Аналитические функции в неполупростых ассоциативных линейных алгебрах

С. Н. Воловельская

Проблема определения аналитической функции в ассоциативных линейных алгебрах интересовала и продолжает интересовать исследователей (Scheffers, Hausdorff, Kethum, В. Л. Гончаров, Ringleb, Spampinato, Ward [1—5])[1], по-разному преодолевающих трудности, которые возникают на пути её разрешения в связи с несоблюдением в этих системах коммутативного закона умножения, наличия нулевых делителей и нильпотентов.

Наименее ограничительным является определение Hausdorff'а [1], называющего функцию аналитической, если dy является однородным линейным полиномом от dx: $dy = \varphi_1(dx) = \sum_{i,j=0}^{n-1} \varphi_{ij}\, e_i\, dx\, e_j$ (H).

Это определение, (повторённое Ringleb'ом в [3], положившим его в основу построения теории функций и облечённое в матричную форму Ward'ом в [4]) позволяет получать аналитические функции в некоммутативных ассоциативных системах, которые, однако, обнаруживают свойства, аналогичные элементарным свойствам аналитических функций от комплексной переменной т о л ь к о в а л г е б р а х п р о с т ы х и п о л у п р о с т ы х. В неполупростых некоммутативных системах, наиболее полно отражающих специфику гиперкомплексных алгебр, диференциалы высших порядков от аналитических функций, определённые условием (H), вообще не являются однородными полиномами соответствующих степеней от dx, аналитические функции не разлагаются в сходящиеся бесконечные ряды однородных полиномов, оказываются не интегрируемыми и т. п. Для указанных систем точка зрения Hausdorff'а должна быть развита и углублена.

В настоящей статье дано определение аналитической функции в неполупростых ассоциативных алгебрах первой категории над телом вещественных чисел[2]).

Как известно, всякая ассоциативная алгебра n-порядка первой категории может быть приведена к нормальному базису, где основными единицами служат $t+1$ первообразных идемпотентов $e_0\, e_1, \ldots e_t$, попарно ортогональных, и $m=n-(t+1)$ нильпотентов $e_{t+1}, e_{t+2} \cdots e_{t+l} = e_{n-1}$, каждый определенного характера $(\alpha_1, \beta_1)\,(\alpha_2, \beta_2) \ldots (\alpha_l, \beta_l)$,

---

[1]) Цифры в квадратных скобках относятся к указателю литературы в конце статьи. Результаты упомянутых авторов прореферированы мной в статье „Теория функций от гиперкомплексной переменной". (Обзор литературы). Труды Харьк. Инж.-Экон. инст., т. II, стр. 347—365, 1940.

[2]) К указанной категории принадлежат системы IV 3-го порядка и XIV 4-го порядка по Study, построение элементов теории функций в которых проведено в статье [5].

произведение которых попарно $e_{t+j}\ e_{t+i}$ является линейной комбинацией нильпотентных единиц e_s, где s превышает $t+i$ и $t+j$[1]).

Указанный нормальный базис налагает на константы умножения следующие ограничения:

$$\gamma_{ijs} = \begin{cases} 1 & i=j=s \\ 0 & i \neq j \text{ или } i \neq s. \end{cases} \qquad 0 \leqslant i,j \leqslant t \tag{1}$$

$$\gamma_{i\,t+j\,s} = \begin{cases} 1 & i=\alpha_j, \quad s=t+j, \\ 0 & i \leqslant t, \text{ о } i \neq \alpha_j \text{ или } s \neq t+j. \end{cases} \qquad 1 \leqslant j \leqslant m \tag{2}$$

$$\gamma_{t+j,\,i\,s} = \begin{cases} 1 & i=\beta j, \quad s=t+j \\ 0 & i \leqslant t, \quad i \neq \beta j \text{ или } s \neq t+j. \end{cases} \qquad 1 \leqslant j \leqslant m \tag{3}$$

$$\gamma_{t+j\ t+i\ s} = 0 \quad s \leqslant t+i \text{ или } t+j. \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant m \tag{4}$$

