Аналитическая геометрия. Лекции. II семестр

Ямпольский А.Л.

10 апреля 2008 г.

Оглавление

1 Кривые и поверхности 2-го порядка **5**

1.1 Канонические уравнения кривых второго порядка. 5

1.1.1 Парабола 5

1.1.2 Эллипс 7

1.1.3 Гипербола 11

1.1.4 Полярные уравнения параболы, эллипса и гиперболы 14

1.1.5 Уравнение эллипса, гиперболы и параболы, отнесенные к вершине. 16

1.1.6 Семейства эллипсов и гипербол с общим фокальным параметром. 17

1.1.7 Семейство софокусных эллипсов и гипербол. 19

1.1.8 Некоторые другие виды уравнений 2-го порядка. 22

1.1.9 Классификационная теорема для кривых второго порядка. . . . 23

1.2 Поверхности в E^3 и некоторые способы их образования. 26

1.2.1 Цилиндрические поверхности. 26

1.2.2 Поверхности вращения. 26

1.2.3 Поверхности переноса. 27

1.3 Канонические формы 27

1.3.1 Эллипсоиды. 27

1.3.2 Гиперболоиды. 29

1.3.3 Конусы. 31

1.3.4 Параболоиды. 32

1.3.5 Цилиндры. 34

1.3.6 Прямолинейные образующие на поверхности однополостного гиперболоида. 36

1.3.7 Прямолинейные образующие на поверхности гиперболического параболоида. 40

1.4 Общие свойства кривых и поверхностей 2-го порядка. 43

1.4.1 Необходимые сведения из линейной алгебры 43

1.4.2 Упрощение уравнения поверхности 2-го порядка выбором системы координат 47

1.5 Инварианты уравнения поверхности 2-го порядка. 55

1.5.1 Применение инвариантов для исследования кривой 2-го порядка. 58

1.5.2 Применение инвариантов для исследования поверхности 2-го порядка. 61

1.6 Взаимное расположение прямой и поверхности 63

1.6.1 Классификация направлений. 63

1.6.2 Диаметры (диаметральные плоскости) поверхности 2-го порядка. 65
1.6.3 Плоскости симметрии общей поверхности 2-го порядка. 66
1.6.4 Центр симметрии поверхности 68
1.6.5 Касательная плоскость общей поверхности 2-го порядка. 68
1.6.6 Прямые на общей поверхности 2-го порядка. 69
1.7 Аффинная классификация 69
1.7.1 Аналитическое задание аффинного преобразования. 70
1.7.2 Основной инвариант аффинного преобразования. 72
1.7.3 Структура аффинного преобразования. 73
1.7.4 Аффинная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка . 74
1.8 Проективная плоскость и ее модели. 75
1.8.1 Проективная плоскость и проективные преобразования. 75
1.8.2 Аффинные проекции проективной плоскости. 77
1.8.3 Аффинно-проективная плоскость. 79
1.8.4 Единство эллипсов, гипербол и парабол на аффинно-проективной плоскости. 81
1.8.5 Модель проективной плоскости на единичной сфере. 82
1.8.6 Проективная классификация кривых 2-го порядка 83
1.8.7 Проективное пространство RP^n и проективная классификация поверхностей 2-го порядка. 84

Глава 1

Кривые и поверхности 2-го порядка

1.1 Канонические уравнения кривых второго порядка.

1.1.1 Парабола

Определение 1.1.1 *Геометрическое место точек на плоскости, координаты которых относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат, удовлетворяют уравнению*

$$y^2 = 2px, \qquad p > 0$$

называется ***параболой****. Это уравнение называется* ***каноническим уравнением параболы****, а соответствующая система координат называется* ***канонической*** *системой координат*

Геометрическими характеристиками параболы являются:

- Ox — ось симметрии или фокальная ось;
- точка $F(p/2, 0)$ — фокус параболы;
- параметр p, называемый фокальным параметром;
- прямая $x = -\dfrac{p}{2}$ — директриса параболы.

Отрезок, который связывает две точки параболы и походит через фокус называется *фокальной хордой.*

Отрезок, который связывает фокус F с любой точкой на параболе называется *фокальным радиусом.*

Предложение 1.1.1 *Для любой точки $M(x, y)$ на параболе ее фокальный радиус r имеет вид:*

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Доказательство. Пусть $M(x_0, y_0)$ лежит на параболе. Тогда

$$\begin{aligned} r = \; & \sqrt{\left(x_0 - \tfrac{p}{2}\right)^2 + y_0^2} = \sqrt{\left(x_0^2 - px_0 + \tfrac{p^2}{4}\right) + 2p\,x_0} = \\ & \left|x_0 + \tfrac{p}{2}\right| = x_0 + \tfrac{p}{2} \end{aligned}$$

так как $x_0 \geq 0, p > 0$.

■

Геометрический смысл фокального параметра проясняет

Предложение 1.1.2 *Фокальный параметр p равен половине длины фокальной хорды, которая перпендикулярна фокальной оси.*

Доказательство. Действительно, $r(p/2) = \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = p$.

■

Директориальное свойство параболы.

Предложение 1.1.3 *Пусть M — точка на параболе, d — расстояние от точки M до директрисы. Тогда $\frac{r}{d} = 1$.*

Доказательство. Действительно, $d = x + \frac{p}{2} = r$.

■

Упражнение 1.1.1 *Доказать, что справедливо обратное утверждение: геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до фиксированной точки и фиксированной прямой равны, является параболой.*

Касательная к параболе.

Предложение 1.1.4 *Если точка $M(x_0, y_0)$ лежит на параболе, то уравнение касательной к параболе в этой точке имеет вид:*

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

.

Доказательство. Действительно, рассмотрим точки параболы в полуплоскости $(y > 0)$. Тогда $y = \sqrt{2px}$. Поскольку уравнение касательной для явно заданной кривой имеет вид $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$, а $y'(x_0) = \frac{p}{\sqrt{2px_0}} = \frac{p}{y_0}$, то имеем

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

или

$$yy_0 - y_0^2 = p(x - x_0).$$

Заменим $y_0^2 \to 2p\,x_0$. Получим $yy_0 = p(x + x_0)$ — уравнение касательной

■

Оптическое свойство параболы.

Предложение 1.1.5 *Касательная к параболе составляет равные углы с осью OX и с фокальным радиусом FM.*

Доказательство. Обозначим через Q – точку пересечения касательной с осью Ox. Из уравнения касательной следует, что ее координаты $(-x_0, 0)$. Следовательно, $|FQ| = p/2 - (-x_0) = p/2 + x_0 = |FM| = r$. Таким образом, треугольник QFM равнобедренный.

■

Если представить параболу как зеркальную кривую, то по законам оптики свет, выпущенный из фокуса уйдет на бесконечность лучом параллельным фокальной оси. И обратно, пучок лучей, параллельных фокальной оси, соберется в фокусе. Собственно, по этой причине указанное свойство называется оптическим. Фокальная ось иногда называется оптической осью параболы. Оптическое свойство имеет очевидные технические приложения.

1.1.2 Эллипс

Определение 1.1.2 *Геометрическое место точек, координаты которых относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad a \geq b > 0,$$

называются эллипсом. *Данное уравнение называется* ***каноническим уравнением эллипса****, а соответствующая система координат называется* ***канонической****.*

Геометрическими характеристиками эллипса являются:

- две оси симметрии OX, OY и один центр симметрии $O(0,0)$;
- величины a и b, которые называются соответственно *большая* и *малая* полуоси;
- величина $p = \dfrac{b^2}{a}$, которая называется *фокальным параметром*;
- величина $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, которая называется *линейным эксцентриситетом*;
- точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, которые называются *левым и правым фокусами* соответственно;
- величина $2c$, которая называется *фокусным расстоянием.*
- величина $\varepsilon = \frac{c}{a} < 1$, которая называется *эксцентриситетом*;
- две директрисы:

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \qquad \text{левая, или } (F_1) \text{ директриса,}$$

$$x = +\frac{a}{\varepsilon} \qquad \text{правая, или } (F_2) \text{ директриса;}$$

- точки $(\pm a, 0)$, $\quad (0, \pm b)$, которые называются *вершинами эллипса*;

Представление о форме эллипса дает следующее

Предложение 1.1.6 *Эллипс*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

получается сжатием окружности вдоль

$$x^2 + y^2 = a^2$$

вдоль одной из двух взаимно перпендикулярных осей симметрии окружности.

Доказательство. Направим вдоль пары взаимно перпендикулярных диаметров окружности радиуса a координатные оси Ox и Oy. Тогда уравнение окружности запишется в виде $x^2 + y^2 = a^2$. Пусть точка с координатами (x_0, y_0) принадлежит окружности, то есть $x_0^2 + y_0^2 = a^2$. Тогда точка с координатами $x_1 = x_0, y_1 = \frac{b}{a}y_0$ принадлежит эллипсу. Действительно,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{(\frac{b}{a}y_0)^2}{b^2} = \frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2} = 1.$$

■

Отрезки, соединяющие фокусы с точками на эллипсе называются *фокальными радиусами.*

Предложение 1.1.7 *Пусть r_1 фокальный радиус из левого фокуса F_1 , а r_2 фокальный радиус из правого фокуса F_2 к одной и той же точке $M(x, y)$ на эллипсе. Тогда,*

$$\begin{array}{l} r_1 = a + \varepsilon x, \\ r_2 = a - \varepsilon x \end{array} .$$

Доказательство. Действительно, $c = \sqrt{a^2 - b^2} < a$. Следовательно точки $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$ находятся внутри эллипса. Из уравнения эллипса находим, что $y^2 = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})$. Пусть M — точка на эллипсе с координатами (x, y), тогда вычислим расстояние от этой точки до левого фокуса:

$$\begin{aligned} r_1 = \; & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(-\frac{x^2}{a^2} + 1\right)} = \\ & \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}x^2 + 2cx + c^2 + b^2} = \\ & \sqrt{\left(\frac{c}{a}x\right)^2 + 2\frac{c}{a}ax + a^2} = \sqrt{(\varepsilon x)^2 + 2\varepsilon ax + a^2} = |\varepsilon x + a|. \end{aligned}$$

Но $\varepsilon < 1, \quad |x| < a$, следовательно $|\varepsilon x| < a$, откуда $a + \varepsilon x > 0$, то есть $r_1 = a + \varepsilon x$. Аналогично проверяется, что $r_2 = a - \varepsilon x$.

■

Фокальное свойство эллипса.

Следствие 1.1.1 *Для любой точки на эллипсе*

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Фокальное свойство полностью характеризует эллипс.

Упражнение 1.1.2 *Доказать, что геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух различных заданных точек F_1, F_2 равна $2a = const$ есть эллипс с фокусами F_1, F_2 и большой полуосью a.*

Директориальное свойство эллипса.

Предложение 1.1.8 *Для любой точки M на эллипсе*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon (< 1),$$

где d_1, d_2 — расстояния от точки M до соответствующей директрисы.

Доказательство. Действительно,

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad d_1 = x + \frac{a}{\varepsilon}, \quad r_2 = a - \varepsilon x, \quad d_2 = \frac{a}{\varepsilon} - x.$$

Тогда

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{a + \varepsilon x}{x + \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon, \quad \frac{r_2}{d_2} = \frac{a - \varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon} - x} = \varepsilon,$$

что завершает доказательство.

■

Директориальное свойство характеризует эллипс.

Упражнение 1.1.3 *Пусть l фиксированная прямая, F – фиксированная точка, не лежащая на этой прямой. Геометрическое место точек M на плоскости, удовлетворяющих условию*

$$\frac{\text{расстояние от } M \text{ до } F}{\text{расстояние от } M \text{ до } l} = \varepsilon < 1$$

есть эллипс с эксцентриситетом ε, фокусом F и директрисой l.

Предложение 1.1.9 *Величина $p = \dfrac{b^2}{a}$ равна половине длины фокальной хорды, которая перпендикулярна фокальной оси.*

Доказательство. Действительно,

$$p = r_1(-c) = a + \varepsilon x = a + \varepsilon(-c) = a - \frac{c^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

■

Уравнение касательной к эллипсу.

Предложение 1.1.10 *Если точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит эллипсу, то уравнение касательной к эллипсу в этой точке имеет вид:*

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Доказательство. Пусть M принадлежит верхней половинке эллипса:

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Вычислим $y'(x_0) = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x_0}{y_0}$. Тогда для уравнения касательной последовательно находим:

$$(y - y_0) = -\tfrac{b^2}{a^2}\tfrac{x_0}{y_0}(x - x_0),$$

$$b^2x_0(x - x_0) + a^2y_0(y - y_0) = 0,$$

$$b^2x_0x - b^2x_0^2 + a^2y_0y - a^2y_0^2 = 0,$$

$$b^2x_0x + a^2y_0y - b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = 0.$$

Разделим последнее равенство на a^2b^2.

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - (\frac{y_0^2}{b^2} + \frac{x_0^2}{a^2}) = 0.$$

Откуда,

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1,$$

так как точка (x_0, y_0) принадлежит эллипсу.

■

Упражнение 1.1.4 *Докажите, что фокусы эллипса расположены по одну сторону от касательной в любой точке эллипса.*

Оптическое свойство эллипса

Предложение 1.1.11 *Касательная к эллипсу образует одинаковые углы с фокальными радиусами.*

Доказательство. Пусть l – касательная к эллипсу в точке $M(x_0, y_0)$, а h_1 и h_2 — расстояния до касательной от левого (F_1) и правого (F_2) фокусов соответственно. Тогда

$$h_1 = \frac{\left|\frac{x_0}{a^2}(-c) - 1\right|}{N} = \frac{|-x_0\varepsilon - a|}{a\,N} = \frac{r_1}{a\,N},$$

$$h_2 = \frac{\left|\frac{x_0}{a^2}c - 1\right|}{N} = \frac{|x_0\varepsilon - a|}{a\,N} = \frac{r_2}{a\,N},$$

где $N = \sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}$ – модуль вектора нормали касательной. Отсюда,

$$\frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2}.$$

Последнее равенство означает равенство синусов углов, образуемых фокальными радиусами с касательной. Но так как оба угла острые, то из равенства синусов следует равенство самих углов.

■

Если представить эллипс как зеркальную кривую, то по законам оптики луч света, выпущенный из одного фокуса пройдет через второй фокус.

1.1.3 Гипербола

Определение 1.1.3 *Геометрическое место точек плоскости, координаты которых относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат удовлетворяет уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } a > 0, b > 0$$

называется гиперболой. *Данное уравнение называется* каноническим *уравнением гиперболы, а соответствующая система координат называется* канонической. *Если $a = b$, то гипербола называется равнобочной.*

Следующие два утверждения дают представление о форме гиперболы.

Предложение 1.1.12 *Всякая гипербола получается из равнобочной путем сжатия (растяжения) плоскости вдоль оси Oy с коэффициентом $k = \frac{b}{a}$.*

Доказательство. Действительно, пусть точка (x_0, y_0) принадлежит равнобочной гиперболе, то есть $\dfrac{x_0^2}{a^2} - \dfrac{y_0^2}{a^2} = 1$. Легко проверить, что в таком случае точка с координатами $(x_1 = x_0; y_1 = \dfrac{b}{a}y_0)$ принадлежит гиперболе

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

■

Предложение 1.1.13 *Равнобочная гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ получается преобразованием поворота на угол $\frac{\pi}{4}$ графика обратной пропорциональной зависимости $uv = a^2/2$.*

Доказательство. Пусть u, v декартовы координаты, и $u = \frac{a^2}{2v}$ график обратной пропорциональной зависимости. Осуществим поворот плоскости на угол $\pi/4$. Аналитический вид такого преобразования

$$\begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y) \\ v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \end{cases}$$

Следовательно, в новых координатах получим $uv = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) = a^2/2$.

■

Геометрическими характеристиками гиперболы являются:

- две оси симметрии Ox иOy и один центр симметрии – точка $(0, 0)$;
- параметр a – действительная полуось, параметр b — мнимая полуось;
- величина $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ — линейный эксцентриситет;
- величина $2c$— фокусное расстояние;

- точки $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ — левый и правый фокусы соответственно;
- величина $p = \dfrac{b^2}{a}$ — фокальный параметр;
- величина $\varepsilon = \frac{c}{a} > 1$— эксцентриситет;
- точки $(\pm a, 0)$ — вершины гиперболы (пересечения гиперболы с осями симметрии);
- две прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ —директрисы гиперболы;
- две прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ — асимптоты гиперболы.

Отрезки, соединяющие фокусы с точками на гиперболе называются *фокальными радиусами.*

Предложение 1.1.14 *Пусть r_1 фокальный радиус из левого фокуса F_1 , а r_2 фокальный радиус из правого фокуса F_2 к одной и той же точке $M(x,y)$ на эллипсе. Тогда для точек левой ветви гиперболы*

$$\begin{aligned} r_1 &= -a - \varepsilon x, \\ r_2 &= a - \varepsilon x \end{aligned}$$

а для точек правой ветви

$$\begin{aligned} r_1 &= a + \varepsilon x, \\ r_2 &= -a + \varepsilon x. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть r_1 — расстояние от точки $M(x,y)$ на гиперболе до левого фокуса. Вычислим его:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} =$$
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}x^2 + 2x\frac{c}{a}a + c^2 - b^2} = \sqrt{(\varepsilon x + a)^2} = |\varepsilon x + a|.$$

Аналогично находим

$$r_2 = |a - \varepsilon x|.$$

Рассмотрим *правую* ветвь. Для точек правой ветви имеем $x > a$. Так как $\varepsilon > 1$, то тем более $\varepsilon x > a > 0$. Значит $a - \varepsilon x < 0$ и $a + \varepsilon x > 0$. Раскрывая модули, находим

$$\begin{cases} r_1 = a + \varepsilon x, \\ r_2 = -a + \varepsilon x. \end{cases}$$

Рассмотрим *левую* ветвь. Для точек левой ветви имеем $x < -a$. Так как $\varepsilon > 1$, то тем более $\varepsilon x < -a < 0$. Значит $a + \varepsilon x < 0$ и $a - \varepsilon x > 0$. Раскрывая модули, находим

$$\begin{cases} r_1 = -(a + \varepsilon x) = -a - \varepsilon x, \\ r_2 = a - \varepsilon x. \end{cases}$$

■

Фокальное свойство гиперболы.

Следствие 1.1.2 *Для любой точки на гиперболе*

$$|r_1 - r_2| = 2a.$$

Доказательство. Если точка находится на правой ветви, то $r_1 - r_2 = 2a$. Если же точка лежит на левой ветви, тогда $r_1 - r_2 = -2a$. Значит $|r_1 - r_2| = 2a$

■

Фокальное свойство полностью характеризует гиперболу.

Упражнение 1.1.5 *Доказать, что геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух различных заданных точек F_1, F_2 равна $2a = const$ есть гипербола с фокусами F_1, F_2 и действительной полуосью a.*

Директориальное свойство гиперболы.

Предложение 1.1.15 *Для любой точки M на гиперболе*

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon(< 1),$$

где d_1, d_2 — расстояния от точки M до соответствующей директрисы.

Доказательство. Рассмотрим правую ветвь, тогда

$$\begin{array}{ll} r_2 = -a + \varepsilon x, & r_1 = a + \varepsilon x \\ d_2 = x - \dfrac{a}{\varepsilon} & d_1 = x + \dfrac{a}{\varepsilon}. \end{array}$$

Откуда,

$$\frac{r_2}{d_2} = \frac{\varepsilon x - a}{x - \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon, \quad \frac{r_1}{d_1} = \frac{\varepsilon x + a}{x + \frac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Рассмотрение для левой ветви проведите самостоятельно.

■

Директориальное свойство характеризует гиперболу.

Упражнение 1.1.6 *Пусть l фиксированная прямая, F – фиксированная точка, не лежащая на этой прямой. Геометрическое место точек M на плоскости, удовлетворяющих условию*

$$\frac{\textit{расстояние от } M \textit{ до } F}{\textit{расстояние от } M \textit{ до } l} = \varepsilon > 1$$

есть гипербола с эксцентриситетом ε, фокусом F и директрисой l.

Уравнение касательной к гиперболе.

Предложение 1.1.16 *Если точка $M(x_0, y_0)$ принадлежит гиперболе, то уравнение касательной к гиперболе в этой точке имеет вид:*

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = -1.$$

Доказательство аналогично доказательству для эллипса и мы его опускаем.

Упражнение 1.1.7 *Докажите, что фокусы гиперболы расположены по разные стороны от касательной в любой точке гиперболы.*

Оптическое свойство гиперболы.

Предложение 1.1.17 *Касательная к гиперболе образует равные углы с фокальными радиусами.*

Доказательство. Пусть l – касательная к гиперболе в точке $M(x_0, y_0)$, а h_1 и h_2 — расстояния до касательной от левого (F_1) и правого (F_2) фокусов соответственно. Вычислим h_1, h_2:

$$h_1 = \frac{|\frac{x_0}{a^2}(-c) - 1|}{N} = \frac{|\varepsilon x_0 + a|}{aN} = \frac{r_1}{aN},$$
$$h_2 = \frac{|\frac{x_0}{a^2}c - 1|}{N} = \frac{|\varepsilon x_0 - 1|}{aN} = \frac{r_2}{aN},$$

где $N = \sqrt{\left(\frac{x_0}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b^2}\right)^2}$ – модуль вектора нормали касательной. Очевидно, что $\frac{h_1}{r_1} = \frac{h_2}{r_2}$ и так как оба угла острые, то их равенства синусов следует равенство самих углов. ■

1.1.4 Полярные уравнения параболы, эллипса и гиперболы

Декартова система координат не является единственно возможной системой координат на плоскости (и в пространстве). Вообще систему координат следует понимать как правило, сопоставляющее каждой точке рассматриваемого объекта единственный набора чисел, однозначно определяющего эту точку. С этой точки зрения декартова система координат строится так:

1. зафиксируем две взаимно перпендикулярные прямые l_1, l_2 на плоскости;

2. обозначим $O = l_1 \cap l_2$ и пометим знаком $'+'$ и $'-'$ полупрямые $l_1^{\pm}, l_2^{\pm}$, определяемые точкой O на каждой из прямых l_1, l_2;

3. через произвольную точку плоскости M про ведем прямые $p_1 \parallel l_2, p_2 \parallel l_1$ и обозначим $M_1 = l_1 \cap p_1, M_2 = l_2 \cap p_2$;

4. определим соответствие $M \to (x, y)$ так:

$$x = \begin{cases} |OM_1| & \text{если } M_1 \in l_1^+ \\ -|OM_1| & \text{если } M_1 \in l_1^- \end{cases} \qquad y = \begin{cases} |OM_2| & \text{если } M_2 \in l_2^+ \\ -|OM_2| & \text{если } M_1 \in l_2^- \end{cases}$$

Полученное соответствие взаимно однозначно о определено для всех точек плоскости.

