С.Н. Зиненко

Математический анализ

Интегрирование функций нескольких переменных

(теория к задачам)

2016

32. Двойные интегралы. Физические и геометрические приложения

Пусть в области D *задана функция* $f(\vec{\boldsymbol{r}}) = f(x, y)$.

Разобьем область D *кривыми на малые попарно не налегающие части* D_k

$$D = D_1 \cup \ldots \cup D_k \cup \ldots \cup D_n$$

с площадью ΔS_k *и обозначим через* $d = \max\limits_{1 \le k \le n} d_k$ *диаметр разбиения.*

Выберем в каждой части промежуточную точку $\vec{\boldsymbol{\xi}}_k = (\xi_k,\ \eta_k) \in D_k$

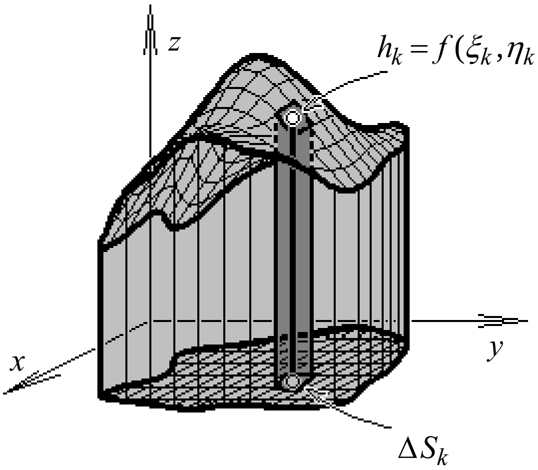
Составим интегральную сумму

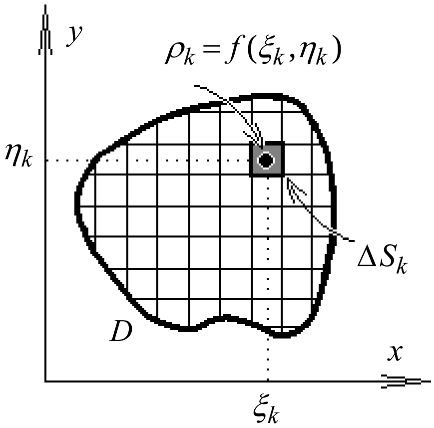
$$\sum_{k=1}^{n} f(\vec{\boldsymbol{\xi}}_k)\, \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k)\, \Delta S_k$$

Двойным интегралом называется предел интегральных сумм, когда диаметр разбиения стремится к нулю

$$\lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\vec{\boldsymbol{\xi}}_k)\, \Delta S_k = \iint\limits_{D} f(\vec{\boldsymbol{r}})\, dS = \iint\limits_{D} f(x,\ y)\, dx\, dy$$

если он существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора промежуточных точек.





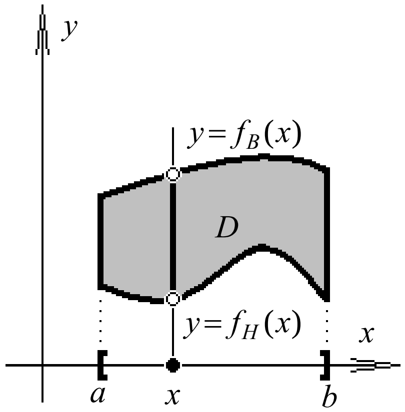
$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k \approx \sum_{k=1}^{n} h_k \cdot \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k)\, \Delta S_k$$

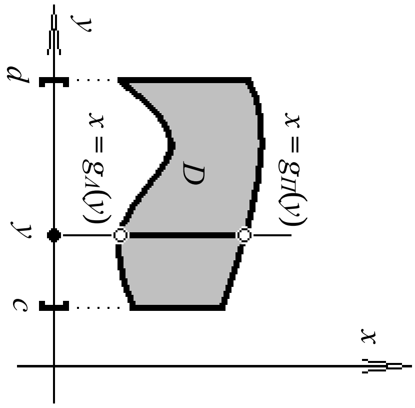
$$m = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^{n} \rho_k \cdot \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k)\, \Delta S_k$$

Геометрический *смысл: объем под поверхностью “высотой”* $h = f(x,\ y),\quad (x,\ y) \in D$

Физический *смысл: масса (заряд) пластины* D *с поверхностной плотностью* $\rho = f(x,\ y)$

Если область D имеет вид “криволинейного прямоугольника”





$D = \left\{ a \le x \le b, \quad f_H(x) \le y \le f_B(x) \right\}$ $\qquad$ $D = \left\{ c \le y \le d, \quad g_Л(y) \le x \le g_П(y) \right\}$

то двойной интеграл может быть сведен к повторному

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{f_H(x)}^{f_B(x)} f(x,\,y)\,dy \Big)\,dx}$$

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,\,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d \Big(\int\limits_{g_Л(y)}^{g_П(y)} f(x,\,y)\,dx \Big)\,dy}$$

При нахождении центра масс неоднородной пластины D с поверхностной плотностью $\rho = \rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = \rho(x,\,y)$ и массой

$$m = \iint\limits_D \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,dS = \iint\limits_D \rho(x,\,y)\,dx\,dy$$

