УДК 517.946

В. М. Борок, Я. И. Житомирский

О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В БЕСКОНЕЧНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ

В работах одного из авторов [1—2] были исследованы классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами.

В данной статье мы исследуем аналогичный вопрос для краевых задач не только в бесконечном слое, но и в ряде других бесконечных областей. При этом получение классов единственности основано на новом методе, позволяющем также улучшить некоторые из результатов [2].

Обозначения. Постановка задачи

Будем применять следующие обозначения: цилиндрическая область $\Omega \subseteq R^n$ имеет вид либо $\Omega = R^n$, либо $\Omega = \Omega' \times R^{n'}$, либо $\Omega = \Omega' \times R^{n'}_+$, где $\Omega' \subset R^{n-n'}$; $1 \leqslant n' \leqslant n-1$; $R^{n'}_+ = R^1_+ \times \ldots \times R^1_+$; $R^1_+ = \{x \in R^1 \colon x \geqslant 0\}$; B — банахово пространство; A — линейный оператор из B в B с областью определения $D(A)$, плотной в B; $C_{f,B}(\Omega)$ — банахово пространство непрерывных отображений $u(t)$: $\Omega \to B$ таких, что

$$\| u(t) \|_f \underset{\mathrm{def}}{=} \sup_{\Omega} \frac{\| u(t) \|_B}{f(|t|)} < \infty,$$

где $f(r) > 0$ — определенная при $r > 0$, непрерывная функция; P — линейный оператор из $C_{f,B}(\Omega)$ в $C_{f,B}(\Omega)$ с областью определения $D(P)$.

Мы будем решать следующую задачу α: при каких условиях на рост функции $f(r)$ при $r \to \infty$ всякое отображение $u(t) \in C_{f,B}(\Omega)$, обладающее свойствами

α_1) $u(t) \in D(P)$,
α_2) при любом $t \in \Omega$ $u(t) \in D(A)$,
α_3) при любом $t \in \Omega$ $A(u(t)) = Pu(t)$,

тождественно равно нулю.

Поставленная задача α охватывает широкий круг задач. Приведем два примера.

1. Пусть $\Omega = R^n$, $B = C[0, X]$, $D(A)$ — совокупность дважды непрерывно дифференцируемых на $[0, X]$ функций

$$\varphi(0) = \varphi(X) = 0, \quad A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \; P = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right),$$

где $P(s)$ — полином порядка m от $s = (s_1, \ldots, s_n)$ с постоянными коэффициентами,

$$D(P) = \{u(t, x) : D_t^{(k)} u(t, x) \in C(R^n \times [0, X]),$$

$$\sup_{R^n \times [0, X]} | D_t^{(k)} u(t, x) | f^{-1}(|t|) < \infty, \; |k| \leqslant m\},$$

где

$$D_t^{(k)} = \frac{\partial^{|k|}}{\partial t_1^{k_1} \ldots \partial t_n^{k_n}}, \; |k| = k_1 + \ldots + k_n.$$

Тогда задача α состоит в описании условий единственности решения краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u(t, x), \quad u(t, 0) = u(t, X) = 0$$

в бесконечном слое $R^n \times [0, X]$ в терминах поведения этого решения при $|t| \to \infty$. Задача в такой постановке другим методом исследовалась в [2].

2. Пусть $\Omega = R^n$, $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$,

$$B = C(K), \quad A = \Delta_{xy} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$D(A)$ — совокупность дважды непрерывно дифференцируемых в K функций, равных нулю на ∂K, оператор P определяется на функциях $u(t, x, y)$ аналогично 1. Тогда задача α состоит в описании условий единственности решения следующей краевой задачи в бесконечном цилиндре $R^n \times K$:

$$\Delta_{xy} u(t, x, y) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u(t, x, y),$$

$$u(t, x, y)|_{x^2+y^2=R^2} = 0.$$

Условия единственности решения

Пусть A^* — оператор в B^*, сопряженный к A. Обозначим C_f пространство комплекснозначных функций $v(t)$, определенных в Ω и таких, что

$$\|v(t)\|_{C_f} = \sup_{\Omega} \frac{|v(t)|}{f(|t|)} < \infty.$$

Ясно, что если $h \in B^*$, $u(t) \in C_{f, B}(\Omega)$, то $(h, u(t)) \in C_f$. Обозначим $W_p \subset C_f$ линейную оболочку множества тех функций $w(t) \in C_f$, которые представимы в виде

$$w(t) = (h, u(t)), \text{ где } h \in B^*, \ u(t) \in D(P),$$

и определим в C_f оператор $\widehat{P}$ так, что

$$D(\widehat{P}) = W_p \text{ и } \widehat{P}v(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k (h_k, Pu_k(t)),$$

