

ISSN 0453-8048

ВІСНИК

Харківського національного
університету



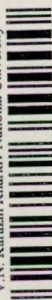
№ 582

Харків
2003

K-14038

П331854

V.N. Karazin Kharkiv National University



00705123

0

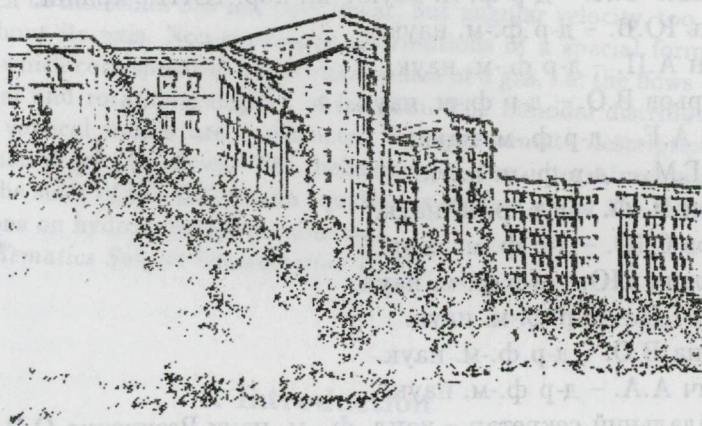
Міністерство освіти та науки України

ISSN 0453-8048

Заснований у 1965 р.

ВІСНИК

Харківського національного
університету



№ 582

Серія

«Математика,

прикладна математика

і механіка»

Випуск 52

Харків

2003



УДК 517.9

До Віснику включено статті з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, математичної теорії керування та механіки, які містять нові теоретичні результати у зазначених галузях і мають прикладне значення.

Для викладачів, наукових працівників, аспірантів, працюючих у відповідних або суміжних сферах.

Редакційна колегія:

Головний редактор – Коробов В.І. – д-р ф.-м. наук.

Члени редакційної колегії:

Борисенко О.А. – д-р ф.-м. наук., чл.-кор. НАН України.

Гандель Ю.В. – д-р ф.-м. наук.

Гришин А.П. – д-р ф.-м. наук.

Золотарьов В.О. – д-р ф.-м. наук.

Руткас А.Г. – д-р ф.-м. наук.

Скляр Г.М. – д-р ф.-м. наук.

Папегон Н. Ф. – д-р ф.-м. наук.

Фаворов С.Ю. – д-р ф.-м. наук.

Чудинович І.Ю. – д-р ф.-м. наук.

Чуєшов І.Д. – д-р ф.-м. наук.

Щербина В.О. – д-р ф.-м. наук.

Янцевич А.А. – д-р ф.-м. наук.

Відповідальний секретар – канд. ф.-м. наук Резуненко О.В.

Адреса редакційної колегії: 61077, Харків, м. Свободи, 4,

ХНУ, механіко-математичний факультет, к.7-29.

Тел. 45-75-18, Email: vestnik@univer.kharkov.ua

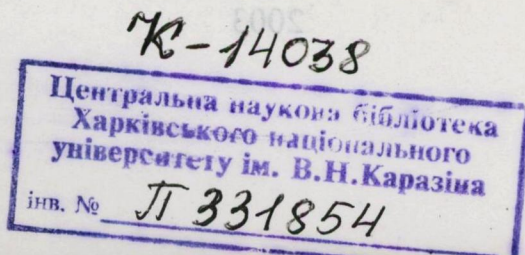
Інтернет:

<http://www-mechmath.univer.kharkov.ua/vestnik/>

Друкується за рішенням Вченої Ради Харківського національного університету (протокол № 4 від 25 квітня 2003 р.).

Свідectво про державну реєстрацію КВ № 4063 від 02.03.2000 р.

©Харківський національний університет, 2003



Non-stationary States of a Gas for the Bryan-Pidduck Model

V. D. Gordevskyy¹, E. M. Buznitska²

¹ Kharkov National University, Ukraine

² Kharkov State University of Economics, Ukraine

The Bryan-Pidduck model is used to describe the evolution of a gas. In this model each of molecules has not only linear, but angular velocity, too, and rotates about its axis. Non-stationary distributions of a special form are proposed which correspond to the vortical states of a gas, i.e. the flows with transitional and rotational degrees of freedom. The bimodal distributions with the vortical modes are constructed for approximate description of the interaction of two flows. The behaviour of the integral remainder between the sides of the Boltzmann equation is studied under the different suppositions on hydrodynamic parameters.

2000 Mathematics Subject Classification 76P05.

1. Introduction

The physically significant model of perfectly rough, rigid spherical molecules was taken into consideration in [1] and then investigated in [2]. Some later this model and its generalizations was studied in [3-6]. In the Bryan-Pidduck model it is assumed that every molecule of a gas is able to rotate about any axis passing through its center with angular velocity ω and move translationally with linear velocity v . The collision of two molecules happens instantly, and their velocities are changed in accordance with the formulas [7]:

$$\begin{aligned} v^* &= v - \frac{1}{b+1} \{ b(v - v_1) + \alpha(v - v_1, \alpha) + \frac{1}{2} b d [\alpha \times (\omega + \omega_1)] \}, \\ v_1^* &= v_1 + \frac{1}{b+1} \{ b(v - v_1) + \alpha(v - v_1, \alpha) + \frac{1}{2} b d [\alpha \times (\omega + \omega_1)] \}, \\ \omega^* &= \omega + \frac{2}{d(b+1)} \{ [\alpha \times (v - v_1)] + \frac{1}{2} d [\alpha(\alpha, \omega + \omega_1) - \omega - \omega_1] \}, \\ \omega_1^* &= \omega_1 + \frac{2}{d(b+1)} \{ [\alpha \times (v - v_1)] + \frac{1}{2} d [\alpha(\alpha, \omega + \omega_1) - \omega - \omega_1] \}, \end{aligned} \quad (1)$$

where d is the diameter of a molecule (for simplicity let us put that the mass of each molecule equals to a unit), α is the vector which belongs to the unit sphere Σ in R^3 , and the constant b depends on the inside structure of the molecule and can specify the values between 0 and $2/3$. These parameters are connected with the moment of inertia I of the molecule by the relation:

$$I = \frac{1}{4}bd^2. \quad (2)$$

The state of a gas is described by the distribution function $f(t, x, v, \omega)$ (here t is the time, and x is the position of a molecule), which must satisfy the Boltzmann equation for the Bryan-Pidduck model (as usual, $\frac{\partial f}{\partial x}$ denotes the spatial gradient of the function f):

$$D(f) = Q(f, f), \quad (3)$$

$$D(f) = \frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x}, \quad (4)$$

$$Q(f, f) = \frac{d^2}{2} \int_{R^6} dv_1 d\omega_1 \int_{\Sigma} d\alpha (|(v_1 - v, \alpha)| + (v_1 - v, \alpha)) \cdot \left[f(t, x, v^*, \omega^*) f(t, x, v_1^*, \omega_1^*) - f(t, x, v, \omega) f(t, x, v_1, \omega_1) \right]. \quad (5)$$

The construction of the distributions f in a form of the linear combinations of Maxwellians is one of the methods which give the possibility approximately describe the interaction between two flows in a gas. In [6,8-11] such the distributions was studied for the models of hard and rough spheres, when the Maxwellians are global or stationary local ones. In the last case they correspond to the screw (spiral equilibrium) flows, which can rotate as a rigid body about the immovable axes and fly only in parallel to these axes.

In the present paper we will consider the Bryan-Pidduck model once more and use the following bimodal distributions with non-stationary modes for approximate description of the process of the interaction between two whirls (i.e. such the vortical-type flows, which can fly in any direction with arbitrary speeds):

$$f = \varphi_1 M_1 + \varphi_2 M_2, \quad (6)$$

where

$$M_i = M_i(t, x, v, \omega) = \rho_i \exp\{\beta_i \omega_i^2 r_i^2\} I^{3/2} \left(\frac{\beta_i}{\pi}\right)^3 \exp\{-\beta_i[(v - \tilde{v}_i)^2 + I(\omega - \bar{\omega}_i)^2]\}, \quad (7)$$

$$\tilde{v}_i = \tilde{v}_i(t, x) = \bar{v}_i + [\bar{\omega}_i \times (x - \bar{u}_i t)], \quad (8)$$

$$r_i^2 = \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} [\bar{\omega}_i \times (x - \bar{u}_i t - x_{0i})]^2, \quad (9)$$

$$x_{0i} = \frac{1}{\bar{\omega}_i^2} [\bar{\omega}_i \times \bar{v}_i], \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Here $\varphi_1, \varphi_2 \geq 0$ are some smooth coefficient functions on t and x ; $\rho_1, \rho_2 > 0$ — the densities of the whirls on their axes of rotation; β_1, β_2 — the inverse temperatures of the flows; $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ — the bulk angular velocities; \bar{v}_1, \bar{v}_2 — bulk linear velocities at the origin when $t = 0$; \bar{u}_1, \bar{u}_2 — the drift speeds of the axes; r_1^2, r_2^2 — the distances from the axes at the point x in a moment t ; the points x_{01}, x_{02} lie on the axes when $t = 0$.

As a value which characterizes the deviation between the sides of the Boltzmann equation (3)–(5), we will take the integral remainder:

$$\Delta_1 = \int_{R^{10}} |D(f) - Q(f, f)| dt dx dv d\omega. \quad (11)$$

In the Section II the remainder (11) is studied for different variants of behaviour of all the parameters of the distributions (6)–(10).

The Section III is devoted to the discussion of the obtained results.