Полярная система координат строится проще и представляет собой пример локальной системы координат, так как не всем точкам плоскости можно сопоставить полярные координаты. Строится она так:

1. зафиксируем на плоскости точку O и луч $\vec{l}$ с началом в точке O;

2. для любой точки $M \neq O$, обозначим через φ ориентированный угол от луча $\vec{l}$ к лучу $\overrightarrow{OM}$ и установим соответствие $M \to (\rho, \varphi)$, полагая $\rho = |OM|$.

Очевидно, что сама точка O выпадает из соответствия, так как для нее $\rho = 0$, а значение угла φ не определено. Точка O называется *полюсом*, луч $\vec{l}$ называется *полярной осью*, угол φ называется *полярным углом*, а величина ρ называется *полярным радиусом* полярной системы координат. Для обеспечения однозначности соответствия необходимо ограничить области изменения полярных координат: $\rho \in (0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$

Легко установить связь полярных и декартовых координат точки при согласованном выборе этих координатных систем. Поместим начало декартовой системы координат в полюс, а ось Ox направим вдоль полярной оси. Тогда

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi. \end{cases}$$

Формулы обратного преобразования, очевидно, таковы:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi = \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$$

Записать полярное уравнение кривой означает найти зависимость между полярными координатами (ρ, φ) точек, лежащих на этой кривой.

Полярное уравнение параболы.

Поместим полюс полярной системы координат в фокус параболы, а полярную ось совместим с положительным направлением оси Ox. Тогда фокальный радиус r совпадет с полярным радиусом точек на параболе, полярный угол φ будет углом между фокальным радиусом и осью Ox. Зная координаты фокуса параболы $(p/2, 0)$ находим

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi + \frac{p}{2}, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Добавляя в левой и правой частях первого равенства величину $p/2$ и замечая, что $x + \frac{p}{2} = r$, находим $r\cos\varphi + p = r$. Значит

$$r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}$$

– полярное уравнение параболы.

Полярное уравнение эллипса.

Поместим полюс полярной системы координат в левый фокус эллипса, а полярную ось совместим с положительным направлением оси Ox. Пусть F_1 левый фокус, r– его фокальный радиус, φ — угол между фокальным радиусом и осью Ox. Тогда

$$x = r\cos\varphi - c.$$

С другой стороны, для левого фокального радиуса имеем $r = a + \varepsilon x$. После подстановки $r = a + \varepsilon(r\cos\varphi - c)$, находим

$$r(1 - \varepsilon\cos\varphi) = a - \varepsilon c = p.$$

Откуда,

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

– полярное уравнение эллипса.

Полярное уравнение гиперболы.

Поместим полюс полярной системы координат в правый фокус гиперболы, а полярную ось совместим с положительным направлением оси Ox. Пусть F_2 правый фокус, r– его фокальный радиус, φ — угол между фокальным радиусом и осью Ox. Тогда

$$x = r\cos\varphi + c,$$

$$r = -a + \varepsilon x = -a + \varepsilon(r\cos\varphi + c)$$

$$(1 - \varepsilon\cos\varphi)r = -a + \varepsilon c = p$$

Следовательно,

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

полярное уравнение правой ветви гиперболы. Аналогично находим, что

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

– полярное уравнение левой ветви гиперболы.

1.1.5 Уравнение эллипса, гиперболы и параболы, отнесенные к вершине.

Эллипс, гипербола и парабола могут быть записаны единым по форме уравнением не только в полярной системе координат, но и в некоторых специальных декартовых. Это системы координат, начало которых совпадает с одной из вершин соответствующей кривой, а ось Ox – с фокальной осью. О такой системе координат будем говорить, что она отнесена к вершине.

Предложение 1.1.18 *Существует система декартовых прямоугольных координат относительно которой эллипс, парабола и гипербола описывается единым уравнением*

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2$$

Доказательство.

Парабола. Ее каноническое уравнение

$$y^2 = 2p\,x$$

является, очевидно, уравнением в системе координат, отнесенной к вершине.

Эллипс. Поместим начало новой системы координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$ в левой вершине эллипса. Формулы перехода запишутся в виде:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + a, \\ \tilde{y} = y \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \tilde{x} - a \\ y = \tilde{y} \end{cases}$$

Тогда последовательно находим:

$$\left(\frac{\tilde{x} - a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{y}}{b}\right)^2 = 1, \quad \frac{\tilde{x}^2}{a^2} - 2\frac{\tilde{x}}{a} + 1 + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1, \quad \tilde{y}^2 = 2\frac{b^2}{a}\tilde{x} - \frac{b^2}{a^2}\tilde{x}^2.$$

Но так как
$$\frac{b^2}{a} = p, \qquad \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2 - c^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2,$$
то в новых координатах уравнение эллипса запишется в виде
$$\tilde{y}^2 = 2p\,\tilde{x} + (\varepsilon^2 - 1)\tilde{x}^2.$$

Гипербола. Поместим начало новой системы координат $(\tilde{x}, \tilde{y})$ в правой вершине гиперболы. Формулы перехода запишутся в виде:
$$\begin{cases} \tilde{y} = y, \\ \tilde{x} = x - a. \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \tilde{y}, \\ x = \tilde{x} + a. \end{cases}$$
Тогда последовательно находим:
$$\left(\frac{\tilde{x} + a}{a}\right)^2 - \left(\frac{\tilde{y}}{b}\right)^2 = 1, \quad \frac{\tilde{x}^2}{a^2} + 2\frac{\tilde{x}}{a} + 1 - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1, \quad \tilde{y}^2 = 2\frac{b^2}{a}\tilde{x} + \frac{b^2}{a^2}\tilde{x}^2.$$
Но так как
$$\frac{b^2}{a} = p, \qquad \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \varepsilon^2 - 1,$$
то в новых координатах уравнение эллипса запишется в виде
$$\tilde{y}^2 = 2p\,\tilde{x} + (\varepsilon^2 - 1)\tilde{x}^2.$$

Для завершения доказательства, достаточно зафиксировать каноническую систему координат параболы, а эллипс и гиперболу сдвинуть так, чтобы левая вершина эллипса и правая вершина гиперболы совместились с началом координат. В такой системе координат эллипс, парабола и правая ветвь гиперболы опишутся уравнением
$$y^2 = 2p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$

■

1.1.6 Семейства эллипсов и гипербол с общим фокальным параметром.

Запишем эллипс, параболу и гиперболу единым уравнением
$$y^2 = 2p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2.$$
Зафиксируем фокальный параметр p и проследим за поведением семейств эллипсов и гипербол при изменении эксцентриситета ε.

Предложение 1.1.19 *При фиксированном фокальном параметре p, парабола $y^2 = 2p\,x$ является предельной кривой для семейства эллипсов $y^2 = 2p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2$ при $\varepsilon \to 1 - 0$ и семейства (правых ветвей) гипербол $y^2 = 2p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2$ при $\varepsilon \to 1 + 0$.*

Доказательство. Рассмотрим семейство эллипсов

$$y^2 = 2p\,x + (\varepsilon^2 - 1)x^2 \quad \varepsilon < 1.$$

Заметим, для начала, что все эллипсы семейства охватываются параболой, так как для точек эллипса

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2 < 2p\,x$$

Выразим координаты фокусов эллипса через p и ε. Для этого, заметим, что

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a}\frac{1}{a} = 1 - \frac{p}{a}.$$

Отсюда

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad c = a\varepsilon = \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}.$$

Тогда,

$$x(F_1) = a - c = a - a\varepsilon = a(1 - \varepsilon) = \frac{p}{1 + \varepsilon},$$
$$x(F_2) = a + c = a + a\varepsilon = a(1 + \varepsilon) = \frac{p}{1 - \varepsilon}.$$

Устремляя $\varepsilon \to 1 - 0$, получаем:

$$x(F_1) \longrightarrow \frac{p}{2}, \quad x(F_2) \longrightarrow +\infty.$$

Рассмотрим теперь семейство гипербол

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2 \quad \varepsilon > 1.$$

Заметим, что теперь это семейство (точнее, правые ветви) охватывают параболу, так как для точек гиперболы

$$y^2 = 2px + (\varepsilon^2 - 1)x^2 > 2p\,x$$

Проведем аналогичные вычисления.

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{b^2}{a}\frac{1}{a} = 1 + \frac{p}{a}.$$

Отсюда,

$$a = \frac{p}{\varepsilon^2 - 1}, \quad c = a\varepsilon = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}.$$

$$x(F_1) = c - a = a(\varepsilon - 1) = \frac{p}{\varepsilon + 1},$$
$$x(F_2) = -c - a = -a(\varepsilon + 1) = -\frac{p}{\varepsilon - 1}$$

и при $\varepsilon \to 1 + 0$ мы находим

$$\begin{cases} x(F_2) \longrightarrow \frac{p}{2}; \\ x(F_1) \longrightarrow -\infty. \end{cases}$$

■

1.1.7 Семейство софокусных эллипсов и гипербол.

Зафиксируем на плоскости две точки F_1 и F_2 на расстоянии $(F_1F_2| = 2c$. Из фокального свойства эллипса и гиперболы следует, что точки F_1 и F_2 определяют некоторый эллипс и некоторую гиперболу с фокусами F_1 и F_2. Такие эллипс и гипербола называются *софокусными.* На самом деле, имеется целое семейство софокусных эллипсов и софокусных гипербол.

Действительно, фокальное свойство эллипса

$$r_1 + r_2 = 2a$$

содержит параметр a, выражающий в уравнении эллипса большую полуось. Меньшая полуось может быть найдена как функция от параметра a, а именно, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ с областью определения $a \geq c$. Следовательно, полагая $a = \lambda > 0$, семейство софокусных эллипсов можно задать в виде

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1 \quad (\lambda > c)$$

При $\lambda \to \infty$ это семейство "раздувается в окружность"бесконечного радиуса, та как

$$a = \lambda \to \infty, \quad b = \sqrt{\lambda^2 - c^2} \to \infty,$$

а при $\lambda \to c + 0$ это семейство "схлопывается"в отрезок $[-c, c]$, так как

$$a = \lambda \to c, \quad b = \sqrt{\lambda^2 - c^2} \to 0.$$

Для гипербол справедливы аналогичные рассуждения. Примем действительную полуось a как параметр и положим $a = \mu$. Тогда $b = \sqrt{c^2 - \mu^2}$ с областью определения $0 < \mu < c$ и семейство софокусных гипербол запишется сходным уравнением

$$\frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - c^2} = 1 \quad (0 < \mu < c).$$

Нетрудно проследить асимптотику этого семейства. Для этого полезно следить еще и за угловым коэффициентом асимптот.

При $\mu \to +0$

$$\begin{aligned}
&a = \mu \to 0,\\
&b = \sqrt{c^2 - \mu^2} \to c,\\
&k = \tfrac{b}{a} = \tfrac{\sqrt{c^2-\mu^2}}{\mu} = \sqrt{\left(\tfrac{c}{\mu}\right)^2 - 1} \to +\infty
\end{aligned}$$

и мы получаем ось Oy в качестве предельного множества. Ветви гиперболы "распрямляются"вслед за подъемом угла наклона асимптот, а вершины гиперболы в пределе "склеиваются".

При $\mu \to c - 0$

$$\begin{aligned}
&a = \mu \to c,\\
&b = \sqrt{c^2 - \mu^2} \to 0\\
&k = \tfrac{b}{a} = \sqrt{\left(\tfrac{c}{\mu}\right)^2 - 1} \to 0
\end{aligned}$$

и в качестве предельного множества мы получаем два луча $[c, +\infty)$ и $(-\infty, -c]$.

Предложение 1.1.20 *Через каждую точку плоскости, не лежащей на осях координат, проходит единственный эллипс и единственная гипербола каждого из семейств.*

Доказательство. Оба рассматриваемых семейства можно описать единым уравнением
$$\frac{x^2}{t^2}+\frac{y^2}{t^2-c^2}=1, \quad t>0.$$
При этом, значениям параметра $t\in(0,c)$ отвечают гиперболы, а значениям $t\in(c,+\infty)$ – эллипсы из этих семейств. Введем в рассмотрение функцию
$$f(t)=\frac{x^2}{t^2}+\frac{y^2}{t^2-c^2}-1, \quad t\in(0,c)\cup(c,+\infty).$$
Зафиксируем произвольную точку M с координатами (x_0,y_0) и покажем, что в области $t>0$ уравнение $f(t)=0$ имеет ровно два решения, одно из которых, $t_1\in(0,c)$, а другое $t_2\in(c,+\infty)$. Действительно, при $t>0$
$$f_t{}'=-2\frac{{x_0}^2}{t^3}-2t\frac{{y_0}^2}{(t^2-c^2)^2}<0,$$
то есть функция монотонно убывает, причем
$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to+0}f(t)=+\infty,\\ \lim\limits_{t\to c-0}f(t)=-\infty,\end{cases}\qquad \begin{cases}\lim\limits_{t\to c+0}f(t)=+\infty,\\ \lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=-1.\end{cases}$$
Следовательно, существуют и единственны $t_1\in(0,c)$ и $t_2\in(c,+\infty)$ такие, что $f(t_1)=0, f(t_2)=0$.

∎

Эллиптическая система координат

Запишем два семейства софокусных эллипсов и гипербол
$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\lambda^2}+\dfrac{y^2}{\lambda^2-c^2}=1, \quad \lambda>c\\ \dfrac{x^2}{\mu^2}-\dfrac{y^2}{c^2-\mu^2}=1 \qquad 0<\mu<c.\end{cases} \tag{$*$}$$
В предыдущем разделе мы показали, что каждой точке $M(x,y)$ соответствует *единственная* пара параметров (λ,μ) определяющая единственный эллипс и единственную гиперболу, проходящие через точку M. *Обратное соответствие очевидно не однозначно.* Каждой паре $\lambda,\mu)$ соответствуют эллипс и гипербола, которые пересекаются в 4-х точках. Но так как эти точки находятся в *разных* квадрантах, то ограничиваясь каким-либо одним квадрантом мы установим взаимно-однозначное соответствие $(x,y)\longleftrightarrow(\lambda,\mu)$. В таком случае параметры (λ,μ) можно принять в качестве новых (локальных) координат на плоскости. Эти локальные координаты называются *эллиптической системой координат.*

Предложение 1.1.21 *Декартовы и эллиптические координаты точек, не лежащих на осях декартовой системы координат связаны соотношениями*

$$x = \pm\frac{\lambda\mu}{c}, \quad y = \pm\frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c}.$$

Доказательство. Связь между эллиптическими и декартовыми координатами задается уравнениями (*). Найдем явное выражение декартовых координат через эллиптические для точек первого квадранта. Последовательно находим:

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{\lambda^2(c^2-\mu^2)} + \frac{x^2}{\mu^2(\lambda^2-c^2)} = \frac{1}{(c^2-\mu^2)} + \frac{1}{\lambda^2-c^2},\\
&\frac{x^2(\mu^2(\lambda^2-c^2)+\lambda^2(c^2-\mu^2))}{\lambda^2\mu^2(c^2-\mu^2)(\lambda^2-c^2)} = \frac{\lambda^2-\mu^2}{(c^2-\mu^2)(\lambda^2-c^2)},\\
&\frac{x^2c^2(\lambda^2-\mu^2)}{\lambda^2\mu^2} = \lambda^2-\mu^2.
\end{aligned}$$

Отсюда находим

$$x = \frac{\lambda\mu}{c}.$$

Аналогично,

$$y = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c}.$$

В остальных квадрантах рассмотрения подобны.

■

Предложение 1.1.22 *Эллиптическая система координат является ортогональной.*

Доказательство. Ортогональность системы координат означает ортогональность координатных линий. Координатными линиями эллиптической системы координат являются эллипсы и гиперболы. Покажем, что в общих точках софокусные эллипсы и гиперболы имеют взаимно ортогональные касательные.

Пусть $M(x_0, y_0)$ точка пересечения софокусных эллипса и гиперболы. Векторы нормалей к касательным в этой точке имеют вид

$$N_1 = \{\frac{x_0}{\lambda^2}, \frac{y_0}{\lambda^2 - c^2}\} \quad \text{для эллипса},$$
$$N_2 = \{\frac{x_0}{\mu^2}, -\frac{y_0}{c^2 - \mu^2}\} \quad \text{для гиперболы}.$$

Пользуясь связью декартовых и эллиптических координат, находим:

$$\langle N_1, N_2 \rangle = \frac{x_0^2}{\lambda^2\mu^2} - \frac{y_0^2}{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)} = \frac{1}{c^2} - \frac{1}{c^2} = 0.$$

■

1.1.8 Некоторые другие виды уравнений 2-го порядка.

Эллипс, гипербола и парабола не исчерпывают весь класс кривых второго порядка. Рассмотрим другие виды уравнений и соответствующих кривых.

Мнимый эллипс.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Эта "кривая"задает пустое множество точек на плоскости, но тем не менее это множество задается многочленом 2-го порядка. Эта "кривая"имеет две "оси симметрии"и один "центр симметрии".

Пара пересекающихся прямых.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Действительно, разложение левой части на множители приводит к паре прямых

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,$$

пересекающихся в точке $(0,0)$. Эта "кривая"имеет две оси симметрии и один центр симметрии.

Пара пересекающихся мнимых прямых.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Единственной точкой на плоскости, удовлетворяющей этому уравнению является точка $(0,0)$. По аналогии с предыдущим уравнением, говорят о паре мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке. Эта "кривая"имеет две "оси симметрии"и "центр симметрии".

Пара параллельных прямых.

$$\frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Это уравнение задает пару прямых

$$y = +b \quad \text{и} \quad y = -b,$$

которые очевидно параллельны. Эта "кривая"имеет бесконечно много осей симметрии (перпендикулярных этим прямым) и линию центров симметрии – ось Ox.

Пара параллельных мнимых прямых.

$$\frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Это уравнение задает пустое множество точек на плоскости, но по аналогии с предыдущим случаем эту "кривую"называют парой параллельных мнимых прямых. Эта "кривая"имеет бесконечно много "осей симметрии"и "линию центров симметрии", — ось Ox.

Пара слившихся прямых.

$$y^2 = 0.$$

Это уравнение задает одну прямую – ось Ox. Но так как эта прямая является предельной для пары прямых $y^2 = b^2$ при $b \to 0$, то говорят о паре слившихся прямых. Эта кривая так же имеет бесконечно много осей симметрии, перпендикулярных оси Ox и линию центров симметрии – ось Ox.

1.1.9 Классификационная теорема для кривых второго порядка.

Сущность классификационной теоремы состоит в том, что выбором прямоугольной декартовой системы координат уравнение любой кривой 2-го порядка может быть приведено к уравнению эллипса, гиперболы, параболы и перечисленным 6 типам уравнений пар прямых.

Эллипс (действительный и мнимый), гипербола и парабола образуют класс *нераспадающихся* кривых 2-го порядка. Остальные кривые называются *распадающимися* (на пары прямых).

По количеству центров симметрии кривые 2-го порядка делят на *центральные* — имеющие единственный центр симметрии, и *нецентральные* —- не имеющие центра симметрии или имеющие больше одного центра. К типу центральных относятся эллипсы (действительный и мнимый), гипербола, пары пересекающихся прямых (действительных и мнимых). К нецентральным относятся парабола, пары параллельных прямых (действительных и мнимых) и пара слившихся прямых.

Заметим, что в пересечении этих классов лежит парабола. Она является единственной нераспадающейся и нецентральной кривой 2-го порядка.

Предложение 1.1.23 *Пусть*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

уравнение кривой второго порядка. Тогда существует декартова прямоугольная система координат, относительно которой уравнение данной кривой приводится к одному из 9 *типов перечисленных ниже типов.*

I *Нераспадающиеся:*

$$\begin{array}{ll} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & \text{—}\textit{эллипс}, \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1 & \text{—}\textit{мнимый эллипс}, \\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 & \text{—}\textit{гипербола}, \\ y^2 = 2px & \text{—}\textit{парабола}; \end{array}$$

II *Распадающиеся:*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{—}\textit{пара пересекающихся прямых},$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{—}\textit{пара пересекающихся мнимых прямых},$$
$$y^2 = b^2 \quad \text{—}\textit{пара параллельных прямых } (b \neq 0),$$
$$y^2 = -b^2 \quad \text{—}\textit{пара параллельных мнимых прямых } (b \neq 0),$$
$$y^2 = 0 \quad \text{— }\textit{пара слившихся прямых.}$$

Доказательство.
1) Рассмотрим случай, когда $a_{12} = 0$. Получим несколько подслучаев. А именно:
$\rightarrow \bullet$ Если $a_{11} \neq 0$ и $a_{22} \neq 0$, то выполним преобразование следующим образом:

$$a_{11}\left(x^2 + 2\frac{b_1}{a_{11}}x + \frac{b_1^2}{a_{11}^2}\right) + a_{22}\left(y^2 + 2\frac{b_2}{a_{22}}y + \frac{b_2^2}{a_{22}^2}\right) + \underbrace{c - \frac{b_1^2}{a_{11}} - \frac{b_2^2}{a_{22}}}_{\tilde{c}} = 0$$

Воспользуемся параллельным переносом:

$$\begin{cases} \tilde{x} = x + \dfrac{b_1}{a_{11}}, \\ \tilde{y} = y + \dfrac{b_2}{a_{22}}. \end{cases}$$

Тогда в новой системе координат придем к уравнению:

$$a_{11}\tilde{x}^2 + a_{22}\tilde{y}^2 + \tilde{c} = 0.$$

Если $\tilde{c} = 0$, то

- при $a_{11} \cdot a_{22} > 0$ это уравнение пары пересекающихся мнимых прямых;
- при $a_{11} \cdot a_{22} < 0$ это уравнение пары пересекающихся прямых;

Если $\tilde{c} \neq 0$, то после деления на $-\tilde{c}$ уравнение примет вид

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 - 1 = 0,$$

где $\lambda_1 = -a_{11}/\tilde{c},\ \lambda_2 = -a_{22}/\tilde{c}$. Если теперь

- $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0$, то это уравнение эллипса;
- $\lambda_1 < 0,\ \lambda_2 < 0$, то это уравнение мнимого эллипса;
- $\lambda_1\lambda_2 < 0$, то это уравнение гиперболы;

$\rightarrow \bullet$ Если $a_{11} = 0,\ a_{22} \neq 0,\ b_1 = 0$, тогда выполним преобразование:

$$a_{22}(y^2 + 2\frac{b_2}{a_{22}}y + \frac{b_2^2}{a_{22}}) + \underbrace{c - \frac{b_2^2}{a_{22}}}_{\tilde{c}} = 0.$$

Параллельным переносом
$$\begin{cases} \tilde{x} = x, \\ \tilde{y} = y + \dfrac{b_2}{a_{22}} \end{cases}$$
приведем уравнение к виду
$$a_{22}\tilde{y}^2 + \tilde{c} = 0.$$
Если $\tilde{c} \neq 0$, то после деления на $-\tilde{c}$ уравнение примет вид
$$\lambda_2\tilde{y}^2 - 1 = 0,$$
где $\lambda_2 = -a_{22}/\tilde{c}$. Если

- $\lambda_2 > 0$, то это уравнение пары параллельных действительных прямых;
- $\lambda_2 < 0$, то это уравнение пары параллельных мнимых действительных прямых.