если

$$v(t) = \sum_{k=1}^{N} A_k (h_k, u_k(t)) \in W_p.$$

Теорема 1. *Пусть оператор A^* имеет в B^* тотальную* систему Φ собственных и присоединенных элементов, Λ — множество соответствующих собственных значений. Если для любого $\lambda \in \Lambda$ уравнение*

$$\widehat{P}v(t) = \lambda v(t), \quad v(t) \in D(\widehat{P}) \tag{1}$$

* Система $\Phi = \{\varphi\}$ элементов пространства B^* называется тотальной, если из того, что $(\varphi, u) = 0$ $u \in B$ для любого элемента $\varphi \in \Phi$ следует, что $u = 0$.

имеет только тривиальное решение $v(t) \equiv 0$, *то задача* α *имеет только нулевое решение.*

Доказательство. Пусть $u(t)$ — решение задачи α и пусть $h_\lambda \in \Phi$ — собственный элемент оператора A^*, λ — соответствующее собственное значение. Обозначим $v_\lambda(t) = (h_\lambda, u(t))$. Тогда, по условию, $v_\lambda(t) \in W_p = D(\widehat{P})$. Имеем

$$\widehat{P}v_\lambda(t) = (h_\lambda, Pu(t)) = (h_\lambda, A(u(t))) =$$
$$= (A^*h_\lambda, u(t)) = \lambda(h_\lambda, u(t)) = \lambda v_\lambda(t).$$

Согласно условию теоремы, $v_\lambda(t) \equiv 0$

Пусть теперь $h_{1\lambda}$ — присоединенный элемент (первый в цепочке) оператора A^*, отвечающий собственному значению $\lambda \in \Lambda$ и собственному элементу h_λ. Обозначим

$$v_{1\lambda}(t) = (h_{1\lambda}, u(t)).$$

Имеем

$$\widehat{P}v_{1\lambda}(t) = (h_{1\lambda}, Pu) = (h_\lambda + \lambda h_{1\lambda}, u) =$$
$$= v_\lambda(t) + \lambda v_{1\lambda}(t) = \lambda v_{1\lambda}(t),$$

так как, по доказанному, $v_\lambda(t) \equiv 0$. Отсюда, по условию теоремы, $v_{1\lambda}(t) \equiv 0$. Аналогично, для остальных элементов $h_{j\lambda}$ цепочки присоединенных функций

$$(h_{j\lambda}, u(t)) \equiv 0.$$

В силу тотальности системы Φ заключаем, что $u(t) \equiv 0$. Теорема доказана.

Пусть теперь оператор P обладает следующим свойством:

e) существует расширение $\overline{P}$ оператора $\widehat{P}$ такое, что

$$e_1)\ D(\overline{P}) \subset C_f,\quad \overline{P} : D(\overline{P}) \to C_f,$$

e_2) для любой функции $v(t) \in D(\overline{P})$ и для любого элемента $h \in B$ $v(t)h \in D(P)$,

e_3) $P(v(t)h) = [\overline{P}v(t)]h$, $v(t) \in D(\overline{P})$, $h \in B$.

Тогда справедлива

Теорема 2. *Пусть оператор* $P : D(P) \to C_{f,B}(\Omega)$ *обладает свойством e. Если уравнение*

$$\overline{P}v(t) = \lambda v(t),\quad v(t) \in D(\overline{P}) \tag{2}$$

имеет нетривиальное решение $v(t)$ *при значении* λ, *являющемся собственным для оператора* A, *то существует нетривиальное решение* $u(t)$ *задачи* α.