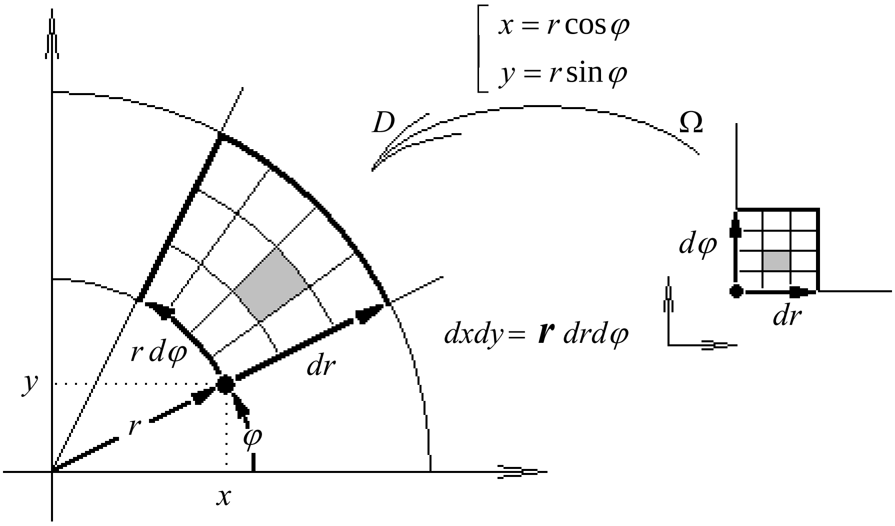
воспользуемся определением центра масс системы материальных точек. Разобьем область D кривыми на малые попарно не налегающие части D_k с массами $\Delta m_k \approx \rho(\vec{\boldsymbol{\xi}}_k)\,\Delta S_k = \rho(\xi_k,\,\eta_k)\Delta S_k$, настолько малыми, что каждую можно рассматривать как материальную точку $\vec{\boldsymbol{\xi}}_k = (\xi_k,\,\eta_k)$. Тогда

$$\vec{\boldsymbol{r}}_0 \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{\xi}}_k\,\Delta m_k \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{\xi}}_k\,\rho(\vec{\boldsymbol{\xi}}_k)\,\Delta S_k \underset{d\to 0}{\to} \frac{1}{m}\iint\limits_D \vec{\boldsymbol{r}}\,\rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,dS \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_D x\,\rho(x,\,y)\,dx\,dy \\ y_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_D y\,\rho(x,\,y)\,dx\,dy \end{array} \right.$$

Сравнить! *нахождение площади “криволинейного прямоугольника” с помощью двойного интеграла с нахождением с помощью однократного*

$S = \iint\limits_D 1\,dx\,dy = \;\to$ $\Big[\, D = \left\{ a \le x \le b,\ f_H(x) \le y \le f_B(x) \right\} \Big]$ $\to = \int\limits_a^b \Big(\int\limits_{f_H(x)}^{f_B(x)} 1\,dy \Big)\,dx = \int\limits_a^b \Big(f_B(x) - f_H(x) \Big)dx$	$S = \iint\limits_D 1\,dx\,dy = \;\to$ $\Big[\, D = \left\{ c \le y \le d,\quad g_Л(y) \le x \le g_П(y) \right\} \Big]$ $\to = \int\limits_c^d \Big(\int 1\,dx \Big)\,dy = \int\limits_c^d \Big(g_П(y) - g_Л(y) \Big)dy$

33. Двойные интегралы. Переход к полярным координатам



$$\boxed{\iint\limits_D f\left(x^2+y^2\right)dx\,dy = \iint\limits_\Omega f\left(r^2\right)\,\boldsymbol{r}\;dr\,d\varphi}$$

Сравнить! *нахождение площади “криволинейного сектора” с помощью двойного интеграла с нахождением с помощью однократного*

$$S = \iint\limits_D 1\,dx\,dy = \;\rightarrow$$

$$\left[\; D \rightarrow \Omega = \left\{\, \alpha \le \varphi \le \beta,\;\; r_H(\varphi) \le r \le r_B(\varphi) \,\right\} \;\right]$$

$$\rightarrow = \iint\limits_\Omega r\;dr\,d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta \left(\int\limits_{r_H(\varphi)}^{r_B(\varphi)} r\;dr \right) d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta \tfrac{1}{2}\,r^2 \Bigg|_{r_H(\varphi)}^{r_B(\varphi)} d\varphi = \tfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \left(r_B^2(\varphi) - r_H^2(\varphi) \right) d\varphi$$

34. Тройные интегралы. Физические и геометрические приложения

Пусть в области V *задана функция* $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$.

Разобьем область V *поверхностями на малые попарно не налегающие части* V_k

$$V = V_1 \cup \ldots \cup V_k \cup \ldots \cup V_n$$

с объемами ΔV_k *и обозначим через* $d = \max\limits_{1 \le k \le n} d_k$ *диаметр разбиения.*

Выберем в каждой части промежуточную точку $\vec{\xi}_k = (\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k) \in V_k$

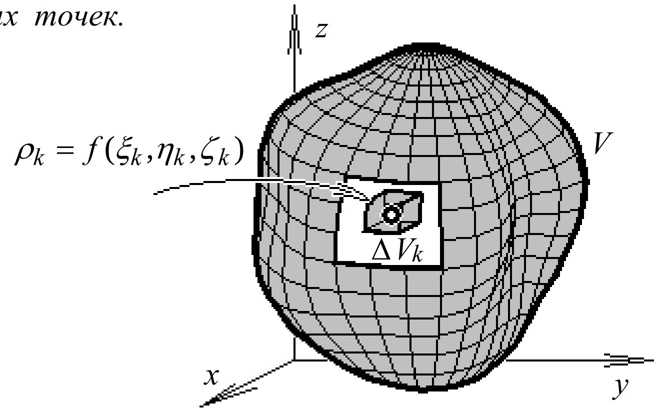
Составим интегральную сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\vec{\xi}_k)\,\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\,\Delta V_k$$