Если же $\tilde{c} = 0$ уравнение $a_{22}\tilde{y}^2 = 0$ задает пару слившихся прямых.
$\rightarrow \bullet$ Если $a_{11} = 0,\ a_{22} \neq 0,\ b_1 \neq 0$, тогда выполним преобразования:
$$a_{22}\left(y^2 + 2\frac{b_2}{a_{22}}y + \frac{b_2^2}{a_{22}^2}\right) + 2b_1x + c - \frac{b_2^2}{a_{22}} = 0,$$
$$a_{22}\left(y + \frac{b_2}{a_{22}}\right)^2 + 2b_1\left(x + \frac{1}{b_1}(c - \frac{b_2^2}{a_{22}})\right) = 0.$$
Выполним параллельный перенос
$$\begin{cases} \tilde{y} = y + \dfrac{b_2}{a_{22}}, \\ \tilde{x} = x + \dfrac{1}{b_1}\left(c - \dfrac{b_2^2}{a_{22}}\right). \end{cases}$$
В новых координатах получаем
$$a_{22}\,\tilde{y}^2 = -2b_1\tilde{x}$$
и после деления на a_{22} получаем параболу
$$\tilde{y}^2 = 2p\,\tilde{x},$$
где $p = -b_1/a_{22}$.

2) Рассмотрим случай, когда $a_{12} \neq 0$. Выполним поворот
$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi, \\ y = \tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi. \end{cases}$$
Покажем, что существует такой поворот, что в новой системе координат $\tilde{a_{12}} = 0$. Сделаем подстановку
$$a_{11}(\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi)^2 + 2a_{12}(\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi)(\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi) +$$
$$a_{22}(\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi)^2 + 2b_1(\tilde{x}\cos\varphi - \tilde{y}\sin\varphi) + 2b_2(\tilde{x}\sin\varphi + \tilde{y}\cos\varphi) + c = 0.$$

Найдем коэффициент при $\tilde{x}\tilde{y}$ и приравняем его 0. Последовательно вычисляем

$$-2a_{11}\cos\varphi\sin\varphi + 2a_{22}\sin\varphi\cos\varphi + 2a_{12}(\cos\varphi^2 - \sin\varphi^2) = 0,$$

$$\frac{1}{2}(a_{11} - a_{22})\sin\varphi = a_{12}\cos 2\varphi,$$

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}.$$

Далее следует повторить рассуждения случая 1).

■

1.2 Поверхности в E^3 и некоторые способы их образования.

1.2.1 Цилиндрические поверхности.

Пусть γ — плоская кривая, то есть лежащая в плоскости π. Через каждую точку кривой γ проведем прямую, перпендикулярную плоскости π. Полученная поверхность называется *прямым цилиндром* построенным над γ. Сама кривая называется *направляющей*, а семейство прямых называется семейством *образующих* цилиндра. По типу направляющей цилиндрам дают соответствующие названия. Например, "прямой круговой цилиндр "— цилиндр построенный над окружностью.

Уравнение такой поверхности задать очень легко. Расположим в плоскости π оси координат (X, Y), а ось Z направим перпендикулярно π, то есть вдоль образующих. Пусть $\varphi(x, y) = 0$ —уравнение кривой γ. Тогда для любой точки M с координатами (x, y, z) на цилиндрической поверхности, координаты (x, y) связаны соотношением $\varphi(x, y) = 0$, а координата z является произвольной, то есть уравнение поверхности формально совпадает с уравнением кривой:

$$\varphi(x, y) = 0.$$

1.2.2 Поверхности вращения.

Пусть γ — кривая, лежащая в некоторой плоскости π и l —прямая, лежащая в плоскости π и не пересекающая γ.

Поверхность образуемая кривой γ при вращении плоскости π вокруг прямой l называется *поверхностью вращения.* Кривая γ называется *профильной кривой*, l — *осью вращения.*

Уравнение поверхности вращения получить особенно легко, если кривая γ может быть задана в виде графика некоторой функции. Более точно, примем прямую l в качестве оси Oz, а ось Ox направим перпендикулярно оси Oz. Предположим, что γ задана уравнением $z = f(x)$. Ось Oy направим перпендикулярно Oxz. Обозначим через π_0 плоскость, совпадающую с Oxz в начальный момент. Повернем плоскость π_0 на некоторый угол α, фиксируя положение осей OX, OY и OZ. Для любой точки M координата z при этом не изменится. Не изменится и расстояние r от оси вращения Oz до нового положения точки M. Следовательно, уравнение связывающее координаты точек поверхности примет вид:

$$z = f(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следствие 1.2.1 *Если $\varphi(z, x) = 0$ — неявное уравнение кривой, лежащей в плоскости (x, z), то*

$$\varphi(z, r) = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

уравнение поверхности вращения, с осью вращения Oz.

1.2.3 Поверхности переноса.

Рассмотрим плоскость π_1 и пусть $\gamma_1 \subset \pi_1$. Зафиксируем точку $O \in \gamma_1$ и построим плоскость π_2, пересекающую плоскость π_1 по прямой l, проходящей через точку O. Пусть γ_2 некоторая кривая, лежащая в плоскости π_2. Фиксируя плоскость π_1 будем параллельно переносить плоскость π_2, как твердое тело, вдоль кривой γ_1 так, чтобы точка O во время движения находилась на кривой γ_1. Поверхность, образуемая кривой γ_2 называется *поверхностью переноса.*

Уравнение поверхности переноса легче всего получить если плоскости π_1 и π_2 взаимно перпендикулярны. Примем прямую l в качестве оси Oz, а оси Ox и Oy направим в плоскостях π_1 и π_2. Предположим, что уравнение $\gamma_2 : z = f(x)$, а уравнение $\gamma_1 : z = g(y)$. Тогда координата z точки M на поверхности переноса складывается из координаты $z_1 = f(x)$ в плоскости π_2 над осью Ox и координаты $z_2 = f(y)$ точки O над осью Oy в плоскости π_1. То есть координата z подвижной точки определяется выражением:

$$z = f(x) + g(y).$$

1.3 Канонические формы уравнений поверхностей второго порядка

1.3.1 Эллипсоиды.

Определение 1.3.1 *Геометрическое место точек пространства, координаты которых относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат удовлетворяет уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a \geq b \geq c$$

называется эллипсоидом. *Данное уравнение называется* ***каноническим*** *уравнением эллипсоида, а соответствующая система координат называется* ***канонической****. Если $a = b$, то поверхность называется* ***эллипсоидом вращения****.*

Замечание. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$$

определяет пустое множество в пространстве, но по аналогии с эллипсоидом говорят, что это уравнение задает **мнимый эллипсоид.**

Эллипсоид имеет три плоскости симметрии – координатные плоскости, три оси симметрии – оси координат и единственный центр симметрии – начало координат;

Трехосный эллипсоид получается из эллипсоида вращения сжатием вдоль оси Oy. Действительно, если точка Mс координатами (x_0, y_0, z_0) лежит на эллипсоиде вращения

$$\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{{y_0}^2}{a^2} + \frac{{z_0}^2}{c^2} = 1,$$

то точка $x_1 = x_0, y_1 = \frac{b}{a} y_0 \quad (\frac{b}{a} < 1), z_1 = z_0$ лежит на поверхности эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Эллипсоид вращения получается вращением канонического эллипса вокруг меньшей полуоси. Вращая эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a \geq c.$$

вокруг оси Oz получим поверхность с уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Рассмотрим сечения эллипсоида плоскостями вида $z = h$. В проекции на плоскость Oxy получим семейство эллипсов

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}$$

с полуосями

$$\tilde{a} = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \qquad \tilde{b} = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

Сечения существуют при $|h| \leq c$. Аналогично по другим осям.

Заметим, что на каноническом эллипсоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad a > b > c$$

сечение $x = 0$ даст эллипс с большей полуосью равной b на оси Oy, а сечение $z = 0$ даст эллипс с меньшей полуосью b на оси Oy. Следовательно, существует сечение, где полуоси равны, и равны b.

Рассмотрим плоскость, натянутую на векторы:

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \{0, 1, 0\} \\ \vec{e}_2 = \{\cos\alpha, 0, \sin\alpha\} \end{cases}$$

Вектор $\vec{e}_1$ перпендикулярен вектору $\vec{e}_2$, поэтому в плоскости $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ образуют векторы декартовой прямоугольной системы координат. Пусть u, v — параметры этой системы координат.

$$\begin{cases} x = v\cos\alpha \\ y = u \\ z = v\sin\alpha \end{cases}$$

Пересечение с эллипсоидом получит вид:

$$\frac{v^2\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{u^2}{b^2}+\frac{v^2\sin^2\alpha}{c^2}=1,\quad a>b>c$$

или

$$\frac{u^2}{b^2}+v^2(\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{c^2})=1.$$

В плоскости сечения параметры u и v являются декартовыми прямоугольными координатами. Поэтому полученное сечение есть эллипс. Покажем, что среди этих эллипсов есть окружность. Будем подбирать α так, чтобы

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{\sin^2\alpha}{c^2}=\frac{1}{b^2}.$$

или

$$\cos^2\alpha\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{c^2}\right)=\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}.$$

Отсюда

$$\cos^2\alpha=\frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}}=\frac{a^2(b^2-c^2)}{b^2(a^2-c^2)}<1.$$

Действительно,

$$a^2(b^2-c^2)<b^2(a^2-c^2)\ \Leftrightarrow\ -a^2c^2<-b^2c^2\ \Leftrightarrow\ a^2>b^2\ \Leftrightarrow\ a>b>0.$$

Упражнение 1.3.1 *Показать, что любая плоскость параллельная найденной, пересекает эллипсоид по окружностям.*

Точка на эллипсоиде, в которой касательная плоскость параллельна круговым сечениям называется *омбилической* или коротко *омбиликой.*

Упражнение 1.3.2 *Найти омбилические точки на поверхности трехосного эллипсоида. Исследовать их поведение в зависимости от соотношения осей.*

1.3.2 Гиперболоиды.

Определение 1.3.2 *Геометрическое место точек пространства, координаты которых относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат удовлетворяет уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a\ge b>0,\ c>0$$

называется ***однополостным гиперболоидом****. Это уравнение называются* ***каноническим*** *уравнением однополостного гиперболоида, а соответствующая система координат называется* ***канонической****. Если $a=b$, то поверхность называется каноническим* ***однополостным гиперболоидом вращения****.*

Однополостный гиперболоид имеет три плоскости симметрии – координатные плоскости, три оси симметрии – оси координат и единственный центр симметрии – начало координат;

Однополостный гиперболоид вращения есть поверхность, образованная вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

вокруг оси Oz. Трехосный однополостный гиперболоид получается из однополостного гиперболоида вращения сжатием вдоль оси Oy. Доказательства очевидны и предоставляются читателю.

Сечения однополостного гиперболоида плоскостями $z = h$ проектируются на плоскость Oxy в семейство эллипсов вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

с полуосями

$$\tilde{a} = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \geq a, \quad \tilde{b} = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}} \geq b.$$

Сечения однополостного гиперболоида плоскостями $y = h$ проектируются на плоскость Oxz

- при $|h| < b$ в семейство гипербол $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{h^2}{b^2}$ с полуосями $\tilde{a} = a\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{b^2}}$, $\tilde{c} = c\sqrt{1 - \frac{h^2}{b^2}}$;

- при $|h| = b$ в пару пересекающихся прямых $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$;

- при $|h| > b$ в семейство сопряженных гипербол $-\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = \dfrac{h^2}{b^2} - 1$ с полуосями $\tilde{a} = a\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2} - 1}, \quad \tilde{c} = c\sqrt{\dfrac{h^2}{b^2} - 1}$;

Свойства сечений $x = h$ аналогичны свойствам сечений $y = h$.

Определение 1.3.3 *Геометрическое место точек пространства, координаты которых относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат удовлетворяет уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \quad a \geq b > 0, \ c > 0$$

называется ***двуполостным гиперболоидом****. Это уравнение называются* ***каноническими*** *уравнениями двуполостного гиперболоида, а соответствующая система координат называется* ***канонической****. Если $a = b$, то поверхность называется каноническим* ***двуполостным гиперболоидом вращения****.*

Двуполостный гиперболоид имеет три плоскости симметрии – координатные плоскости, три оси симметрии – оси координат и единственный центр симметрии – начало координат;

Двуполостный гиперболоид вращения есть поверхность, образованная вращением гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

вокруг оси Oz. Трехосный двуполостный гиперболоид получается из двуполостного гиперболоида вращения сжатием вдоль оси Oy. Доказательства очевидны и предоставляются читателю.

Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями $z = h$ проектируются на плоскость Oxy в семейство эллипсов вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2} - 1$$

с полуосями

$$\tilde{a} = a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}, \quad \tilde{b} = b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2} - 1} \quad |h| \geq c.$$

При $|h| < c$ плоскость $z = h$ не имеет общих точек с двуполостным гиперболоидом.

Сечения двуполостного гиперболоида плоскостями $y = h$ проектируются на плоскость Oxz в семейство гипербол

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2}$$

с полуосями $\tilde{a} = a\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}$, $\tilde{c} = c\sqrt{1 + \frac{h^2}{b^2}}$. Свойства сечений $x = h$ аналогичны свойствам сечений $y = h$.

Упражнение 1.3.3 *Найти круговые сечения двуполостного гиперболоида и омбилические точки на нем. Исследовать поведение омбилических точек в зависимости от соотношения осей.*

1.3.3 Конусы.

Определение 1.3.4 *Геометрическое место точек пространства, координаты которых относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат удовлетворяет уравнению*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \quad a \geq b > 0, \ c > 0$$

называется ***конусом****. Это уравнение называются* ***каноническим*** *уравнением конуса, а соответствующая система координат называется* ***канонической****. Если $a = b$, то поверхность называется каноническим* ***конусом вращения****.*

Замечание. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$$

определяет одну точку – начало координат, но по аналогии с конусом говорят, что это уравнение задает **мнимый конус с вершиной в действительной точке.** $(0, 0, 0)$.

Конус имеет три плоскости симметрии – координатные плоскости, три оси симметрии – оси координат и единственный центр симметрии – начало координат;

Конус вращения есть поверхность, образованная вращением прямой

$$\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$$

вокруг оси Oz. Трехосный конус получается из конуса вращения сжатием вдоль оси Oy. Доказательства очевидны и предоставляются читателю.

Сечения конуса плоскостями $z = h$ проектируются на плоскость Oxy в семейство эллипсов вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$$

с полуосями

$$\tilde{a} = a\frac{|h|}{c}, \quad \tilde{b} = b\frac{|h|}{c}.$$

При $h = 0$ эллипсы вырождаются в точку с координатами $(0, 0, 0)$, которая называется *вершиной конуса.*

Сечения конуса плоскостями $y = h$ проектируются на плоскость Oxz

- при $|h| \neq b$ в семейство гипербол $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2}$ с полуосями $\tilde{a} = a\frac{|h|}{b}, \quad \tilde{c} = c\frac{|h|}{b};$
- при $|h| = b$ в пару пересекающихся прямых $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$

Свойства сечений $x = h$ аналогичны свойствам сечений $y = h$.

1.3.4 Параболоиды.

Определение 1.3.5 *Геометрическое место точек пространства, координаты которых относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат удовлетворяет уравнению*

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = z, \quad p \geq q > 0$$

*называется **эллиптическим параболоидом**. Это уравнение называются **каноническим** уравнением эллиптического параболоида, а соответствующая система координат называется **канонической**.*

*Если $p = q$, то поверхность называется каноническим **эллиптическим параболоидом вращения**.*

Эллиптический параболоид имеет две плоскости симметрии – координатные плоскости Oxz и Oyz, одну оси симметрии – ось Oz и не имеет ни одного центра симметрии.

Эллиптический параболоид вращения есть поверхность, образованная вращением параболы

$$\frac{x^2}{2p} = z$$

вокруг оси Oz. Двухосный эллиптический параболоид получается из эллиптического параболоида вращения сжатием вдоль оси Oy. Доказательства очевидны и предоставляются читателю.

Эллиптический параболоид является поверхностью переноса, образованной параболами $z = \frac{x^2}{2p}$ и $\frac{y^2}{2q} = z$, лежащими во взаимно ортогональных координатных плоскостях.

Сечения эллиптического параболоида плоскостями $z = h > 0$ проектируются на плоскость Oxy в семейство эллипсов вида

$$\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = h$$

с полуосями

$$\tilde{a} = \sqrt{2ph}, \quad \tilde{b} = \sqrt{2qh}.$$

При $h = 0$ эллипсы вырождаются в точку с координатами $(0, 0, 0)$, которая называется *вершиной эллиптического параболоида.*

При $h < 0$ плоскость $z = h$ не имеет общих точек с поверхностью эллиптического параболоида.

Сечения эллиптического параболоида плоскостями $y = h$ проектируются на плоскость Oxz в семейство конгруэнтных парабол $\dfrac{x^2}{2p} + \dfrac{h^2}{2q} = z$, получаемых сдвижкой "вверх" параболы $\dfrac{x^2}{2p} = z$. Свойства сечений $x = h$ аналогичны свойствам сечений $y = h$.

Определение 1.3.6 *Геометрическое место точек пространства, координаты которых относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат удовлетворяет уравнению*

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z, \quad p, q > 0$$

называется ***гиперболическим параболоидом****. Это уравнение называются* ***каноническим*** *уравнением гиперболического параболоида, а соответствующая система координат называется* ***канонической****.*

Гиперболический параболоид имеет две плоскости симметрии – координатные плоскости Oxz и Oyz, одну оси симметрии – ось Oz и не имеет ни одного центра симметрии.

Гиперболический параболоид является поверхностью переноса, образованной параболами $z = \frac{x^2}{2p}$ и $-\frac{y^2}{2q} = z$, лежащими во взаимно ортогональных координатных плоскостях.

Сечения гиперболического параболоида плоскостями $z = h$ проектируются на плоскость Oxy

- при $h > 0$ в семейство гипербол
$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = h$$
с полуосями
$$\tilde{a} = \sqrt{2ph}, \quad \tilde{b} = \sqrt{2qh};$$
- при $h = 0$ в пару прямых
$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = 0;$$
- при $h < 0$ в семейство гипербол
$$-\frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} = -h$$
с полуосями
$$\tilde{a} = \sqrt{-2ph}, \quad \tilde{b} = \sqrt{-2qh}.$$

Сечения гиперболического параболоида плоскостями $y = h$ проектируются на плоскость Oxz в семейство конгруэнтных парабол $\frac{x^2}{2p} - \frac{h^2}{2q} = z$, получаемых сдвижкой "вниз" параболы $\frac{x^2}{2p} = z$.

Сечения гиперболического параболоида плоскостями $x = h$ проектируются на плоскость Oxz в семейство конгруэнтных парабол $\frac{h^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z$, получаемых сдвижкой "вверх" параболы $-\frac{y^2}{2q} = z$.

1.3.5 Цилиндры.

Если в качестве направляющей цилиндрической поверхности выбрать любую из 9 кривых 2-го порядка, а образующие направить перпендикулярно плоскости, в которой эти кривые лежат, то такая цилиндрическая поверхность будет задаваться многочленом 2-го порядка, а значит будет поверхностью 2-го порядка в пространстве.

Направим ось Oz декартовой прямоугольной системы координат перпендикулярно плоскости кривой 2-го порядка, а оси Ox и Oy совместим с осями канонической системы координат для соответствующей кривой. При таком выборе координатной системы уравнения 9 типов кривых 2-го порядка зададут 9 типов цилиндров 2-го порядка, а именно

- **эллиптический цилиндр** , **действительный**
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a \geq b > 0$$

и **мнимый**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1, \quad a\geq b>0.$$

Эллиптический цилиндр имеет

– две фиксированные плоскости симметрии – плоскости Oxz и Oyz, и семейство плоскостей симметрии, перпендикулярных образующим;

– одну фиксированную оси симметрии – ось Oz и семейство осей симметрии, параллельных осям Ox и Oy;

– линию центров симметрии, лежащих на оси Oz.

- **гиперболический цилиндр**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a,b>0.$$

Гиперболический цилиндр имеет

– две фиксированные плоскости симметрии – плоскости Oxz и Oyz, и семейство плоскостей симметрии, перпендикулярных образующим;

– одну фиксированную оси симметрии – ось Oz и семейство осей симметрии, параллельных осям Ox и Oy;

– линию центров симметрии, лежащих на оси Oz.

- **параболический цилиндр**

$$\frac{y^2}{a^2}=2p\,z, \quad a,p>0.$$

Параболический цилиндр имеет

– одну фиксированную плоскость симметрии – плоскости Oxz, и семейство плоскостей симметрии, перпендикулярных образующим;

– семейство осей симметрии, параллельных оси Ox;

– ни одного центра симметрии.

Цилиндры, построенные над парами прямых образуют **пары плоскостей** и образуют класс *распадающихся поверхностей 2-го порядка.*

- **пара действительных пересекающихся плоскостей**

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0, \quad a,b>0;$$

- **пара мнимых пересекающихся плоскостей**

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0, \quad a,b>0;$$

- **пара действительных параллельных плоскостей**

$$\frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b > 0;$$

- **пара мнимых параллельных плоскостей**

$$\frac{y^2}{b^2} = -1, \quad b > 0.$$

- **пара слившихся плоскостей**

$$\frac{y^2}{b^2} = 0, \quad b > 0.$$

Сущность классификационной теоремы состоит в том, что *выбором подходящей декартовой прямоугольной системы координат* уравнение любой поверхности 2-го порядка может быть сведено к одному из *перечисленных* 17 типов уравнений 2-го порядка. Тем самым, любая поверхность 2-го порядка является одной из перечисленных 17 поверхностей.

1.3.6 Прямолинейные образующие на поверхности однополостного гиперболоида.

При изучении сечений поверхностей 2-го порядка, можно было заметить, что в некоторых случаях, а именно в случае однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида, существовали плоскости, пересекающие эти поверхности по паре пересекающихся прямых. Оказывается, что эти две поверхности обладают тем замечательным свойством, что они *могут быть составлены* из двух семейств пересекающихся прямых.

Предложение 1.3.1 *Однополостный гиперболоид несет на себе два семейства прямолинейных образующих, обладающих следующими свойствами:*

(a) *Через любую точку проходит ровно одна прямая каждого семейства;*

(b) *Любые две образующие разных семейств лежат в одной плоскости;*

(c) *Любые две образующие одного семейства скрещиваются;*

(d) *Любые три образующие одного семейства не параллельны никакой плоскости.*

Доказательство. Уравнение однополостного гиперболоида имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Заметим, что на этой поверхности не может лежать прямая, параллельная плоскости (x, y), так как ее сечения плоскостями $z = h$ составляют семейство эллипсов. Значит, если прямая лежит на поверхности, то она ***пересекает*** горловой эллипс, а ее направляющий вектор ***не ортогонален*** оси z.