Доказательство. Пусть

$$v_0(t) \in D(\overline{P}),\quad \overline{P}v_0(t) = \lambda_0 v_0(t),\quad v_0(t) \not\equiv 0,$$
$$Ah_0 = \lambda_0 h_0,\quad h_0 \neq 0,\quad h_0 \in D(A) \subset B.$$

Положим $u_0(t) = v_0(t) h_0$. Ясно, что $u_0(t) \neq 0$; в силу e_2, $u_0(t) \in D(P)$, т. е. справедливо α_1; при любом значении $t \in \Omega$ $u_0(t) \in D(A)$, т. е. справедливо α_2; наконец, в силу e_3 имеем

$$Pu_0(t) = P[v_0(t) h_0] = \left[\bar{P} v_0(t)\right] h_0 = \lambda_0 v_0(t) h_0.$$

Отсюда

$$Pu_0(t) = v_0(t)[\lambda_0 h_0] = v_0(t) \cdot Ah_0 = Au_0(t),$$

т. е. справедливо α_3. Тем самым теорема доказана.

Из доказанных теорем вытекает следующее необходимое и достаточное условие единственности.

Следствие. *Пусть H — (сепарабельное) гильбертово пространство, A — самосопряженный оператор в нем, имеющий полную в H систему собственных и присоединенных элементов, P — оператор в $C_{f, H}(\Omega)$, обладающий свойством e.*

Для того, чтобы всякое решение $u(t)$ задачи α было тождественно равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы для любого собственного значения λ оператора A уравнение (2) имело лишь тривиальное решение.

Задачи без начальных условий

Пусть $G \subset R^m$ — ограниченная область, A — самосопряженный линейный дифференциальный оператор в $L_2(G)$, имеющий полную в $L_2(G)$ систему собственных (или собственных и присоединенных) функций, Λ — множество его собственных значений, $D(A)$ — область определения. Пусть, далее, $P(s)$ — полином с постоянными коэффициентами:

$$P(s) = \sum_{k=0}^{p} a_k s^k.$$

Спрашивается, при каких условиях на непрерывную положительную функцию $f(r)$, $r \geqslant 0$, всякое регулярное* решение $u(x, t)$ задачи

$$Au(x, t) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t), \quad u \in D(A), \tag{3}$$

удовлетворяющее при некотором $C > 0$ оценке

$$\| u(x, t) \|_{L_2(G)} \leqslant Cf(|t|), \quad -\infty < t < \infty, \tag{4}$$

тождественно равно нулю.

Здесь мы считаем $L_2(G)$ пространством n-мерных вектор-функций, а правую часть (3) при $u(x, t) = \{u_1(x, t), \ldots, u_n(x, t)\}$ понимаем как

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t) = \left\{P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u_1(x, t), \ldots, P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u_n(x, t)\right\}.$$

---

* Имеющее все непрерывные производные, входящие в уравнение (3).

Отметим, что задача (3) является обобщением классической задачи без начальных условий, описывающей распределение температуры в конечном стержне (с заданными температурными режимами на концах) в момент времени, достаточно далекий от начального [3].

Обозначим

$$S(\lambda) = \{s: P(s) = \lambda\}, \quad Z = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} S(\lambda); \quad a = \inf_{z\in Z} |\operatorname{Re} z|. \tag{5}$$

Число a будем называть типом краевой задачи (3). Подобная величина была введена в [1].

Краевую задачу (3) будем называть краевой задачей достижимого типа a, если существует $z_0 \in Z$, $|\operatorname{Re} z_0| = a$; в противном случае (3) назовем краевой задачей недостижимого типа a.

Теорема 3. *Пусть (3) — краевая задача достижимого типа a. Тогда для того, чтобы задача (3) при условии (4) имела лишь тривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\varliminf_{t\to+\infty} f(t)\, e^{-at} = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Воспользуемся следствием к теоремам 1 и 2. Положим $\Omega = R^1$, $H = L_2(G)$, A — самосопряженный оператор в H, имеющий полную в $L_2(G)$ систему собственных и присоединенных функций. Далее,

$$C_{f,\,L_2}(R^1) = \{u(x, t)\};\ (x, t) \in G \times R^1 : u(x, t) \in L_2(G)$$