Тройным интегралом называется предел интегральных сумм, когда диаметр разбиения стремится к нулю

$$\lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\vec{\xi}_k)\,\Delta V_k = \iiint\limits_V f(\vec{r})\,dV = \iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$$

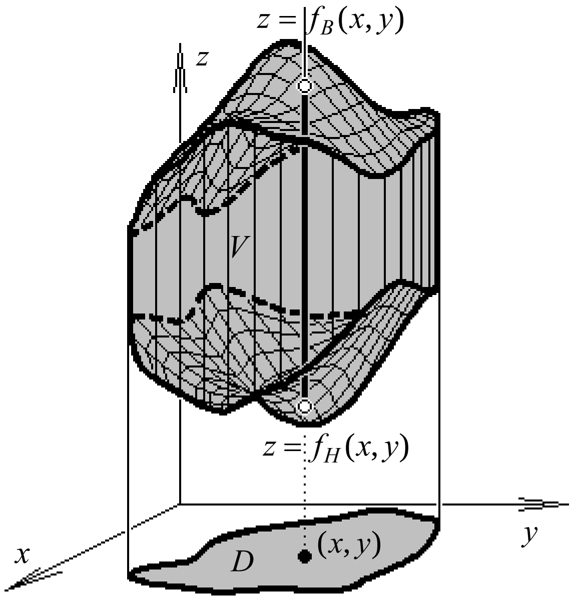
если он существует, конечен и не зависит ни от способа разбиения, ни от выбора промежуточных точек.

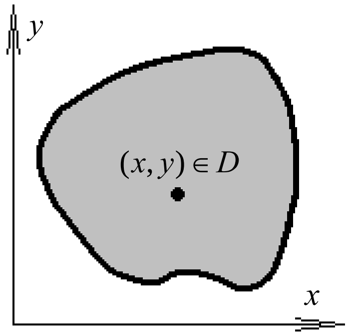


Физический *смысл: масса (заряд) тела* V *с объемной плотностью* $\rho = f(x, y, z)$

$$m = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k \approx \sum_{k=1}^{n} \rho_k \cdot \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\,\Delta V_k$$

Если область V имеет вид “кривоповерхностного цилиндра”





$$V = \left\{ (x,\ y) \in D, \quad f_H(x,\ y) \le z \le f_B(x,\ y) \right\}$$

то тройной интеграл может быть сведен к повторному

$$\boxed{\iiint\limits_V f(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D \Big(\int\limits_{f_H(x,y)}^{f_B(x,y)} f(x,\ y,\ z)\,dz \Big) dx\,dy}$$

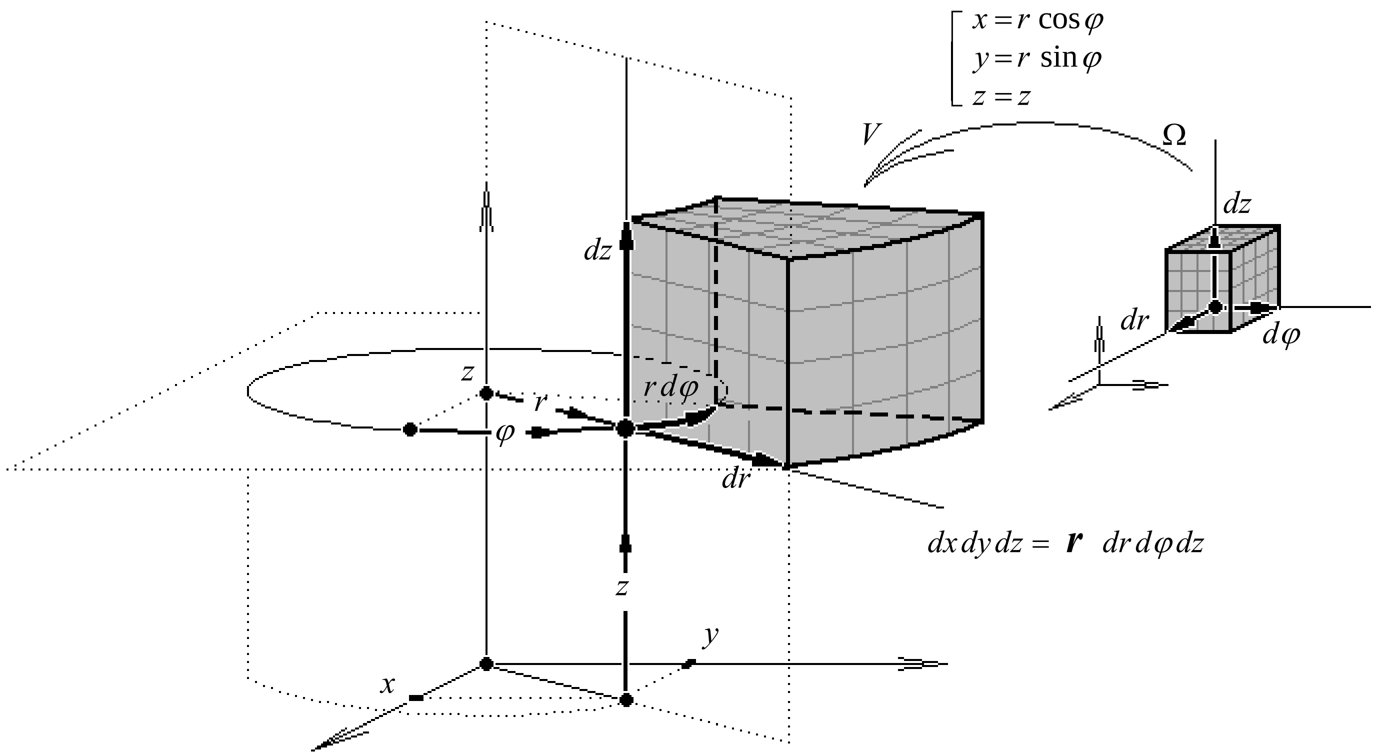
При нахождении центра масс неоднородного тела V с объемной плотностью $\rho = \rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = \rho(x,\ y,\ z)$ и массой