2. Main results

The aim of this section is to find conditions ensured the infinitesimality of the remainder (11). For this purpose let us substitute (6)–(10) into (4), (5), (11) with taking into account of (1), (2). The transformations and estimations analogous to ones from the papers [6,10,11] yield after the integration with respect to ω, ω_1 and suitable changes of variables in the integrals:

$$\begin{aligned} \Delta_1 \leq \Delta'_1 = \pi^{-\frac{3}{2}} \sum_{i,j=1, i \neq j}^2 \rho_i \int_{R^4} dt dx \left[\int_{R^3} \left\{ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \left(u \beta_i^{-\frac{1}{2}} + \bar{v}_i + [\bar{\omega}_i \times (x - \bar{u}_i t)] \right) \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} - 2\beta_i \left(\beta_i^{-\frac{1}{2}} (u, \bar{\omega}_i, \bar{u}_i) + (\bar{v}_i, \bar{\omega}_i, \bar{u}_i) + ([\bar{\omega}_i \times (x - \bar{u}_i t)], \bar{\omega}_i, \bar{u}_i) \right) \right\} \exp\{\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2\} + \right. \\ \left. + \varphi_1 \varphi_2 \exp\{\beta_1 \bar{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \bar{\omega}_2^2 r_2^2\} \rho_j d^2 \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{R^3} dw e^{-w^2} F_i(u, w, t, x) \right] e^{-u^2} du + \\ \left. + \varphi_1 \varphi_2 \exp\{\beta_1 \bar{\omega}_1^2 r_1^2 + \beta_2 \bar{\omega}_2^2 r_2^2\} \rho_1 \rho_2 d^2 \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{R^6} e^{-u^2 - w^2} du dw F_i(u, w, t, x) \right], \quad (12) \end{aligned}$$

where

$$F_i(u, w, t, x) = \left| u \beta_i^{-\frac{1}{2}} + (\bar{v}_i - \bar{v}_j) + [\bar{\omega}_i \times (x - \bar{u}_i t)] - [\bar{\omega}_j \times (x - \bar{u}_j t)] - w \beta_j^{-\frac{1}{2}} \right|, \quad i \neq j, \quad (13)$$

and the usual denotations for cross (vector) and mixed products of the vectors are used.

For the existence of the value Δ'_1 in (12) let us suppose that φ_1, φ_2 are independent of β_1, β_2 and have compact supports in t and x . Next, from (12), (13) it can be easily seen, that for the minimization of Δ'_1 (and, consequently, of Δ_1)

we must put that $\beta_1, \beta_2 \rightarrow +\infty$, but this assumption requires new restrictions, namely:

$$\bar{\omega}_i = s_i \bar{\omega}_{0i} \beta_i^{-m_i}, \quad i = 1, 2, \quad (14)$$

where $s_i, m_i > 0, \bar{\omega}_{0i} \in R^3$ are constants, and

$$[\bar{\omega}_{0i} \times \bar{v}_i] = 0, \quad i = 1, 2 \quad (15)$$

which is necessary for the existence of the finite limits of the expressions $\exp\{\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2\}$, when $\beta_1, \beta_2 \rightarrow +\infty$ — see (9), (10), (14). Moreover, if

$$m_i > \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

then s_i can be arbitrary, but if

$$m_i = \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2, \quad (17)$$

we must additionally put:

$$s_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

(in the case $m_i < 1/2$ the limit of the value Δ'_1 does not exist at all).

After the passage to the limit in (12) and some evident calculations we will have:

$$\lim_{\beta_1, \beta_2 \rightarrow +\infty} \Delta'_1 = \sum_{i,j=1, i \neq j}^2 \rho_i \int_{R^4} dt dx \left[\left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} + \bar{v}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} + \varphi_i \varphi_j \pi d^2 \rho_j |\bar{v}_i - \bar{v}_j| \right| + \varphi_i \varphi_j \pi d^2 \rho_j |\bar{v}_i - \bar{v}_j| \right]. \quad (19)$$

For further minimization of the expression (19) let us assume, like in [6, 9, 10], that the functions φ_1, φ_2 are of a form of finite "plateaux", i.e. the smoothed in a special way characteristic functions of some bounded domains in R^4 . Then the summands $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ and $\bar{v}_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$ will have non-zero values only in the small neighbourhoods of the boundaries of these domains, so, as it was shown in [9], the value (19) can be made arbitrary close to the expression:

$$4\pi d^2 \rho_1 \rho_2 |\bar{v}_1 - \bar{v}_2| \int_{R^4} \varphi_1 \varphi_2 dt dx. \quad (20)$$

The last value, obviously, can be made infinitesimal, if d^2 is sufficiently small (almost Knudsen gas), or

$$\bar{v}_1 - \bar{v}_2 \rightarrow 0, \quad (21)$$

or

$$\int_{R^4} \varphi_1 \varphi_2 dt dx \rightarrow 0 \quad (22)$$

(in particular, the supports of the "plateaux" φ_1 and φ_2 do not intersect each other).

Another possibility for the minimization of the value (12) consists in the assumption:

$$\varphi_i(t, x) = \psi_i(t, x) \exp\{-\beta_i \bar{\omega}_i^2 r_i^2\}, \quad i = 1, 2, \quad (23)$$

where the functions $\psi_i(t, x)$ are independent of β_1, β_2 . After the calculation of the derivatives $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$ with the use of (9), (10) and (23), the formula (12) gives (the assumption (14) is used once more, in particular, in (13), but now without (15)):

$$\begin{aligned} \Delta'_1 = & \pi^{-\frac{3}{2}} \sum_{i=1}^2 \rho_i \int_{R^4} dt dx \left[\left[\frac{\partial \psi_i}{\partial t} + \psi_1 \psi_2 \rho_j d^2 \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{R^3} dw e^{-w^2} \cdot \right. \right. \\ & \cdot F_i(u, w, t, x) + \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \left(u \beta_i^{-\frac{1}{2}} + \bar{v}_i + s_i \beta_i^{-m_i} [\bar{\omega}_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)] \right) + \\ & + 2\psi_i \left\{ s_i \beta_i^{\frac{1}{2}-m_i} (u, \bar{\omega}_{0i}, \bar{v}_i - \bar{u}_i) - s_i^2 \beta_i^{\frac{1}{2}-2m_i} [\bar{\omega}_{0i} \times (x - \bar{u}_i t)] \cdot \right. \\ & \left. \left. \cdot [\bar{\omega}_{0i} \times u] \right\} \right] + \psi_1 \psi_2 \rho_j d^2 \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{R^3} dw e^{-w^2} F_i(u, w, t, x) \Big] e^{-u^2} du. \quad (24) \end{aligned}$$

This expression, evidently, exists, if the functions $\psi_i, i = 1, 2$ are of finite support in t and x . Next, it has the limit with $\beta_1, \beta_2 \rightarrow +\infty$, and can be then minimized, if

$$m_i \geq \frac{1}{4}. \quad (25)$$

Besides for $m_i \in [1/4, 1/2)$ the new assumption is required:

$$[\bar{\omega}_{0i} \times (\bar{v}_i - \bar{u}_i)] = 0, \quad (26)$$

and for "critical" value (17) at least one of the conditions (18) or (26) must valid (if $m_i = 1/4$, then the requirements (26) and (18) are necessary together).

It is easy to see, that the value of this limit will be the same as in (19) with the substitution of ψ_i for $\varphi_i, i = 1, 2$. So, if the functions ψ_i are of a form of the finite "plateaux", the remainder (11) becomes vanishingly small under the same conditions as (21) or (22) and so on.

3. Discussion

In all the situations considered above both the vortical flows have decreasing temperatures ($\beta_1, \beta_2 \rightarrow +\infty$) and bulk angular velocities (see (14)). If (23) is fulfilled, their densities are independent of the temperatures, and the degree of deceleration of rotation corresponds to (25), but for the case of comparative quick rotation (when neither (16) nor (17) are not true) the additional condition (26) is imposed. It means, that the axes of the whirls can fly only in the "natural direction" (i.e. the same direction in which the particles of a gas themselves fly near the origin in a moment $t = 0$), because it can be easily seen that in this case

$$[\bar{\omega}_i \times (x - \bar{u}_i t)] = [\bar{\omega}_i \times (x - \bar{v}_i t)], \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

But if the densities of the flows depend on their temperatures (i.e. (23) does not supposed), the rotation must decelerates rather quickly, in accordance with (16) or (17), (18), besides (15) is assumed (as one can see from (10), it means that the axes pass through the origin when $t = 0$).

In addition to that, at least one of the requirements must be satisfied: or (21), i.e. the whirls are "coherent"; or (22) — they are stratificated; or d^2 is small (near free molecular flows). Besides, if these requirements are satisfied together, from (20) it follows that the degree of infinitesimality of the remainder (11) is higher than of the value d^2 , i.e.

$$\Delta_1 = \bar{o}(d^2). \quad (28)$$

Finally, the functions φ_i or ψ_i , $i = 1, 2$ have the form of a finite "plateaux", thus, we consider the whirls not in whole space, but only in some bounded domains in it.

Let us notice also, that it is possible to consider the different behaviour of the whirls for $i = 1$ and $i = 2$, i.e. the interaction between the flows of various kinds.

It will be of interest to make clear such a question: why do the values $1/2$ and $1/4$ play such a "critical" role for the parameters m_1, m_2 in our considerations and what a physical sense can they have.

REFERENCES

1. Bryan G.H. On the Application of the Determinantal Relation to the Kinetic Theory of Polyatomic Gases. // Rep. British Ass. Adv. Sci. — 1894. — V.64. — P. 102–106.
2. Pidduck F.B. The kinetic theory of a special type of rigid molecule. // Proc. Royal Soc. — 1922. — V. A101. — P.100–101.
3. Mc Coy B.J., Sandler S.J., Dahler J.S. Transport properties of polyatomic fluids IV. The kinetic theory of a dense gas of perfectly rough spheres. // J. Chem. Phys. — 1966. — V. 45,10. — P. 3485–3512.
4. Brau C.A., Simans G.A., Macomber H.K. Structure of shock waves in diatomic gases. // In "Rarefied Gas Dynamics", Trilling L., Wachman H. (eds), Academic Press: New York. — 1969. — V. 1,4. — P. 331–343.
5. Cercignani C., Lampis M. On the kinetic theory of a dense gas of rough spheres. // J. Statist. Phys. — 1988. — V. 53. — P. 655–672.
6. Gordevsky V.D. Approximate Biflow Solutions of the Kinetic Bryan-Pidduck Equation. // Math. Meth. Appl. Sci. — 2000. — V. 23. — P. 1121–1137.
7. Chapman S., Cowling T.G. The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases. — Cambridge: University Press, — 1952. — 510 p.

