\, u_\mu u_\nu). \tag{6}$$

Здесь $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n$ — произвольные элементы из $\mathfrak{H}$, для которых $\det\|\Phi_j(u_k;\ \lambda)\|^n_{jk=1}$ не обращается в нуль в некотором интервале, содержащем точки 0 и λ_0*, $\psi^{(u)}_{\mu j}(\lambda)$ элементы матрицы, обратной по отношению к матрице $\|\Phi_j(u_k;\ \lambda)\|^n_{jk=1}$.

Определим матрицу-функцию $\|\sigma^{\circ}_{jk}(\lambda)\|_{jk=1}$ равенством

$$\sigma^{\circ}_{jk}(\lambda_0) = \sum_{\mu\nu=1}^{n} \int_{0}^{\lambda_0} \psi^{(u)}_{\mu j}(\lambda)\, \overline{\psi^{(u)}_{\nu k}(\lambda)}\, d(\tilde{E}(\lambda)\, u_\mu,\ u_\nu)$$

и матрицу-функцию $\|\sigma^{1}_{jk}(\lambda)\|^n_{j,\,k=1}$, полагая

$$\sigma^{(1)}_{jk}(\lambda_0) = \sum_{\mu\nu=1}^{n} \int_{0}^{\lambda_0} \psi^{u}_{\mu j}(\lambda)\, \overline{\psi^{(u)}_{\nu k}(\lambda)}\, d(\tilde{E}(\lambda)\, B^+u_\mu,\ u_\nu).$$

* Такая система элементов $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n$ существует для любого конечного интервала вещественной оси. В [5] показано, что правая часть равенства (6) не зависит от выбора векторов $u_1,\ u_2, \ldots,\ u_n$.

Покажем, подобно тому как это доказывается в [5], что матрица-функция $\|\sigma^1_{jk}(\lambda)\|^n_{j,\,k=1}$ не зависит от выбора системы элементов $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Действительно, пусть $v_1, v_2, \ldots, v_n$ какая-либо другая система элементов из $\mathfrak{H}$, обладающая тем свойством, что $\det\|\Phi_j(v_k;\lambda)\| \neq 0$ при любом λ из интервала, охватывающего точки 0 и λ_0. Составим для системы $v_1, v_2, \ldots, v_n$ матрицу $\|\psi^{(v)}_{jk}(\lambda)\|^n_{jk=1}$, обратную по отношению к матрице $\|\Phi_j(v_k;\lambda)\|^n_{j,\,k=1}$.

Дословным повторением соответствующих рассуждений из [5] находим, что

$$(\tilde{E}(\lambda'')B^+v_\rho, v_\sigma) - (\tilde{E}(\lambda')B^+v_\rho, v_\sigma) =$$

$$= \sum_{\mu,\,\nu,\,j,\,k=1}^{n}\int_{\lambda'}^{\lambda''}\psi^{(u)}_{\mu j}(t)\,\Phi_j(v_\rho;t)\,\overline{\psi^{(u)}_{\nu k}(t)\,\Phi_k(v_\sigma;t)}\,d(\tilde{E}(t)B^+u_\mu u_\nu)$$

$$\rho,\ \sigma = 1, 2, \ldots, n$$

Отсюда следует равенство

$$\sum_{\rho,\,\sigma=1}^{n}\int_0^{\lambda_0}\psi^{(v)}_{\rho r}(\lambda)\,\overline{\psi^{(v)}_{\sigma s}(\lambda)}\,d(\tilde{E}(\lambda)B^+v_\rho, v_\sigma) = \sum_{\mu,\,\nu=1}^{n}\int_0^{\lambda_0}\psi^{(u)}_{\mu r}(\lambda)\,\overline{\psi^{(u)}_{\nu s}(\lambda)}\,d(\tilde{E}(\lambda)B^+u_\mu u_\nu)$$

$$r,\ s = 1, 2, \ldots, n,$$

которое доказывает требуемое.