$$m = \iiint\limits_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,dV = \iiint\limits_V \rho(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz$$

воспользуемся определением центра масс системы материальных точек. Разобьем объем V поверхностями на малые попарно не налегающие части V_k с массами $\Delta m_k \approx \rho(\vec{\boldsymbol{\xi}}_k)\Delta V_k = \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta V_k$, настолько малые, что каждую можно рассматривать как материальную точку $\vec{\boldsymbol{\xi}}_k = (\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)$. Тогда

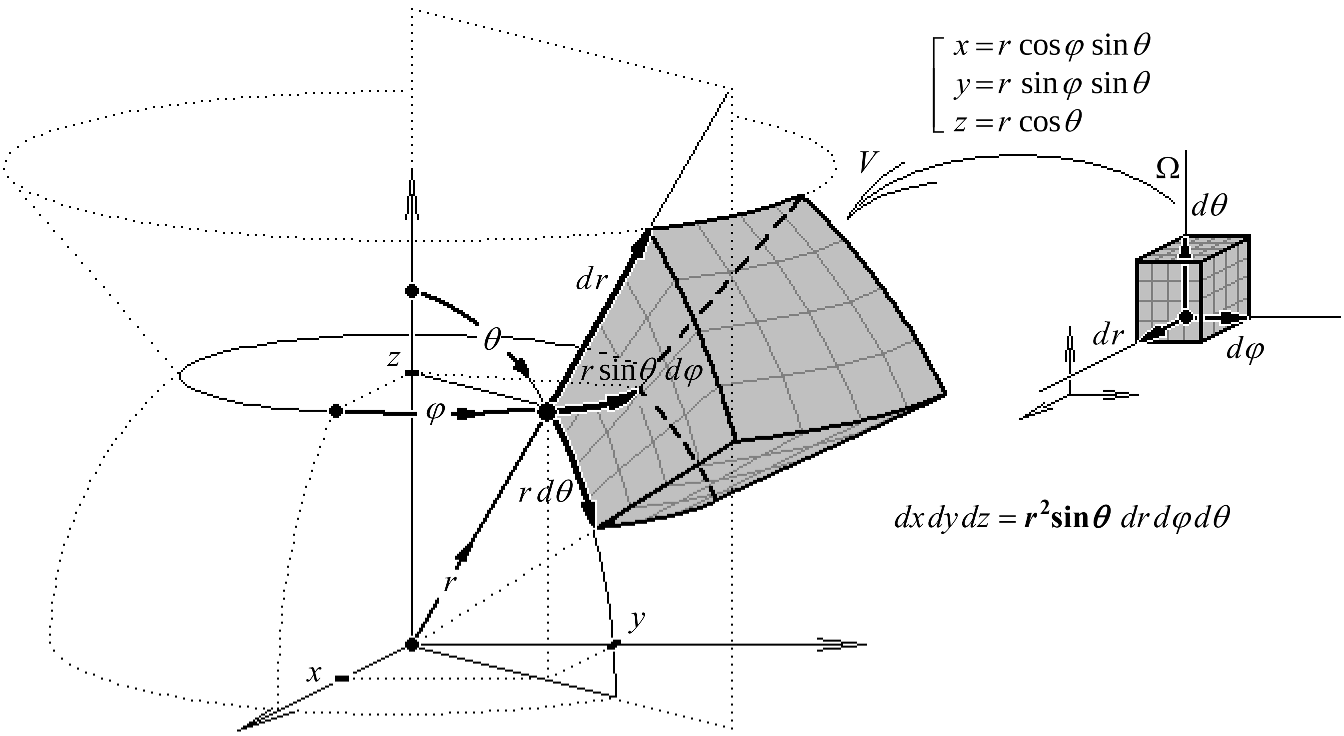
$$\vec{\boldsymbol{r}}_0 \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{\xi}}_k\,\Delta m_k \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{\xi}}_k\,\rho(\vec{\boldsymbol{\xi}}_k)\Delta V_k \underset{d\to 0}{\to} \frac{1}{m}\iiint\limits_V \vec{\boldsymbol{r}}\,\rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,dV \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_V x\rho(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz \\ y_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_V y\rho(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz \\ z_0 &= \frac{1}{m}\iiint\limits_V z\rho(x,\ y,\ z)\,dx\,dy\,dz \end{aligned} \right.$$

35. Тройные интегралы. Переход к цилиндрическим координатам



$$\boxed{\iiint\limits_V f\left(x^2+y^2,\ z\right)dx\,dy\,dz=\iiint\limits_\Omega f\left(r^2,\ z\right)\boldsymbol{r}\ dr\,d\varphi\,dz}$$