Если точка $(x_0, y_0, 0)$ принадлежит горловому эллипсу, то ее координаты удовлетворяют уравнению
$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1,$$
что позволяет параметризовать точки горлового эллипса в виде

$$\begin{cases} x_0 = a\cos\alpha, \\ y_0 = b\sin\alpha. \end{cases} \tag{1.1}$$

Пусть $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ направляющий вектор искомой прямой. Тогда $v_3 \neq 0$. А так как координаты направляющего вектора прямой определяются с точностью до ненулевого коэффициента пропорциональности, то мы можем положить

$$v_3 = c.$$

Следовательно, уравнение искомой прямой можно записать в виде:

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha + v_1 t \\ y = b\sin\alpha + v_2 t \\ z = ct. \end{cases} \tag{1.2}$$

Подставим (1.2) в уравнение гиперболоида и потребуем, чтобы все точки прямой удовлетворяли уравнению гиперболоида. Получим:

$$\left(\cos\alpha + \frac{v_1}{a}t\right)^2 + \left(\sin\alpha + \frac{v_2}{b}t\right)^2 - t^2 \equiv 1,$$

$$2\left(\cos\alpha\frac{v_1}{a} + \sin\alpha\frac{v_2}{b}\right)t + \left(\frac{v_1^2}{a^2} + \frac{v_2^2}{b^2} - 1\right)t^2 \equiv 0.$$

Из равенства 0 коэффициента при t^2 следует, что можно положить

$$v_1 = a\cos\beta, \quad v_2 = b\sin\beta.$$

Тогда коэффициент при t примет вид

$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\beta - \alpha) = 0.$$

Отсюда немедленно находим два решения

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \beta - \alpha = \frac{3\pi}{2},$$

то есть
$$\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha, \quad \beta = \frac{3\pi}{2} + \alpha.$$

Значит, либо $\cos\beta = -\sin\alpha$, $\sin\beta = +\cos\alpha$, либо $\cos\beta = \sin\alpha$, $\sin\beta = -\cos\alpha$. Соответственно, получаем два направляющих вектора вида

$$\{a\sin\alpha,\ -b\cos\alpha,\ \pm c\}.$$

Сравнивая с (1.1) можем записать

$$\vec{v} = \left\{ \frac{a}{b} y_0, -\frac{b}{a} x_0, \pm c \right\}.$$

Таким образом, на поверхности находится два семейства прямых:

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{a}{b} y_0 \; t \\ y = y_0 - \dfrac{b}{a} x_0 \; t \\ z = ct \end{cases}, \qquad (2) \quad \begin{cases} x = x_0 + \dfrac{a}{b} y_0 \; t \\ y = y_0 - \dfrac{b}{a} x_0 \; t \\ z = -ct \end{cases}$$

Покажем, что это искомые семейства.

Доказательство (а). Пусть (x_1, y_1, z_1) точка на однополостном гиперболоиде, то есть

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \frac{z_1^2}{c^2} = 1.$$

Покажем, что она принадлежит прямой семейства (1). Для этого достаточно проверить, что система

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + \dfrac{a}{b} y_0 \; t \\ y_1 = y_0 - \dfrac{b}{a} x_0 \; t \\ z_1 = ct \end{cases}$$

имеет единственное решение относительно (t, x_0, y_0), удовлетворяющее дополнительному условию

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = 1.$$

Ясно, что $t = \frac{z_1}{c}$, а для нахождения x_0 и y_0 получаем систему

$$\begin{cases} x_0 + \dfrac{a}{b}\dfrac{z_1}{c} y_0 = x_1, \\ -\dfrac{b}{a}\dfrac{z_1}{c} x_0 + y_0 = y_1. \end{cases}$$

Ее определитель

$$\Delta = 1 + \frac{z_1^2}{c^2} > 0,$$

а значит решение существует и единственно. Решая систему, находим

$$x_0 = \frac{x_1 - \dfrac{a}{b}\dfrac{z_1}{c} y_1}{\Delta} = a\,\frac{\dfrac{x_1}{a} - \dfrac{y_1}{b}\dfrac{z_1}{c}}{\Delta}, \qquad y_0 = \frac{y_1 + \dfrac{b}{a}\dfrac{z_1}{c} x_1}{\Delta} = b\,\frac{\dfrac{y_1}{a} + \dfrac{x_1}{a}\dfrac{z_1}{c}}{\Delta}.$$

При этом

$$\left(\frac{x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_0}{b}\right)^2 = \frac{1}{\Delta^2}\left[\left(\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}\frac{z_1}{c}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b} + \frac{x_1}{a}\frac{z_1}{c}\right)^2\right] =$$

$$\frac{1}{\Delta^2}\left[\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)\right] = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) = \frac{1}{\Delta}\left(1 + \frac{z_1^2}{c^2}\right) = 1.$$

Доказательство (b)**.** Рассмотрим две прямые разных семейств:

$$\begin{aligned}
l_1: &\quad \vec{r} = \vec{r_1} + \vec{\tau_1}t, &\quad \vec{r_1} = \{x_1, y_1, 0\}, &\quad \tau_1 = \left\{\tfrac{a}{b}y_1, -\tfrac{b}{a}x_1,\, c\right\};\\
l_2: &\quad \vec{r} = \vec{r_2} + \vec{\tau_2}\theta, &\quad \vec{r_2} = \{x_2, y_2, 0\}, &\quad \vec{\tau_2} = \left\{\tfrac{a}{b}y_2, -\tfrac{b}{a}x_2,\, -c\right\}.
\end{aligned}$$

Условие компланарности для l_1 и l_2 имеет вид

$$(\vec{r_1} - \vec{r_2}, \vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}) \equiv 0.$$

Распишем в координатах.

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ \frac{a}{b}y_1 & -\frac{b}{a}x_1 & c \\ \frac{a}{b}y_2 & -\frac{b}{a}x_2 & -c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & 0 \\ \frac{a}{b}(y_1 + y_2) & -\frac{b}{a}(x_1 + x_2) & 0 \\ \frac{a}{b}y_2 & -\frac{b}{a}x_2 & -c \end{vmatrix} =$$

$$c\left[\frac{b}{a}(x_1^2 - x_2^2) + \frac{a}{b}(y_1^2 - y_2^2)\right] = abc\left[\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2} + \frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2}\right] =$$

$$abc\left[\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - \left(\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}\right)\right] \equiv 0$$

Доказательство (c). Рассмотрим две различные прямые одного семейства:

$$\begin{aligned}
l_1: &\quad \vec{r} = \vec{r_1} + \vec{\tau_1}t, &\quad \vec{r_1} = \{x_1, y_1, 0\}, &\quad \tau_1 = \left\{\tfrac{a}{b}y_1, -\tfrac{b}{a}x_1,\, c\right\};\\
l_2: &\quad \vec{r} = \vec{r_2} + \vec{\tau_1'}\theta, &\quad \vec{r_2} = \{x_1', y_1', 0\}, &\quad \vec{\tau_1'} = \left\{\tfrac{a}{b}y_1', -\tfrac{b}{a}x_1',\, c\right\}.
\end{aligned}$$

Условие скрещивания двух прямых имеет вид

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{\tau}_1, \vec{\tau_1'}) \neq 0.$$

Тогда в координатах

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_1' & y_1 - y_1' & 0 \\ \frac{a}{b}y_1 & -\frac{b}{a}x_1 & c \\ \frac{a}{b}y_1' & -\frac{b}{a}x_1' & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_1' & y_1 - y_1' & 0 \\ \frac{a}{b}(y_1 - y_1') & -\frac{b}{a}(x_1 - x_1') & 0 \\ \frac{a}{b}y_1' & -\frac{b}{a}x_1' & c \end{vmatrix} =$$

$$c\left[\frac{b}{a}(x_1 - x_1')^2 + \frac{a}{b}(y_1 - y_1')^2\right] = abc\left[\frac{(x_1 - x_1')^2}{a^2} + \frac{(y_1 - y_1')^2}{b^2}\right] \neq 0$$

так как $x_1 \neq x_1'$ или $y_1 \neq y_1'$.

Доказательство (d)**.** Рассмотрим три различные прямые одного семейства

$$\begin{aligned}
l_{\lambda_1}: &\quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{\tau}_{\lambda_1}t,\\
l_{\lambda_2}: &\quad \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{\tau}_{\lambda_2}\theta,\\
l_{\lambda_3}: &\quad \vec{r} = \vec{r}_3 + \vec{\tau}_{\lambda_3}\sigma,
\end{aligned}$$

где $\vec{r_1} = \left\{x_1, y_1, 0\right\}$, $\vec{r_2} = \left\{x_1', y_1', 0\right\}$, $\vec{r_3} = \left\{x_1'', y_1'', 0\right\}$. Эти прямые не параллельны никакой плоскости, если ни в одной точке векторы $\vec{\tau}_{\lambda_1}, \vec{\tau}_{\lambda_2}, \vec{\tau}_{\lambda_3}$ не компланарны, то есть

$$(\vec{\tau}_{\lambda_1}, \vec{\tau}_{\lambda_2}, \vec{\tau}_{\lambda_3}) \neq 0.$$

Распишем это условие в координатах.

$$\begin{vmatrix} -\frac{a}{b}y_1 & \frac{b}{a}x_1 & c \\ -\frac{a}{b}y_1{}' & \frac{b}{a}x_1{}' & c \\ -\frac{a}{b}y_1{}'' & \frac{b}{a}x_1{}'' & c \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} y_1 & x_1 & 1 \\ y_1{}' & x_1{}' & 1 \\ y_1{}'' & x_1{}'' & 1 \end{vmatrix} = c \begin{vmatrix} y_1 - y_1{}'' & x_1 - x_1{}'' \\ y_1{}' - y_1{}'' & x_1{}' - x_1{}'' \end{vmatrix}.$$

Последний определитель равен нулю тогда и только тогда, когда $\vec{r}_1 - \vec{r}_3 \parallel \vec{r}_2 - \vec{r}_3$. То есть точки с радиус-векторами $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ лежит на одной прямой, а это невозможно, так как они различны и лежат на горловом эллипсе.

1.3.7 Прямолинейные образующие на поверхности гиперболического параболоида.

Теорема 1.3.1 *На поверхности гиперболического параболоида лежат два семейства прямых. При этом*

(a) *Через любую точку гиперболического параболоида проходит ровно одна прямая каждого семейства;*

(b) *Любые две образующие разных семейств пересекаются;*

(c) *Любые две прямые одного семейства скрещиваются;*

(d) *Любые три прямые одного семейства параллельны некоторой плоскости.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение гиперболического параболоида

$$\frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} = z, \quad p, q > 0$$

и для удобства дальнейших вычислений сделаем замену $2p \to a^2$ и $2q \to b^2$. Тогда уравнение запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

и левая часть уравнения может быть разложена на множители

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z.$$

Отсюда следует, что на поверхности гиперболического параболоида имеется 2 семейства прямых:

$$(\lambda) \begin{cases} \lambda\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z \\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \lambda \end{cases} \qquad (\mu) \begin{cases} \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \mu \\ \mu\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z \end{cases}$$

Каждому значению параметров λ и μ соответствует определенная прямая на поверхности. И обратно, каждой точке на гиперболическом параболоиде соответствует значение параметров

$$\lambda_0 = \frac{x_0}{a} + \frac{y_0}{b} \quad \text{и} \quad \mu_0 = \frac{x_0}{a} - \frac{y_0}{b},$$

что и составляет **доказательство (a).**

Доказательство оставшихся пунктов (b) – (d) разобьем на две леммы.

Лемма 1.3.1 *Образующие каждого из семейств прямых на поверхности гиперболического параболоида пересекают параболу* $z = -\dfrac{y^2}{b^2}$, *лежащую в сечении* $x = 0$. *Координаты соответствующих точек пересечения имеют вид:*

$$(\lambda)\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = b\lambda \\ z_1 = -\lambda^2 \end{cases} \qquad (\mu)\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -b\mu \\ z_2 = -\mu^2 \end{cases}$$

Доказательство.

Для прямой семейства (λ) положим $x = 0$ и решим систему

$$(\lambda)\begin{cases} \dfrac{\lambda}{b}y + z = 0, \\ \dfrac{1}{b}y = \lambda. \end{cases}$$

Ее очевидное решение $y_1 = b\lambda;\ z_1 = -\lambda^2$. Аналогично, для системы (μ) находим

$$(\mu)\begin{cases} -\dfrac{y}{b} = \mu, \\ \mu\dfrac{y}{b} = z. \end{cases}$$

Ее решение $y_2 = -\mu b,\ z_2 = -\mu^2$.

$\blacksquare$

Лемма 1.3.2 *Направляющие векторы прямых каждого из семейств можно записать в виде*

$$\vec{\tau}_\lambda = \{\, a, -b, 2\lambda \,\},$$
$$\vec{\tau}_\mu = \{\, a,\ \ b,\ 2\mu \,\}.$$

Доказательство. Рассмотрим семейство (λ). Векторы нормалей плоскостей, задающих эти прямые

$$\vec{N}_1 = \{\frac{\lambda}{a}, -\frac{\lambda}{b}, -1\}$$
$$\vec{N}_2 = \{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, 0\}$$

Поэтому

$$\vec{\tau}_\lambda = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\lambda}{a} & -\dfrac{\lambda}{b} & -1 \\ \dfrac{1}{a} & \dfrac{1}{b} & 0 \end{vmatrix} = \{\frac{1}{b}, -\frac{1}{a}, \frac{2\lambda}{ab}\} \sim \{\, a, -b, 2\lambda \,\}.$$

Аналогично,

$$\vec{\tau}_\mu = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{1}{a} & -\dfrac{1}{b} & 0 \\ \dfrac{\mu}{a} & \dfrac{\mu}{b} & -1 \end{vmatrix} = \left\{\frac{1}{b}, \frac{1}{a}, \frac{2\mu}{ab}\right\} \sim \left\{ a,\ b,\ 2\mu \right\}.$$

■

Доказательство (b). Рассмотрим две прямые разных семейств:

$$\begin{aligned} l_\lambda: &\quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{\tau}_\lambda t, \\ l_\mu: &\quad \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{\tau}_\mu \theta, \end{aligned}$$

где $\vec{r}_1 = \left\{0, b\lambda, -\lambda^2\right\}$ и $\vec{r}_2 = \left\{0, -b\mu, -\mu^2\right\}$. Условие компланарности этих прямых имеет вид $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{\tau}_\lambda, \vec{\tau}_\mu) = 0$. Записывая это в координатной форме, находим

$$\begin{vmatrix} 0 & b(\mu+\lambda) & \mu^2-\lambda^2 \\ a & -b & 2\lambda \\ a & b & 2\mu \end{vmatrix} = (\mu+\lambda) \begin{vmatrix} 0 & b & \mu-\lambda \\ 0 & -2b & -(\mu-\lambda) \\ a & b & 2\mu \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Так как векторы прямых $\vec{\tau}_\lambda$ и $\vec{\tau}_\mu$ очевидно не параллельны, то прямые пересекаются.

Доказательство (b). Рассмотрим две прямые одного семейства:

$$\begin{aligned} l_{\lambda_1}: &\quad \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{\tau}_{\lambda_1} t, \\ l_{\lambda_2}: &\quad \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{\tau}_{\lambda_2} \theta, \end{aligned}$$

где $\vec{r}_1 = \left\{0, b\lambda_1, -\lambda_1^2\right\}$ и $\vec{r}_2 = \left\{0, b\lambda_2, -\lambda_2^2\right\}$.

Эти прямые скрещиваются, если $(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{\tau}_{\lambda_1}, \vec{\tau}_{\lambda_2}) \neq 0$. В координатной форме находим

$$\begin{vmatrix} 0 & b(\lambda_2-\lambda_1) & -(\lambda_2^2-\lambda_1^2) \\ a & -b & 2\lambda_1 \\ a & -b & 2\lambda_2 \end{vmatrix} = (\lambda_2-\lambda_1) \begin{vmatrix} 0 & b & \lambda_1-\lambda_2 \\ 0 & 0 & 2(\lambda_1-\lambda_2) \\ a & -b & 2\lambda_2 \end{vmatrix} =$$

$$= -2ab(\lambda_1-\lambda_2)^2 \neq 0,$$

поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Доказательство(c). Достаточно заметить, что вектор

$$\vec{N} = \left\{b, a, 0\right\}$$

обладает тем очевидным свойством, что $\left\langle \vec{\tau}_\lambda, \vec{N} \right\rangle \equiv 0$ для всех значений параметра λ, а для вектора

$$\vec{N} = \left\{b, -a, 0\right\}$$

имеем $\left\langle \vec{\tau}_\mu, \vec{N} \right\rangle \equiv 0$ для любых значений параметра μ.

■

1.4 Общие свойства кривых и поверхностей 2-го порядка.

1.4.1 Необходимые сведения из линейной алгебры

Напомним некоторые факты из линейной алгебры.

- Матрица, столбцы которой составлены из строк данной матрицы M называется транспонированной матрицей (по отношению к M) и обозначается M'. В частности если
$$M = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix},$$
то
$$M' = (x_1, \dots, x_n).$$

- Матрица M называется симметричной, если $M' = M$.

- Для двух перемножаемых матриц справедливо равенство
$$(M_1 \cdot M_2)' = M_2' \cdot M_1'.$$

- С каждым вектором даноого линейного пространства L^n можно связать $(1 \times n)$ матрицу, которая называется **вектор-столбец**, по правилу:
$$\vec{X} = x^1\vec{e}_1 + \dots + x^n\vec{e}_n \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

- Скалярное произведение двух векторов $\vec{X}$ и $\vec{Y}$, заданных относительно ортонормированного базиса, можно записать в виде
$$\left\langle \vec{X}, \vec{Y} \right\rangle = X'Y = Y'X = \sum X^iY^i,$$
где X и Y вектор-столбцы, составленные из координат соответствующих векторов.

- С каждой $(n \times m)$ матрицей A можно связать линейный оператор (линейное отображение) $\mathcal{A} : R^m \rightarrow R^n$, действующее по правилу
$$\mathcal{A}(\vec{X}) = A\vec{X}$$

Определение 1.4.1 *Пусть A — матрица размерности $n \times n$. Вектор-столбец X называется **собственным вектором** матрицы A, если X является ненулевым решение системы уравнений*

$$AX = \lambda X \qquad (X \neq 0).$$

*Число λ называется **собственным значением** матрицы A.*

Число λ не может быть произвольным, а зависит от матрицы A. Действительно, система $AX = \lambda X$ эквивалентна системе

$$(A - \lambda E)X = 0.$$

Это однородная система уравнений и, следовательно, ненулевое решение у нее существует если $\det(A - \lambda E)X = 0$. Нетрудно видеть, что $\det(A - \lambda E)X = 0$ является многочленом степени n относительно λ. Этот многочлен называется *характеристическим* многочленом матрицы A и обозначается так $\chi_A(\lambda)$. Итак,

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

Собственные значения матрицы A — это в точности корни характеристического многочлена. Выпишем для примера $\chi_A(\lambda)$ при $n = 2$:

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A$$

В соответствии с основной теоремой алгебры, уравнение $\chi_A(\lambda) = 0$ имеет ровно n корней, но возможно комплексных. В соответствии с этим система

$$(A - \lambda E)X = 0$$

вообще говоря имеет комплексную матрицу, даже если A — вещественна и, соответственно, комплексное решение X. Но если A вещественная симметричная $n \times n$ матрица, то ситуация упрощается.

Предложение 1.4.1 *Пусть A — вещественная,* ***симметричная*** *матрица, размерности $n \times n$. Тогда все собственные числа матрицы A — вещественные.*

Доказательство. Пусть $AX = \lambda X$, где λ — необязательно вещественно X соответствующий собственный вектор. Тогда,

$$AX = \lambda X$$

. Возьмем от обеих частей комплексное сопряжение, принимая во внимание вещественность матрицы A:

$$A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}.$$

Следовательно, мы имеем два равенства:

$$\begin{cases} AX = \lambda X, & \text{(домножим слева на } \bar{X}'\text{)} \\ A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X} & \text{(домножим слева на } X'\text{).} \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} \bar{X}'AX = \lambda\bar{X}'X; \\ X'A\bar{X} = \bar{\lambda}X'\bar{X}; \end{cases}$$

Так как матрица A симметрична, то для любых X, Y имеем $X'AY = Y'AX$, поэтому левые части равны, а в правых частях имеем:

$$\bar{X}'X = \sum |z^i|^2,$$
$$X\bar{X}' = \sum |z^i|^2,$$

где z^i — комплексные координаты вектора X. Вычитая находим, что

$$(\lambda - \bar{\lambda}) \sum |z^i| = 0,$$

и так как $X \neq 0$, то $\lambda = \bar{\lambda}$.

■

Пусть $\vec{x}, \vec{y}$ векторы в евклидовом пространству, и пусть $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ — некоторый ортонормированный базис в нем. Тогда

$$\vec{x} = \sum x^i \vec{e}_i$$
$$\vec{y} = \sum y^i \vec{e}_i$$

И, очевидно, каждому вектору можно поставить в соответствие вектор-столбец в матричной интерпретации:

$$\vec{x} \longrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}$$

Тогда, сумме векторов $\vec{x} + \vec{y}$ соответствует сумма векторов-столбцов

$$\vec{x} + \vec{y} \longrightarrow \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix}.$$

Произведению вектора $\vec{x}$ на число λ столбец

$$\lambda \vec{x} \longrightarrow \lambda \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Скалярному произведению векторов $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ соответствует матричное произведение $X'Y$:

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i \quad \longrightarrow \quad [x^1, \ldots, x^n] \begin{pmatrix} y^1 \\ \vdots \\ y^n \end{pmatrix} = X'Y.$$

Если A — матрица размерности $n \times n$, то отображение $X \to AX$ естественно интерпретируется как *преобразование* $\mathcal{A}$ в евклидовом пространстве $\vec{x} \to \mathcal{A}\vec{x} = \vec{y}$, координаты которого относительно заданного базиса вычисляются так:

$$y^i = i\text{-й элемент столбца } AX.$$

Это преобразование является линейным с в том смысле, что

$$\mathcal{A}(\lambda \vec{x} + \mu \vec{y}) = \lambda \mathcal{A}(\vec{x}) + \mu \mathcal{A}(\vec{y}).$$

Верно и обратное, каждому линейному преобразованию $\mathcal{A} : E^n \to E^n$ ставится в соответствие $n \times n$ матрица A, столбцы которой являются коэффициентами разложения векторов $\mathcal{A}\vec{e}_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ по базису $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$:

$$\mathcal{A}\vec{e}_k = \sum_{i=1}^{n} a_k^i \, \vec{e}_i = a_k^1 \vec{e}_1 + \cdots + a_k^n \vec{e}_n.$$

Столбец

$$\begin{pmatrix} a_k^1 \\ \vdots \\ a_k^n \end{pmatrix}$$

составляет k-й столбец матрицы A.