Назовем функцию $y=f(x)$, компоненты которой $f_s(\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_{n-1})$ вещественные функции переменных $\xi_0\, \xi_1 \ldots \xi_{n-1}$, имеющие диференциалы любого порядка в области D, *аналитической* в этой области, *если* в каждой точке a из D *диференциал любого порядка* $d^k y$ *является однородным полиномом от* dx *степени* k:

$$d^k y = \varphi_k(dx). \tag{α}$$

Так как

$$d^k y = \sum_{s=o}^{n-1} \left(\sum_{p=o}^{n-1} \frac{\partial}{\partial \xi_p}\, \partial \xi_p \right)^k f_s\, e_s, \tag{α_1}$$

в то время как:

$$\varphi_k(dx) = \sum_{i_0 i_1 \ldots i_k = 0 \ldots n-1} \varphi_{i_0 i_1 \ldots i_k}\, e_{i_0}\, dx\, e_{i_1}\, dx \ldots dx\, e_{i_k} = \tag{α_2}$$

$$= \sum_{i,j,p,s=0 \ldots n-1} \gamma_{i_0 p_1 j_1}\, \gamma_{j_1 i_1 j_2}\, \gamma_{j_2 p_2 j_3} \ldots \gamma_{j_{2k-2} p_k j_{2k-1}}\, \gamma_{j_{2k-1} i_k s}\, d\xi_{p_1}\, d\xi_{p_2} \ldots d\xi_{p_k}\, e_s,$$

то, считая (α) справедливым при любом dx, и принимая во внимание линейную независимость единиц $e_0, e_1 \ldots e_{n-1}$, приравниваем члены (α_1) и (α_2), содержащие одинаковые произведения $d\xi_{p_1}\, d\xi_{p_2} \ldots d\xi_{p_k}$, откуда получаем систему диференциальных уравнений различных порядков для компонент функции:

$$\frac{\partial^k f_s}{\partial \xi_{p_1}^{\alpha_1}\, \partial \xi_{p_2}^{\alpha_2} \ldots \partial \xi_{p_r}^{\alpha_r}} = \\ \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = k \\ p_1,\ p_2 \ldots p_r,\ s = 0,\ 1 \ldots n-1. \end{pmatrix}$$

[1]) Dickson, Algebren und ihre Zahentheorie, S. 119, Диксон. Линейные алгебры стр. 43, 44, 46, 50).

$$=\frac{\alpha_1!\alpha_2!\ldots\alpha_r!}{k!}\sum_{i,j=0\ldots n-1}\varphi_{i_0 i_1\ldots i_k}\gamma_{i_0 p_1 j_1}\gamma_{j_1 i_1 j_2}\ldots\gamma_{j_{2\alpha_1-1} i_{\alpha_1} j_{\alpha_1}}\gamma_{2\alpha_1\ p_r j_{2\alpha_1+1}}\ldots\gamma_{j_{2k-1} i_k s}$$

(по всем перестановкам $p_1, p_2 \ldots p_r$) (5)

Пользуясь уравнениями (5) при различных значениях k и учитывая уравнения (1—4) для констант умножения, установим структуру компонент аналитической в области D функции. Будем условно называть f_i $(\xi_0 \xi_1 \ldots \xi_{n-1})$ при $i = 0, 1 \ldots t$ идемпотентными, а при $i = t+1, t+2 \ldots t+l$ нильпотентными компонентами функции, соответственно, $\xi_0, \xi_1 \ldots \xi_t$ идемпотентными, $\xi_{t+1}, \xi_{t+2} \ldots \xi_{t+l}$ — нильпотентными координатами независимой переменной.