8. Gordevskii V.D. An approximate biflow solution of the Boltzmann equation. Theoret. Math. Phys. – 1998. – V.114, 1. – P. 126–136.
9. Gordevsky V.D. Trimodal approximate solutions of the non-linear Boltzmann equation. // Math. Meth. Appl. Sci. – 1998. – V. 21. – P. 1479–1494.
10. Gordevsky V.D. Transitional Regime Between Spiral Equilibrium States of a Gas. // Visn. Khark. Univ., Ser. Mat. Prykl. Mat. Mech. – 2001. – 514. – P. 17–33.
11. Gordevskyy V.D. Biflow distributions with skew modes. // Theoret. Math. Phys. – 2001. – V. 126, 2. – P. 234–249.

On well-posedness of multi-point integral boundary value problems in a stripe

E. Kengne¹, J. Tayou Simo²

¹University of Dschang

Faculty of Science, P.O. Box 173 Dschang, Cameroon

²University of Yaoundé 1, Cameroon

In a domain, which is the Cartesian product of a segment by the entire real line (stripe), we investigate on well-posedness of a multi-point boundary value problem with an integral in the boundary condition for partial differential equations. Conditions of the well-posedness of the problem under consideration are established in the class of bounded smooth functions.

2000 Mathematics Subject Classification 35B30, 35E20, 35A05.

REFERENCES

As far back as at the end of the XIX century, the theory of partial differential equations obtains a substantial aspect due to the concentration of attention to the boundary value problems and the refusal to the restriction on the analytical boundary conditions. The analytical theory, ascending from Cauchy, Weierstrass, and Kowalewsky in this connection does not lose its significance, but has some digression, because it has been discovered that the analytic theory does not guarantee the proper posedness of the boundary value problem [1].

The well-posedness questions for boundary-value problems in the stripe (and also in the layer) in the different classes for linear partial differential equations are investigated in the works of many authors [2–6]. In the present work, we shall be concerned with the question of well-posedness for multi-point boundary value problems with integral boundary condition. A condition for the well-posedness of the problem in the class of bounded smooth functions is obtained.

In the stripe $\Pi = [0, T]$, we consider the differential equation

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = P \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t), \quad (1)$$

under the integral boundary condition

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_k \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t) dt = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

where $P(s)$ and $P_k(s)$ ($k = 0, N-1$) are an arbitrary polynomials with complex coefficients, $P_0(s)P_{N-1}(s) \times \prod_{k=1}^{N-1} (P_{k-1}(s) - P_k(s)) \neq 0$ (identically), $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = T$, ($N > 1$).

In the study of phenomena (as a control processes) governed by equations of form (1), u belongs to some linear spaces, some conditions are usually imposed on the operator P ; moreover, the space variable x is often considered in some bounded domain of \mathbf{R} . But in the present work, we do not impose any a priori conditions on $P(\partial/\partial x)$ in equation (1). In addition, the functions $u(\cdot, t)$ for each $t \in [0, T]$ belong to spaces of bounded smooth functions:

$$H_m = \left\{ \varphi \in C^m(\mathbf{R}) : \|\varphi\|_m = \max_{0 \leq k \leq m} \sup_{x \in \mathbf{R}} \left| \frac{d^k \varphi(x)}{dx^k} \right| < +\infty \right\}$$

Let us set $H = \cup_{m \geq 0} H_m$, and introduce, by analogy with Cauchy problem [7], the following definition.

Definition 1. We say that problem (1),(2) is well posed (in H), if to every nonnegative integer there corresponds a nonnegative integer l so that for every boundary function $u_0(x) \in H_l$, there exists a unique solution $u(x, t)$ of problem (1),(2), that for every $t \in [0, T]$ is a function of class H_m , and

$$\sup_{[0, T]} \|u(\cdot, t)\|_m \leq C \|u_0\|_l,$$

for some $C > 0$.

If the solution $u(x, t)$ of problem (1),(2) and all the derivatives appearing in equation (1) and also the boundary function $u_0(x)$ are absolutely integrable on \mathbf{R} , then it is obvious that

$$\frac{dv(\sigma, t)}{dt} = P(i\sigma)v(\sigma, t), \quad \sigma \in \mathbf{R}, \quad t \in [0, T] \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} P_k(i\sigma)v(\sigma, t)dt = v_0(\sigma), \quad (4)$$

where $v(\sigma, t)$ and $v_0(\sigma)$ are the Fourier transform of $u(x, t)$ and $u_0(x)$ respectively. Conditions (3),(4) give

$$v(\sigma, t) = R(\sigma, t)v_0(\sigma),$$

where $R(\sigma, t) = e^{tP(i\sigma)}/\Delta(\sigma)$;

$$\Delta(\sigma) = \begin{cases} P^{-1}(i\sigma) \times \sum_{k=0}^N Q_k(i\sigma)e^{t_k P(i\sigma)}, & \text{if } P(i\sigma) \neq 0; \\ \sum_{k=0}^N t_k \times Q_k(i\sigma), & \text{if } P(i\sigma) = 0, \end{cases}$$

$$Q_k(i\sigma) = \begin{cases} -P_0(i\sigma), & \text{if } k = 0; \\ P_{k-1}(i\sigma) - P_k(i\sigma), & \text{if } 0 < k < N; \\ P_{N-1}(i\sigma), & \text{if } k = N. \end{cases}$$

Lemma 1 Let $\Delta(\sigma) \neq 0$ ($\sigma \in \mathbf{R}$) and $\frac{t_j}{m_j} = \frac{t_N}{m_N}$, $m_j \in \mathbf{N}$, $j = \overline{1, N}$. Then there exist $C > 0$ and $\mu \in \mathbf{R}$ so that

$$|\Delta(\sigma)| \geq C(1 + |\sigma|)^\mu, \quad \forall \sigma \in \mathbf{R}. \quad (5)$$

Proof. Because $\Delta(\sigma) \neq 0$ (for every $\sigma \in \mathbf{R}$) and $\Delta(\sigma) \in C(\mathbf{R})$, we conclude that for every $\sigma_0 > 0$, $\Delta(\sigma)$ is bounded on $\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_{\sigma_0}$, where $\mathbf{R}_{\sigma_0} = \{\sigma \in \mathbf{R} : |\sigma| \geq \sigma_0\}$. Let σ_0 be sufficiently large (in particular, so that $N[P] = \{\sigma \in \mathbf{R} : P(i\sigma) = 0\} \subset \mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_{\sigma_0}$). On $\mathbf{R} \setminus \mathbf{R}_{\sigma_0}$, we have $|\Delta(\sigma)| \geq C_0$ and for some $C_{\sigma_0} > 0$ there exists $\mu_{\sigma_0} \in \mathbf{R}$ so that $|P(i\sigma)| \leq C_{\sigma_0}(1 + |\sigma|)^{\mu_{\sigma_0}}$, for every $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$. Let us investigate $\Delta(\sigma)$ for $\sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}$. We have

$$\begin{aligned} |\Delta(\sigma)| &= \left| P^{-1}(i\sigma) \right| \times \left| \sum_{k=0}^N Q_k(i\sigma) \times e^{t_k P(i\sigma)} \right| \\ &\geq C_{\sigma_0}^{-1} (1 + |\sigma|)^{-\mu_{\sigma_0}} \times \left| \sum_{k=0}^N Q_k(i\sigma) e^{t_k P(i\sigma)} \right|. \end{aligned}$$

For the function

$$\delta(\sigma) = \sum_{k=0}^N Q_k(i\sigma) \times e^{t_k P(i\sigma)} = Q_0(i\sigma) + \sum_{k=1}^N Q_k(i\sigma) \times e^{t_k P(i\sigma)}$$

the conditions of lemma 1 of work [8] are satisfied. By the virtue of the indicated work, we conclude that there exist $\tilde{C} > 0$ and $\tilde{\mu} \in \mathbf{R}$ so that

$$|\delta(\sigma)| \geq \tilde{C}(1 + |\sigma|)^{\tilde{\mu}}, \quad \forall \sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0}.$$

Therefore,

$$|\Delta(\sigma)| \geq \frac{\tilde{C}(1 + |\sigma|)^{\tilde{\mu}}}{C_{\sigma_0}(1 + |\sigma|)^{\mu_{\sigma_0}}} = C'(1 + |\sigma|)^{\mu'}, \quad \forall \sigma \in \mathbf{R}_{\sigma_0},$$

and lemma 1 is completely proved.