36. Тройные интегралы. Переход к сферическим координатам



$$\iiint\limits_V f\left(x^2+y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz = \iiint\limits_\Omega f\left(r^2\right)\,\mathbf{r^2\sin\boldsymbol{\theta}}\;dr\,d\varphi\,d\theta$$

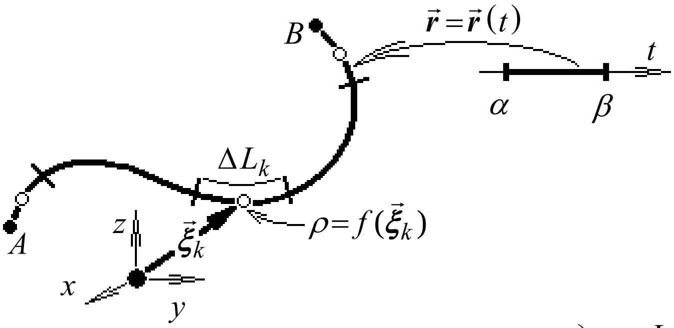
37. Криволинейные интегралы по длине (масса, заряд)

Пусть дана ***простая гладкая*** *кривая*

$$L = \left\{ \vec{r} = \vec{r}(t) = \begin{bmatrix} x = x(t) \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{bmatrix} \quad t \in [\,\alpha, \beta\,] \right\} \qquad (\exists \ \text{непрерывная } \vec{r}_t{}'(t) \neq \vec{0})$$

на которой распределена масса (заряд) с заданной линейной непрерывной плотностью

$$\rho_{cp} = \frac{\Delta m}{\Delta L} \quad \Rightarrow \quad \rho = \lim_{\Delta L \to \vec{r}} \rho_{cp} = f(\vec{r})$$



Найдем массу (заряд) кривой.

Разобьем кривую на малые части $L = \bigcup\limits_{k=1}^{n} L_k$ *длиной* ΔL_k *и выберем на них промежуточные точки* $\vec{\xi}_k \in L_k$.

Если диаметр разбиения достаточно мал, то плотность ρ *на протяжении дуги* L_k *почти не изменяется* $f(\vec{r}) \approx f(\vec{\xi}_k)$, *так что масса равна*

$$m = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\vec{\xi}_k)\,\Delta L_k = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\,\Delta L_k$$

Полученный предел называется криволинейным интегралом по длине от скалярной функции $f(\vec{r})$ *по кривой* L, *обозначается*

$$\int\limits_L f(\vec{r})\,dL = \int\limits_L f(x,\,y,\,z)\,dL$$

и сводится к определенному

$$\boxed{\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r})\,\left|\vec{r}_t{}'\right| \Bigg|_{\vec{r}=\vec{r}(t)} dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x,\,y,\,z)\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,\Bigg|_{\substack{x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)}} dt}$$

При нахождении центра масс неоднородной кривой L *с линейной плотностью* $\rho = \rho(\vec{r}) = \rho(x,\,y,\,z)$ *и массой*

$$m = \int\limits_L \rho(\vec{r})\,dL = \int\limits_L \rho(x,\,y,\,z)\,dL$$

воспользуемся определением центра масс системы материальных точек. Разобьем кривую L *точками на малые части* L_k *с массами* $\Delta m_k \approx \rho(\vec{\xi}_k)\,\Delta L_k = \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\,\Delta L_k$, *настолько малые, что каждую можно рассматривать как материальную точку* $\vec{\xi}_k = (\xi_k,\,\eta_k,\,\zeta_k)$. *Тогда*

$$\vec{r}_0 \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \vec{\xi}_k\,\Delta m_k \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \vec{\xi}_k\,\rho(\vec{\xi}_k)\,\Delta L_k \underset{d \to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{m}\int\limits_L \vec{r}\,\rho(\vec{r})\,dL \qquad \Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x_0 = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int\limits_L x\,\rho(x,\,y,\,z)\,dL \\ y_0 = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int\limits_L y\,\rho(x,\,y,\,z)\,dL \\ z_0 = \dfrac{1}{m}\displaystyle\int\limits_L z\,\rho(x,\,y,\,z)\,dL \end{bmatrix}$$

38. Криволинейные интегралы по координатам (работа силы)

Пусть дана ***простая гладкая*** *кривая*

$$L=\left\{\,\vec{r}=\vec{r}(t)=\begin{bmatrix} x=x(t)\\ y=y(t),\quad t\in\left[\,\alpha,\beta\,\right]\\ z=z(t)\end{bmatrix}\right\}\qquad (\exists \text{ непрерывная } \vec{r}_t{}'(t)\neq\vec{0})$$

воспринимаемая, как траектория движения материальной точки. Тогда о любых двух точках $A_1(\vec{r}(t_1))\prec A_2(\vec{r}(t_2))$ *можно сказать, что одна из них* A_1 *встретится раньше другой* A_2*, понимая под этим, что* $t_1<t_2$*. Таким образом, конкретной параметризацией автоматически задается направление движения вдоль кривой или, как говорят,* ***ориентация****. В частном случае, когда кривая простая (без точек самопересечения), направление движения однозначно определяется указанием одной из концевых точек* A *или* B *в качестве начала или конца. Поэтому простые кривые с заданной ориентацией обозначаются* L_{AB} *(или* L_{BA}*). Если дополнительно кривая гладкая, то направление движения можно задать, выбрав непрерывное поле единичных векторов касательных*