Полагая $k=1$, получим на основании (1):

$$\frac{\partial f_s}{\partial \xi_p} = \sum \varphi_{i_0 i_1}\gamma_{i_0 p j_1}\gamma_{j_1 i_1 s} = \begin{cases} \varphi_{ss} & p = s \\ 0 & p \neq s \end{cases}, \qquad (6)$$

откуда идемпотентные компоненты аналитической функции определяются в виде: $f_s = f_s(\xi_s)$ для $s = 0,1 \ldots t$ (6), где $f_s(\xi_s)$ — произвольная вещественная функция одной вещественной переменной, имеющая производные любого порядка в области D.

На основании (2), (3) и (4) при $k=1$ получим:

$$\underset{1 \leqslant j \leqslant m}{\frac{\partial f_{t+j}}{\partial \xi_p}} = \Sigma\, \varphi_{i_0 i_1}\gamma_{i_0 p j_1}\gamma_{j_1 i_1\, t+j} = \begin{cases} 0 & p > t+j \\ \varphi_{\alpha_j \beta_j} & p = t+j \\ \sum\limits_{i_0, i_1, j_1 = 0 \ldots t+j-1} \varphi_{i_0 i_1}\gamma_{i_0 p j_1}\gamma_{j_1 i_1\, t+j} & t+j \leqslant p \leqslant t+j-1 \\ 0 & p \leqslant t, \text{ но } p \neq \alpha_j, \beta_i \quad (i \leqslant j). \end{cases} \qquad (7)$$

Отсюда заключаем: нильпотентная компонента f_{t+j} не может зависеть от нильпотентных координат ξ_p, порядковые номера которых p превышают $t+j$.

Выпишем некоторые уравнения второго порядка, получаемые из (5) при $k=2$:

$$\frac{\partial^2 f_{t+j}}{\partial \xi_{p_1}\partial \xi_{p_2}} = \begin{cases} 0 & p_1 = t+j \quad p_2 > t \\ \varphi_{\alpha_{j-1}\beta_{j-1}\beta_j}\gamma_{t+j-1\ t+j-1\ t+j} & p_1 = p_2 = t+j-1 \\ \frac{1}{2!}\left\{\varphi_{\alpha_{p_1}\beta_{p_1}\beta_j}\gamma_{p_1 p_2\, t+j} + \varphi_{\alpha_{p_2}\beta_{p_2}\beta_j}\gamma_{p_2 p_1\, t+j}\right\} & t+1 \leqslant p_1, p_2 \leqslant t+j-2 \\ 0 & p_1 = t+j \quad p_2 \leqslant t, \text{ но } p_2 \neq \alpha_{j_1}, \beta_j. \end{cases} \qquad (8)$$

Из (7) и (8) заключаем: нильпотентная компонента f_{t+j} является полиномом не выше первой степени относительно координаты ξ_{t+j} с коэфициентами, зависящими от идемпотентных координат $\xi_{\alpha_j}, \xi_{\beta_j}$.

Присоединяя и некоторые уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial^3 f_{t+j}}{\partial \xi_{p_1}\partial \xi_{p_2}\partial \xi_{p_3}} = \begin{cases} 0 & p_1 = t+j-1 \quad p_2, p_3 > t \\ 0 & p_1 = t+j-1 \quad p_2 > t, p_3 < t, \text{ но } \neq \alpha_{j-1}, \beta_{j-1}, \beta_{p_2-t}, \alpha_{p_2-t}, \\ \varphi_{\alpha_{j-2},\beta_{j-2}\beta_j}\gamma_{t+j-2\ t+j-2\ t+j-1}\gamma_{t+j-1\ t+j-2\ t+j} & p_1 = p_2 = p_3 = t+j-2 \end{cases} \qquad (9)$$

приходим к выводу, что f_{t+j} является полиномом не выше второй степени относительно ξ_{t+j-1} с коэфициентами, зависящими от определённых идемпотентных координат и констант умножения системы.