Lemma 2 If the conditions of lemma 1 are satisfied, then for every nonnegative integer j , there exist $C_j > 0$ and $\mu_j \in \mathbf{R}$ so that

$$\left| \frac{\partial^j R(\sigma, t)}{\partial \sigma^j} \right| \leq C_j (1 + |\sigma|)^{\mu_j}, \quad \forall \sigma \in \mathbf{R}. \quad (6)$$

Proof. By induction, we can easily obtain the following formula for the derivatives of $R(\sigma, t)$:

$$\frac{\partial^j R(\sigma, t)}{\partial \sigma^j} = [P(i\sigma)\Delta(\sigma)]^{-1-j} \sum_{k=0}^{N_j} G_{kj}(\sigma, t) e^{(t+jt_k)P(i\sigma)}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (7)$$

where $G_{kj}(\sigma, t)$ are polynomial with respect to σ and t ,

$$\deg_{\sigma} G_{kj}(\sigma, t) \leq j \left(\deg P(i\sigma) + \max_{0 \leq k \leq N} \deg Q_k(i\sigma) - 1 \right).$$

If $\operatorname{Re}(P(i\sigma)) \leq 0$, then estimate (6) follows immediately from (7) and lemma 1, applied on $\Delta(\sigma)$. Let $\operatorname{Re}(P(i\sigma)) \geq 0$. In this case, let us set $\tilde{\Delta}(\sigma) = \Delta(\sigma) \times e^{-TP(i\sigma)}$. Then $\tilde{\Delta}(\sigma) \neq 0$ (for every $\sigma \in \mathbf{R}$) and by apply lemma 1 on $\tilde{\Delta}(\sigma)$, we obtain $|\tilde{\Delta}(\sigma)| \geq C(1 + |\sigma|)^{\mu}$, for every $\sigma \in \mathbf{R}$. Rewriting (7) in the form

$$\frac{\partial^j R(\sigma, t)}{\partial \sigma^j} = \left[P(i\sigma) \tilde{\Delta}(\sigma) \right]^{-1-j} \sum_{k=0}^{N_j} G_{kj}(\sigma, t) e^{(t-T+j(t_k-T))P(i\sigma)},$$

we obtain estimate (6). Lemma 2 is proved.

Theorem 1 For well-posedness of problem (1),(2) (in H) in the stripe Π , it is sufficient that the conditions of lemma 1 should be satisfied.

Proof. Uniqueness of solutions of problem (1),(2) in the class of bounded functions (and also in the class of the functions of polynomial growth) follows from work [9].

In order to establish the solvability of problem (1),(2) and the estimate of its solution, we shall consider problem (1),(2) in the space S' by analogy with [10] (here S is the Schwartz space and S' is the dual space of tempered distributions). Because of lemma 2, $R(\sigma, t)$ (for every $t \in [0, T]$) is a multiplier in S' . Therefore the Fourier transform $v(\sigma, t)$ of the function $u(x, t)$ is a solution of the Cauchy problem (3),(4) in S' and takes the form

$$v(\sigma, t) = \frac{e^{tP(i\sigma)}}{\Delta(\sigma)} \times v_0(\sigma).$$

Because $R(\sigma, t)$ can be written in the form

$$R(\sigma, t) = (1 + \sigma^{2l}) \times \frac{R(\sigma, t)}{(1 + \sigma^{2l})}$$

and by virtue of (6) $\frac{R(\sigma, t)}{(1 + \sigma^{2l})} \in L^1(\mathbf{R})$ for the sufficiently large l , the function $G(x, t) + F_{\sigma}^{-1} \{R(\sigma, t)\}$ (F_{σ} is the inverse operator of Fourier with respect to σ) is a function of space $C(\mathbf{R}) \cap L^{\infty}(\mathbf{R})$, on which we can apply (in the sense of generalized functions) the operator $1 + (-1)^l \frac{d^{2l}}{dx^{2l}}$. Then the solution of problem (1),(2) in the form of product of convolution reads

$$u(x, t) = G(x, t) * u_0(x).$$

The classical solution of problem (1),(2), having a given order of smoothness and satisfying the estimate, indicated in the definition, can be obtained by analogy with works [12-13]. The proof of the assertion is complete.

REFERENCES

1. Kolmogorov A.N. Mathematics in its historical development. — M.: Nauka, 1991. — 224 p.
2. Ptachnik B.I. Ill-posed boundary problems for partial differential equations. — Kiev: Naukova Dumka, 1984. — 264 p.
3. Borok V.M. Criterion of the absolute C -stability of the partial differential equations. // *Differents. Uravn.* — 1988. — V. 24, 3. — P. 438-444.
4. Paneyakh B.P. On some nonlocal boundary-value problems for linear differential operators. // *Mat. Zam.* — 1984. — V. 35, 3. — P. 425-434.
5. Kengne E. Perturbation of a two-point problem. // *Ukr. Mat. Zh.* — 2000. — V. 52, 7. — P. 1124-1129.
6. Kengne E., Pelap F.B. Regularity of two-point boundary value problems. // *Afrika Matematika.* — 2001. — Series 3. — V. 12. — P. 61-70.
7. Petrowsky I.G. On the Cauchy problem for systems of linear partial differential equations in a domain on non analytic functions. // *Bull. Mosk. Univ. — Sekts. A.* — 1938. — V. 1, 7. — P. 1-72.
8. Borok V.M., Evdokimova S. V. Regular boundary-value problems in a stripe. // *Teor. funkt., funkt. anal. i ih prim.* — 1989. — V. 51. — P. 35-37.
9. Vilents I.L. Uniqueness classes of a general boundary-value problem in a layer for systems of linear partial differential equations. // *Dokl. AN USSR. — Ser. A.* — 1974. — 3. — P. 195-197.
10. Gel'fand I.M., Shilov G.E. Some problems of the theory of differential equations. — M.: Fizmatgiz, 1958. — 276 p.
11. Gel'fand I.M., Shilov G.E. Generalized functions 2. Spaces of fundamental and generalized functions. — M.: Fizmatgiz, 1958. — 307 p.
12. Borok V.M., Fardigola L.V. Nonlocal boundary-value problems in a layer. // *Mat. Zamet.* — 1990. — V. 48, 1. — P. 20-25.
13. Kengne E. Boundary-value problems with an integral in the boundary condition. Ph.D. thesis, Khark. Univ., 1993. 119 p.

О характеристическом свойстве многочленов,
удовлетворяющих разностному соотношению 4-го
порядка

С. М. Загороднюк

Харьковский национальный университет, Украина

В данной работе мы изучаем системы многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$, удовлетворяющие соотношению: $J_5 p(\lambda) = \lambda^2 p(\lambda)$, где J_5 - пятидиагональные, эрмитовы, полубесконечные матрицы и $p(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots)^T$, а также соответствующую симметричную проблему моментов. Доказаны исправленные варианты критерия разрешимости проблемы моментов и аналога теоремы Фавара для таких систем многочленов. Показано, что наличие соотношений ортонормальности специального вида является характеристическим свойством таких систем многочленов. Показана связь с матричными многочленами и матричной проблемой моментов.

2000 *Mathematics Subject Classification* 42C05, 39A05, 44A60.

Предметом нашего изучения будут системы многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ ($p_n(\lambda)$ имеет степень n и положительный старший коэффициент), удовлетворяющие разностному соотношению следующего вида:

$$\alpha_{n-2} p_{n-2}(\lambda) + \overline{\beta_{n-1}} p_{n-1}(\lambda) + \gamma_n p_n(\lambda) + \beta_n p_{n+1}(\lambda) + \alpha_n p_{n+2}(\lambda) = \lambda^2 p_n(\lambda),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots; \quad (1)$$

где $\alpha_n > 0, \beta_n \in C, \gamma_n \in R, n = 0, 1, 2, \dots; \alpha_{-2} = \alpha_{-1} = 0, \beta_{-1} = 0$ и $p_{-1}(\lambda) = p_{-2}(\lambda) = 0; p_0(\lambda) = a, p_1(\lambda) = c\lambda + b, a, c > 0, b \in C$.

Это соотношение можно записать в матричной форме:

$$Jp(\lambda) = \lambda^2 p(\lambda),$$

$$\text{где } J = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \beta_0 & \alpha_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \overline{\beta_0} & \gamma_1 & \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \cdot \\ \alpha_0 & \overline{\beta_1} & \gamma_2 & \beta_2 & \alpha_2 & 0 & \cdot \\ 0 & \alpha_1 & \overline{\beta_2} & \gamma_3 & \beta_3 & \alpha_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \alpha_n > 0, \beta_n \in C, \gamma_n \in R, n =$$

$0, 1, 2, \dots$, - пятидиагональная, полубесконечная, эрмитова матрица,

$$p(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), p_2(\lambda), \dots)^T; p_0(\lambda) = a, p_1(\lambda) = c\lambda + b, a, c > 0, b \in C.$$

Системы многочленов, удовлетворяющие более общему разностному соотношению порядка $2N$, N - натуральное число, и с вещественными коэффициентами:

$$t^N p_n(t) = c_{n,0} p_n(t) + \sum_{k=1}^N (c_{n,k} p_{n-k}(t) + c_{n+k,k} p_{n+k}(t)), \quad (2)$$

где $c_{n,i}$ вещественные, $c_{n,N} \neq 0$, $i = \overline{0, N}$ и $p_j = 0$ при $j < 0$, $N \in \mathbb{N}$, изучались А.А. Дурани [1, 2, 3], W. Van Assche [2] (В работе [2] рассматривался и случай комплексных коэффициентов, но доказательство теоремы этой статьи не является полным в силу некорректной ссылки на аналог теоремы Фавора для матричных многочленов). Также отметим работу по данной теме [4].

В работах [1, 2, 3] указаны характеристические свойства многочленов в различных формах, изучена связь с ортогональными матричными многочленами на вещественной оси.

Также в этих работах рассматривалось соотношение вида (2) с левой частью вида $h(t)p_n(t)$, где $h(t)$ - многочлен степени N с вещественными коэффициентами и установлены аналогичные результаты.

По предложению В.А. Золотарева, системы, удовлетворяющие (1) изучались нами в [5, 6]. Были построены нетривиальные примеры подобных систем и соотношения ортонормальности на вещественной и мнимой осях специального вида для них [5, Ех. 1-3, р. 259-260, Theorem 4, р. 262], получены необходимые и достаточные условия на пятидиагональную матрицу J для того, чтобы выполнялось: $J_3 p(\lambda) = \lambda p(\lambda)$ с некоторой комплексной трехдиагональной матрицей J_3 [5, Theorem 5, р. 272], получена фундаментальная система решений разностного уравнения типа (1) [6, Theorem 3, р. 200], аналог формулы Грина [6, Theorem 4, р. 202], изучался общий вопрос о наличии ортонормальности [6, Theorem 2, р. 195-196].