Оператор $\tilde{A}$ изоморфен оператору умножения на независимую переменную в пространстве $L^{(2)}_{\sigma_0}$. Для оператора B^+ справедливо равенство

$$(B^+f, g) = \sum_{j,\,k=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} f_j(\lambda)\,\overline{g_k(\lambda)}\,d\sigma^{(1)}_{jk}(\lambda). \tag{7}$$

Действительно, оно проверяется непосредственно для тех элементов f и g, образы которых вектор-функции следующего вида:

$$(\chi(\Delta),\ 0,\ \ldots,\ 0),$$
$$(0,\ \chi(\Delta),\ \ldots,\ 0),$$
$$(0,\ 0,\ \ldots,\ \chi(\Delta)),$$

$\chi(\Delta)$ — характеристическая функция произвольного интервала Δ. Справедливость равенства (7) в общем случае вытекает из плотности элементов такого вида. Осталось убедиться, что матрица-функция

$$\left\|\begin{matrix}\sigma^0(\lambda) & \sigma^1(\lambda)\\ \sigma^{1*}(\lambda) & \sigma^0(\lambda)\end{matrix}\right\|$$

принадлежит классу v_{2n}, а это непосредственно следует из условия $\|B^+\| = 1$.

Укажем достаточное условие единственности коммутирующих расширений. Оно получается простым соединением, принадлежащей М. Г. Крейну теоремы 3 из [5] и предыдущих построений.

Теорема 2. *Пусть простой замкнутый симметрический оператор A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ обладает конечной направляющей системой функционалов $\Phi_j(f, \lambda)$ и предкоммутирует с ограниченным оператором B. Если в $\mathfrak{H}$ существует $4n$ векторов* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{2n}, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2n}$

единичной длины таких, что $(B\varphi_k, \psi_k) = -\|B\|$ $k = 1, 2, \ldots, 2n$ и $\det\|a_{ik}(\lambda)\| \neq 0$, *где* $a_{ik}(\lambda) = \Phi_i(\varphi_k; \lambda)$ $i = 1, 2, \ldots, n$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, $a_{ik}(\lambda) = \Phi_{i-n}(\psi_k; \lambda)$ $i = n+1, \ldots, 2n$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, *то существует только одно блочное расширение оператора B с той же нормой, что и B, и только одно неприводимое самосопряженное расширение оператора A, которые коммутируют между собой.*

Приложение теоремы 2 будет приведено ниже.

Рассмотрим специфические особенности случая, когда оператор A простой и его направляющая система функционалов состоит из одного функционала. В этом случае каждое неприводимое сопряженное расширение A будет иметь простой спектр. Отсюда вытекает (см., например [2]), что каждый ограниченный оператор, коммутирующий с неприводимым самосопряженным расширением A, будет функцией этого расширения. Это в свою очередь влечет нормальность ограниченного оператора. Отсюда и из теоремы 1 получаем, что ограниченный оператор B, предкоммутирующий с простым замкнутым симметрическим оператором A, система направляющих функционалов которого состоит из одного функционала, может быть блочно расширен до нормального без увеличения нормы способом, описанным выше.

Следующее предложение является в некотором смысле описанием множества ограниченных операторов, предкоммутирующих с данным.

Теорема 3. *Пусть A — простой замкнутый симметрический оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и обладающий одним направляющим функционалом. Для того, чтобы ограниченный оператор B предкоммутировал с оператором A, необходимо и достаточно, чтобы оператор B допускал представление*

$$B = P\varphi(\tilde{A})|_{\mathfrak{H}},$$

где φ — ограниченная функция, $\tilde{A}$ — некоторое неприводимое самосопряженное расширение оператора A, действующее в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}$ $(\tilde{\mathfrak{H}} \supseteq \mathfrak{H})$, P — оператор ортогонального проектирования $\tilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$.

Необходимая часть теоремы следует из простоты спектра оператора $\tilde{A}$, достаточная часть проверяется непосредственно.

Рассмотрим теперь вопрос о продолжении непрерывной эрмитово-положительной функции, заданной на «отрезках».

Определение. Функция $F(t; j)$, $-2a \leqslant t \leqslant 2a$ $j = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$ *называется эрмитово-положительной, если ядро $F(t-s; j-k)$ является положительно определенным.*

Для непрерывных * функций эрмитова положительность равносильна тому, что для любой вектор-функции $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, координаты которой суть функции ограниченной вариации в интервале$(-a; a)$, выполняется неравенство

$$\sum_{j, k=1}^{n} \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} F(t-s; j-k)\, d\varphi_j(t)\, d\overline{\varphi_k(s)} \geqslant 0.$$

Естественно возникает вопрос о продолжении таких функций с сохранением эрмитовой положительности для всех значений t и всех целых чисел j.