Продолжая таким образом далее, приходим к общему заключению: при любом k f_{t+j} является полиномом не выше $(k+1)$-ой степени от нильпотентной координаты ξ_{t+j-k} с коэфициентами, зависящими от идемпотентных координат и констант умножения системы.

Последняя нильпотентная компонента f_{t+m} является полиномом не выше m-й степени от ξ_{t+1} с идемпотентными коэфициентами.

Отсюда получаем общий вид аналитической в области D функции во всякой неполупростой алгебре первой категории

$$f(x)=\sum_{j=0}^{t} f_i(\xi_i)e_i+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\left\{\sum_{s=0}^{j-1}\xi_{t+j-s}\sum_{\mu=0}^{s}\varphi_{j\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_\mu}\,\xi_{t+j-\lambda_0}\,\xi_{t+j-\lambda_1}\ldots\,\xi_{t+j-\lambda_\mu}\right\}e_{t+j}, \tag{A}$$

$$\lambda_1,\lambda_2\ldots\lambda_s=s+1,\ s+2,\ldots j-1\ \left(\xi_{t+j-\lambda_0}=1,\ \varphi_{j\lambda_0}=\varphi_{js}\right),$$

где $\varphi_{j\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_\mu}$ — вещественные функции от определённых идемпотентных координат, зависящие от констант умножения системы, имеющие диференциалы любого порядка в D.

Применённый метод исследования и установленная структура аналитической функции (A) доказывает теорему:

Для того, чтобы функция $y=f(x)$, компоненты которой вещественные функции переменных $\xi_0\,\xi_1\ldots\xi_{n-1}$, имеющие диференциалы любого порядка в области D, была аналитической в D, достаточно выполнения условия $d^k y=\varphi_k(dx)$, для $k=1,2\ldots m+1$ в каждой точке a из D.

Примечание. Диференциальные уравнения первого порядка, вытекающие из требования $dy=\varphi_1(dx)$ (H), вообще выражают достаточные условия аналитичности лишь при $m=0$, т. е. в системах полупростых.

Пусть ν наименьший показатель, для которого $e_{t+1}^{\nu}=0$; при этом $\eta^{\nu}=0$ для любого нильпотента системы, но найдутся нильпотенты η, для которых $\eta^{\nu-1}\neq 0$, т. е. ν — индекс нильпотентной субалгебры. (Из условия нормального базиса следует, что $\nu\leqslant m+1$).

Отсюда легко заключаем, что нильпотентные компоненты являются полиномами степени, равной или меньшей ν от нильпотентных координат, а следовательно верна теорема, устанавливающая более тонкий критерий аналитичности.

Для того чтобы функция $y = f(x)$, компоненты которой вещественные функции от $\xi_0 \xi_1 \ldots \xi_{n-1}$, имеющие диференциалы любого порядка в каждой точке из D, была аналитической в D, необходимо и достаточно, чтобы $d^k y = \varphi_k(dx)$ для $k = 1, 2 \ldots \nu$, где ν — индекс нильпотентной субалгебры, в каждой точке a из D.

Вышеуказанные условия сводятся к диференциальным уравнениям I, II... ν-го порядков, получаемым из (5) при соответствующих значениях k и являющимся обобщёнными уравнениями Коши—Римана в неполупростых алгебрах 1-й категории (по типу уравнений 6—9).

Нетрудно явно выразить зависимость функций $\varphi_{j_{\lambda_0 \ldots \lambda_\mu}}$, входящих в (A), от констант умножения системы, получая таким образом формулы, позволяющие по заданной таблице умножения алгебры определять в ней аналитические функции.