В данной работе мы установим исправленный вариант теоремы Фавара для систем вида (1) [6, Theorem 2, р. 195-196] и докажем теорему о рекуррентном соотношении. На основе этих теорем получаем характеристическое свойство многочленов, удовлетворяющих (1). Также мы установим связь данных многочленов с матричными ортогональными многочленами. Затем мы сравним эти результаты с результатами других авторов. Также нам понадобится исправленный вариант критерия разрешимости проблемы моментов, связанной с многочленами, удовлетворяющими (1) [5, Theorem 6, р. 274].

С системами многочленов из (1) тесно связана следующая задача (см. [8, с. 252], [5, р. 265-266]):

найти матричную функцию $\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_1(\lambda) & \sigma_2(\lambda) \\ \sigma_3(\lambda) & \sigma_4(\lambda) \end{pmatrix}$, $\sigma_i(\lambda) : R \cup T \rightarrow \mathbb{C}$ - функции, заданные на вещественной и мнимой осях, $i = \overline{1, 4}$, $\lambda \in R \cup T$, $T = (-i\infty, i\infty)$, такую, что:

1/ $\sigma(\lambda)$ - эрмитова, монотонно неубывающая матрица-функция, т.е.:

$$\sigma(\lambda_2) \geq \sigma(\lambda_1), \lambda_2 \geq \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2 \in R; \sigma(\lambda_2) \geq \sigma(\lambda_1), \frac{\lambda_2}{i} \geq \frac{\lambda_1}{i}, \lambda_1, \lambda_2 \in T, \quad (3)$$

1581654

$$2/ \int_{R \cup T} (\lambda^k, (-\lambda)^k) d\sigma(\lambda) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = s_k, k = 0, 1, \dots, \\ \int_{R \cup T} (\lambda^{k-1}, (-\lambda)^{k-1}) d\sigma(\lambda) \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} = m_k, k = 1, 2, \dots, \quad (4)$$

где $\{s_k\}_{k=0}^\infty, \{m_k\}_{k=1}^\infty$ - фиксированные последовательности комплексных чисел.

Будем называть эту задачу симметричной проблемой моментов.

Отметим, что в [5, р. 265-266] эта задача называлась нами обобщенной симметричной проблемой моментов, но затем в [8, с. 252] мы отказались от такого термина. Симметричную проблему моментов, которая ставилась в [5, р. 265] называем теперь симметричной проблемой моментов в классе абсолютно непрерывных функций.

Рассмотрим также следующую задачу:

найти матричную функцию $\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_1(\lambda) & \sigma_2(\lambda) \\ \sigma_3(\lambda) & \sigma_4(\lambda) \end{pmatrix}, \sigma_i(\lambda) : R \cup T \rightarrow C$ - функции, заданные на вещественной и мнимой осях, $i = \overline{1, 4}, \lambda \in R \cup T, T = (-i\infty, i\infty)$, такую, что:

1/ $\sigma(\lambda)$ - эрмитова, монотонно неубывающая матрица-функция, т.е.:

$$\sigma(\lambda_2) \geq \sigma(\lambda_1), \lambda_2 \geq \lambda_1, \lambda_1, \lambda_2 \in R; \sigma(\lambda_2) \geq \sigma(\lambda_1), \frac{\lambda_2}{i} \geq \frac{\lambda_1}{i}, \lambda_1, \lambda_2 \in T, \quad (5)$$

$$2/ \int_{R \cup T} (\lambda^k, (-\lambda)^k) J_\lambda d\sigma(\lambda) J_\lambda^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = s_k, k = 0, 1, \dots, \\ \int_{R \cup T} (\lambda^{k-1}, (-\lambda)^{k-1}) J_\lambda d\sigma(\lambda) J_\lambda^* \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} = m_k, k = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

где $J_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} \\ 1 & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}$, $\{s_k\}_{k=0}^\infty, \{m_k\}_{k=1}^\infty$ - фиксированные последовательности комплексных чисел, звездочка * обозначает комплексно сопряженную матрицу. При этом, при вычислении подинтегральной функции в нуле следует брать предельные значения при $\lambda \rightarrow 0$ выражений $(\lambda^k, (-\lambda)^k) J_\lambda, J_\lambda^* \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ в первом интеграле в (6) и выражений $(\lambda^{k-1}, (-\lambda)^{k-1}) J_\lambda, J_\lambda^* \begin{pmatrix} \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$ во втором интеграле в (6).

Будем называть эту задачу симметричной проблемой моментов с особенностью в нуле.

Определение ([5, р. 266]). Пару последовательностей $\{s_k, m_{k+1}\}_{k=0}^\infty, s_k \in C, m_{k+1} \in C, k = \overline{0, \infty}$, будем называть симметричной, если выполнено:

$$\overline{s_{2k+1}} = m_{2k+1}; \overline{s_{2k}} = s_{2k}, \overline{m_{2k+2}} = m_{2k+2}, k = \overline{0, \infty}. \quad (7)$$

Определение ([5, р. 266]). Пару последовательностей $\{s_k, m_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$, $s_k \in C, m_{k+1} \in C, k = \overline{0, \infty}$ будем называть позитивной, если выполняются следующие соотношения:

$$\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & \cdot & s_k \\ m_1 & m_2 & \cdot & \cdot & m_{k+1} \\ s_2 & s_3 & \cdot & \cdot & s_{k+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_k & m_{k+1} & \cdot & \cdot & m_{2k} \end{bmatrix} > 0, k = 2l + 1; \quad \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & \cdot & \cdot & s_k \\ m_1 & m_2 & \cdot & \cdot & m_{k+1} \\ s_2 & s_3 & \cdot & \cdot & s_{k+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ s_k & s_{k+1} & \cdot & \cdot & s_{2k} \end{bmatrix} > 0, \\ k = 2l; l = \overline{0, \infty}. \quad (8)$$

Нам понадобится следующее определение:

Определение. Решение $\sigma(\lambda)$ симметричной проблемы моментов с особенностью в нуле будем называть существенно растущим, если выполнено:

$$\int_{RUT} (R(\lambda), R(-\lambda)) J_{\lambda} d\sigma(\lambda) J_{\lambda}^* \begin{pmatrix} R(\lambda) \\ R(-\lambda) \end{pmatrix} > 0, \quad (9)$$

для любого не равного тождественно нулю многочлена $R(\lambda)$.

Справедлива следующая теорема, являющаяся исправленной теоремой из [5, Theorem 6, р. 274]:

Теорема 1. Для того, чтобы симметричная проблема моментов с особенностью в нуле имела существенно растущее решение, необходимо и достаточно, чтобы пара последовательностей $\{s_n, m_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ была симметричной и позитивной.

Доказательство. Покажем достаточность. Пусть пара последовательностей $\{s_n, m_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ симметрична и позитивна. Введем следующую последовательность матриц:

$$S_n = \begin{pmatrix} s_{2n} & m_{2n+1} \\ s_{2n+1} & m_{2n+2} \end{pmatrix}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Из условия симметричности последовательностей $\{s_n, m_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ следует, что S_n эрмитовы матрицы. Из условий симметричности и позитивности $\{s_n, m_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ заключаем, что

$$\left\langle \begin{pmatrix} S_0 & S_1 & S_2 & \dots & S_n \\ S_1 & S_2 & S_3 & \dots & S_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ S_n & S_{n+1} & S_{n+2} & \dots & S_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \cdot \\ X_n \end{pmatrix} \right\rangle > 0, n = 0, 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где $X_i = (X_i^0, X_i^1)^T \in C^2, i = \overline{0, n}$ - не все нулевые и $\langle \cdot, \cdot \rangle$ - скалярное произведение в C^{2n} .

Рассмотрим матричную проблему моментов [9, с. 52] с последовательностью $\{S_n\}_{n=0}^\infty$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k dT(\lambda) = S_k, k = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

В силу (10) существует [9, с. 52] ограниченная (а значит и эрмитовая, полагая, если требуется $\tilde{T}(\lambda) = \frac{1}{2}(T(\lambda) + T^*(\lambda))$) матрица функция $T(\lambda)$, удовлетворяющая (11). Будем считать, что $T(\lambda)$ нормирована условием: $T(0) = 0$.

Введем функцию $\sigma(\lambda) = \begin{cases} T(\lambda^2), \lambda \in [0, \infty) \\ -T(\lambda^2), \lambda \in [0, i\infty) \end{cases}$. Тогда

$$\begin{aligned} S_k &= \int_{-\infty}^0 t^k d(-\sigma(\sqrt{t})) + \int_0^{\infty} t^k d\sigma(\sqrt{t}) = [\lambda = \sqrt{t}] = \int_{R^+ \cup T^+} \lambda^{2k} d\sigma(\lambda) = \\ &= \int_{R^+ \cup T^+} \begin{pmatrix} \lambda^{2k} & 0 \\ 0 & \lambda^{2k} \end{pmatrix} d\sigma(\lambda) \overline{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} = \int_{R^+ \cup T^+} \begin{pmatrix} (\lambda^{2k})^+ & (\lambda^{2k})^- \\ (\lambda^{2k+1})^+ & (\lambda^{2k+1})^- \end{pmatrix} * \\ &\quad * d\sigma(\lambda) \overline{\begin{pmatrix} (1)^+ & (\lambda)^+ \\ (1)^- & (\lambda)^- \end{pmatrix}}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $p^+(\lambda) := \frac{p(\lambda) + p(-\lambda)}{2}$, $p^-(\lambda) := \frac{p(\lambda) - p(-\lambda)}{2\lambda}$, $p \in P$, P - пространство всех многочленов, $R^+ = [0, \infty)$, $T^+ = [0, i\infty)$.