Таким образом, между $n \times n$ матрицами и линейными преобразованиями в E^n существует взаимно-однозначное соответствие. Построенная матрица A называется **матрицей линейного преобразования $\mathcal{A}$**.

В этой интерпретации собственному вектору X матрицы A соответствует вектор $\vec{x}$ в евклидовом пространстве, действие преобразования $\mathcal{A}$ на который сводится к умножению этого вектора на собственное значение λ:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

В частности, это означает, что прямая с направляющим вектором $\vec{x}$ и проходящая через начало координат под действием преобразования $\mathcal{A}$ переходит в себя. Иначе говоря, остается *инвариантной* при действии преобразования $\mathcal{A}$. Поскольку прямая, проходящая через начало координат, образует 1-мерное линейное подпространство в E^n, то можно говорить, что такая прямая составляет *инвариантное подпространство* преобразования $\mathcal{A}$.

Собственные векторы преобразования $\mathcal{A}$, или более обще – его инвариантные подпространства, обладают важным геометрическим свойством.

Предложение 1.4.2 *Пусть A —матрица, размерности $n \times n$, тогда собственные векторы преобразования $\mathcal{A}$, отвечающие собственным значениям взаимно ортогональны.*

Доказательство. Действительно, пусть $\lambda_2 \neq \lambda_2$ и

$$\begin{cases} AX_1 = \lambda_1 X_1, \\ AX_2 = \lambda_2 X_2. \end{cases}$$

Тогда,

$$\begin{cases} X_2{}' A X_1 = \lambda_1 X_2{}' X_1, \\ X_1{}' A X_2 = \lambda_2 X_1{}' X_2 \equiv \lambda_2 X_2{}' X_1. \end{cases}$$

Вычитая, находим,

$$(\lambda_1 - \lambda_2) X_2{}' X_1 = 0$$

и так как $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то $X_2{}'X_1 = 0$, что в евклидовом пространстве соответствует равенству $\langle \vec{x}_1, \vec{x}_2 \rangle = 0$, где $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ соответствующие собственные векторы преобразования $\mathcal{A}$.

∎

Следствие 1.4.1 *Пусть A — симметричная матрица, размерности $n \times\ n$, все собственные значения которой различны. Тогда в евклидовом пространстве существует ортонормированный базис $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n$, составленный из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Действительно, если все собственные числа матрицы A различны, то собственные векторы $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ преобразования $\mathcal{A}$ попарно ортогональны. Нормируем их. В результате получим требуемый ортонормированный базис $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_n$.

∎

Замечание. Требование различности собственных значений несущественно. Можно доказать, что даже если среди собственных чисел есть одинаковые, то все равно можно выбрать ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов преобразования $\mathcal{A}$.

1.4.2 Упрощение уравнения поверхности 2-го порядка выбором системы координат

Уравнение общей кривой 2-го порядка

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

и общей поверхности 2-ко порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0$$

могут быть выражены единым матричным уравнением, пригодным для рассмотрения поверхностей 2-го порядка в $n-$ мерном евклидовом пространстве. Для этого введем в рассмотрение

- симметричную $n \times n$ матрицу A, элементы которой составлены из коэффициентов квадратичной части уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- вектор-столбец коэффициентов линейной части уравнения

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- вектор-столбец переменных

$$X = \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix}.$$

Прямым вычислением можно проверить, что уравнение кривой и поверхности 2-го порядка запишется как

$$X'AX + 2X'b + c = 0.$$

Например, при $n = 2$

$$X'AX = (x^1, x^2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = (x^1, x^2)\begin{pmatrix} a_{11}x^1 + a_{12}x^2 \\ a_{21}x^2 + a_{22}x^2 \end{pmatrix} =$$
$$= a_{11}(x^1)^2 + 2a_{12}x^1x^2 + a_{22}(x^2)^2.$$

$$X'b = (x^1, x^2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = b_1x^1 + b_2x^2.$$

Таким образом, заменяя $x^1 \to x, x^2 \to y$, находим

$$X'AX + 2X'b + c = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c.$$

С учетом этого, *в дальнейшем будем говорить о кривой 2-го порядка как об одномерной "поверхности"*.

Матричная форма записи позволяет сравнительно легко получить формулы преобразования коэффициентов уравнения при изменении системы координат.

Лемма 1.4.1 *Пусть*

$$X'AX + 2X'b + c = 0$$

уравнение поверхности 2-го порядка. Пусть $X = X_0 + Q\tilde{X}$ *равенство, задающее формулу перехода от декартовой системы координат* X *к декартовой системе координат* $\tilde{X}$. *Тогда относительно системы координат* $\tilde{X}$ *уравнение поверхности примет вид*

$$\tilde{X}'\tilde{A}\tilde{X} + 2\tilde{X}'\tilde{b} + \tilde{c} = 0,$$

где

$$\tilde{A} = Q'AQ, \quad \tilde{b} = Q'(AX_0 + b), \quad \tilde{c} = X_0'AX_0 + 2X_0'b + c.$$

Доказательство. Действительно,

$$(Q\tilde{X} + X_0)'A(Q\tilde{X} + X_0) + 2(Q\tilde{X} + X_0)'b + c =$$
$$(Q\tilde{X})'A(Q\tilde{X}) + X_0'AQ\tilde{X} + (Q\tilde{X})'AX_0 + X_0'AX_0 + 2(Q\tilde{X})'b + 2X_0b + c =$$
$$\tilde{X}'(Q'AQ)\tilde{X} + X_0'AQ\tilde{X} + \tilde{X}'Q'AX_0 + 2\tilde{X}'Q'b + X_0'AX_0 + 2X_0b + c.$$

Так как матрица A симметрична и $X'Y \equiv Y'X$, то $X'(AY) = (AY)'X = Y'A'X = Y'AX$. Следовательно

$$X_0'AQ\tilde{X} = (Q\tilde{X})'AX_0 = \tilde{X}'Q'AX_0.$$

Продолжим вычисление

$$\tilde{X}'(Q'AQ)\tilde{X} + 2\tilde{X}'Q'AX_0 + 2\tilde{X}'Q'b + X_0'AX_0 + 2X_0b + c =$$
$$\tilde{X}'\underbrace{(Q'AQ)}_{\tilde{A}}\tilde{X} + 2\tilde{X}'\underbrace{Q'(AX_0 + b)}_{\tilde{b}} + \underbrace{X_0'AX_0 + 2X_0b + c}_{\tilde{c}}.$$

что и требовалось доказать.

■

Из доказанного утверждения следует, что после ортогонального преобразования уравнение поверхности может быть упрощено.

Заметим, что матрица Q столбцы которой составлены из координат собственных векторов является матрицей перехода от ортонормированного базиса $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n$ к ортонормированному базису $\vec{q}_1, \ldots, \vec{q}_n$, а значит является ортогональной матрицей. Следовательно, преобразование координат, вида

$$X = X_0 + Q\tilde{X}$$

является преобразованием декартовых прямоугольных координат.

Лемма 1.4.2 *Пусть уравнение $X'AX+2X'b+c=0$ задает поверхность 2-го порядка в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$. Введем в рассмотрение*

- *матрицу $Q = [q_1, \ldots, q_n]$ столбцы которой есть ортонормированный базис из собственных векторов матрицы A;*
- *столбец $h = Q'b$;*
- *вектор-столбец p с координатами:*

$$p_i = \begin{cases} \dfrac{h_i}{\lambda_i} & \text{если } \lambda_i \neq 0; \\ 0 & \text{если } \lambda_i = 0. \end{cases}$$

Тогда преобразованием координат $\tilde{X} = Q'X + p$ уравнение поверхности 2-го порядка приводится к виду:

$$\tilde{X}'E_\lambda\tilde{X} + 2\tilde{X}'(-E_\lambda p + h) + c - p'E_\lambda p = 0,$$

где E_λ диагональная матрица вида

$$E_\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Рассмотрим преобразование координат

$$X = Q\tilde{X} + X_0$$

с матрицей Q как в условии. Выпишем обратное преобразование:

$$X = Q'(X + X_0) = Q'X + Q'X_0$$

и обозначим

$$p = -Q'X_0.$$

Геометрически, вектор p — это радиус-вектор старого начала координат относительно новой координатной системы и соответствует параллельному переносу начала координат.

Рассмотрим уравнение поверхности в новой системе координат. По Лемме 1.4.1

$$\tilde{A} = Q'AQ, \quad \tilde{b} = Q'(AX_0 + b), \quad \tilde{c} = X_0'AX_0 + 2X_0'b + c.$$

Покажем, что $\tilde{A} = E_\lambda$. Это эквивалентно тому, что $Q'AQ = E_\lambda$, а это равенство в свою очередь эквивалентно равенству $AQ = QE_\lambda$.

Сравним QE_λ и AQ.

$$QE_\lambda = [\lambda_1 q_1, \ldots, \lambda_n q_n],$$
$$AQ = [Aq_1, \ldots, Aq_n] = [\lambda_1 q_1, \ldots, \lambda_n q_n].$$

Следовательно, $Q'AQ = E_\lambda$.

Покажем, что $\tilde{b} = -E_\lambda\, p + h$. Для этого, заметим, что из равенства $p = -Q'X_0$ следует, что $X_0 = -Q\, p$. Поэтому

$$\tilde{b} = Q'AX_0 + Q'b = -(Q'AQ)\, p + h = -E_\lambda\, p + h.$$

Покажем теперь, что специализируя вектор p так, как принято в условии,

$$\tilde{c} = c - p'E_\lambda\, p = c - \sum_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i\, {p_i}^2.$$

Действительно,

$$\tilde{c} = X_0'AX_0 + 2X_0'b + c = p'Q'AQ\, p - 2p'Q'b + c = p'E_\lambda\, p - 2p'h + c.$$

Заметим, теперь, что

$$p'E_\lambda p = \sum_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i\, {p_i}^2 = \sum_{\lambda_i \neq 0} \lambda_i \frac{h_i^2}{{\lambda_i}^2} = \sum_{\lambda_i \neq 0} \frac{h_i^2}{\lambda_i}$$

и

$$p'h = \sum_{p_i \neq 0} p^i h_i = \sum_{\lambda_i \neq 0} \frac{h_i}{\lambda_i} h_i = \sum_{\lambda_i \neq 0} \frac{h_i^2}{\lambda_i}.$$

Поэтому окончательно,

$$\tilde{c} = c - p'E_\lambda\, p.$$

■

Теперь мы можем доказать основную теорему этого раздела.

Теорема 1.4.1 *Уравнение любой поверхности 2-го порядка ортогональным преобразованием системы координат может быть приведено к одной из перечисленных канонических форм. Тем самым, всякая поверхность 2-го порядка является одной из перечисленных канонических поверхностей.*

Доказательство. Осуществим преобразование координат из Леммы 1.4.2 и приведем наше уравнение к виду

$$\tilde{X}'E_\lambda\tilde{X} + 2\tilde{X}'(-E_\lambda p + h) + c - p'E_\lambda p = 0. \qquad (*)$$

Далее возможны 2 варианта: либо уравнение содержит линейную часть, либо она отсутствует. Заметим, что *отсутствие линейной части уравнения означает, что начало координат размещается в центре симметрии поверхности.* Следовательно, эти варианты соответствуют поверхностям имеющим центр симметрии (не обязательно единственный) или не имеющим токового.

(A) Уравнение (*) не содержит линейной части. Рассмотрим соответствующие подслучаи.

- $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$. Тогда уравнение (*) в координатной записи примет вид

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \lambda_3\tilde{z}^2 + \underbrace{c - \lambda_1{p_1}^2 - \lambda_2{p_2}^2 - \lambda_3{p_3}^2}_{\tilde{c}} = 0$$

  Так как вектор p определен однозначно, то поверхность имеет единственный центр симметрии. Такие поверхности называются *центральными.*

  В зависимости от соотношения знаков, получаем таблицу:

λ_1	λ_2	λ_3	$\tilde{c}$	Поверхность
$+$	$+$	$+$	$+$	Мнимый эллипсоид
$+$	$+$	$+$	0	Мнимый конус
$+$	$+$	$+$	$-$	Эллипсоид
$+$	$+$	$-$	$+$	Двуполостный гиперболоид
$+$	$+$	$-$	0	Конус
$+$	$+$	$-$	$-$	Однополостный гиперболоид

  Следовательно, имеем шесть центральных поверхностей.

- $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad h_3 = 0$. Тогда уравнение (*) в координатной записи примет вид

$$\lambda_1\tilde{x}^2 + \lambda_2\tilde{y}^2 + \underbrace{c - \lambda_1{p_1}^2 - \lambda_2{p_2}^2}_{\tilde{c}} = 0$$

  В зависимости от соотношения знаков, получаем таблицу:

λ_1	λ_2	$\tilde{c}$	Поверхность
$+$	$+$	$+$	Мнимый эллиптический цилиндр
$+$	$+$	0	Пара мнимых непересекающихся плоскостей
$+$	$+$	$-$	Эллиптический цилиндр
$+$	$-$	$\pm$	Гиперболический цилиндр
$+$	$-$	0	Пара пересекающихся плоскостей

  Получили 5 поверхностей, имеющих прямую центров симметрии

- $\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad h_2 = h_3 = 0$. Тогда уравнение (*) в координатной записи примет вид
$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \underbrace{c - \lambda_1 {p_1}^2}_{\tilde{c}} = 0.$$

  В зависимости от соотношения знаков, получаем таблицу:

λ_1	$\tilde{c}$	Поверхность
$+$	$+$	Пара параллельных мнимых плоскостей
$+$	0	Пара совпадающих плоскостей
$+$	$-$	Пара параллельных действительных плоскостей

  Получили 3 поверхности, имеющие плоскость центров симметрии.

(А) Уравнение (*) содержит линейную часть. Рассмотрим соответствующие подслучаи.

- $\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0, \quad \tilde{b_3} \neq 0$. Тогда уравнение (*) в координатной записи примет вид
$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + 2h_3\tilde{z} + \underbrace{c - \lambda_1 {p_1}^2 - \lambda_2 {p_2}^2}_{\tilde{c}} = 0.$$

  Осуществим дополнительный параллельный перенос. Перепишем уравнение в виде
$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + 2h_3(\tilde{z} + \frac{\tilde{c}}{2h_3}) = 0.$$

  Выполним следующий параллельный перенос по z:
$$\begin{cases} \tilde{\tilde{x}} = \tilde{x}; \\ \tilde{\tilde{y}} = \tilde{y}; \\ \tilde{\tilde{z}} = \tilde{z} + \dfrac{\tilde{c}}{2h_3}. \end{cases}$$

  Относительно новой системы координат имеем такое уравнение:
$$\lambda_1 \tilde{\tilde{x}}^2 + \lambda_2 \tilde{\tilde{y}}^2 + 2h_3\tilde{\tilde{z}} = 0.$$

  В зависимости от соотношения знаков, получаем

λ_1	λ_2	Поверхность
$+$	$+$	Эллиптический параболоид
$+$	$-$	Гиперболический параболоид

  Нетрудно выписать "сквозное"преобразование, приводящее уравнение поверхности к такому виду. Оно имеет вид
$$\tilde{\tilde{X}} = Q'X + p + u,$$

где

$$u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{c - \lambda_1 {p_1}^2 - \lambda_2 {p_2}^2}{2h_3} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$p + u = \begin{pmatrix} \dfrac{h_1}{\lambda_1} \\ \dfrac{h_2}{\lambda_2} \\ \dfrac{c - \lambda_1 {p_1}^2 - \lambda_2 {p_2}^2}{2h_3} \end{pmatrix}.$$

- $\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad {h_2}^2 + {h_3}^2 \neq 0$. Тогда уравнение (*) в координатной записи примет вид

$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + 2h_2\tilde{y} + 2h_3\tilde{z} + \underbrace{c - \lambda_1 {p_1}^2}_{\tilde{c}} = 0.$$

Сделаем дополнительное ортогональное преобразование:

$$\begin{cases} \tilde{\tilde{x}} = \tilde{x}, \\ \tilde{\tilde{y}} = \dfrac{1}{\sqrt{{h_2}^2 + {h_3}^2}}(h_2\tilde{y} + h_3\tilde{z}), \\ \tilde{\tilde{z}} = \dfrac{1}{\sqrt{{h_2}^2 + {h_3}^2}}(-h_3\tilde{y} + h_2\tilde{z}). \end{cases}$$

Или в матричной записи

$$\tilde{\tilde{X}} = S'\tilde{X},$$

где

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{h_2}{\sqrt{{h_2}^2 + {h_3}^2}} & -\dfrac{h_3}{\sqrt{{h_2}^2 + {h_3}^2}} \\ 0 & \dfrac{h_3}{\sqrt{{h_2}^2 + {h_3}^2}} & \dfrac{h_2}{\sqrt{{h_2}^2 + {h_3}^2}} \end{pmatrix}.$$

Тогда "сквозное "преобразование получит выражение

$$\tilde{\tilde{X}} = S'(Q'X + p) = (QS)'X + p$$

так как $S'p = p$.

Это преобразование приводит уравнение к такому виду:

$$\lambda_1 \tilde{\tilde{x}}^2 + 2\sqrt{{h_2}^2 + {h_3}^2}\,\tilde{\tilde{y}} + c - \lambda_1 {p_1}^2 = 0.$$

Сделаем следующий параллельный перенос:

$$\begin{cases} \hat{x} = \tilde{\tilde{x}}, \\ \hat{y} = \tilde{\tilde{y}} + \dfrac{c - \lambda_1 {p_1}^2}{\sqrt{{h_2}^2 + {h_3}^2}} \\ \hat{z} = \tilde{\tilde{z}}. \end{cases}$$

Получаем

$$\lambda_1 \hat{x}^2 + 2\sqrt{{h_2}^2 + {h_3}^2}\,\hat{y} = 0,$$

Это снова параболический цилиндр.

Окончательное преобразование координат, приводящее к каноническому виду уравнение этой поверхности запишется в виде

$$\hat{X} = (QS)'X + w,$$

где вектор параллельного переноса имеет вид

$$w = \begin{pmatrix} \dfrac{h_1}{\lambda_1} \\ \dfrac{c - \lambda_1 {p_1}^2}{\sqrt{{h_2}^2 + {h_3}^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$$

■

Доказательство теоремы является конструктивным. Оно содержит четкий алгоритм для нахождения канонического уравнения и соответствующей канонической системы координат. Итак, следует:

1. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы A;
2. Составить матрицу $Q = [q_1, \ldots, q_n]$, столбцы которой состоят из собственных векторов матрицы A;
3. Найти вектор $h = Q'b$;
4. Сформировать вектор p;
5. Выполнить преобразование $\tilde{X} = Q'X + p$, приводящее уравнение поверхности к виду
$$\tilde{X}'E_\lambda \tilde{X} + 2\tilde{X}'(-E_\lambda p + h) + c - p'E_\lambda p = 0,$$
который с точностью до нормировки будет каноническим для поверхностей, имеющих хотя бы один центр симметрии;
6. Если поверхность не имеет центра симметрии, то выполнить дополнительные преобразования.

Для иллюстрации, рассмотрим пример.

Пример 1.4.1 *Привести к каноническому виду и найти соответствующее преобразование координат для кривой 2-го порядка*

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0.$$

Решение. Сформируем матричные компоненты уравнения:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \end{pmatrix}, \quad c = -2.$$

Составим характеристический многочлен $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda$ и найдем его корни $\lambda_1 = 13, \quad \lambda_2 = 0$. Найдем собственные векторы матрицы A:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Пронормируем их и составим матрицу Q:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем $h = Q'b$:

$$h = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} -13/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Сформируем вектор p:

$$p = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2\sqrt{13}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем каноническое уравнение:

$$13\tilde{x}^2 + (-2) - 13\left(\frac{1}{2\sqrt{13}}\right)^2 = 13\tilde{x}^2 - 9/4 = 0 \quad \sim \quad \tilde{x} = \pm\frac{3}{2\sqrt{13}}.$$

Преобразование координат

$$\begin{cases} \tilde{x} = \dfrac{2x - 3y - 1/2}{\sqrt{13}}, \\ \tilde{y} = \dfrac{3x + 2y}{\sqrt{13}}. \end{cases}$$

Это пара параллельных прямых, имеющих в старой системе координат уравнения $2x - 3y + 1 = 0, \quad 2x - 3y - 2 = 0$.

1.5 Инварианты уравнения поверхности 2-го порядка.

Определение 1.5.1 *Функции от коэффициентов уравнения поверхности 2-го порядка, значения которых не изменяются при ортогональной замене координат называются* ***инвариантами*** *этого уравнения относительно ортогональных преобразований.*

Теорема 1.5.1 *Пусть $X'AX+2X'b+c=0$ — уравнение поверхности 2 - го порядка. Тогда все коэффициенты характеристического многочлена матрицы A инвариантны относительно ортогональных преобразований координат.*

Доказательство. В результате ортогонального преобразования, матрица квадратичной части уравнения преобразуется по правилу

$$\tilde{A} = Q'AQ,$$

где Q – ортогональная матрица преобразования координат. Заметим, что из ортогональности матрицы Q следует

$$Q'Q = QQ' = E, \quad |\det Q| = 1.$$

Тогда,

$$\begin{aligned} \chi_{\tilde{A}}(\lambda) = \ & \det(Q'AQ - \lambda E) = \det(Q'AQ - \lambda Q'Q) = \det[Q'(A-\lambda E)Q] = \\ & \det Q' \det(A-\lambda E)\det Q = (\det Q)^2 \det(A-\lambda E) = \chi_A(\lambda). \end{aligned}$$

Теперь достаточно заметить, что два многочлена тождественны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты.

■

Следствие 1.5.1 *Все симметрические функции собственных значений матрицы A инвариантны относительно ортогональных преобразований координат.*

Доказательство состоит в применении теоремы Виета для характеристического многочлена.

Выпишем найденные инварианты для кривой ($n=2$) и поверхности ($n=3$) второго порядка.

→ • $n=2$

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + \det A.$$

Следовательно, инвариантами уравнения кривой 2-го порядка являются

$$\begin{aligned} I_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} \overset{def}{=} \Delta A, \\ I_2 &= \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = \det A \end{aligned}$$

→ • $n=3$

$$\begin{aligned} -\chi_A(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})\lambda^2 + \\ + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \right)\lambda - \det A \end{aligned}$$

Следовательно, инвариантами уравнения поверхности 2-го порядка являются

$$\begin{cases} I_1 = \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = \Delta A, \\ I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \\ I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A. \end{cases}$$

Имеется еще один часто используемый инвариант, та называемый *большой определитель* или *определитель расширенной матрицы* уравнения поверхности 2-го порядка.

Теорема 1.5.2 *Для уравнения поверхности второго порядка*

$$X'AX + 2X'b + c = 0$$

рассмотрим матрицу

$$B = \begin{bmatrix} A & b \\ b' & c \end{bmatrix}.$$

Тогда $J_B = \det B$ *является инвариантом ортогонального преобразования координат.*

Доказательство. Доказательство разобьем на два отдельных рассмотрения, для случая ортогонального преобразования без параллельного переноса и на случай чистого параллельного переноса.