при любом $t \in R^1$ и $\|u(x, t)\|_{L_2(G)} \leqslant C_u f(|t|)\}$;

$$D(P) \subset C_{f,\,L_2}(R^1), \quad u(x, t) \in D(P),$$

если $u(x, t)$ обладает производными по t до порядка p и каждая из этих производных является элементом $C_{f,\,L_2}(R^1)$,

$$Pu(x, t) = \sum_{k=0}^{p} a_k \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x, t).$$

Тогда

$$C_f = \{v(t) : R^1 \to C^1, \quad |v(t)| \leqslant C_v f(|t|)\},$$

W_p — линейная оболочка функций $w(t)$ вида

$$w(t) = \int_G g(x)\, u(x, t)\, dx,$$

где

$$g(x) \in L_2(G), \quad u(x, t) \in D(P)$$

и

$$\hat{P}\left(\sum_{k=1}^{N} A_k w_k(t)\right) = \sum_{k=1}^{N} A_k \int_G g_k(x)\, P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u_k(x, t)\, dx.$$

Оператор P обладает свойством e: оператор $\overline{P}$, определяемый на функциях $v(t) \in C_f$, обладающих производными до порядка p, принадлежащими C_f, формулой

$$\overline{P}v(t) = P\left(\frac{d}{dt}\right)v(t),$$

очевидно, является расширением оператора $\hat{P}$; при этом свойства $e_1 - e_3$ выполняются.

Согласно упомянутому следствию, всякое регулярное решение задачи (3) при условии (4) тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда всякое регулярное решение $v_\lambda(t)$ уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)v_\lambda(t) = \lambda v_\lambda(t), \quad \lambda \in \Lambda, \tag{7}$$

удовлетворяющее оценкам

$$|D_t^k v_\lambda(t)| \leqslant C_\lambda f(|t|), \; k = 0, \; \ldots, \; p-1, \tag{8}$$

тождественно равно нулю.

Но из (7) следует, что $v_\lambda(t)$ представимо в виде

$$v_\lambda(t) = \sum_{k=1}^{p} c_k(\lambda)\, y_k(t, \lambda), \tag{9}$$

где

$$y_k(t, \lambda) = \exp\{s_k(\lambda)\, t\}\, t^{\rho_k}, \quad \rho_k = 0, \; \ldots, \; l_k - 1$$

(l_k — кратность корня $s_k(\lambda)$ уравнения $P(s) = \lambda$); $C_k(\lambda)$ — произвольные постоянные. Из определения типа a краевой задачи (5) следует, что $|\operatorname{Re} s_k(\lambda)| \geqslant a$ Отсюда, используя (8), (9) и условие (4), заключаем, что $v_\lambda(t) \equiv 0$. Таким образом, при выполнении (6) задача (3) имеет лишь тривиальное решение, удовлетворяющее (4).

Пусть теперь условие (6) не выполняется. Тогда при некотором $c_0 > 0$ и всех $r \geqslant 0$ имеем $f(r) \geqslant c_0 e^{ar}$. Выберем

$$z_0 \in Z, \quad |\operatorname{Re} z_0| = a.$$

Поскольку $z_0 \in Z$, существует $\lambda_0 \in \Lambda$ такое, что $z_0 \in S(\lambda_0)$, т. е. $P(z_0) = \lambda_0$. Функция $v(t) = \exp\{z_0 t\}$ удовлетворяет уравнению (7) при $\lambda = \lambda_0$ и имеет оценку

$$|v(t)| \leqslant \exp\{|\operatorname{Re} z_0| \cdot |t|\} = \exp\{a|t|\}.$$

Таким образом,

$$|v(t)| \leqslant \frac{1}{c_0} f(|t|), \quad v(t) \neq 0.$$

Очевидно, (8) имеет место с постоянной

$$C_\lambda = \max_{0 \leqslant k \leqslant p} |z_0|^k \frac{1}{c_0}.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть (3) — краевая задача недостижимого типа a. Тогда условие*

$$\varlimsup_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln [f(t) e^{-at}] = 0 \tag{10}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы задача (3) при условии (4) имела только тривиальное решение.

Доказательство проходит по той же схеме, что и доказательство теоремы 3, и сводится к установлению факта: для того, чтобы всякое решение $v_\lambda(t)$ уравнения (7), удовлетворяющее оценке (8), было тождественно равно нулю, необходимо и достаточно выполнения условия (10). Последнее вытекает из представления (9) решения $v_\lambda(t)$ и условия $|\operatorname{Re} s_k(\lambda)| > a$ при любых k и $\lambda \in \Lambda$. Теорема доказана.