Из (12), учитывая определение S_k , и записывая покомпонентно, имеем:

$$\begin{aligned} \int_{R^+ \cup T^+} ((\lambda^n)^+, (\lambda^n)^-) d\sigma(\lambda) \overline{\begin{pmatrix} (1)^+ \\ (1)^- \end{pmatrix}} &= s_n, \int_{R^+ \cup T^+} ((\lambda^n)^+, (\lambda^n)^-) d\sigma(\lambda) * \\ &\quad * \overline{\begin{pmatrix} (\lambda)^+ \\ (\lambda)^- \end{pmatrix}} = m_{n+1}, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда и следует, учитывая определение p^+ , p^- , выполнение моментных равенств (6). Для проверки (9) для многочлена $R(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i$ следует расписать интеграл из (9) в сумму, воспользоваться моментными равенствами (6) и позитивностью $\{s_n, m_{n+1}\}_{n=0}^\infty$.

Покажем необходимость. Пусть $\sigma(\lambda)$ - решение задачи (5)(6) и выполнено (9). Симметричность $\{s_n, m_{n+1}\}_{n=0}^\infty$ следует из вида интеграла в (6). Для многочлена $R(\lambda) = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i$ расписываем интеграл в (9) в сумму и пользуясь моментными равенствами (6), устанавливаем позитивность $\{s_n, m_{n+1}\}_{n=0}^\infty$.

Теорема доказана.

Замечание. Укажем на другой возможный путь к доказательству последней теоремы. Доказательство достаточности можно вести аналогично доказательству теоремы [5, Theorem 6, p. 274], беря в качестве базиса собственных подпространств \tilde{c}_i, \tilde{c}_i [5, p. 276] вектора вида:

$$\tilde{c}_i = \begin{pmatrix} \hat{p}_0^+(\lambda_i) \\ \hat{p}_1^+(\lambda_i) \\ \dots \\ \hat{p}_N^+(\lambda_i) \end{pmatrix}, \quad \tilde{c}_i = \begin{pmatrix} \hat{p}_0^-(\lambda_i) \\ \hat{p}_1^-(\lambda_i) \\ \dots \\ \hat{p}_N^-(\lambda_i) \end{pmatrix}, i = \overline{0, p},$$

где $p^+(\lambda) := \frac{p(\lambda)+p(-\lambda)}{2}$, $p^-(\lambda) := \frac{p(\lambda)-p(-\lambda)}{2\lambda}$, $p \in P$, P - пространство всех многочленов. Используя эти вектора, можно строить кусочно непрерывную функцию $\sigma_N(\lambda)$ и переходя к пределу, используя теоремы Хелли, получить решение проблемы моментов. Доказательство необходимости при этом абсолютно аналогично доказательству необходимости [5, Theorem 6, p. 274].

Следует указать на то, что условие (9) не эквивалентно наличию бесконечного числа точек роста $\sigma(\lambda)$, т.е. точек, в любой окрестности которой функция $\sigma(\lambda)$ отлична от постоянной. Например, пусть $\sigma(\lambda)$ - кусочно постоянная, со скачками в точках $\lambda_n = n$, $n = 0, 1, 2, \dots$: $\sigma(\lambda_n + 0) - \sigma(\lambda_n) = e^{-\lambda_n^4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда существуют все степенные моменты $\sigma(\lambda)$, но

$$\begin{aligned} \int_{R \cup T} (1 - \lambda, 1 + \lambda) J_\lambda d\sigma(\lambda) J_\lambda^* \begin{pmatrix} 1 - \lambda \\ 1 + \lambda \end{pmatrix} &= \int_{R \cup T} ((1 - \lambda)^+, (1 - \lambda)^-) d\sigma(\lambda) * \\ * \begin{pmatrix} (1 - \lambda)^+ \\ (1 - \lambda)^- \end{pmatrix} &= \int_{R \cup T} (1, -1) d\sigma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} (1, -1) e^{-\lambda_n^4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \\ &= 0. \end{aligned}$$

Следующая теорема является исправленной теоремой из [6, Theorem 2, p. 195-196] и представляет собой аналог теоремы Фавара для систем многочленов из (1).

Теорема 2. Пусть дана система многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ ($p_n(\lambda)$ имеет степень n и положительный старший коэффициент), удовлетворяющая соотношению (1). Тогда выполнено соотношение ортонормальности:

$$\int_{R \cup T} (p_n(\lambda), p_n(-\lambda)) J_\lambda d\sigma(\lambda) J_\lambda^* \begin{pmatrix} p_m(\lambda) \\ p_m(-\lambda) \end{pmatrix} = \delta_{nm}, n, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (13)$$

где $\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_1(\lambda) & \sigma_2(\lambda) \\ \sigma_3(\lambda) & \sigma_4(\lambda) \end{pmatrix}$ - эрмитова, неубывающая матрица-функция на вещественной и мнимой осях.

Доказательство. Дословно повторяем начало доказательства теоремы из [6, Theorem 2, p. 195-196]: строим функционал $\sigma(u, v)$, $u, v \in P$ и симметричную и позитивную пару последовательностей $\{s_n, m_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$. Тогда симметричная проблема моментов с особенностью в нуле (5)(6) с данными последовательностями $\{s_n, m_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ имеет решение, что следует из предыдущей теоремы. Пусть $\sigma(\lambda)$ - данное решение. Определим функционал $\hat{\sigma}(u, v)$ следующим образом:

$$\hat{\sigma}(u, v) = \int_{R \cup T} (u(\lambda), u(-\lambda)) J_\lambda d\sigma(\lambda) J_\lambda^* \begin{pmatrix} v(\lambda) \\ v(-\lambda) \end{pmatrix}, u, v \in P. \quad (14)$$

В силу существования степенных моментов, этот функционал определен для всех $u, v \in P$, является билинейным и в силу структуры носителя имеем:

$$\hat{\sigma}(\lambda^2 u, v) = \hat{\sigma}(u, \lambda^2 v), u, v \in P.$$

Также заметим, что

$$\hat{\sigma}(\lambda^k, 1) = s_k, \hat{\sigma}(\lambda^k, \lambda) = m_{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$$

Повторяя дословно рассуждения после определения функционала $\hat{\sigma}(u, v)$ в [6, р. 198] заключаем, что выполняются требуемые соотношения ортонормальности.

Теорема доказана.

Ниже мы укажем еще один возможный путь к доказательству данной теоремы.

Справедлива следующая теорема о рекуррентном соотношении:

Теорема 3. Пусть задана система многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ такая, что $p_n(\lambda)$ имеет степень n и положительный старший коэффициент и удовлетворяющая соотношению (13) с некоторой эрмитовой, неубывающей матрицей функции на вещественной и мнимой осях $\sigma(\lambda)$. Тогда многочлены $p_n(\lambda)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению вида (1).

Доказательство. Пусть $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ - система многочленов с положительным старшим коэффициентом и удовлетворяющая (13) с некоторой матрицей функции $\sigma(\lambda)$. Поскольку $p_n(\lambda)$ имеет положительный старший коэффициент, то $\lambda^2 p_n(\lambda)$ можно разложить в сумму:

$$\lambda^2 p_n(\lambda) = \xi_{n,n+2} p_{n+2}(\lambda) + \xi_{n,n+1} p_{n+1}(\lambda) + \dots + \xi_{n,0} p_0(\lambda), n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{где } \xi_{n,i} \in C, i = 0, 1, \dots, n+2; n = 0, 1, 2, \dots \quad (15)$$

Сравнивая коэффициенты при старших степенях, заключаем: $\xi_{n,n+2} > 0$. Определим функционал $\hat{\sigma}(u, v)$ по формуле (14). Тогда

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\lambda^2 p_n(\lambda), p_m(\lambda)) &=^{(15)} \hat{\sigma}\left(\sum_{i=0}^{n+2} \xi_{n,i} p_i(\lambda), p_m(\lambda)\right) = \sum_{i=0}^{n+2} \xi_{n,i} \hat{\sigma}(p_i(\lambda), p_m(\lambda)) =^{(13)} \\ &= \xi_{n,m}, m = 0, 1, 2, \dots, n+2; n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (16)$$

В силу структуры носителя в (14) имеем:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(\lambda^2 p_n(\lambda), p_m(\lambda)) &= \hat{\sigma}(p_n(\lambda), \lambda^2 p_m(\lambda)) =^{(15)} \hat{\sigma}\left(p_n(\lambda), \sum_{i=0}^{m+2} \xi_{m,i} p_i(\lambda)\right) = \sum_{i=0}^{m+2} \overline{\xi_{m,i}}^* \\ &=^{(13)} \sum_{i=0}^{m+2} \overline{\xi_{m,i}} \delta_{ni} = \begin{cases} 0, & m+2 < n \\ \overline{\xi_{m,n}}, & m+2 \geq n \end{cases}, m, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует, что:

$$\xi_{n,m} = 0, m = 0, 1, 2, \dots, n-3; n = 3, 4, \dots \quad (18)$$

$$\xi_{n,n-2} = \overline{\xi_{n-2,n}}, n = 2, 3, \dots; \xi_{n,n-1} = \overline{\xi_{n-1,n}}, n = 1, 2, \dots; \xi_{n,n} = \overline{\xi_{n,n}}, n = 0, 1, \dots \quad (19)$$

Положим по определению:

$$\alpha_n = \xi_{n,n+2}, \beta_n = \xi_{n,n+1}, \gamma_n = \xi_{n,n}, n = 0, 1, \dots$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} \xi_{n,n-1} &= {}^{(19)} \overline{\xi_{n-1,n}} = \overline{\beta_{n-1}}, n = 1, 2, \dots \\ \xi_{n,n-2} &= {}^{(19)} \overline{\xi_{n-2,n}} = \overline{\alpha_{n-2}}, n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (20)$$

Значит, используя определение $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ и (18), (20) имеем:

$$\begin{aligned} \lambda^2 p_n(\lambda) &= \overline{\alpha_{n-2}} p_{n-2}(\lambda) + \overline{\beta_{n-1}} p_{n-1}(\lambda) + \gamma_n p_n(\lambda) + \beta_n p_{n+1}(\lambda) + \alpha_n p_{n+2}(\lambda), \\ n &= 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Если положить $\alpha_{-2} = \alpha_{-1} = \beta_{-1} = 0$, тогда последние равенства справедливы и при $n = 0, 1$. Но по определению $\alpha_n = \xi_{n,n+2} > 0$ как мы заметили ранее и значит (1) выполнено.