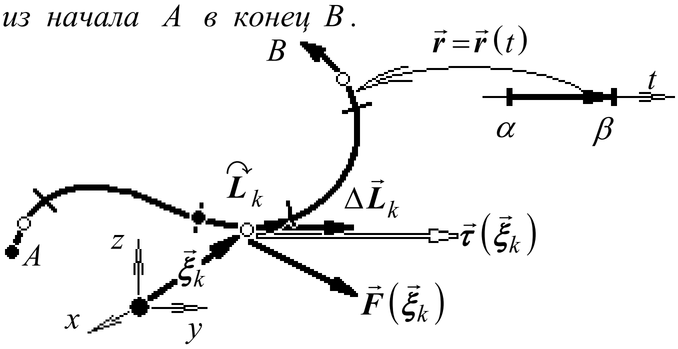
$$+\vec{\tau}(\vec{r})=\vec{\tau}(\vec{r}(t))=\frac{\vec{r}\,'(t)}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|}\quad \text{(или }\ -\vec{\tau}(\vec{r})\text{)}$$

Найдем работу непрерывно меняющейся вдоль кривой $L_{AB}\equiv L_+$ *силы*

$$\vec{F}(\vec{r})=\begin{bmatrix} P(x,\ y,\ z)\\ Q(x,\ y,\ z)\\ R(x,\ y,\ z)\end{bmatrix}$$

при перемещении материальной точки из начала A *в конец* B.

Разобьем кривую на малые части $L_+=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\overset{\frown}{L}_k$ *длиной* ΔL_k *и выберем на них промежуточные точки* $\vec{\xi}_k\in\overset{\frown}{L}_k$*. Если диаметр разбиения достаточно мал, то сила* $\vec{F}$ *на протяжении дуги* $\overset{\frown}{L}_k$ *почти не изменяется* $\vec{F}(\vec{r})\approx\vec{F}(\vec{\xi}_k)$,



а сама дуга $\overset{\frown}{L}_k$ *почти "не искривляется"* $\vec{\tau}(\vec{r})\approx\vec{\tau}(\vec{\xi}_k)$ *и может быть заменена вектором касательной* $\Delta\vec{L}_k$ *такой же длины (вектором ориентированной длины)*

$$\overset{\frown}{L}_k\approx\Delta\vec{L}_k=\vec{\tau}(\vec{\xi}_k)\cdot\Delta L_k=\begin{bmatrix}\cos\alpha_k\\ \cos\beta_k\\ \cos\gamma_k\end{bmatrix}\Delta L_k=\begin{bmatrix}\Delta L_{x_k}\\ \Delta L_{y_k}\\ \Delta L_{z_k}\end{bmatrix}$$

координаты которого можно рассматривать, как длины проекций ориентированной дуги $\overset{\frown}{L}_k$ *на координатные оси* $Ox,\ \ Oy,\ \ Oz$*. Тогда работа равна*

$$A_{\vec{F}}=\sum_{k=1}^{n}\Delta A_k=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^{n}\left(\vec{F}(\vec{\xi}_k),\ \Delta\vec{L}_k\right)=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k)\Delta L_{x_k}+Q(\ldots)\Delta L_{y_k}+R(\ldots)\Delta L_{z_k}$$

Полученный предел называется криволинейным интегралом по координатам от вектор-функции $\vec{F}(\vec{r})$ *по ориентированной кривой* $L_+\equiv L_{AB}$ *(совпадая с интегралом по длине от скалярной функции* $f=\left(\vec{F},\ \vec{\tau}\right)$*), обозначается*

$$\int\limits_{L_{AB}} \left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\, d\vec{\boldsymbol{L}}\ \right) = \int\limits_{L_{AB}} P(x,\ y,\ z)dx + Q(...)dy + R(...)dz$$

и сводится к определенному интегралу

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} \left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \vec{\boldsymbol{r}}_t{}' \ \right)\Big|_{\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} P(x,\ y,\ z)\cdot x' + Q(...)\cdot y' + R(...)\cdot z' \Big|_{\substack{x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)}} dt}$$

39. Поверхностные интегралы по площади (масса, заряд)

Пусть дана ***простая гладкая*** *поверхность*

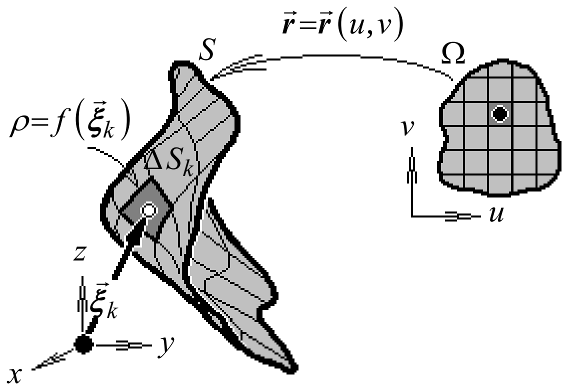
$$S = \left\{ \vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u,\ v) = \left[\begin{array}{l} x = x(u,\ v) \\ y = y(u,\ v),\ (u,\ v) \in \Omega \\ z = z(u,\ v) \end{array} \right. \right\} \ (\exists\ \vec{\boldsymbol{r}}_u',\ \vec{\boldsymbol{r}}_v' \text{ - непрерывные, } \left[\ \vec{\boldsymbol{r}}_u',\ \vec{\boldsymbol{r}}_v'\ \right] \neq \vec{\boldsymbol{0}})$$

на которой распределена масса (заряд) с заданной поверхностной непрерывной плотностью

$$\rho_{cp} = \frac{\Delta m}{\Delta S} \quad \Rightarrow \quad \rho = \lim_{\Delta S \to \vec{\boldsymbol{r}}} \rho_{cp} = f(\vec{\boldsymbol{r}})$$

Найдем массу (заряд) поверхности. Разобьем поверхность на малые части $S = \bigcup\limits_{k=1}^{n} S_k$ *площадью* ΔS_k *и выберем на них промежуточные точки* $\vec{\boldsymbol{\xi}}_k \in S_k$.