(a) Рассмотрим преобразование $X = Q\tilde{X}$. Тогда, как мы знаем,

$$\tilde{A} = Q'AQ, \quad \tilde{b} = Q'b, \quad \tilde{c} = c$$

Составим матрицу $\tilde{B}$ и заметим, что

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} Q'AQ & Q'b \\ (Q'b)' & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & b \\ b' & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где 0 означает нулевую строку (столбец). Так как

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

с очевидностью является ортогональной матрицей, то $|\det \tilde{Q}| = 1$ и мы получаем

$$\det \tilde{B} = \det B.$$

(b)Рассмотрим чистый параллельный перенос

$$X = \tilde{X} + X_0.$$

Тогда, как известно,

$$\tilde{A} = A, \quad \tilde{b} = AX_0 + b, \quad \tilde{c} = X_0{}'AX_0 + 2X_0 b + c.$$

Следовательно,

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} A & AX_0 + b \\ X_0{}'A + b' & X_0{}'AX_0 + 2X_0{}'b + c \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $X_0{}'A$ есть строка равная сумме строк матрицы A, умноженных соответственно на $x_0{}^1, \ldots, x_0{}^n$. Проиллюстрируем это на примере матрицы 2×2:

$$\begin{aligned} (x_0, y_0) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} &= (x_0 a_{11} + y_0 a_{12}, x_0 a_{12} + y_0 a_{22}) = \\ &= x_0(a_{11}, a_{12}) + y_0(a_{12}, a_{22}). \end{aligned}$$

Следовательно, взятие линейной комбинации первых n строк с коэффициентами

$$x_0{}^1, \dots, x_0{}^n$$

эквивалентно умножению слева на X_0' подматрицы

$$\left[\begin{array}{cc} A & AX_0 + b \end{array} \right]$$

в матрице $\tilde{B}$, составленной из ее первых n строк. Результатом этой операции является строка

$$X_0' \left[\begin{array}{cc} A & AX_0 + b \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} X_0'A & X_0'AX_0 + X_0'b \end{array} \right].$$

Вычтем ее из последней строки (напомним, что $X_0'b \equiv b'X_0$). При этом определитель матрицы $\tilde{B}$ не изменится. Таким образом,

$$\tilde{B} \sim \left[\begin{array}{cc} A & AX_0 + b \\ b' & X_0{}'b + c \end{array} \right].$$

Заметим теперь, что AX_0 есть столбец, равный сумме столбцов матрицы A, умноженных соответственно на $x_0{}^1, \dots, x_0{}^n$. Проиллюстрируем это снова на примере матрицы 2×2:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

Следовательно, взятие линейной комбинации первых n столбцов с коэффициентами $x_0{}^1, \dots, x_0{}^n$ эквивалентно умножению справа на X_0 подматрицы

$$\left[\begin{array}{c} A \\ b' \end{array} \right]$$

в матрице $\sim \tilde{B}$, составленной из ее первых n столбцов. Результатом этой операции является столбец

$$\left[\begin{array}{c} A \\ b' \end{array} \right] X_0 = \left[\begin{array}{c} AX_0 \\ b'X_0 \end{array} \right].$$

Вычтем его из последнего столбца (и снова воспользуемся тождеством $X_0'b \equiv b'X_0$). При этом определитель матрицы $\tilde{B}$ не изменится. Таким образом,

$$\tilde{B} \sim \left[\begin{array}{cc} A & b \\ b' & c \end{array} \right] = B.$$

Следовательно, $J_B = \det B$ является инвариантом.

■

1.5.1 Применение инвариантов для исследования кривой 2-го порядка.

Сравнивая инварианты с пунктами доказательства классификационной теоремы легко заметить, что *кривая 2-го порядка является центральной тогда и только тогда, когда $I_2 \neq 0$ и нецентральной, если $I_2 = 0$.*

Предложение 1.5.1 *Каноническое уравнение центральной кривой 2-го порядка можно записать в виде*

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{J_B}{I_2} = 0.$$

При этом

- *если* $I_2 > 0$, *то*
  - *при* $J_B \cdot I_1 > 0$ *кривая является мнимым эллипсом;*
  - *при* $J_B = 0$ *кривая является парой пересекающихся мнимых прямых;*
  - *при* $J_B \cdot I_1 < 0$ *кривая является эллипсом.*
- *если* $I_2 < 0$, *то*
  - *при* $J_B \neq 0$ *кривая является гиперболой;*
  - *при* $J_B = 0$ *кривая является парой пересекающихся прямых.*

Доказательство. Кривая является центральной тогда и только тогда, когда

$$\det A \neq 0 \sim \lambda_1\lambda_2 \neq 0.$$

Ортогональным преобразованием ее уравнение приводится к виду

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0.$$

Расширенная матрица

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Отсюда $J_B = \lambda_1\lambda_2 c = I_2 c$, а значит $c = \dfrac{J_B}{I_2}$ и каноническое уравнение кривой примет вид

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{J_B}{I_2} = 0.$$

- $I_2 > 0$. Из условия $I_2 > 0$ следует, что λ_1 и λ_2 одного знака. Но тогда то знак λ_1и λ_2 определяется знаком $I_1 = \lambda_1 + \lambda_2$. Поэтому, если
  - $J_B \cdot I_1 > 0$ то знак свободного члена в каноническом уравнении совпадает со знаком коэффициентов квадратичной части уравнения, в значит кривая является мнимым эллипсом;
  - $J_B \cdot I_1 < 0$, то знак свободного члена в каноническом уравнении противоположен знаку коэффициентов квадратичной части уравнения, в значит кривая является действительным эллипсом.
  - $J_B = 0$, то из одинаковости знаков λ_1 и λ_2 следует, что наша кривая является парой пересекающихся мнимых прямых.
- $I_2 < 0$. Из условия $I_2 < 0$ следует, что λ_1 и λ_2 разных знаков. Поэтому, если

– $J_B \neq 0$, то наше уравнение описывает гиперболу;

– $J_B = 0$, то кривая является парой пересекающихся действительных прямых.

■

Предложение 1.5.2 *Каноническое уравнение параболы можно записать в виде*

$$\lambda_2 y^2 + 2\sqrt{-\frac{J_B}{I_1}}\,x = 0.$$

Доказательство. Парабола является нецентральной кривой, следовательно одно из собственных значений, скажем, $\lambda_1 = 0$. На определенном этапе приведения уравнения кривой к каноническому вид мы получим

$$\lambda_2 y^2 + 2h_1 x = 0, \quad (h_1 \neq 0).$$

Выпишем расширенную матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & h_1 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ h_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда $J_B = -\lambda_2 {h_1}^2 = -I_1\,{h_1}^2$, откуда находим $h_1 = \sqrt{-\frac{J_B}{I_1}}$. ■

Парабола является единственной нераспадающейся нецентральной кривой 2-го порядка. Все остальные нецентральные кривые распадаются в пары прямых. Для таких кривых на этапе приведения к каноническому виду мы имели

$$\lambda_2 y^2 + c = 0.$$

Расширенная матрица

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

имеет очевидно нулевой определитель, то есть $J_B = 0$. Сравнивая с рассмотрением центральных кривых, заключаем:

Предложение 1.5.3 *Кривая второго порядка является распадающейся тогда и только тогда, когда $J_B = 0$.*

Результаты рассмотрений можно организовать в таблицу.

		Кривая
$I_2 > 0$	$I_1 \cdot J_B > 0$	Мнимый эллипс
$I_2 > 0$	$I_1 \cdot J_B < 0$	Действительный эллипс
$I_2 > 0$	$J_B = 0$	Пара пересекающихся мнимых прямых
$I_2 < 0$	$J_B \neq 0$	Гипербола
$I_2 < 0$	$J_B = 0$	Пара пересекающихся прямых
$I_2 = 0$	$J_B \neq 0, I_1 \neq 0$	Парабола
$I_2 = 0$	$J_B = 0, I_1 \neq 0$	Пара параллельных (слившихся) прямых

1.5.2 Применение инвариантов для исследования поверхности 2-го порядка.

Для поверхности 2-го порядка набор инвариантов состоит из

$$\begin{aligned}&I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3,\\ &I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3,\\ &I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3,\\ &J_B = \det B.\end{aligned}$$

Сравнивая инварианты с пунктами доказательства классификационной теоремы легко заметить, что *поверхность 2-го порядка является центральной тогда и только тогда, когда* $I_3 \neq 0$ *и нецентральной, если* $I_3 = 0$. Для поверхностей мы не сможем получить такого подробного описания их через инварианты, как это было сделано для кривых. Но тем не менее с их помощью можно классифицировать поверхности, хотя и более грубо[1].

Предложение 1.5.4 *Каноническое уравнение центральной поверхности 2-го порядка можно записать в виде*

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{J_B}{I_3} = 0.$$

При этом

- *если* $J_B \neq 0$, *то поверхность принадлежит классу эллипсоидов или гиперболоидов;*
- *если* $J_B = 0$, *то поверхность принадлежит классу конусов.*

Доказательство. Поверхность является центральной тогда и только тогда, когда $\det A \neq 0 \sim \lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$. Ортогональным преобразованием ее уравнение приводится к виду

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + c = 0.$$

Расширенная матрица

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Отсюда $J_B = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 c = I_3 c$, а значит $c = \dfrac{J_B}{I_3}$ и каноническое уравнение кривой примет вид

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \frac{J_B}{I_3} = 0.$$

[1]Возможно дать и более тонкое описание поверхностей через инварианты, но это потребует неоправданно долгого анализа (см. Г.Корн и Т.Корн, Справочник по математике для инженеров м научных работников, 1973).

Если $J_B \neq 0$, то в зависимости от соотношений знаков λ_i и знака $\frac{J_B}{I_3}$ получим поверхность из класса эллипсоидов или гиперболоидов. Если же $J_B = 0$, то получим поверхность из класса конусов.

■

Нецентральные поверхности ($I_3 = 0$) могут быть 2-х типов: с одним или с двумя нулевыми собственными значениями. Первый тип характеризуется инвариантом $I_2 \neq 0$, а второй – сочетанием инвариантов $I_2 = 0, I_1 \neq 0$.

Предложение 1.5.5 *Каноническое уравнение нецентральной поверхности 2-го порядка с инвариантом $I_2 \neq 0$ может быть записано в виде*

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2\sqrt{-\frac{J_B}{I_2}}\, z = 0.$$

При этом

- *если $J_B \neq 0$, то это поверхность из класса параболоидов;*
- *если $J_B = 0$, то это поверхность из класса цилиндров над центральной кривой 2-го порядка;*

Доказательство. Уравнение поверхности с одним нулевым собственным значением в процессе преобразования приводится к промежуточной форме вида

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + 2h_3 z + c = 0.$$

Выпишем расширенную матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 \\ 0 & 0 & h_3 & c \end{pmatrix}.$$

Тогда $J_B = -\lambda_1 \lambda_2 {h_3}^2 = -I_2\, {h_3}^2$.

Если $J_B \neq 0$, то находим $h_3 = \sqrt{-\dfrac{J_B}{I_2}} \neq 0$, а значит наша поверхность из класса параболоидов.

Если же $J_B = 0$, то значит $h_3 = 0$ и наша поверхность принадлежит классу цилиндров над центральной кривой 2-го порядка, так как $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.

■

Предложение 1.5.6 *Для нецентральной поверхности 2-го порядка с инвариантами $I_2 = 0, I_1 \neq 0$, инвариант $J_B = 0$ и поверхность является цилиндром над нецентральной кривой 2-го порядка.*

Доказательство. Уравнение поверхности с двумя нулевыми собственными значениями в процессе преобразования приводится к промежуточной форме вида

$$\lambda_1 x^2 + 2h_2 y + 2h_3 z + c = 0.$$

Выпишем расширенную матрицу:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_2 \\ 0 & 0 & 0 & h_3 \\ 0 & h_2 & h_3 & c \end{pmatrix}.$$

Тогда $J_B = 0$ и у нас нет возможности уточнить значения параметров h_1, h_2 и c через инварианты. Как известно из доказательства теоремы классификации, в этом случае наша поверхность является либо параболическим цилиндром, либо парами параллельных или слившихся плоскостей. То есть, цилиндром над нецентральной кривой 2-го порядка.

■

Определение 1.5.2 *Поверхность 2-го порядка называется невырожденной, если она не является конусом или цилиндром 2-го порядка.*

Анализируя рассмотрения данного раздела, заключаем:

Предложение 1.5.7 *Поверхность 2-го порядка является невырожденной тогда и только тогда, когда $J_B \neq 0$ и вырождается в цилиндр или конус тогда и только тогда, когда $J_B = 0$.*

1.6 Взаимное расположение прямой и поверхности 2-го порядка.

1.6.1 Классификация направлений.

Пусть $\Phi : X'AX + 2X'b + c = 0$ — поверхность 2-го порядка и $l : \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$. Для дальнейших рассмотрений нам будет удобно переписать уравнение прямой так же в матричной форме. Установим соответствия:

$$\vec{r} = \{x, y, z\} \mapsto X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \vec{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\} \mapsto X_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{v} = \{v_x, v_y, v_z\} \mapsto V = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}.$$

Тогда в матричной форме уравнение прямой примет вид $l : \quad X = X_0 + Vt$ — прямая, проходящая через точку X_0 в направлении вектора V.

Обозначим, так же, через $\Phi(X)$ левую часть уравнения поверхности, то есть положим

$$\Phi(X) = X'AX + 2X'b + c.$$

Прежде всего, заметим, что *прямая l может иметь с поверхностью Φ не более двух общих точек.* Действительно, подставим координаты точек, лежащих на прямой в уравнение поверхности:

$$\begin{aligned}&(X_0+Vt)'A(X_0+Vt)+2(X_0+tV)'b+c=\\&X_0{}'AX_0+2X_0{}'AVt+(V'AV)t^2+2X_0b+2V'bt+c=\\&(V'AV)t^2+2V'(AX_0+b)t+\Phi(X_0)\end{aligned}\tag{1}$$

Получили уравнение 2-го порядка для нахождения значений параметра t, при которых прямая имеет общие точки с поверхностью. Ясно, что их не более 2-х.

Пусть X_0 произвольная **фиксированная** точка пространства. Будем менять направление прямой l и отмечать всевозможные случаи ее взаимного расположения с поверхностью 2-го порядка. В соответствии с уравнением (1), получаем 3 типа направлений, определяемых матрицей A.

- *Направление V называется особым, если $AV=0$.*

  Заметим, что особое направление – это в точности направление собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению $\lambda=0$. Если V — особое направление, то для прямой l уравнение (1) принимает вид:

  $$2V'b\,t+\Phi(x_0)=0$$

  Для прямой особого направления очевидно возможны 3 варианта.

  – Если $V'b\neq 0$, то прямая имеет с поверхностью единственную общую точку.
  – Если $V'b=0, \Phi(X_0)\neq 0$, то прямая и поверхность не имеет общих точек.
  – Если $V'b=0, \Phi(X_0)=0$, то прямая лежит на поверхности.

- *Направление V называется асимптотическим, если*

  $$\begin{cases}AV\neq 0\\ V'AV=0\end{cases}$$

  Для прямой асимптотического направления так же возможны 3 варианта.

  – Если $V'(Ax_0+b)\neq 0$, то прямая имеет с поверхностью единственную общую точку.
  – Если $V'(Ax_0+b)=0, \Phi(X_0)\neq 0$ то прямая и поверхность не имеют общих точек.
  – Если $V'(Ax_0+b)=0, \Phi(X_0)=0$, то прямая лежит на поверхности.

- *Направление V называется хордальным, если $V'AV\neq 0$.*

  Для прямой хордального направления уравнение (1) является квадратным и, следовательно, возможны 3 варианта.

  – Корни вещественны и различны. Тогда прямая имеет с поверхностью две различные общие точки.
  – Корни вещественны и совпадают. Тогда прямая имеет с поверхностью одну, но "двойную общую точку. Такие направления называются *касательными*, а соответствующая прямая – касательной к поверхности 2-го порядка.
  – Корни различны, но комплексны. Прямые этого направления не имеют действительных общих точек с поверхностью.

1.6.2 Диаметры (диаметральные плоскости) поверхности 2-го порядка.

Определение 1.6.1 *Пусть V — хордальное направление.* Диаметром*, отвечающим направлению V, называется геометрическое место точек середин хорд, параллельных направлению V.*

Предложение 1.6.1 *Пусть $D(V)$ — диаметр, отвечающий направлению V для поверхности $X'AX + 2X'b + c$. Тогда его уравнение имеет вид:*

$$X'AV + V'b = 0.$$

Доказательство. Зафиксируем хордальное направление V. Тогда уравнение $X = X_0 + Vt$ задает семейство параллельных прямых, каждая из которых определяется положением начальной точки X_0. Причем на каждой такой прямой эта начальная точка может быть выбрана произвольно. Пусть P и Q — точки пересечения прямой с поверхностью Φ. На каждой прямой хордального направления поместим начальную точку в середину отрезка PQ.

Пусть точке Q соответствует значение параметра t_P, а точке P — значение параметра t_Q. Так как X_0 — середина отрезка PQ, то $t_P = -t_Q$. То есть $t_P + t_Q = 0$. Но t_P и t_Q —корни уравнения (1).Следовательно, по если X_0 —середина хорды , то из теореме Виета следует $V'AX_0 + V'b = 0$. Значит середины всех хорд лежит в плоскости $X'AV + V'b = 0$.

Верно и обратное. Если начальная точка прямой лежит в плоскости $X'AV+V'b = 0$, то уравнение (1) не содержит линейной части, а значит корни уравнения (если существуют) равны и противоположны по знаку.

■

Замечания.

1. Если прямая хордального направления не имеет общих точек с поверхностью, то решения уравнения (1) комплексны и комплексно сопряжены. Но тогда $t_P + t_Q$ — вещественно. Следовательно, имеет смысл говорить о *вещественной* середине *мнимой* хорды поверхности 2-го порядка. Поэтому в качестве диаметра естественно принимать не часть плоскости $X'AV + V'b = 0$, отвечающую вещественным хордам, а всю плоскость.

2. Прямые асимптотического направления не образуют хорд с поверхностью 2-го порядка, но для них тем не менее имеет смысл плоскость $X'AV+V'b = 0$, которая принимается в качестве диаметра, отвечающего асимптотическому направлению. Таким образом, *только для прямых особого направления понятие диаметра не определено.*

3. Для кривых определяется понятие сопряженных диаметров. А именно, диаметр $D'(V)$ называется *сопряженным* к диметру $D(V)$, если $D'(V)$ отвечает хордам, параллельным диаметру $D(V)$.

Определение 1.6.2 *Главным диаметром $D(V)$ поверхности 2-го порядка называется диаметр , перпендикулярный своим хордам.*

Из определения диаметра следует, что *любой главный диаметр является гиперплоскостью симметрии поверхности 2-го порядка.*

Предложение 1.6.2 *Диаметр* $D(V): X'AV + V'b = 0$ — *главный для поверхности*

$$X'AX + 2X'b + c$$

тогда и только тогда, когда $AV = \lambda V$ $(\lambda \neq 0)$, *то есть* V — *собственный вектор матрицы* A, *отвечающий ненулевому собственному значению.*

Доказательство.

Если $D(V)$ — диаметр, то его вектор нормали $N = A\ V$, а $D(V) \perp V$ тогда и только тогда, когда $N \| V$, то есть, когда $AV = \lambda V$.

■

Следствие 1.6.1 *Уравнение главного диаметра имеет вид:*

$$X'V + \frac{b'V}{\lambda} = 0$$

Пример 1.6.1 *Написать уравнения главных диаметров кривой*

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80.$$

Решение. Выпишем матричные элементы данного уравнения:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} -16 \\ -28 \end{bmatrix}, \qquad c = 80.$$

Выпишем характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 13\lambda + 36, \quad \lambda_1 = 4,\ \lambda_2 = 9.$$

Найдем собственные векторы:

$$V_1 = \{2, -1\},$$
$$V_2 = \{1, 2\}$$

Найдем, далее

$$V_1'b = (2, -1)\begin{pmatrix} -16 \\ -28 \end{pmatrix} = 32 + 28 = 60.$$

Отсюда,

$$D_1: \qquad 2x - y + \frac{60}{4} = 0 \ \sim\ 2x - y + 15.$$

Аналогично,

$$D_2: \qquad x + 2y - 8 = 0.$$

1.6.3 Плоскости симметрии общей поверхности 2-го порядка.

Как отмечалось, главные диаметры являются плоскостями симметрии поверхности 2-го порядка. Однако ними не исчерпываются все плоскости симметрии.

Предложение 1.6.3 *Пусть $X'AX + 2X'b + c$ — поверхность 2-го порядка, не являющаяся парой совпадающих плоскостей. Плоскость*

$$\Pi : X'V + D = 0$$

с вектором нормали V и свободным членом D является плоскостью симметрии поверхности тогда и только тогда, когда V является собственным вектором матрицы A:

$$AV = \lambda V.$$

Причем,

- *если $\lambda \neq 0$, то плоскость симметрии определяется однозначно и совпадает с главным диаметром;*
- *если $\lambda = 0$, то*
  - *если $V'b \neq 0$, то не существуют плоскости симметрии, с вектором нормали V;*
  - *если $V'b = 0$, то любая плоскость с вектором V является плоскостью симметрии.*

Доказательство.

Пусть π искомая плоскость симметрии, заданная уравнением $V'X + D = 0$. Введем в рассмотрение единичный вектор $\nu = V/|V|$ и запишем уравнение искомой плоскости в нормальной форме

$$\nu' X + d,$$

где $d = D/|V|$.

Пусть точка X_0 принадлежит поверхности, то есть ${X_0}'AX_0 + 2{X_0}'b + c = 0$. Пусть X_1 — точка симметричная X_0 относительно π. Тогда

$$X_1 = X_0 - 2h\nu,$$

где $h = {X_0}'\nu + d$ — отклонение точки X_0 от плоскости π. Если π плоскость симметрии, то для любой точки X_0 на поверхности, точка X_1 так же должна принадлежать поверхности. Это значит, что для любой точки X_0 на поверхности, ${X_1}'AX_1 + 2{X_1}'b + c \equiv 0$. Распишем:

$$\begin{aligned}
&(X_0 - 2h\nu)'A(X_0 - 2h\nu) + 2(X_0 - 2h\nu)'b + c = \\
&{X_0}'AX_0 - 4h\nu' AX_0 + 4h^2\nu' A\nu + 2{X_0}'b - 4h\nu' b + c = \\
&4h^2\nu' A\nu - 4h(\nu' AX_0 + \nu' b) + \underbrace{{X_0}'AX_0 + 2{X_0}'b + c}_{=0} = \\
&4h(\nu' A\nu\, h - (\nu' b + \nu' AX_0)) \equiv 0
\end{aligned}$$

Так как поверхность не является дважды покрытой плоскостью, то $h \not\equiv 0$, а значит

$$\nu' A\nu\, h - (\nu' b + \nu' AX_0) = 0.$$

Положим $\lambda = \nu' A\nu$ подставим $h = {X_0}'\nu + d$. Тогда имеем

$$\lambda(\nu' X_0 + d) - (\nu' AX_0 + \nu' b) = 0$$

или

$$X_0{}'(A\nu - \lambda\nu) + \nu' b - \lambda\nu = 0.$$

Так как поверхность не является плоскостью, то следовательно,

$$\begin{cases} A\nu = \lambda\nu \\ \nu' b = \lambda d \end{cases}$$

Если $\lambda \neq 0$, то $d = \dfrac{\nu' b}{\lambda}$, и это главный диаметр.