* Из общей теории положительно определенных ядер [7] вытекает, что непрерывность в точке 0 функции $F(t; 0)$ влечет непрерывность функции $E(t; j)$ при $-2a \leqslant t \leqslant 2a$, $j = 0, \pm 1, \ldots, \pm n$.

Известно [8], что ответ на этот вопрос всегда положителен, если функция $F(t; j)$ задана на одном отрезке, т. е. $F(t)$ является эрмитово-положительной функцией одного переменного. Ниже будет показано, что если непрерывная эрмитово-положительная функция задана на трех отрезках, то она всегда может быть продолжена с сохранением эрмитовой положительности, т. е. положение пока еще такое же, как и в случае одного переменного*.

Теорема 4. *Всякая непрерывная эрмитово-положительная функция $F(t; j)$, заданная при $-2a \leqslant t \leqslant 2a$ $j = 0;\ \pm 1$, может быть представлена в виде*

$$F(t;\ j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\sigma_j(\lambda) \quad j = 0,\ \pm 1,$$

причем матрица-функция

$$T(\lambda) = \begin{Vmatrix} \sigma_0(\lambda) & \sigma_1(\lambda) \\ \sigma_{-1}(\lambda) & \sigma_0(\lambda) \end{Vmatrix}$$

*неубывающая с ограниченной вариацией***.

Доказательство***. Рассмотрим обобщенные функции вида $f(x) = \frac{d\omega f(x)}{dx}$, где $\omega_f(x)$ — функции ограниченной вариации, нормированные условием $\omega_f(-a) = 0$. На этом множестве определим скалярное произведение, полагая [4], [5]***:

$$(f,\ g) = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} F(t-s;\ 0)\, d\omega_f(t)\, \overline{d\omega_g(s)}.$$

Введем оператор $A = i\frac{d}{dx}$; определив его на дифференцируемых функциях, обращающихся в нуль на концах интервала. Оператор A — симметрический и его направляющая система функционалов состоит из единственного функционала

$$\Phi(f;\ \lambda) = \int_{-a}^{a} e^{i\lambda s} d\omega_f(s).$$

Рассмотрим форму

$$(f,\ g)_1 = \int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} F(t-s;\ 1)\, d\omega_f(t)\, \overline{d\omega_g(s)}.$$

* Опираясь на знаменитый результат Гильберта о существовании положительного многочлена двух переменных, не представимого в виде суммы квадратов многочленов двух переменных, A. P. Calderon, R. Pepinsky [9] и W. Rudin [10] показали, что существуют эрмитово-положительные последовательности, заданные на множестве S, состоящем из конечного числа точек двумерной решетки целых чисел, которые не могут быть продолжены с сохранением эрмитовой положительности.

Из построений W. Rudin'а [10] и предыдущего предложения следует, что существуют непрерывные эрмитово-положительные функции, $F(t; j)$, заданные при $-2a \leqslant t \leqslant 2a$, $j = 0;\ \pm 1;\ \pm 2$, которые не могут быть продолжены на систему параллельных прямых $-\infty < t < \infty$; $j = 0;\ \pm 1;\ \ldots$ с сохранением эрмитовой положительности.

** Теорему 4 можно доказать, основываясь на теореме М. Г. Крейна о продолжении эрмитово-положительной матрицы-функции [5].

*** Можно считать, не нарушая общности, что функция $F(t; 0)$ продолжается неоднозначно как эрмитово-положительная функция одного переменного. Действительно, в противном случае мы могли бы умножить нашу функцию на функцию $F_1(t;\ j) = e^{-\varepsilon|t|}$, $j = 0 \pm 1$ и перейти затем к пределу при $\varepsilon \downarrow 0$.

Неравенство

$$\left| \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} F(t-s;\, 1)\, d\omega_f(t)\, \overline{d\omega_g(s)} \right|^2 \leqslant \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} F(t-s;\, 0)\, d\omega_f(t)\, \overline{d\omega_f(s)} \times$$

$$\times \int_{-a}^{a} \int_{-a}^{a} F(t-s;\, 0)\, d\omega_g(t)\, \overline{d\omega_g(s)}$$

показывает, что форма $(f, g)_1$ может быть представлена в виде $(f, g)_1 = (Bf, g)$, где B — ограниченный оператор, норма которого не превосходит единицы. Равенство $(Bf, Ag) = (Af, B^*g)$ $f, g \in \mathfrak{D}(A)$ проверяется непосредственно с помощью интегрирования по частям, если $F(t;\, 0)$, а значит [7] и $F(t;\, 1)$ дифференцируемая функция. Если $F(t;\, 0)$ не дифференцируемая функция, то ее и функцию $F(t;\, 1)$ можно заменить полиномами и совершить предельный переход.