Если диаметр разбиения достаточно мал, то плотность ρ *на протяжении лунки* S_k *почти не изменяется* $f(\vec{\boldsymbol{r}}) \approx f(\vec{\boldsymbol{\xi}}_k)$, *так что масса равна*



$$m = \sum_{k=1}^{n} \Delta m_k = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\vec{\boldsymbol{\xi}}_k) \Delta S_k = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\ \eta_k,\ \zeta_k) \Delta S_k$$

Полученный предел называется поверхностным интегралом по площади от скалярной функции $f(\vec{\boldsymbol{r}})$ *по поверхности* S, *обозначается*

$$\iint\limits_S f(\vec{\boldsymbol{r}})\, dS = \iint\limits_S f(x,\ y,\ z)\, dS$$

и сводится к двойному интегралу

$$\sqrt{\left(\vec{\boldsymbol{r}}_u',\ \vec{\boldsymbol{r}}_u' \right)\left(\vec{\boldsymbol{r}}_v',\ \vec{\boldsymbol{r}}_v' \right) - \left(\vec{\boldsymbol{r}}_u',\ \vec{\boldsymbol{r}}_v' \right)^2}$$

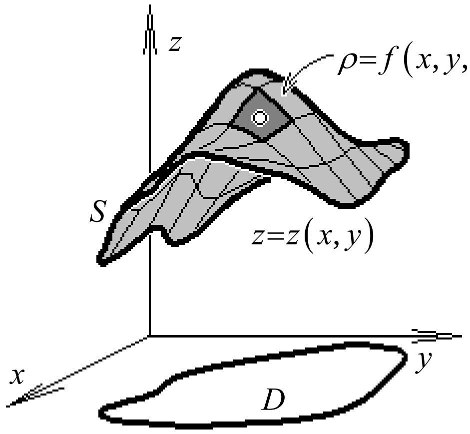
$$\boxed{\iint\limits_{\Omega} f(\vec{\boldsymbol{r}}) \left. \overset{//}{\left| \left[\ \vec{\boldsymbol{r}}_u', \vec{\boldsymbol{r}}_v'\ \right] \right|} \right|_{\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{r}}(u,v)} du\, dv = \iint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z) \left. \left\| \begin{matrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{matrix} \right\| \right|_{\substack{x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v)}} du\, dv}$$

В частном случае, когда поверхность

$$S = \left\{ z = z(x, y), \quad (x, y) \in D \right\}$$

график непрерывно дифференцируемой функции, интеграл равен

$$\boxed{\iint\limits_S f(x, y, z)dS = \iint\limits_D f(x, y, z)\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\Big|_{z=z(x,y)} dx\,dy}$$



При нахождении центра масс неоднородной поверхности S с поверхностной плотностью $\rho = \rho(\vec{\boldsymbol{r}}) = \rho(x, y, z)$ и массой

$$m = \iint\limits_S \rho(\vec{\boldsymbol{r}})\,dS = \iint\limits_S \rho(x, y, z)\,dS$$

воспользуемся определением центра масс системы материальных точек. Разобьем поверхность S кривыми на малые попарно не налегающие части S_k с массами $\Delta m_k \approx \rho(\vec{\boldsymbol{\xi}}_k)\,\Delta S_k = \rho(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k$, настолько малые, что каждую можно рассматривать как материальную точку $\vec{\boldsymbol{\xi}}_k = (\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$. Тогда

$$\vec{\boldsymbol{r}}_0 \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{\xi}}_k\,\Delta m_k \approx \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n} \vec{\boldsymbol{\xi}}_k\,\rho(\vec{\boldsymbol{\xi}}_k)\Delta S_k \underset{d\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{m}\iint\limits_S \vec{\boldsymbol{r}}\,\rho(\vec{\boldsymbol{r}})dS \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_S x\rho(x, y, z)dS \\ y_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_S y\rho(x, y, z)dS \\ z_0 = \frac{1}{m}\iint\limits_S z\rho(x, y, z)dS \end{array}\right.$$

40. Поверхностные интегралы по координатам (поток вектора)

Теория

*Пусть задана **простая гладкая** поверхность*

$$S=\left\{\vec{\boldsymbol r}=\vec{\boldsymbol r}(u,v)=\begin{bmatrix} x=x(u,\ v)\\ y=y(u,\ v),\ \ (u,\ v)\in\Omega \\ z=z(u,\ v)\end{bmatrix}\right\}\ (\exists\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v' \text{ - непрерывные, } \left[\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\ \right]\neq\vec{\boldsymbol 0})$$