Пусть $\lambda = 0$. Тогда если $\nu' b = 0$, то любая плоскость с вектором ν является плоскостью симметрии, а если $\nu' b \neq 0$, то не существует плоскости симметрии с вектором нормали ν.

■

1.6.4 Центр симметрии поверхности

Предложение 1.6.4 *Точка X_0 является центром симметрии поверхности $X'AX + 2X'b + c = 0$ тогда и только тогда, когда*

$$AX_0 + b = 0.$$

Количество центров симметрии определяется размерностью пространства решений полученной системы уравнений.

Доказательство. Рассмотрим еще раз уравнение (1):

$$(V'AV)t^2 + 2(X_0{}'AV + V'b)t + \Phi(X_0) = 0.$$

Очевидно, что если $X_0{}'AV + V'b = 0$ для любого направления V, то X_0 — центр симметрии поверхности, и обратно. Следовательно X_0 — центр симметрии тогда и только тогда, когда $V'(AX_0 + b) = 0$ для любого V. Значит точка X_0 — центр симметрии тогда и только тогда, когда

$$AX_0 + b = 0.$$

Количество центров симметрии определяется размерностью пространства решений полученной системы уравнений.

■

1.6.5 Касательная плоскость общей поверхности 2-го порядка.

Предложение 1.6.5 *Пусть точка X_0 принадлежит поверхности*

$$X'AX + 2X'b + c = 0$$

и не является центром ее симметрии. Тогда в точке X_0 существует и единственна касательная плоскость, уравнение которой может быть записано в виде

$$X'AX_0 + (X + X_0)' + c = 0.$$

Доказательство. Пусть X_0 принадлежит поверхности и не является центром симметрии, то есть $\Phi(X_0) = 0,\ AX_0 + b \neq 0$. Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$t\big[V'AVt + 2V'(AX_0 + b)\big] = 0.$$

Одному корню $t = 0$ соответствует точка X_0. Этот корень будет двойной тогда и только тогда, когда

$$V'(AX_0 + b) = 0.$$

То есть множество касательных направлений заполняют плоскость с вектором нормали $AX_0 + b$. Так как X_0 не является центром симметрии, то эта плоскость единственна и называется *касательной плоскостью поверхности*. Ее уравнение имеет вид:

$$(X - X_0)'(AX_0 + b) = 0.$$

Упростим его:

$$(X - X_0)'(AX_0 + b) = X'AX_0 + X'b - (\underbrace{X_0'AX_0 + X_0'b}_{=-X_0'b-c}) =$$

$$X'AX_0 + (X + X_0)' + c = 0.$$

∎

1.6.6 Прямые на общей поверхности 2-го порядка.

Сделаем последнее замечание в анализе уравнения (1) и сформулируем условие принадлежности прямой поверхности 2-го порядка, заданной общим уравнением.

Предложение 1.6.6 *Прямая $l : X_0 + Vt$ лежит на поверхности*

$$X'AX + 2X'b + c = 0$$

тогда и только тогда, когда

1. $X_0'AX_0 + 2X_0'b + c = 0$;
2. $V'(AX_0 + b) = 0$;
3. $V'AV = 0$.

Для доказательства достаточно заметить, что выписанные условия обращают в нуль уравнение (1) тождественно по t. Заметим, что множество всех асимптотических направлений заполняет конус $V'AV = 0$.

1.7 Аффинное преобразование и аффинная классификация поверхностей 2-го порядка

Определение 1.7.1 *Пусть $\mathcal{A} = (A, L)$ аффинное пространство. Преобразование $F : A^n \to A^n$ точечного пространства A в себя называется аффинным, если оно сохраняет линейные соотношения между векторами в ассоциированном линейном пространстве и не добавляет новых.*

Формально, определение аффинного преобразования состоит в следующем. Пусть $A_1, \dots, A_m$ какой-либо набор точек в A^n. Каждая пара из них, скажем A_1A_2 определяет соответствующий вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ в L^n. Разбиение рассматриваемое множество на пары задает соответствующую систему векторов в L^n. Обозначим их

$$\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_3A_4}, \dots, \overrightarrow{A_{m-1}A_m}.$$

Положим $A'_i = F(A_i)$. Преобразование F будет аффинным, если из

$$\lambda\overrightarrow{A_1A_2} + \mu\overrightarrow{A_3A_4} + \dots + h\overrightarrow{A_{m-1}A_m} = \vec{0}$$

следует

$$\lambda\overrightarrow{A'_1A'_2} + \mu\overrightarrow{A'_3A'_4} + \dots + h\overrightarrow{A'_{m-1}A'_m} = \vec{0}$$

и наоборот. Заметим, что коэффициенты $\lambda, \mu, \dots, h$ в этих линейных комбинациях одни и те же.

Непосредственно из определения следует, что аффинное преобразование переводит прямую в прямую, плоскость в плоскость.

1.7.1 Аналитическое задание аффинного преобразования.

Аналитическое задание аффинного преобразования сходно с заданием движения.

Предложение 1.7.1 *Если $F : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ — аффинное преобразование, то относительно фиксированной аффинной системы координат преобразование F задается линейными соотношениями*

$$\tilde{X} = QX + X_0, \ \det Q \neq 0,$$

где $\tilde{X} = F(X)$ координаты образа произвольной точки X, а $X_0 = F(0)$ координаты образа начала координат.

Доказательство. Пусть $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ некоторая фиксированная аффинная система координат в $\mathcal{A}^n$. Из сохранения линейной зависимости/независимости следует, что аффинное преобразование переводит базис $\mathcal{A}^n$ в базис $\mathcal{A}^n$. Положим $\vec{f}_i = F(\vec{e}_i)$, $\tilde{O} = F(O)$. Тогда $(\tilde{O}, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ определит новую аффинную систему координат в $\mathcal{A}^n$.

Пусть $X = X^1\vec{e}_1 + \dots + X^n\vec{e}_n$ радиус-вектор произвольной точки $\mathcal{A}^n$ в системе координат $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Из сохранения линейных соотношений следует, что

$$F(X) = X^1F(\vec{e}_1) + \dots + X^nF(\vec{e}_n) = X^1\vec{f}_1 + \dots + X^n\vec{f}_n.$$

Обозначим через $\tilde{X}$ координаты точки $F(X)$, а через X_0 координаты точки $\tilde{O}$ в системе координат $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Тогда

$$\mathbf{e}\tilde{X} = \mathbf{e}X_0 + \mathbf{f}X = \mathbf{e}X_0 + \mathbf{e}QX = \mathbf{e}\big(X_0 + QX\big),$$

где Q **невырожденная** матрица преобразования базисов. Следовательно, $\tilde{X} = X_0 + QX$.

■

Следствие 1.7.1 *При аффинном преобразовании кривая поверхность 2-го порядка переходит в поверхность 2-го порядка.*

Примеры аффинных преобразований.

1. Любое движение характеризуется условием $|\det Q| = 1$ и поэтому является аффинным преобразованием.

2. Гомотетия
$$Q = kE, \quad X_0 = 0, \quad k \neq 0,$$
где k — коэффициент гомотетии.

3. Растяжение/сжатие:
$$Q = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}, \quad k_i \neq 0.$$

Две фигуры Φ_1 и Φ_2 называются *аффинно эквивалентными*, если существует аффинное преобразование F, такое что $F(\Phi_1) = \Phi_2$.

Предложение 1.7.2 *Все треугольники на плоскости аффинно эквивалентны.*

Это утверждение является следствием более общего утверждения:

Предложение 1.7.3 *Пусть M_1, M_2, M_3—три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, P_1, P_2, P_3 — другие три точки плоскости, не лежащие на одной прямой. Тогда существует единственное невырожденное аффинное преобразование F, переводящие точки $M_1 \to P_1$, $M_2 \to P_2$, $M_3 \to P_3$.*

Доказательство. Введем на плоскости аффинную систему координат начало которой совпадает с точкой M_1, а базисные векторы
$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{e}_2 = \overrightarrow{M_1M_3}.$$

В такой системе координат точки M_1, M_2, M_3 получат координаты
$$M_1(0,0), M_2(1,0), M_3(0,1)$$

и пусть точки P_1, P_2, P_3 получат координаты
$$P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2), P_3(x_3, y_3).$$

Запишем общее аффинное преобразование $\tilde{X} = QX + X_0$ в координатной форме
$$\begin{cases} q_{11}x + q_{12}y + x_0 = \tilde{x} \\ q_{21}x + q_{22}y + y_0 = \tilde{y} \end{cases}$$

и потребуем, чтобы точки $(0,0) \to P_1$, $(1,0) \to P_2$, $(0,1) \to P_3$.

Условие $(0,0) \to P_1$ определит вектор параллельного переносаX_0, а именно,

$$x_0 = x_1, y_0 = y_1.$$

Условие $(1,0) \to P_2$ приводит к равенствам

$$\begin{cases} q_{11} + x_1 = x_2 \\ q_{21} + y_1 = y_2 \end{cases}$$

и определяет параметры (q_{11}, q_{21}), а именно

$$q_{11} = x_2 - x_1 \quad q_{21} = y_2 - y_1.$$

Условие $(0,1) \to P_3$ приводит к равенствам

$$\begin{cases} q_{12} + x_1 = x_3 \\ q_{22} + y_1 = y_3 \end{cases}$$

и определяет параметры (q_{12}, q_{22}), а именно

$$q_{12} = x_3 - x_1 \quad q_{22} = y_3 - y_1.$$

Матрица

$$Q = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}$$

невырождена, так как векторы $\overrightarrow{P_3P_1}$ и $\overrightarrow{P_2P_1}$ не коллинеарны.

■

Замечание. Последнее утверждение переносится на случай аффинного пространства размерности n.

Аффинное преобразование $F : \mathcal{A}^n \to \mathcal{A}^n$ однозначно определяется образами набора из $(n+1)$ аффинно-независимых точек.

1.7.2 Основной инвариант аффинного преобразования.

Определение 1.7.2 *Пусть l_1 и l_2 две параллельные прямые. Зафиксируем $A_1, A_2 \in l_1$ и $A_3, A_4 \in l_1$. Отношение длин отрезков*

$$\frac{|A_1A_2|}{|A_3A_4|}$$

называется простым отношением четырех точек.

Предложение 1.7.4 *При аффинном преобразовании простое отношение четырех точек сохраняется и называется основным инвариантом аффинного преобразования.*

Доказательство. Пусть даны две параллельные прямые

$$\begin{aligned} l_1 : &\quad X = X_1 + t\,V, \\ l_2 : &\quad X = X_2 + \theta\,V \end{aligned}$$

с направляющим вектором V.

На прямой l_1 отметим две произвольные точки $A_1(t_1)$, $A_2(t_2)$, а на прямой l_2 точки $A_3(\theta_3)$, $A_4(\theta_4)$. Тогда под действием аффинного преобразования

$$F : \tilde{X} = X_0 + QX$$

прямая l_1 переходит в прямую $\tilde{l_1}$, а l_2 в $\tilde{l_2}$ с уравнениями

$$\begin{gathered}F(l_1) = \tilde{l}_1 : \tilde{X} = X_0 + QX_1 + t(QV),\\ F(l_2) = \tilde{l}_2 : \tilde{X} = X_0 + QX_2 + X_0 + \theta(QV),\end{gathered}$$

Точки A_1, A_2, A_3, A_4 переходят в точки B_1, B_2, B_3, B_4 с координатами соответственно:

$$\begin{aligned}
&A_1 : X_1 + t_1\, V, \quad B_1 : X_0 + QX_1 + t_1\,(QV),\\
&A_2 : X_1 + t_2\, V, \quad B_2 : X_0 + QX_1 + t_2\,(QV),\\
&A_3 : X_2 + \theta_3\, V, \quad B_3 : X_0 + QX_2 + \theta_3\,(QV),\\
&A_4 : X_2 + \theta_4\, V, \quad B_4 : X_0 + QX_2 + \theta_4\,(QV),
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{gathered}|A_1A_2| = |V|\,|t_2 - t_1|, \quad |B_1B_2| = |QV|\,|t_2 - t_1|,\\ |A_3A_4| = |V|\,|\theta_4 - \theta_3|, \quad |B_3B_4| = |QV|\,|\theta_4 - \theta_3|.\end{gathered}$$

Откуда следует, что отношения

$$\frac{|A_1A_2|}{|A_3A_4|} = \frac{|t_2 - t_1|}{|\theta_4 - \theta_3|} = \frac{|B_1B_2|}{|B_3B_4|}$$

не зависят от аффинного преобразования, а определяются выбором точек на параллельных прямых.

■

1.7.3 Структура аффинного преобразования.

Предложение 1.7.5 *Любое аффинное преобразование является композицией движения и сжатия/растяжения вдоль взаимно перпендикулярных осей.*

Доказательство. Рассмотрим вначале случай $n = 2$. Произвольная окружность под действием аффинного преобразования F перейдет в замкнутую кривую 2-го порядка, так как аффинное преобразование взаимно однозначно. Среди кривых 2-го порядка замкнутой является только эллипс. Следовательно, образом окружности будет эллипс. Обозначим через $\tilde{d_1}$ и $\tilde{d_2}$ его главные диаметры. Диаметр $\tilde{d_1}$ делит пополам хорды, параллельные диаметру $\tilde{d_2}$. Так как при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные прямые, то семейство хорд, параллельных диаметру $\tilde{d_2}$ является образом семейства параллельных хорд окружности. А так как аффинное преобразование сохраняет отношения отрезков, то диаметр $\tilde{d_1}$ является образом диаметра d_1 окружности, проходящем через середины семейства параллельных хорд окружности. По тем же причинам, диаметр $\tilde{d_2}$ является образом диаметра окружности d_2, проходящем через середины семейства хорд окружности, параллельных диаметру d_1. Очевидно, что диаметры d_1 и d_2 — два взаимно перпендикулярных диаметра окружности. Тогда прямые d_1 и d_2 можно совместить с прямыми $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$ движением. При этом центр окружности и эллипса совпадут. Чтобы получить из данной окружности данный эллипс достаточно теперь совершить сжатие/растяжение вдоль диаметров $\tilde{d}_1$ и $\tilde{d}_2$.

При $n > 2$ рассмотрения аналогичны. Сфера переходит в эллипсоид. Диаметральные плоскости эллипсоида являются образами диаметральных плоскостей сферы, перпендикулярных соответствующим семействам параллельных хорд. Так как главные диаметры эллипсоида взаимно перпендикулярны (нормали к ним – собственные векторы матрицы квадратичной части уравнения поверхности, и они могут всегда быть выбраны ортонормированными), соответствующие диаметры сферы так же взаимно ортогональны. Эти диаметры сферы и главные диаметры эллипсоида можно совместить движением. Эллипсоид получается из сферы сжатием/растяжением вдоль нормалей к главным диаметрам.

■

1.7.4 Аффинная классификация кривых и поверхностей 2-го порядка

Предложение 1.7.6 *Аффинным преобразованием уравнение любой кривой 2-го порядка приводится к одной из следующих канонических форм*

- $x^2 + y^2 = 1$ — *аффинная окружность;*
- $x^2 + y^2 = -1$ — *мнимая аффинная окружность;*
- $x^2 - y^2 = 1$ — *аффинная гипербола;*
- $x^2 = y$ — *аффинная парабола;*
- $x^2 - y^2 = 0$ — *пара аффинных пересекающихся прямых;*
- $x^2 + y^2 = 0$ — *пара аффинных мнимых пересекающихся прямых;*
- $y^2 = 1$ — *пара аффинных параллельных прямых;*
- $y^2 = -1$ — *пара аффинных мнимых параллельных прямых;*
- $y^2 = 0$ — *пара аффинных слившихся прямых;*

Доказательство. Ортогональным преобразованием, приведем уравнение кривой к одному из канонических евклидовых форм. Выполним теперь растяжение/сжатие вдоль канонических осей координат. Композиция двух таких аффинных преобразований приводит уравнение кривой к одной из перечисленных форм.

■

Очевидно, что уравнение поверхности 2-го порядка аффинным преобразованием приводится к одному из 17 типов уравнений, выписывание которых предоставим читателю.

1.8 Проективная плоскость и ее модели.

Если внимательно перечитать аксиомы планиметрии (или стереометрии) то можно обнаружить, что в этих аксиомах упоминаются лишь отношения, в которых состоят элементы, подчиняющиеся этим аксиомам, но ничего не говорится о самих элементах. Конечно же, эти аксиомы основаны на свойствах реальных объектов на плоскости или в пространстве и наше воображение живо подставляет под аксиомы эти реальные, "физические"прямые и плоскости. Однако, если некоторое другое множество элементов подчиняется таким же аксиомам, то с точки зрения математической логики на таком множестве строится геометрия ничем не хуже геометрии обычных прямых и плоскостей. Иначе говоря, в качестве носителя геометрии может выступать точечное множество произвольной природы. В этом разделе мы в определенном смысле реализуем геометрию над необычным точечным множеством.

1.8.1 Проективная плоскость и проективные преобразования.

Зафиксируем в пространстве точку и рассмотрим множество прямых, проходящих через эту точку. Такое множество называется *связкой прямых.* Составим новое точечное множество, назвав "точкой"прямую из связки. Назовем "прямой"на этом множестве плоскость, проходящую через центр связки.

Определение 1.8.1 *Проективной плоскостью RP^2 называется связка прямых в евклидовом (или аффинном) пространстве. Каждая прямая связки называется точкой, а плоскость, проходящая через центр связки — прямой на проективной плоскости.*

Легко понять, что через любые две различные точки проективной плоскости проходит единственная прямая. Есть точки, принадлежащие данной прямой и точки, ей не принадлежащие. Любые две прямые на проективной плоскости пересекаются в единственной точке, однако в отличие от евклидовой или аффинной геометрии, на проективной плоскости *нет параллельных прямых.* Пересекаются действительно любые две прямые. *Расстоянием* между двумя точками назовем величину угла между ориентированными прямыми в связке, представляющими эти точки. Неравенство треугольника для такой функции расстояния (метрики) гарантировано неравенством для плоских углов трехгранного угла: $\gamma \leq \alpha + \vec{\beta}$. Однако в отличие от евклидовой геометрии, расстояние между точками ограничено. Если на данном множестве определена метрика, то *диаметром множества* называется максимальное расстояние между его точками. Диаметр евклидовой плоскости $d(E^2) = +\infty$, в то время как $d(RP^2) = \pi$.

Определение 1.8.2 *Проективной геометрией на проективной плоскости называется аффинная геометрия на связке прямых. Проективным преобразованием проективной плоскости называется аффинное преобразование связки, сохраняющее ее центр.*

Развитие аналитической геометрии на евклидовой или аффинной плоскости было возможным благодаря наличию на них систем координат. Введем координаты на проективной плоскости.

Расположим начало декартовой системы координат (x^1, x^2, x^3) пространства в центре связки. Тогда любая точка P проективной плоскости представится прямой с параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x^1 = \xi^1 t, \\ x^2 = \xi^2 t, \\ x^3 = \xi^3 t, \end{cases} \qquad (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 \neq 0$$

и мы можем установить соответствие

$$P \to \{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}.$$

Однако это соответствие не будет взаимно однозначным, так как прямая не определяется однозначно своим направляющим вектором. Для обеспечения однозначности, введем на тройках чисел (читай, координатах направляющих векторов прямых) отношение эквивалентности

$$\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\} \sim \{\eta^1, \eta^2, \eta^3\} \quad \Leftrightarrow \quad \eta^1 = t\,\xi^1,\ \eta^2 = t\,\xi^2,\ \eta^3 = t\,\xi^3, \quad (t \neq 0).$$

Если обозначить через $(\xi^1 : \xi^2 : \xi^3)$ класс эквивалентности тройки параметров $\{\xi^1, \xi^2, \xi^3\}$, то соответствие

$$P \to (\xi^1 : \xi^2 : \xi^3), \quad (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 \neq 0$$

становится взаимно однозначным. Класс $(\xi^1 : \xi^2 : \xi^3)$ называется *проективными или однородными координатами* точки на проективной плоскости.

Предложение 1.8.1 *Проективное преобразование проективной плоскости представляется в однородных координатах линейным преобразованием вида*

$$\tilde{\xi} = Q\xi \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{l} \tilde{\xi}^1 = q_{11}\xi^1 + q_{12}\xi^2 + q_{13}\xi^3, \\ \tilde{\xi}^2 = q_{21}\xi^1 + q_{22}\xi^2 + q_{23}\xi^3, \\ \tilde{\xi}^3 = q_{31}\xi^1 + q_{32}\xi^2 + q_{33}\xi^3, \end{array} \qquad \det Q \neq 0.$$

Доказательство. Проективное преобразование проективной плоскости является аффинным преобразованием связки, сохраняющим ее центр. Если начало аффинных координат расположено в центре связки, то аффинные преобразования задаются выписанными формулами. Заметим, что это преобразование корректно в том смысле, что переводит класс $(\xi^1 : \xi^2 : \xi^3)$ в класс $(\tilde{\xi}^1 : \tilde{\xi}^2 : \tilde{\xi}^3)$.

■

Проективное преобразование на проективной плоскости является взаимно однозначным, так как $\det Q \neq 0$, а значит переводит две различные точки проективной плоскости в две различные точки. Так как две точки однозначно определяют прямую, то следовательно проективное преобразование переводит прямую в прямую. Аналитически это свойство можно получить так.

Пусть $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ уравнение плоскости в E^3, представляющей некоторую прямую на проективной плоскости. Ее вектор нормали $\{a_1, a_2, a_3\}$ определен с точностью до ненулевого множителя. Следовательно, каждой прямой на проективной плоскости можно однозначно поставить в соответствие класс $(a_1 : a_2 : a_3)$, то есть точку на RP^2. Подвергнем RP^2 проективному преобразованию. Тогда класс $(a_1 : a_2 : a_3)$ перейдет в класс $(\tilde{a}_1 : \tilde{a}_2 : \tilde{a}_3)$, который однозначно определит плоскость с вектором нормали $(\tilde{a}_1 : \tilde{a}_2 : \tilde{a}_3)$, то есть некоторую прямую на проективной плоскости.

1.8.2 Аффинные проекции проективной плоскости.