Таким образом, операторы A и B удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Пусть $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение оператора A, B^+ — блочное расширение оператора B с той же нормой, что и B, которые коммутируются между собой. Существование таких расширений следует из теоремы 1. Обозначив спектральное семейство оператора $\tilde{A}$ через $\tilde{E}_\lambda$, построим распределения

$$\sigma_0(\lambda) = (\tilde{E}_\lambda u, u), \quad \sigma_1(\lambda) = (B^+\tilde{E}\, u,\; u), \quad \sigma_{-1}(\lambda) = \overline{\sigma_1(\lambda)},$$

где $u = \delta(x)$.

Матричная функция

$$T(\lambda) = \begin{Vmatrix} \sigma_0(\lambda) & \sigma_1(\lambda) \\ \sigma_{-1}(\lambda) & \sigma_0(\lambda) \end{Vmatrix}$$

задает искомое представление.

Прежде всего установим неравенство $|\Delta\sigma_1| \leqslant |\Delta\sigma_0|$, из которого следует, что функция

$$\tilde{F}(x;\, j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\sigma_j(\lambda), \quad -\infty < x < \infty, \; j = 0;\; \pm 1$$

будет эрмитово-положительной. Имеем

$$|\Delta\sigma_1|^2 = |(B^+\tilde{E}(\Delta)\, u,\, u)|^2 = |(B^+\tilde{E}(\Delta)\, u,\, \tilde{E}(\Delta)\, u)|^2 \leqslant \|\tilde{E}(\Delta)\, u\| \cdot \|\tilde{E}(\Delta)\, u\| =$$
$$= (\tilde{E}(\Delta)\, u,\, u)\, (\tilde{E}(\Delta)\, u,\, u) = |\Delta\sigma_0|^2.$$

Покажем теперь, что функция

$$\tilde{F}(t;\, j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\sigma_j(\lambda), \quad -\infty < t < \infty, \quad j = 0, \pm 1$$

будет продолжением заданной функции.

Воспользуемся равенством $e^{i\tilde{A}t}\delta(x) = \delta(x-t)$, $-a \leqslant t \leqslant a$. Действительно, при изометрическом вложении пространства $\mathfrak{H}$ в пространство $L^{(2)}_{\sigma_0}$ элемент $\delta(x)$ переходит в функцию, тождественно равную единице, поэтому $e^{i\tilde{A}t}\delta(x)$ переходит в функцию $e^{i\lambda t}$. С другой стороны, как показы-

вает непосредственный подсчет, элемент $\delta(x-t)$ переходит тоже в функцию $e^{i\lambda t}$. Отсюда

$$\| e^{i\tilde{A}t}\delta(x) - \delta(x-t) \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | e^{i\lambda t} - e^{i\lambda t} |^2 \, d\sigma_0(\lambda) = 0,$$

что и доказывает требуемое.

Определим функцию $\tilde{F}(x;\ 0)$, полагая

$$\tilde{F}(x;\ 0) = (e^{i\tilde{A}t}u,\ e^{i\tilde{A}s}u),\quad t - s = x,\quad -\infty < t,\ s < \infty.$$

Беря t и s принадлежащими интервалу и учитывая, что $e^{i\tilde{A}t}u = \delta(x-t)$, получаем, что функция $\tilde{F}(x;\ 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\sigma_0(\lambda)$ является продолжением функции $F(x;\ 0)$ с интервала $(-2a,\ 2a)$. Определим теперь функцию $\tilde{F}(x;\ 1)$, полагая $\tilde{F}(x;\ 1) = B^{+}e^{i\tilde{A}t}u,\ e^{i\tilde{A}s}u)$ $x = t - s$, $-\infty < t,\ s < \infty$. Беря, как и ранее $s,\ t$ из интервала $(-a,\ a)$, и учитывая, что B^{+} блочное расширение оператора B, коммутирующее с $\tilde{A}$, и $e^{i\tilde{A}t}u = \delta(x-t)$, получаем, что функция $\tilde{F}(x;\ 1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\sigma_1(\lambda)$ является продолжением функции $F(x,\ 1)$ с интервала $(-2a,\ 2a)$:

Теорема 4 показывает, что непрерывную эрмитово-положительную функцию, заданную на «трех отрезках», всегда можно продолжать по континуальному аргументу с сохранением эрмитовой положительности. После этого продолженную функцию можно продолжить по дискретному аргументу так, чтобы она оставалась эрмитово-положительной. Существование такого продолжения следует из результатов М. С. Лившица [11], а также построений работы [12], где приводится эффективное описание всех таких продолжений.

Ниже мы приводим простое построение одного из возможных продолжений,

Пусть $F(t;\ j)$ $-\infty < t < \infty$, $j = 0,\ \pm 1$ непрерывная эрмитово-положительная функция. Оператор A в данном случае самосопряженный, а оператор $\varphi(A)$ — функция от него, $B = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, dE_\lambda$, E_λ — спектральное семейство A, $|\varphi(\lambda)| \leqslant 1$.

Функцию $\varphi(\lambda)$ определяем по формуле обращения Лебега — Стильтьеса из равенств

$$F(t;\ 0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t} d\sigma_0(\lambda);\quad F(t;\ 1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}\varphi(\lambda)\, d\sigma_0(\lambda).$$

Определим функцию $\tilde{F}(t;\ j)$, полагая

$$\tilde{F}(t;\ j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}[\varphi(\lambda)]^{j}\, d\sigma_0(\lambda)\quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$\tilde{F}(t;\ j) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda t}[\overline{\varphi(\lambda)}]^{-j}\, d\sigma_0(\lambda)\quad j = -1,\ -2,\ \ldots$$

Ясно, что функция $\tilde{F}(t;\ j)$ является продолжением функции $F(t;\ j)$. Убедимся, что она эрмитово-положительна. Для этого, очевидно, достаточно показать, что последовательность

$$B_k' = \begin{cases} B^k & k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \\ B^{*-k}, & k = -1,\ -2,\ \ldots \end{cases}$$

будет положительно определенной операторной последовательностью, т. е. при любых векторах $x_j \in \mathfrak{H}$ $j = 1,\ 2,\ \ldots\ n$ выполняется неравенство

$$\sum_{j,k}^{n} (B_{j-k}x_j,\ x_k) \geqslant 0.$$

Согласно известной теореме о сжатиях [13], существует такое гильбертово пространство $\tilde{\mathfrak{H}}$ $(\tilde{\mathfrak{H}} \supseteq \mathfrak{H})$ и такой унитарный оператор U, что при $f \in \mathfrak{H}$

$$T^k = PU^k|_{\mathfrak{H}} \quad T^{*k} = PU^{-k}|_{\mathfrak{H}},$$
$$k = 0,\ 1,\ \ldots$$

P — оператор ортогонального проектирования $\tilde{\mathfrak{H}}$ на $\mathfrak{H}$.

Поэтому

$$\sum_{j,k}(B_{j-k}x_j,\ x_k) = \sum_{j,k}(PU^{j-k}x_j x_k) = \sum_{j,k}(U^j x_j,\ U^k x_k) = \left\|\sum_j U^j x_j\right\|^2 \geqslant 0.$$

Эрмитова положительность функции $\tilde{F}(t;\ j)$ доказана.

Таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 5. *Непрерывная эрмитово-положительная функция $F(t;\ j)$, заданная при $-2a \leqslant t \leqslant 2a$, $j = 0;\ \pm 1$, всегда может быть продолжена по обоим аргументам с сохранением эрмитовой положительности.*

Замечание. В терминах теории стационарных случайных процессов теорема 5 означает, в частности, что два стационарных и стационарно связанных процесса с общей корреляционной функцией, заданных на конечном интервале, всегда могут быть продолжены в прошлое и будущее с сохранением стационарности, стационарной связанности и общности корреляционной функции.