Приведем пример, относящийся к случаю 1.

Краевая задача

$$\gamma \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + cu(x, t) = 0,$$

$$u(0, t) = u(X, t) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad -\infty < t < \infty$$

имеет при $\gamma = 1$ достижимый тип $a = 0$ при $c \geqslant \frac{\pi^2}{X^2}$ и достижимый тип $a = \sqrt{\frac{\pi^2}{X^2} - c}$ при $c < \frac{\pi^2}{X^2}$. Применима теорема 3. При $\gamma = -1$ задача имеет достижимый тип $a = 0$ при любом вещественном c; применима теорема 3. Если $\gamma = -1$ и $\operatorname{Im} c \neq 0$, то задача имеет недостижимый тип $a = 0$ и применима теорема 4.

Замечание 1. В случае $G = [0, X]$, $A = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ при условии закрепления на концах задача (3) имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t), \quad u(0, t) = u(X, t) = 0. \tag{11}$$

Классы единственности решения такой задачи (и несколько более общей) исследованы в [2]. Теоремы 3 и 4 усиливают полученные в [2] результаты. Так, в частности, если (11) является задачей достижимого типа $a = 0$, то в [2] установлена единственность решения такой задачи в классе функций, абсолютно интегрируемых по t, а из теоремы 3 следует, что единственность имеет место в классе функций (4), для которых

$$\varlimsup_{t \to +\infty} f(t) = 0.$$

Краевая задача в бесконечных областях типа бруса.

Пусть теперь

$$G \subseteq R^m, \quad A\left(x, \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right),$$

и Λ означают то же, что и раньше.

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\frac{\partial^p}{\partial t_1^p}+\sum_{j=0}^{p-1}P_j\left(\frac{\partial}{\partial t_2},\ \ldots,\ \frac{\partial}{\partial t_n}\right)\cdot\frac{\partial^j}{\partial t_1^j},\quad n>1,\ P_j(s_2,\ \ldots,s_n)$$

— полиномы с постоянными коэффициентами ($j=0,\ \ldots,\ p-1$).

Спрашивается, при каких условиях на положительную непрерывную при $r>0$ функцию $f(r)$ всякое регулярное решение краевой задачи

$$A\left(x,\ \frac{\partial}{\partial x}\right)u(x,\ t)=P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u(x,\ t); \tag{12}$$

$$\begin{gathered}u(x,\ t)\in D(A),\quad t\in\Omega=[0,\ T]\times R^{n-1}=\\ =\{t:t_1\in[0,\ T],\quad(t_2,\ \ldots,\ t_n)\in R^{n-1}\},\\ \left.\frac{\partial^j u(x,t)}{\partial t_1^j}\right|_{t_1=0}=0,\quad j=0,\ \ldots,\ p-1,\end{gathered} \tag{12'}$$

удовлетворяющее условию

$$\|u(x,\ t)\|_{L_2(G)}\leqslant Cf(\|t\|),\quad \|t\|=\sqrt{t_1^2+\ \ldots\ +t_n^2}, \tag{13}$$

тождественно равно нулю.

Область $B=G\times\Omega$ мы называем областью типа бруса, так как при $G=[0,\ X]$ и $n=2$ B является брусом в трехмерном пространстве:

$$B=[0,\ X]\times[0,\ T]\times R^1.$$

Назовем приведенным порядком ([4]; см. также [5]) полинома $P(s)$ относительно s_1 число

$$p_0=\max_{0\leqslant j\leqslant p-1}\frac{p_j}{p-j}, \tag{14}$$

где

$$p_j=\deg P_j(s_2,\ \ldots,\ s_n).$$

Теорема 5. *Пусть приведенный порядок полинома $P(s)$ относительно s_1 равен $p_0>1$. Для того, чтобы всякое регулярное решение задачи (12) — (12′), удовлетворяющее оценке (13), тождественно равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int^{\infty}\left(\frac{r}{\ln f(r)}\right)^{p_0-1}dr=\infty. \tag{15}$$