Теорема доказана.

Сопоставляя предыдущие две теоремы получаем следствие:

Следствие (характеристическое свойство многочленов, удовлетворяющих разностному соотношению 4 - го порядка). Пусть задана система многочленов $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ такая, что $p_n(\lambda)$ имеет степень n и положительный старший коэффициент. Для того, чтобы многочлены $p_n(\lambda)$ удовлетворяли рекуррентному соотношению (1) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение (13) с некоторой матрицей функцией $\sigma(\lambda)$.

Свяжем многочлены из (13) с матричными ортогональными многочленами. Заметим, что всегда можно найти меру $\sigma(\lambda)$ с носителем на положительных полуосях R^+, T^+ и $\sigma(0) = 0$, полагая $\tilde{\sigma}(\lambda) = \sigma(\lambda) - \sigma(-\lambda), \lambda \in R^+ \cup T^+$. Из (13) следует, что

$$\begin{aligned} \int_{R^+ \cup T^+} (p_n^+(\lambda), p_n^-(\lambda)) d\sigma(\lambda) \begin{pmatrix} p_m^+(\lambda) \\ p_m^-(\lambda) \end{pmatrix} &= \delta_{n,m}; \\ \int_{R^+ \cup T^+} \begin{pmatrix} p_{2n}^+(\lambda) & p_{2n}^-(\lambda) \\ p_{2n+1}^+(\lambda) & p_{2n+1}^-(\lambda) \end{pmatrix} d\sigma(\lambda) \begin{pmatrix} p_{2m}^+(\lambda) & p_{2m+1}^+(\lambda) \\ p_{2m}^-(\lambda) & p_{2m+1}^-(\lambda) \end{pmatrix} &= I \delta_{n,m}; \end{aligned}$$

Сделаем замену $\lambda = \sqrt{t}$:

$$\int_{[0,\infty) \cup [0,-\infty)} \begin{pmatrix} p_{2n}^+(\sqrt{t}) & p_{2n}^-(\sqrt{t}) \\ p_{2n+1}^+(\sqrt{t}) & p_{2n+1}^-(\sqrt{t}) \end{pmatrix} d\sigma(\sqrt{t}) \begin{pmatrix} p_{2m}^+(\sqrt{t}) & p_{2m+1}^+(\sqrt{t}) \\ p_{2m}^-(\sqrt{t}) & p_{2m+1}^-(\sqrt{t}) \end{pmatrix} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} p_{2n}^+(\sqrt{t}) & p_{2n}^-(\sqrt{t}) \\ p_{2n+1}^+(\sqrt{t}) & p_{2n+1}^-(\sqrt{t}) \end{pmatrix} d\hat{\sigma}(t) \overline{\begin{pmatrix} p_{2m}^+(\sqrt{t}) & p_{2m+1}^+(\sqrt{t}) \\ p_{2m}^-(\sqrt{t}) & p_{2m+1}^-(\sqrt{t}) \end{pmatrix}} = I\delta_{n,m},$$

$$\text{где } \hat{\sigma}(t) = \begin{cases} \sigma(\sqrt{t}), t \in [0, \infty) \\ -\sigma(\sqrt{t}), t \in [-\infty, 0] \end{cases}, n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

Значит $\hat{P}_n(t) = \begin{pmatrix} p_{2n}^+(\sqrt{t}) & p_{2n}^-(\sqrt{t}) \\ p_{2n+1}^+(\sqrt{t}) & p_{2n+1}^-(\sqrt{t}) \end{pmatrix}$ - система матричных многочленов, ортогональных на вещественной оси.

Обратно, если $\{\tilde{P}_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ - некоторая система ортогональных матричных многочленов, $\tilde{P}_n(t) = \begin{pmatrix} p_n^{0,0}(t) & p_n^{0,1}(t) \\ p_n^{1,0}(t) & p_n^{1,1}(t) \end{pmatrix}$, тогда $p_{2n}(t) := p_n^{0,0}(t^2) + tp_n^{0,1}(t^2)$, $p_{2n+1}(t) := p_n^{1,0}(t^2) + tp_n^{1,1}(t^2)$ ортонормальны на вещественной и мнимой осях и меры связаны соотношением (21). Сходным образом связь с матричными многочленами установлена А. J. Dugan и W. Van Assche в [2], [3].

Приведем теперь сравнение наших результатов с результатами других авторов. Пусть система многочленов $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ (степень $p_n(t)$ равна n) удовлетворяет соотношению (2). А. J. Dugan установил следующую теорему:

Теорема 4 ([1]). Если многочлены $\{p_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ (степень $p_n(t)$ равна n) удовлетворяют $(2N+1)$ членному рекуррентному соотношению (2), тогда существует положительно определенная матрица мер $\mu = (\mu_{m,m'})_{m,m'=0,\dots,N-1}$, такая, что многочлены $p_n(\lambda)$ ортонормальны по отношению к скалярному произведению

$$B(p, q) = \sum_{0 \leq m, m' \leq N-1} \int_R R_{N,m}(p) R_{N,m'}(q) d\mu_{m,m'}. \quad (22)$$

Здесь $R_{N,m}(p)(t) = \sum_n \frac{p^{(nN+m)}(0)}{(nN+m)!} t^n$, $m = 0, 1, \dots, N-1$.

Для случая $N = 2$ соотношение (22) можно записать так:

$$B(p, q) = \int_R \begin{pmatrix} R_{2,0}(p) & R_{2,1}(p) \end{pmatrix} d\mu \begin{pmatrix} R_{2,0}(q) \\ R_{2,1}(q) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Заметим, что можно попытаться также доказать теорему 2 обобщая, если это возможно, методику А. J. Dugan [1] на случай комплексных матриц (что приводит к задаче, являющейся частным случаем нерешенной задачи [4, Problem 1, p. 252]) и переходя затем, по возможности, к требуемому соотношению ортонормальности. Однако, мы воспользовались нашими результатами по симметричной проблеме моментов. Вообще, для случая произвольного n , методику построения спектральной функции пятидиагональной матрицы ([5, p. 274-281]) можно распространять на $(2n+1)$ диагональные матрицы, используя вектора из многочленов $p(\lambda), p(\lambda e), \dots, p(\lambda e^{n-1}), p(\lambda) = (p_0(\lambda), p_1(\lambda), \dots)^T$, e - первообразный корень n -й степени из 1. Можно рассматривать соответствующую проблему моментов и доказывать аналог теоремы Фавара с соотношением ортонормальности типа [5, p. 281, последняя формула].

А.Ж. Дуран получил для систем из (2) соотношения ортонормальности относительно скалярного произведения [4, Theorem 4.3, p. 250]:

$$B(p, q) = \int_R p(t)q(t)d\mu(t) + 4 \int_R p_0(t)q_0(t)d\nu(t), \quad (24)$$

где $p_0(t) = \frac{p(t)-p(-t)}{2}$, $q_0(t) = \frac{q(t)-q(-t)}{2}$ и μ, ν - некоторые меры, которые не всегда можно выбрать положительными.

А.Ж. Duran и W. Van Assche также установили, что многочлены

$$P_n(t) = \begin{pmatrix} R_{N,0}(p_{nN})(t) & \dots & R_{N,N-1}(p_{nN})(t) \\ R_{N,0}(p_{nN+1})(t) & \dots & R_{N,N-1}(p_{nN+1})(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{N,0}(p_{nN+N-1})(t) & \dots & R_{N,N-1}(p_{nN+N-1})(t) \end{pmatrix}$$

есть матричные многочлены, ортогональные на вещественной оси [2].

Итак, наши результаты относятся к многочленам, связанным с комплексными, эрмитовыми, пятидиагональными матрицами (и их можно обобщать на случай $(2n+1)$ -диагональных матриц), а результаты А.Ж. Дуран, W. Van Assche соответствуют многочленам, связанным с вещественными, симметрическими $(2n+1)$ -диагональными матрицами и имеют другую форму. Если сравнивать результаты для общего случая многочленов, связанных с пятидиагональными симметрическими матрицами, то можно сказать следующее. Сравнивая (13) и (23) видим, что в (13) в отличие от (23) под интегралом используются непосредственно значения $p_n(\lambda)$, что удобнее в алгебраических выражениях (в частности, видно, что λ^2 "проносится" под интегралом). Соотношение (24), в отличие от (13), (23) использует неположительные меры. Если говорить о соответствии между матричными многочленами, то заметим, что при β_n - вещественных в (1), многочлены $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$ из (1) удовлетворяют соотношению вида (2) с $N=2$. Многочлены $P_n(t)$, построенные для этого соотношения, как легко проверить, совпадают с $\hat{P}_n(t)$.

Если говорить о соответствии многочленов из (13) с матричными многочленами $\hat{P}_n(t)$, то здесь можно указать на аналогию с соответствием между многочленами, ортогональными на отрезке и на окружности. Такое соответствие полезно, к примеру, при вычислении асимптотики многочленов. Однако у этих классов многочленов различные общие свойства нулей (расположение, кратность, совместные корни).

Отметим, что соотношение (13), в отличие от (21) задает билинейный функционал $\hat{\sigma}(u, v)$ по формуле (14) такой, что $\hat{\sigma}(p_i, p_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \dots$. Это может быть использовано при разложении функций в ряды по многочленам $\{p_n(\lambda)\}_{n=0}^\infty$: $f(\lambda) = \sum_{i=0}^\infty a_i p_i(\lambda)$ в пространствах $L_S^2(\sigma) := \{f(\lambda) : \int_{R \cup T} (f(\lambda), f(-\lambda)) J_\lambda d\sigma J_\lambda^* \begin{pmatrix} f(\lambda) \\ f(-\lambda) \end{pmatrix} < \infty\}$.