Пусть $(\xi^1 : \xi^2 : \xi^3)$ точка на проективной плоскости у которой $\xi^3 \neq 0$. Тогда, очевидно,

$$(\xi^1 : \xi^2 : \xi^3) \sim \left(\frac{\xi^1}{\xi^3} : \frac{\xi^2}{\xi^3} : 1\right).$$

Точка в R^3 с координатами $\left(\frac{\xi^1}{\xi^3}, \frac{\xi^2}{\xi^3}, 1\right)$ является точкой пересечения прямой

$$\begin{cases} x^1 = \xi^1 t, \\ x^2 = \xi^2 t, \\ x^3 = \xi^3 t, \end{cases}$$

с плоскостью

$$x_3 = 1.$$

Действительно, если положить $x^3 = 1$, то найдем $t = \frac{1}{\xi^3}$ и, соответственно, $x^1 = \frac{\xi^1}{\xi^3}$, $x^2 = \frac{\xi^2}{\xi^3}$.

На плоскости $x^3 = 1$ координаты x^1, x^2 определяют внутренние аффинные координаты. Таким образом, для всех точек проективной плоскости $(\xi^1 : \xi^2 : \xi^3)$, у которых $\xi^3 \neq 0$ определено взаимно однозначное отображение

$$\varphi_3 : RP^2 \to R^2$$

действующее по правилу

$$\varphi_3(\xi^1 : \xi^2 : \xi^3) = \left(\frac{\xi^1}{\xi^3}, \frac{\xi^2}{\xi^3}\right) \quad \sim \quad \begin{cases} x^1 = \dfrac{\xi^1}{\xi^3}, \\ x^2 = \dfrac{\xi^2}{\xi^3}. \end{cases}$$

Это соответствие обладает тем замечательным свойством, что переводит проективные прямые в аффинные и наоборот. Действительно, пусть

$$l : a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 = 0$$

прямая на аффинной плоскости (x^1, x^2). Уравнение ее прообраза $\varphi_3^{-1}(l)$ на проективной плоскости мы получим, воспользовавшись связью аффинных и проективных координат

$$a_1 \frac{\xi^1}{\xi^3} + a_2 \frac{\xi^2}{\xi^3} + a_3 = 0 \quad \sim \quad a_1 \xi^1 + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 = 0.$$

Геометрически, это уравнение плоскости, проходящей через начало координат и прямую l. Эта плоскость и определяет соответствующую прямую на проективной плоскости.

И обратно, пусть

$$l : a_1 \xi^1 + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 = 0$$

прямая на проективной плоскости, причем $\xi^3 \neq 0$. Разделим уравнение на ξ^3 и снова воспользуемся связью аффинных и проективных координат. Получим

$$\varphi_3(l) : a_1\frac{\xi^1}{\xi^3} + a_2\frac{\xi^2}{\xi^3} + a_3 = 0 \quad \sim \quad a_1x^1 + a_2x^2 + a_3 = 0.$$

Геометрически, это уравнение линии пересечения плоскости $a_1\xi^1 + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 = 0$ с плоскостью $\xi^3 = 1$.

Ясно, что не все точки проективной плоскости могут быть представлены в построенной проекции. Выпадают все прямые, параллельные плоскости $\xi^3 = 1$. Эти прямые, однако, могут быть представлены в других экземплярах аффинной плоскости, а именно, в плоскости $\xi^2 = 1$, или в плоскости $\xi^1 = 1$ (заметим, что здесь "или"не исключающее, т.е возможно представление в обоих экземплярах одновременно).

Таким образом, для проективной плоскости RP^2 существуют три экземпляра аффинной плоскости π_1, π_2, π_3 и три взаимно-однозначных непрерывных отображения $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, посредством которых любая точка на проективной плоскости может быть представлена парой аффинных координат по крайней мере в одной из этих экземпляров следующим образом

$$\varphi_1(\xi^1:\xi^2:\xi^3) \overset{\xi^1\neq 0}{=} \left(\frac{\xi^2}{\xi^1}, \frac{\xi^3}{\xi^1}\right) \quad \sim \quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{\xi^2}{\xi^1}, \\ x^3 = \dfrac{\xi^3}{\xi^1}. \end{cases}$$

$$\varphi_2(\xi^1:\xi^2:\xi^3) \overset{\xi^2\neq 0}{=} \left(\frac{\xi^1}{\xi^2}, \frac{\xi^3}{\xi^2}\right) \quad \sim \quad \begin{cases} x^1 = \dfrac{\xi^1}{\xi^2}, \\ x^3 = \dfrac{\xi^3}{\xi^2}. \end{cases}$$

$$\varphi_3(\xi^1:\xi^2:\xi^3) \overset{\xi^3\neq 0}{=} \left(\frac{\xi^1}{\xi^3}, \frac{\xi^2}{\xi^3}\right) \quad \sim \quad \begin{cases} x^1 = \dfrac{\xi^1}{\xi^3}, \\ x^2 = \dfrac{\xi^2}{\xi^3}. \end{cases}$$

Плоскости $\pi_1, \pi_2, \pi 3$ называются *локальными координатными картами* RP^2, а их прообразы

$$U_1 = \varphi_1^{-1}(\pi_1), \quad U_2 = \varphi_2^{-1}(\pi_2), \quad U_3 = \varphi_3^{-1}(\pi_3)$$

составляют *локальные карты* на RP^2. Совокупность карт (U_1, U_2, U_3) называется *атласом* на RP^2. Атлас покрывает проективную плоскость, то есть $RP^2 = \bigcup\limits_{i=1}^{3} U_i$. Если точка принадлежит пересечению карт, скажем, $P \in U_1 \cap U_2$, то она получит координаты в двух координатных картах, а именно,

$$\varphi_1(P) : \begin{cases} x^2 = \dfrac{\xi^2}{\xi^1}, \\ x^3 = \dfrac{\xi^3}{\xi^1}. \end{cases} \qquad \varphi_2(P) : \begin{cases} y^1 = \dfrac{\xi^1}{\xi^2}, \\ y^3 = \dfrac{\xi^3}{\xi^2}. \end{cases}$$

Нетрудно получить формулы пересчета координат из одной карты в другую

$$y_1 = \frac{1}{x^1}, \qquad y^3 = x^3.$$

Эти формулы задаются гладкими функциями. Поэтому RP^2 представляет собой пример *гладкого двумерного многообразия*.

Упражнение 1.8.1 *Покажите, что сфера S^2 покрывается двумя локальными картами и является гладким двумерным многообразием.*

Указание: *Рассмотрите стереографическую проекцию.*

1.8.3 Аффинно-проективная плоскость.

Рассмотрим подробнее проекцию проективной плоскости на одну из локальных карт, скажем π_3.

Это аффинная плоскость с координатами (x^1, x^2) . Если прямые l_1 и l_2 на аффинной плоскости (x^1, x^2) не параллельны, то $\varphi_3^{-1}(l_1)$ и $\varphi_3^{-1}(l_2)$ пересекаются. Причем линия пересечения плоскостей, представляющих $\varphi_3^{-1}(l_1)$ и $\varphi_3^{-1}(l_1)$ пересекает аффинную плоскость $\xi^3 = 1$ в точке $M = l_1 \cap l_2$.

Если же прямые l_1 и l_2 параллельны, но на аффинной плоскости они не имеют общих точек, однако прямые $\varphi_3^{-1}(l_1)$ и $\varphi_3^{-1}(l_2)$ на проективной плоскости пересекаются (!) по прямой, лежащей в плоскости ξ^1, ξ^2. Причем для любых двух прямых заданного направления эта точка на проективной плоскости одна и та же. Назовем эту точку *несобственной точкой* аффинной прямой, а точнее, пучка прямых, параллельных данному направлению. Каждому пучку параллельных прямых соответствует единственная несобственная точка, а множество всех несобственных точек заполняет всю плоскость ξ^1, ξ^2, а значит является прямой на проективной плоскости. Эта прямая называется *несобственной прямой* аффинной плоскости.

Аффинная плоскость, дополненная несобственной прямой называется аффинно-проективной плоскостью.

Любые две прямые на аффинно-проективной плоскости пересекаются либо в собственной точке, либо в несобственной. Любая собственная прямая пересекает несобственную в единственной точке. Точки аффинно-проективной плоскости находятся во взаимно-однозначном соответствии с проективными координатами $\xi^1 : \xi^2 : \xi^3$ на проективной плоскости. Эти координаты называются *однородными координатами на аффинно-проективной плоскости.* Чтобы не смешивать эти однородные координаты с проективными на *проективной* плоскости, для них будем применять обозначение $(x^1 : x^2 : x^3)$.

Все *собственные точки* описываются однородными координатами

$$(x^1 : x^2 : x^3) \quad \sim \quad (\frac{x^1}{x^3} : \frac{x^2}{x^3} : 1)$$

и могут быть заданы обычными аффинными координатами

$$x = \frac{x^1}{x^3}, \qquad y = \frac{x^2}{x^3}.$$

В однородных координатах уравнение любой прямой записывается как

$$a_1 x^1 + a_2 x^2 + a_3 x^3 = 0.$$

Несобственная прямая задается уравнением $x^3 = 0$, то есть, *несобственной прямой принадлежат все точки с однородными координатами*

$$(x^1 : x^2 : 0).$$

Покажем, например, что любые две прямые на аффинно-проективной плоскости пересекаются. Пусть

$$l_1 : a_1x^1 + a_2x^2 + a_3x^3 = 0, \qquad l_2 : b_1x^1 + b_2x^2 + b_3x^3 = 0.$$

две прямые. Если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

то общая точка этих прямых собственная с однородными координатами

$$\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}x^3 : \frac{\Delta_y}{\Delta}x^3 : x^3\right) \quad \sim \quad \left(\frac{\Delta_x}{\Delta} : \frac{\Delta_y}{\Delta} : 1\right),$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -a_3 & a_2 \\ -b_3 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & -a_3 \\ b_1 & -b_3 \end{vmatrix}.$$

Если же $\Delta = 0$, то решением системы будет единственная несобственная точка $(-a_2 : a_1 : 0)$.

Рассмотрим теперь уравнение кривой 2-го порядка на аффинно-проективной плоскости. Для этого запишем уравнение кривой 2-го порядка в аффинных координатах в виде

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

и перейдем к однородным координатам:

$$x = \frac{x^1}{x^3}, \qquad y = \frac{x^2}{x^3}.$$

После очевидных упрощений придем к уравнению

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}x^ix^k = 0.$$

Аффинным преобразованием на аффинно-проективной плоскости называется аффинное преобразование ее однородных координат. Две кривые 2-го порядка на аффинно-проективной плоскости называются аффинно-эквивалентными, если существует аффинное преобразование, переводящее уравнение одной кривой в уравнение другой. Справедливо

Предложение 1.8.2 *Кривая 2-го порядка на аффинно-проективной плоскости аффинно-эквивалентна одной из 11 канонических форм*

- *действительный эллипс* $(x^1)^2 + (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$;
- *мнимый эллипс* $(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$;

- *гипербола* $(x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$*;*
- *парабола* $(x^2)^2 - 2x^1x^3 = 0$*;*
- *пара действительных собственных прямых, пересекающихся в собственной точке* $(x^1)^2 - (x^2)^2 = 0$*;*
- *пара мнимых прямых, пересекающихся в собственной точке* $(x^1)^2 + (x^2)^2 = 0$*;*
- *пара действительных собственных прямых, пересекающихся в несобственной точке* $(x^2)^2 - (x^3)^2 = 0$*;*
- *пара мнимых прямых, пересекающихся в несобственной точке* $(x^2)^2 + (x^3)^2 = 0$*;*
- *пара совпадающих собственных прямых* $(x^2)^2 = 0$*;*
- *пара прямых, состоящая из собственной и несобственной прямой* $x^2x^3 = 0$*;*
- *пара прямых, каждая из которых является несобственной прямой* $(x^3)^2 = 0$*;*

Доказательство опускаем ввиду простоты.

1.8.4 Единство эллипсов, гипербол и парабол на аффинно-проективной плоскости.

Снова рассмотрим теперь уравнение кривой 2-го порядка на аффинно-проективной плоскости. Запишем уравнение кривой 2-го порядка в аффинных координатах

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

и на сей раз перейдем к проективным координатам проективной плоскости:

$$x = \frac{\xi^1}{\xi^3}, \qquad y = \frac{\xi^2}{\xi^3}.$$

После очевидных упрощений придем к уравнению

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\xi^i\xi^k = 0.$$

Так как ξ^1, ξ^2, ξ^3 по геометрическому смыслу являются декартовыми координатами в R^3, то выписанное уравнение есть уравнение конуса 2-го порядка в R^3, построенного над кривой 2-го порядка, лежащей в плоскости $\xi^3 = 1$. Следовательно, *любая кривая 2-го порядка является плоским сечением некоторого конуса 2-го порядка.*

Рассмотрим с этой точки зрения асимптотику поведения эллипсов и гипербол с закрепленной вершиной (см. п. 1.5). Как нам известно, при $\varepsilon \to 1 - 0$ правый фокус семейства эллипсов $F_2 \to \infty$, а на аффинно-проективной плоскости это есть точка $F_2(+\infty)$ пересечения оси Ox^1 с несобственной прямой в направлении $+\infty$. Эллипс, коснувшись точки на несобственной прямой размыкается в параболу, а конус, "заваливается"на плоскость ξ^1, ξ^2, касаясь этой плоскости вдоль оси ξ^1.

С другой стороны, при $\varepsilon \to 1+0$ левый фокус семейства гипербол $F_1 \to -\infty$, а на аффинно-проективной плоскости это есть точка $F_1(-\infty)$ пересечения оси Ox^1 с несобственной прямой в направлении $-\infty$. При попадании фокуса F_1 на несобственную прямую, гипербола "теряет"свою левую ветвь, правая ветвь превращается в параболу, а конус снова "заваливается"на плоскость ξ^1, ξ^2, касаясь этой плоскости вдоль оси ξ^1.

Но ось Ox имеет единственную точку пересечения с несобственной прямой! Поэтому $F_2(+\infty) = F_1(-\infty)$. Образно говоря, после перехода фокуса F_2 через точку на несобственной прямой, эллипс становится гиперболой.

1.8.5 Модель проективной плоскости на единичной сфере.

Как мы знаем, проективная плоскость может быть покрыта тремя локальными аффинными картами. Можно покрыть ее и одной "картой", но не аффинной, а своего рода "глобусом". Для этого рассмотрим сферу единичного радиуса S^2 с центром в центре пучка. Каждая точка (=прямая) проективной плоскости "отметится"в двух диаметрально противоположных точках сферы. Отождествим их, введя на сфере отношение эквивалентности по принадлежности точек одному и тому же диаметру. Множество классов образует фактор-множество $S^2/_\sim$, при этом каждый класс состоит ровно из двух диаметрально противоположных точек. Если в каждом классе выбрать по одному представителю, то $S^2/_\sim$ можно "увидеть"как верхнюю полусферу с одним замечанием: диаметрально противоположные точки граничной окружности следует не различать. Такой вот получается "глобус". Однако он хорошо моделирует проективную плоскость во многих рассмотрениях. Например, любая собственная прямая аффинно-проективной плоскости представляется сечением полусферы плоскостью, проходящей через ее центр, то есть дугой большого круга сферы. Несобственная прямая представляется граничной окружностью которая а) является большой окружностью на сфере, а значит с полным правом может считаться прямой, и б) любая собственная прямая, читай – дуга большого круга, пересекает граничную окружность в двух диаметрально противоположных точках, которые отождествлены (!). Значит, каждая дуга большого круга становится замкнутой (начало и конец совпадают) и имеет конечную длину, равную π. Заметим, что расстояние между точками проективной плоскости определялось как величина угла между ориентированными прямыми, представляющими эти точки. На нашей модели ясно, что это расстояние в точности равно длине дуги большого круга в сечении полусферы плоскость, натянутой на эту пару прямых. Иначе говоря, RP^2 и $S^2/_\sim$ *изометричны.*

Более наглядными становятся и рассуждения предыдущего раздела. Ось Ox на аффинно-проективной плоскости переходит в замкнутую дугу большого круга на полусфере и семейство эллипсов отобразится на полусфере в семейство сечений полусферы соответствующими конусами. При движении вдоль оси Ox фокуса F_2, его образ F на полусфере будет приближаться к граничной окружности. Как только F дойдет до граничной окружности, кривая на плоскости разомкнется в параболу. Но точка F может продолжать свой путь по дуге! С очевидностью, она появляется на полусфере с "другой стороны", являясь теперь образом левого фокуса гиперболы. Да и сам образ на кривой на полусфере "разваливается" на две компоненты.

1.8.6 Проективная классификация кривых 2-го порядка

Снова рассмотрим теперь уравнение кривой 2-го порядка на аффинно-проективной плоскости. Запишем уравнение кривой 2-го порядка в аффинных координатах

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

и перейдем к проективным координатам проективной плоскости:

$$x = \frac{\xi^1}{\xi^3}, \qquad y = \frac{\xi^2}{\xi^3}.$$

Определение 1.8.3 *Геометрическое место точек проективной плоскости, проективные координаты которых удовлетворяют уравнению*

$$\sum_{i,k=1}^{3} a_{ik}\xi^i\xi^k = 0$$

называется кривой 2-го порядка на проективной плоскости.

Две кривые 2-го порядка на проективной плоскости называются проективно эквивалентными, если существует проективное преобразование координат, переводящее уравнение одной из них в уравнение другой.

Поскольку проективное преобразование является аффинным преобразованием проективных координат, то с очевидностью имеется 5 канонических форм уравнений кривой 2-го порядка на проективной плоскости.

Предложение 1.8.3 *Проективным преобразованием, уравнение кривой 2-го порядка на проективной плоскости приводится к одной из 5 канонических форм*

- $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 0$ – *невырожденная мнимая кривая;*
- $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = 0$ – *невырожденная действительная кривая;*
- $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = 0$ – *пара мнимых различных прямых;*
- $(\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 = 0$ – *пара действительных различных прямых;*
- $(\xi^1)^2 = 0$ – *пара слившихся прямых;*

Класс невырожденных действительных кривых на проективной плоскости состоит из эллипсов, гипербол и парабол в том смысле, что каждая из этих аффинных кривых может быть получена из невырожденной действительной кривой проектированием на удачно подобранную аффинную локальную карту.

Действительно, рассмотрим кривую

$$(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = 0$$

и ее проекцию $\varphi_3 : RP^2 \to \pi_3$. В этой карте $\xi^3 \neq 0$ и переходя к аффинным координатам

$$x = \frac{\xi^1}{\xi^3}, \qquad y = \frac{\xi^2}{\xi^3}$$

получаем аффинный эллипс

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Рассмотрим проекцию $\varphi_2 : RP^2 \to \pi_2$. В этой карте $\xi^2 \neq 0$ и переходя к аффинным координатам

$$y = \frac{\xi^1}{\xi^2}, \qquad x = \frac{\xi^3}{\xi^2}$$

получаем аффинную гиперболу

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Чтобы получить аффинную параболу, совершим дополнительное проективное преобразование

$$\begin{aligned} \eta^1 &= \xi^1, \\ \eta^2 &= \xi^2 + \xi^3, \\ \eta^3 &= -\xi^2 + \xi^3. \end{aligned}$$

Ясно, что это кривая того же проективного типа, но ее уравнение примет вид

$$(\eta^1)^2 - \eta^2\eta^3 = 0.$$

Проектирование φ_3 дает аффинную параболу

$$x^2 = y.$$

1.8.7 Проективное пространство RP^n и проективная классификация поверхностей 2-го порядка.

В аффинном пространстве R^{n+1} рассмотрим связку прямых, проходящих через начало координат. Прямые этой связки назовем точками проективной плоскости RP^n. Любые две различные точки в RP^n соединяет единственная прямая = плоскость, проходящая через начало координат и две прямые, представляющие две точки RP^n. Проективные координаты на RP^n определяются как классы эквивалентности направляющих векторов прямых

$$(\eta^1, \dots, \eta^{n+1}) \sim t\,(\xi^1, \dots, \xi^{n+1})$$

и эти классы обозначают $(\xi^1 : \dots : \xi^{n+1})$.

Проективное пространство RP^n покрывается $(n+1)$-ой аффинной локальной координатной картой

$$\varphi_i(\xi^1 : \dots : \xi^{n+1}) \overset{\xi^i \neq 0}{=} \left(\frac{\xi^1}{\xi^i}, \dots, \hat{i}, \dots, \frac{\xi^n}{\xi^i}\right) \sim$$
$$x^1 = \frac{\xi^1}{\xi^i},\ \dots\ ,\ \hat{i}\ ,\ \dots\ ,\ x^{n+1} = \frac{\xi^{n+1}}{\xi^i},$$

где $\hat{i}$ означает пропуск отношения с номером i.

Аналогично проективной плоскости, каждую локальную карту можно дополнить несобственной плоскостью и получить аналог аффинно-проективного пространства.

Пусть

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x^i x^k + \sum_{i=1}^{n} a_{i\,n+1}x^i + a_{n+1\,n+1} = 0$$

уравнение поверхности 2-го порядка в $(n+1)$-й координатной карте, т.е $\xi^{n+1} \neq 0$. Тогда переходя к проективным координатам получим уравнение

$$\sum_{i,k=1}^{n+1} a_{ik}\xi^i \xi^k = 0$$

которое называется уравнением проективной поверхности 2-го порядка, или коротко – проективной квадрикой. Аффинным преобразование проективных координат уравнение такой квадрике приводится к сумме квадратов с коэффициентами $-1\,,0\,,1$. Следовательно, имеет место следующая теорема классификации.

Предложение 1.8.4 *Проективным преобразованием, уравнение поверхности 2-го порядка в проективном пространстве RP^3 приводится к одной из 5 канонических форм*

- $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 + (\xi^4)^2 = 0$ – *невырожденная мнимая поверхность;*
- $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 - (\xi^4)^2 = 0$ – *невырожденная действительная поверхность;*
- $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 = 0$ – *вырожденная мнимая нераспадающаяся поверхность;*
- $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 - (\xi^3)^2 = 0$ – *вырожденная действительная нераспадающаяся поверхность;*
- $(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 = 0$ – *пара мнимых различных плоскостей;*
- $(\xi^1)^2 - (\xi^2)^2 = 0$ – *пара действительных различных плоскостей;*
- $(\xi^1)^2 = 0$ – *пара слившихся плоскостей;*

Упражнение 1.8.2 *Найдите в различных проекциях проективных квадрик все аффинные классы поверхностей 2-го порядка.*

Хорошей моделью проективного пространства является $S^n/_\sim$ — сфера с отождествленными диаметрально противоположными точками. В этой модели прямым на RP^n соответствуют дуги больших кругов на полусфере $\xi^{n+1} > 0$ и эти дуги замкнуты на полусфере так как точки их пересечения с граничной окружностью отождествлены. Осталось заметить, что расстояние между двумя точками проективной плоскости определяется как величина угла между представляющими их ориентированными прямыми, а этот угол в свою очередь равен длине дуги большого круга на модели RP^n в полусфере. Таким образом, RP^n и $S^n/_\sim$ изометричны. Так что на RP^n *все прямые замкнуты и имеют одну и ту же длину, равную* π. В геометрии изометричные между собой поверхности не различаются.