Доказательство состоит в применении следствия, а затем известных теорем о классах единственности решения задачи Коши для уравнений с постоянными коэффициентами. В рассматриваемом случае $H=L_2(G)$,

$$C_{f,\,L_2}(\Omega)=\{u(x,t):(x,\ t)\in B=G\times\Omega,\quad u(x,\ t)\in L_2(G)\}$$

при любом

$$t \in \Omega \text{ и } \|u(x, t)\|_{L_2(G)} \leqslant C_n f(\|t\|),$$

оператор P определяется аналогично предыдущему с тем отличием, что $D(P)$ содержит лишь функции, удовлетворяющие условию (12′);

$$C_f(\Omega) = \{v(t),\ t \in \Omega,\ |v(t)| \leqslant C_v f(\|t\|)\}, \tag{16}$$

$D(\overline{P})$ состоит из функций, обладающих всеми производными до порядка, равного порядку $\overline{P}$, и удовлетворяющих условию (12):

$$\overline{P}v(t) = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) v(t);$$

очевидно, P обладает свойством e.

В силу следствия, всякое регулярное решение задачи (12) — — (12′) при условии (13) тождественно равно нулю тогда и только тогда, когда всякое регулярное решение $v_\lambda(t)$ уравнения

$$P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) v_\lambda(t) = \lambda v_\lambda(t), \quad \lambda \in \Lambda, \tag{17}$$

удовлетворяющее условиям (16) и оценкам

$$|D_t^{(\alpha)} v_\lambda(t)| \leqslant C_v f(\|t\|), \quad |\alpha| \leqslant \deg P, \tag{18}$$

тождественно равно нулю.

Но задача (17) — (16) есть задача Коши для дифференциального уравнения (17) с постоянными коэффициентами и параметром λ. Наличие этого параметра не влияет на классы единственности решения этой задачи, так как последние зависят лишь от приведенного порядка уравнения (17), а он вычисляется по формуле (14) и не зависит от λ. Применяя теорему единственности [6], заключаем, что при выполнении (15) всякие решения задачи (17) — (16), удовлетворяющие (18), тождественно равны нулю. Если же (15) не выполнено, то задача (17) — (16) имеет нетривиальное решение, удовлетворяющее оценке (18) [7]. Теорема доказана.

Некоторые замечания об уравнениях с переменными коэффициентами

Применяя теоремы 3 и 4 к исследованию задачи без начальных условий

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) u(x, t), \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad -\infty < t < \infty, \tag{19}$$

$$u(0, t) = u(X, t) = 0 \tag{19′}$$

мы можем отметить, что каков бы ни был полином с постоянными коэффициентами $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$, единственность решения этой задачи гарантируется при выполнении условия

$$\lim_{|t|\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant X} |u(x, t)| = 0.$$

Представляется естественным ожидать, что и в случае, когда коэффициенты $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ являются ограниченными достаточно гладкими функциями t, справедлив аналогичный результат. Во всяком случае, подобная ситуация имеет место, если вместо (19′) задавать начальные данные Коши: $u(0, t) = u_x'(0, t) = 0$. Более того, из результатов, полученных в [8], следует, что если коэффициенты $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ растут при $|t| \to \infty$, но не слишком быстро, то классы единственности решения задачи Коши для уравнения (19) будут те же, что и для соответствующего уравнения с постоянными коэффициентами (и определяются только степенью полинома $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$).

Отметим, что если приведенный порядок по s_1 полинома $P(s)$ $p_0 \leqslant 1$, то аналогично доказанной теореме вопрос о единственности решения задачи (12) — (12′) в классе функций (13) сводится к вопросу о единственности решения задачи Коши (17) — (16) в классе функций (18). При этом [4, с. 52] в роли $f(r)$ можно выбрать при $p_0 = 1$ любую функцию вида

$$f(r) = \exp\{Ar^{\alpha}\}, \quad A > 0, \ \alpha > 0,$$

а при $p_0 < 1$ — любую функцию.

Ниже приводится пример, показывающий, что даже в случае, когда (переменные) коэффициенты полинома $P\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ стремятся к постоянным при $|t| \to \infty$, задача (19) — (19′) может иметь нетривиальное решение, которое при $|t| \to \infty$ убывает быстрее заданной степени величины $|t|^{-1}$.