Так, первая нильпотентная компонента имеет вид

$$f_{t+1} = \varphi\left(\xi_{\alpha_1} \xi_{\beta_1}\right) \xi_{t+1} + \psi\left(\xi_{\alpha_1} \xi_{\beta_1}\right), \qquad (A_1)$$

в частности, при $\alpha_1 = \beta_1 = s$

$$f_{t+1} = f'_s(\xi_s)\xi_{t+1} + \psi(\xi_s). \qquad (A'_1)$$

Вторая компонента представляется в форме:

$$f_{t+2} = \varphi_2(\xi_{\alpha_2}, \xi_{\beta_2})\xi_{t+2} + \psi(\xi_{\alpha_2}, \xi_{\beta_2}) + \gamma_{t+1\, t+1\, t+2} \left\{ \varphi_{21}(\xi_{\alpha_1} \xi_{\beta_1} \xi_{\beta_2}) \xi_{t+1} + \right.$$

$$\left. + \varphi\ (\xi_{\alpha_1} \xi_{\beta_1} \xi_{\beta_2}) \frac{\xi^2_{t+1}}{2!} + \varphi_{20}(\xi_{\alpha_1} \xi_{\beta_1} \xi_{\beta_2}) \right\} \qquad (A_2)$$

и т. д.

Так, например, система IV третьего порядка (по Study), детально рассмотренная в [5], имеет при нормализации единиц таблицу умножения:

e_0	0	0
0	e_1	e_2
e_2	0	0

Здесь: $t = 1$, $m = 1$, $\nu = 2$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, откуда аналитическая функция принимает вид:

$$f(x) = f_0(\xi_0) e_0 + f_1(\xi_1) e_1 + \{ \varphi(\xi_0, \xi_1)\xi_2 + \psi(\xi_0, \xi_1) \} e_2,$$

что совпадает с (10) из [5].

Обобщённые уравнения Коши—Римана здесь первого и второго порядка вида:

$$\frac{\partial f_0}{\partial \xi_1} = \frac{\partial f_0}{\partial \xi_2} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi_0} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi_2^2} = 0,$$

как и (9) из [5].

Для системы VII четвертого порядка (по Study), при нормализации базисных единиц, таблица умножения:

e_0	0	0	0
0	e_1	e_2	e_3
e_2	0	0	0
0	e_3	0	0

Здесь $t=1,\ m=2,\ \nu=2,\ \alpha_1=1,\ \beta_1=0,\ \alpha_2=\beta_2=1,\ \gamma_{223}=0$, откуда

$$f(x)=f_0(\xi_0)e_0+f_1(\xi_1)e_1+\{\varphi(\xi_0\xi_1)\xi_2+\psi(\xi_0\xi_1)\}e_2+$$
$$+\left\{f_1'(\xi_1)\xi_3'+\psi_1(\xi_1)\right\}e_3.$$

Если алгебра содержит **единственный идемпотент** e_0, то **все функции** $\varphi_{\lambda_0\lambda\ldots\lambda\mu}$ **из** (A) **зависят от единственной переменной** ξ_0. При этом

$$f_1=f_0'(\xi_0)\xi_1+f_{10}(\xi_0) \qquad (B_1)$$

$$f_2=f_0'(\xi_0)\xi_2+\gamma_{112}\left\{\frac{f_0'(\xi_0)}{2!}\xi_1^2+f_{10}(\xi_0)\xi_1\right\}+f_{20}(\xi_0) \qquad (B_2)$$

$$f_3=f_0'(\xi_0)\xi_3+\frac{f_0''(\xi_0)}{2!}\left\{\gamma_{223}\xi_2^2+(\gamma_{123}+\gamma_{213})\xi_1\xi_2+\gamma_{113}\xi_1^2\right\}+\frac{f_0'''(\xi_0)}{3!}\xi_1^3\gamma_{112}\gamma_{213}+$$
$$+\frac{f_{10}''(\xi_0)}{2!}\xi_1^2\gamma_{112}\gamma_{213}+\left\{f_{20}'(\xi_0)\gamma_{223}+\varphi_2(\xi_0)\gamma_{213}+\psi_2(\xi_0)\gamma_{123}\right\}\xi_2+ \qquad (B_3)$$
$$+\left\{f_{10}'(\xi_0)\gamma_{113}+\varphi_1(\xi_0)\gamma_{123}+\psi_1(\xi_0)\gamma_{213}\right\}\xi_1+f_{30}(\xi_0).$$