Естественно возникает вопрос, существуют ли эрмитово-положительные функции $F(t;\ j)$ $-2a \leqslant t \leqslant 2a$, $j = 0, \pm 1$ такие, что $F(t;\ 0)$ неоднозначно продолжается с отрезка $-2a \leqslant t \leqslant 2a$ как эрмитово-положительная функция одного переменного, а $F(t;\ j)$ тем не менее однозначно продолжается как эрмитово-положительная функция по совокупности аргументов. Ниже приводятся примеры таких функций.

Пример I. Пусть $F(t;\ 0)$ $-2a \leqslant t \leqslant 2a$ любая непрерывная неоднозначно продолжаемая эрмитово-положительная функция. Известно [4], [5], что у нее существуют, так называемые, канонические продолжения, т. е. продолжения, порождаемые самосопряженными расширениями оператора A без выхода из пространства $\mathfrak{H}$. В этом случае представление функции $F(t;\ 0)$ в форме интеграла Фурье—Стильтьеса имеет следующий вид:

$$F(t;\ 0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k e^{i\lambda_k t}.$$

Определим теперь функцию $F(t;\ 1)$ и $F(t;\ -1)$, полагая

$$F(t;\ 1) = \rho_1 e^{i\lambda_1 t} - \rho_2 e^{i\lambda_2 t} \cdot F(t,\ -1) = \overline{F(-t,\ 1)}.$$

Из теоремы 2 немедленно следует, что функция $F(t;\ j)$ $-2a \leqslant t \leqslant 2a$, $j = 0,\ \pm 1$ однозначно продолжается по континуальному аргументу, однако после продолжения она по дискретному аргументу продолжается неоднозначно. Это следует из построений работы [12].

Пример II. Определим теперь функцию $F(t;\ j)$ $-2a \leqslant t \leqslant 2a$, $j=0,\ \pm 1$ равенствами

$$F(t;\ 0) = F(t),\ F(t;\ 1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varepsilon_k \rho_k e^{i\lambda_k t},$$

$$F(t;\ -1) = \overline{F(-t;\ 1)},\quad \varepsilon_1 = 1,\quad \varepsilon_2 = -1,\quad |\varepsilon_k| = 1.$$

Из теоремы 2 работы [12] следует, что эрмитово-положительная функция $F(t;\ j)$, $-2a \leqslant t \leqslant 2a$, $j = 0,\ \pm 1$ по совокупности аргументов продолжается однозначно (как эрмитово-положительная функция).

В заключение выражаю глубокую благодарность М. Г. Крейну за предложенный круг вопросов и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Е. Овчаренко. Об одном применении метода направляющих функционалов в теории предкоммутирующих операторов. ДАН СССР, 154, 5, (1964), 1038—1041.

2. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман. Теория линейных операторов. Гостехиздат, 1950.

3. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь. Лекции по функциональному анализу. Изд-во иностр. лит., 1954.

4. М. Г. Крейн. Основные положения теории представлений эрмитовых операторов с индексом дефекта $(m,\ m)$. «Укр. матем. журнал», 1, 2 (1949), 3—66.

5. М. Г. Крейн. Про ермітові оператори з напрямними функціоналами. Сб. трудов Ин-та матем. АН УССР, 10 (1948), 33—106.

6. Ю. Л. Шмульян. Операторный интеграл Хеллингера. «Матем. сб.» 49(91), 4, 1959), 381—430.

7. М. Г. Крейн. Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах. «Укр. матем. журнал», 1; 4 (1949), 64—98.

8. М. Г. Крейн. О проблеме продолжения эрмитово-положительных непрерывных функций. ДАН СССР, 26 (1940), 17—21.

9. A. P. Calderon, R. Pepinsky. On the phase of Fourier coefficients for positive real periodic functions computing methods and the phase problem in X—ray crystal analysis, 339—348, 1952.

10. W. Rudin. On the extensions problem for positive definite functions. Illinois jornal of mathematics, vol. 3. (1963), 532—539.

11. М. С. Лившиц. О самосопряженных и зеркально-сопряженных расширениях симметрических операторов. Автореф. докт. дис., 1945.

12. Б. Я. Левин, И. Е. Овчаренко. Описание продолжений эрмитово-положительных функций. ДАН СССР, 159, 4, (1964), 746—749.

13. B. S. Nady. Sur les contractions de l'espace de Hilbert. Acta sci. math. Szeged 15, 87—92, 1953.

Поступила 14 марта 1966 г.