Пример. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{2nt^{2n-1}}{1+t^{2n}} - 1\right) u(x, t) \tag{20}$$

имеет решение

$$u(x, t) = \frac{\sin x}{1+t^{2n}},$$

которое удовлетворяет условиям

$$u(0, t) = u(\pi, t) \equiv 0.$$

(При этом «предельная» задача

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} - u$$

при условиях

$$u(0, t) = u(\pi, t) \equiv 0$$

является задачей достижимого типа 0).

Рассмотрим несколько подробнее уравнение

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + q(t)\, u(x, t), \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad -\infty < t < \infty \tag{21}$$

при краевых условиях

$$u(0, t) = u(X, t) \equiv 0. \tag{21'}$$

Множество Λ в этом случае есть

$$\Lambda = \left\{-\frac{k^2\pi^2}{X^2},\ k = 1,\ 2,\ \ldots\right\}$$

Теоремы 1 и 2 сводят вопрос о единственности решения рассматриваемой задачи к вопросу о существовании нетривиальных решений уравнения

$$\frac{dy}{dt} + q(t)\, y(t) = -\frac{k^2\pi^2}{X^2} y(t),\ k = 1,\ 2,\ \ldots$$

Решение y_k последнего уравнения имеет вид

$$y_k(t) = A \exp\left\{-\frac{k^2\pi^2}{X^2} t - \int_0^t q(\xi)\, d\xi\right\}, \tag{22}$$

где A — произвольная постоянная.

Используя эту формулу и применяя следствие, получаем, что если $\left|\int_0^t \operatorname{Re} q(\xi)\, d\xi\right| \leqslant M$, то для задачи (19) — (19′) справедлив результат теоремы 3 с $a = \frac{\pi^2}{X^2}$, а если $\operatorname{Re} q(\xi) = q_0 + q_1(\xi)$, где $q_0 = \mathrm{const}$, а $\left|\int_0^t q_1(\xi)\, d\xi\right| \leqslant M$, то тот же результат верен при

$$a = \min_{k=1,\ 2,\ldots} \left|-\frac{k^2\pi^2}{X^2} - q_0\right|.$$

В примере (20) подобное условие не выполняется. Из (22) видно, что знак $q(t)$ играет существенную роль. Если в (20) изменить знак слагаемого $2nt^{2n-1}(1 + t^{2n})^{-1}$, то соответствующая краевая задача, как видно из (22) и теоремы 1, имеет единственное решение в классе функций

$$|u(x, t)| \leqslant A_u (1 + |t|^\alpha), \quad \alpha < 2n.$$

Еще контрастнее этот эффект в случае растущей функции $q(t)$: при $q(t)=t$ в (21) задача (21)—(21′) имеет нетривиальное решение $u(x, t)$ с оценкой

$$|u(x, t)| \leqslant C_\varepsilon \exp\left\{-\frac{1-\varepsilon}{2} t^2\right\},$$

а при $q(t) = -t$ эта задача имеет единственное решение в классе

$$|u(x, t)| \leqslant C_\varepsilon \exp\left\{\frac{1-\varepsilon}{2} t^2\right\}.$$

Авторы выражают благодарность В. Э. Кацнельсону за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Борок В. М. Классы единственности решений краевой задачи в бесконечном слое для систем линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами. — «Мат. сборник», 1969, т. 79, (121), № 2, с. 293—304.
2. Борок В. М. Классы единственности решения краевой задачи в бесконечном слое. — ДАН СССР, 1968, т. 183, № 5, с. 995—999.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. Гостехиздат, М. — Л., 1951. 679 с.
4. Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е. — Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. «Обобщенные функции». Вып. 3. Москва, 1958. 470 с.
5. Борок В. М. Приведение системы линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами к каноническому виду. — ДАН СССР, 1957, т. 115, № 1, с. 13—17.
6. Чаус Н. Н. О единственности решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. — «Укр. мат. журн.», 1965, т. 17, № 1, с. 126—130.
7. Борок В. М. О задаче Коши для общих линейных уравнений. — ДАН СССР, 1967, т. 177, № 4, с. 555—559.
8. Житомирский Я. И. Классы единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с растущими коэффициентами. — «Изв. АН СССР», 1967, т. 31, № 4, с. 763—783.