Так, например, система XIV четвертого порядка (по Study), рассмотренная в [5], имеет таблицу умножения:

e_0	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	0
e_2	e_3	e_3	0
e_3	0	0	0

Здесь

$$t=0,\quad m=3,\quad \nu=2,\quad \gamma_{112}=\gamma_{113}=\gamma_{223}=0,\quad \gamma_{123}=-\gamma_{213}=1,$$

откуда

$$f(x)=f_0(\xi_0)e_0+\sum_{i=1,2,3}\left\{f_0'(\xi_0)\xi_i+f_i(\xi_0)\right\}e_i+\{\varphi(\xi_0)\xi_1+\psi(\xi_0)\xi_2\}e_3.$$

Дополнительные упрощения вносятся при переходе к системам коммутативным, где **аналитичность** (в смысле данного нами определения) влечёт за собой **существование производной в каждой точке** a **из** D **и обратно**.

Как и на примерах, рассмотренных в [5], можно назвать индексом моногенности функции наименьшее число N, для которого $dy = \sum_{i=1}^{N} u_i \, dx \, v_i$, где u_i и v_i аналитические функции от x, названные нами сопряжённо-моногенными функциями индекса N.

При этом условия сопряжённой моногенности выражаются системой n диференциальных уравнений для компонент-функций u_i и v_i. Наряду с аналитическими функциями, можно рассмотреть более узкий класс деривабильных функций, имеющих производную (правую, левую и двустороннюю), и определить уравнения деривабильности; при этом в системах коммутативных указанные определения аналитичности и деривабильности совпадают.

Так же, как и в [5], можно ввести понятие о бесконечном ряде полиномов $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x-a)$ и доказать разложимость функции, аналитической внутри некоторой сферы радиуса R с центром в a, в бесконечный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x-a)$, сходящийся для $|x-a| < R$.

Интеграл можно определить, как и в [5]:

$$\int_c \sum_{i=1}^{N} u_i \, dx \, v_i = \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ m \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} u_i(x_k) \Delta x_k \, v_i(x_k),$$

(где C — кривая Жордана в односвязной области D непрерывности функций u_i и v_i) и притти к аналогичным результатам о независимости от пути интеграла $\int_c \sum_{i=1}^{N} u_i \, dx \, v_i$ для совокупности сопряжённо-моногенных функций индекса N, устанавливая, таким образом, эквивалентность классов сопряжённо-моногенных и сопряжённо-регулярных функций данного индекса [1]).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА:

1. Hausdorff. Zur Theorie der Systeme complexer Zahlen. Leipz. Ber. Bd 52. 1900. S. 43.

2. Гончаров В. Л. Об интеграле Коши в гиперкомплексных областях. Известия Академии Наук СССР. Серия математ. 1932. № 10. Стр. 1405.

3. Ringleb. Beiträge zur Funktionen theorie in hypercomplexen Systemen I. Rendiconti di Palermo. 1933. S. 311.

4. Ward. Theorie of analytic functions in linear associative Algebras. Duke Mathematical journal. Vol. 7. 1940. P. 233.

5. Воловельская С. Опыт построения элементов теории функций в некоммутативной ассоциативной системе с 3-мя единицами. Записки Научно-Исслед. ин-та математики ХГУ. Т. XVI. 1939. Стр. 143.

6. Wagner. Differentials and analytic continuation in non-commutative algebras. Duke Math. Journal. Vol. 9, N 4. 1942. P-677.

7. Федоров В. С. О моногенности. ДАН СССР. 1945. т. XLVIII № 6, стр. 414.

---

[1]) В статье [6] высказывается соображение, эквивалентное примечанию на стр. 156. *Примеч. автора.* Статья представлена в 1940 г. *Ред.*