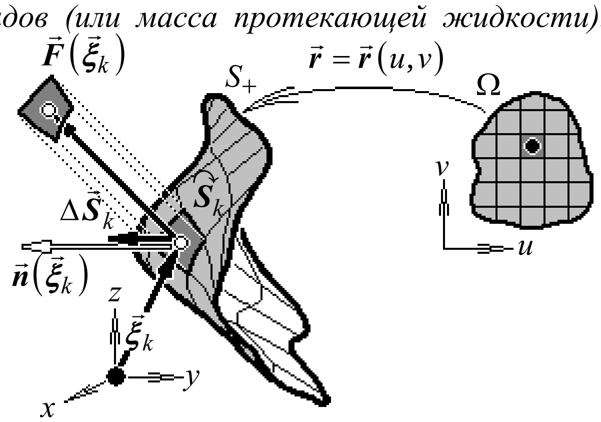
На ней можно выбрать два непрерывных поля единичных векторов нормалей

$$+\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r})=\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r}(u,v))=\frac{\left[\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\ \right]}{\left|\left[\ \vec{\boldsymbol r}_u',\ \vec{\boldsymbol r}_v'\ \right]\right|}\qquad (\text{или}\quad -\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r}))$$

*определяющих выбор стороны S_+ (или S_-) поверхности или, как говорят, **ориентацию**. Найдем поток непрерывного векторного поля через данную сторону поверхности*

$$\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})=\begin{bmatrix} P(x,\ y,\ z)\\ Q(x,\ y,\ z)\\ R(x,\ y,\ z)\end{bmatrix}$$

Поток стационарного поля скоростей $\vec{\boldsymbol v}(\vec{\boldsymbol r})$ жидкости – это ее объем, протекающий через соответствующую сторону поверхности в единицу времени.
Поток стационарного тока с плотностью $\vec{\boldsymbol j}(\vec{\boldsymbol r})=\rho(\vec{\boldsymbol r})\cdot\vec{\boldsymbol v}(\vec{\boldsymbol r})$ - это сила тока, движущихся со скоростью $\vec{\boldsymbol v}(\vec{\boldsymbol r})$ и плотностью $\rho(\vec{\boldsymbol r})$ зарядов (или масса протекающей жидкости).
Разобьем поверхность на малые части $S_+=\bigcup\limits_{k=1}^{n}\overset{\frown}{\boldsymbol S}_k$ площадью ΔS_k и выберем на них промежуточные точки $\vec{\boldsymbol\xi}_k\in\overset{\frown}{\boldsymbol S}_k$
Если диаметр разбиения достаточно мал, то скорость $\vec{\boldsymbol v}$ на протяжении лунки $\overset{\frown}{\boldsymbol S}_k$ почти не изменяется $\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})\approx\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol\xi}_k)$, а сама лунка $\overset{\frown}{\boldsymbol S}_k$ почти “не искривляется” $\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol r})\approx\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol\xi}_k)$ и может быть заменена соответствующей касательной плоскостью с такой же площадью ΔS_k, что равносильно заданию так называемого вектора ориентированной площади



$$\overset{\frown}{\boldsymbol S}_k\approx\Delta\vec{\boldsymbol S}_k=\vec{\boldsymbol n}(\vec{\boldsymbol\xi}_k)\cdot\Delta S_k=\begin{bmatrix}\cos\alpha_k\\ \cos\beta_k\\ \cos\gamma_k\end{bmatrix}\Delta S_k=\begin{bmatrix}\Delta S_{yz_k}\\ \Delta S_{zx_k}\\ \Delta S_{xy_k}\end{bmatrix}$$

координаты которого можно рассматривать, как площади проекций ориентированной лунки $\overset{\frown}{\boldsymbol S}_k$ $\parallel Ox,\ \parallel Oy,\ \parallel Oz$ на координатные плоскости $yOz,\ zOx,\ xOy$. Тогда поток равен

$$\Pi=\sum_{k=1}^{n}\Delta\Pi_k=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^{n}\left(\ \vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol\xi}_k),\ \Delta\vec{\boldsymbol S}_k\ \right)=\lim_{d\to0}\sum_{k=1}^{n}P(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_{yz_k}+Q(...)\Delta S_{zx_k}+R(...)\Delta S_{xy_k}$$

Полученный предел называется поверхностным интегралом по координатам от вектор-функции $\vec{\boldsymbol F}(\vec{\boldsymbol r})$ по ориентированной поверхности S_+ (совпадая с интегралом по площади от скалярной функции $f=\left(\ \vec{\boldsymbol F},\ \vec{\boldsymbol n}\ \right)$), обозначается

$$\iint\limits_{S_+} \left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ d\vec{\boldsymbol{S}} \right) = \iint\limits_{S_+} P(x,\ y,\ z)\,dy\,dz + Q(\ldots)\,dz\,dx + R(\ldots)\,dx\,dy$$

и сводится к следующему двойному

$$\boxed{\iint\limits_{\Omega} \left(\vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}),\ \vec{\boldsymbol{r}}_u',\ \vec{\boldsymbol{r}}_v' \right)\Bigg|_{\vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}(u,v)} du\,dv = \iint\limits_{\Omega} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u' & y_u' & z_u' \\ x_v' & y_v' & z_v' \end{vmatrix}\Bigg|_{\substack{x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)}} du\,dv}$$

В частном случае, когда

$$S_+ = \left\{ z = z(x,\ y),\ (x,\ y) \in D \right\}$$

верхняя *сторона*
графика непрерывно дифференцируемой функции,
интеграл равен

$$\boxed{\begin{aligned} &\iint\limits_{S_+} P(x,\ y,\ z)\,dy\,dz + Q(\ldots)\,dz\,dx + R(\ldots)\,dx\,dy = \\ &= \iint\limits_{D} \Big(-P(x,\ y,\ z)\cdot z_x' - Q(\ldots)\cdot z_y' + R(\ldots) \Big)\Big|_{z=z(x,y)} dx\,dy \end{aligned}}$$