Заметим, что многочлены, ортогональные на радиальных лучах с центром в нуле в комплексной плоскости изучались G. V. Milovanović [10].

ЛИТЕРАТУРА.

1. Duran A.J. On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures. // *Canad. J. Math.* – 1995. – 47. – P. 88-112.
2. Duran A.J. and Van Assche W. Orthogonal matrix polynomials and higher order recurrence relation. // *Linear Algebra and Appl.* – 1995. – 219. – P. 261-280.
3. Duran A.J. On orthogonal matrix polynomials. // Intern. Workshop on Orth. Polyn. in Math. Physics. – 1996. – Leganés. – 26-26 June.
4. Marcellán F., Álvarez-Nodarse R. On the "Favard theorem" and its extensions. // *J. of Comput. and Appl. Mathem.* – 2001. – 127. – P. 231-254.
5. Zagorodniuk S. On a five-diagonal Jacobi matrices and orthogonal polynomials on rays in the complex plane. // *Serdica Math. J.* – 1998. – 24. – P. 257-282.
6. Zagorodniuk S.M. Analog of Favard's theorem for polynomials connected with difference equation of 4-th order. // *Serdica Math. J.* – 2001. – 27. – P. 193-202.
7. Duran A.J. A generalization of Favard's theorem for polynomials satisfying a recurrence relation. // *J. Approx. Th.* – 1993. – 74. – P. 83-104.
8. Загороднюк С.М. О классе функций, связанном с некоторой проблемой моментов. // *Матем. физика, анализ, геом.* – 2001. – Т. 8, 3. – С. 251-260.
9. Крейн М.Г. Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m) . // *Укр. мат. журнал.* – 1949. – 2. – С. 3-66.
10. Milovanović G.V. A Class of Orthogonal Polynomials on the Radial Rays in the Complex Plane. // *J. Math. Anal. Appl.* – 1997. – 206. – P. 121-139.

Calculation of the Lyapunov Exponent of Linear Ordinary Equation with Rapidly Oscillating Coefficients

M. G. Lyubarsky

Kharkov National University, Ukraine

We study perturbed exponentially decomposable system assuming the integral norm $\{B\} \equiv \sup_{s,t} \left| \int_t^{t+s} B(t) dt \right|$ ($0 \leq t \leq \infty$, $0 \leq s \leq 1$) of the perturbation $B(t)$ to be small. If $B(t)$ is a rapidly oscillating matrix this condition can be fulfilled without making the values of $B(t)$ small. We give an iteration method for evaluation of the Lyapunov and Bohl exponents of the system. This may have many applications in physics. As an example we evaluate the increment of plasma beam instability. One more application is an averaging theorem for system of linear differential equations with small parameter.

2000 Mathematics Subject Classification 34D30, 58F10, 58F15, 58F30.

1. Introduction

There are many physical processes having unbounded increase of relevant physical quantities in time or space. At the initial stage these processes can be described by linear differential equations. At this stage an important feature of the process is its rate of increase. Its value is called the Lyapunov exponent of the equation. If all coefficients of the equation are constant, the greatest real part of its eigen-values coincides with this exponent; so, in this case the problem of calculating the Lyapunov exponent is mathematically trivial. In the general case the conditions that govern the process are non-stationary or spatially non-uniform, and one has to deal with an equation with non-constant coefficients. There are no general analytical methods for finding its solutions. So the general practice is to try to represent the equation as a small perturbation of some "non-perturbed" equation. Of course, one needs to know the solutions of the non-perturbed equation. Even at this point the problem by no means is a trivial one. Among thoroughly investigated cases there are equations with small or slowly varied perturbations (Fröman, N. Fröman, P. (1977)) especially in the systems of Hamiltonian type (Daleckiy, Yu., Krein, M. (1974)) or systems with periodical coefficients (Yakubovich, Starzhinskii, (1975)), (Daleckiy, Yu., Krein, M. (1974)). In this paper the perturbation needs not be necessarily small, instead it has to

oscillate quickly around its mean value. Here is the problem in its simplest form. Let

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \quad t \geq 0 \quad (1.1)$$

be a finite-dimensional non-perturbed equation with a constant operator A and let a perturbed equation have the form

$$\frac{dx}{dt} = Ax + B(t)x, \quad t \geq 0 \quad (1.2)$$

where $B(t)$ fulfills the condition

$$\{B\} \equiv \sup_{t>0, 0<s<1} \left| \int_t^{t+s} B(\tau) d\tau \right| < \infty \quad (1.3)$$

We say that $B(t)$ is integrally bounded on $t > 0$ and $\{B\}$ is its integral norm.

Our purpose is to find the Lyapunov exponent of a perturbed equation supposing $\{B\}$ is small enough. This condition is satisfied if the perturbation $B(t)$ is small or changes its sign (argument, if it is complex-valued) rapidly, as is the case in many important applications.

Product of two terms with a small integral norm is not necessarily small. This makes calculation of Lyapunov and Bohl exponents much more complicated task in the case when perturbation has a small integral norm without being small itself.

A wide class of equations of the type

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon a(t)x$$

with small parameter ϵ can be reduced to equations of the type (1.2) if one assumes existence of averaged operator

$$\bar{a} = \lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_s^{s+S} a(s') ds'$$

which does not depend on s . In this case $A = \bar{a}$ and the perturbation is

$$B(t) = a\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - \bar{a}$$

Its integral norm is small if ϵ is small.

The principal tool in the investigation is a special linear transformation which makes the perturbation quasi-diagonal with respect to invariant subspaces of A , each of them corresponding to set of all eigen-values with the same real part. The equation obtained in this way has the same Lyapunov exponent as the original one. Moreover, the most rapidly growing solutions of both perturbed and non-perturbed equations belong to the same invariant subspace. The transformation enables us to consider the equation in each subspace separately. In particular, in

order to determine the Lyapunov exponent, we have to consider only the subspace corresponding to the eigen-values with the biggest real part. The problem is reduced to one equation of the first order if only one such eigen-value exists and in addition it is simple. Then the Lyapunov exponent can be readily obtained. Such situation is typical if the system (1.2) is not of Hamiltonian type or it does not have symmetry properties. The equations that describe physical instabilities are usually of this kind.

First, we explain how the transformation in question may be constructed with an arbitrary accuracy. Second, given the norm of the error for some approximate transformation we estimate the Lyapunov exponent error which appears due to use of the approximate transformation instead of the exact one.

Two examples are given to display the method. The first one relates to plasma electronics (Bliokh, Lyubarskii (1999)). The second shows how one can get an averaging theorem for some equations with small parameter. In this example we use an idea of I.I. Gichman (Gichman (1952)).

Actually, the paper deals with a more general problem: $x(t)$ may be a function with values in some Banach space. Matrix A is replaced by an operator-function $A(t)$ in this space. We assume that $A(t)$ is exponentially decomposable (see the definition in section 2).

Two basic facts are important for our construction. The first one is that the property of an equation to have an exponential decomposition is stable with respect to perturbations with small integral norm. The second is the stability of the Bohl exponents and invariant subspaces with respect to these perturbations. Below we establish these facts and thus give a generalization of (Daleckiy, Yu., Krein, M. (1974)) in which the case of small $\int_t^{t+\tau} \|B(\sigma)\| d\sigma$ for all $0 \leq \tau \leq 1$ and $t \leq 0$ is considered (see also (Bodine, Sacker(2000)).

2. Basic definitions

Let X be a Banach space. We start with the equation

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad t \geq 0 \quad (2.1)$$

assuming $A(t)$ is a bounded operator-function. Let $U(t)$ be the Cauchy operator of this equation and P be some projector in X . Then there exist limits

$$k(P) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|U(t)P\|}{t}, \quad k'(P) = -\overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|PU^{-1}(t)\|}{t}$$

They are called the upper and lower Lyapunov exponents of the equation (2.1) in the subspace PX . The limits

$$k_g(P) = \overline{\lim}_{t,s \rightarrow \infty} \frac{\ln \|U(t+s)PU^{-1}(s)\|}{t}, \quad k'_g(P) = -\overline{\lim}_{t,s \rightarrow \infty} \frac{\ln \|U(s)PU^{-1}(t+s)\|}{t}$$

are called the upper and lower Bohl exponents respectively. Obviously we have

$$k'_g(P) \leq k'(P) \leq k(P) \leq k_g(P) \quad (2.2)$$

If P is identical operator, we just write k, k', k_g, k'_g

Let

$$I = P_1 + P_2 + \dots + P_n \quad (2.3)$$

be any decomposition of identical operator in X -space ($P_l P_s = 0, k \neq s$). The Lyapunov exponent k equals the biggest of the Lyapunov exponents $k(P_l), l = 1, 2, \dots, n$. The decomposition is called admissible if $A(t)$ commutes with all its components: $P_l A(t) = A(t) P_l$. In this case equation (2.1) splits into the system of separate equations in the corresponding subspaces $X_l = P_l X$:

$$\frac{dx_l}{dt} = P_l A(t) x_l, \quad l = 1, 2, \dots, n$$

Definition 1. If there is an admissible decomposition such that

$$k_g(P_l) \leq k'_g(P_{l+1}), \quad l = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.4)$$

then equation (2.1) is called exponentially decomposable (with respect to this decomposition). In this case the Cauchy operator $U(t)$ of equation (2.1) satisfies the inequalities

$$\begin{aligned} \|U(t) P_l U^{-1}(\tau)\| &\leq N_l e^{\beta_l(t-\tau)}, \quad t \geq \tau, \quad \|U(t) P_l U^{-1}(\tau)\| \leq N_l e^{\alpha_l(\tau-t)}, \\ \tau &\geq 0, l = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (2.5)$$

with some constants

$$N_l > 0, \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_n < \beta_n \quad (2.6)$$

If (2.5), (2.6) hold for some decomposition (not necessarily admissible), we say that equation (2.1) admits an exponential splitting.

Each finite-dimensional equation with a constant operator A is exponentially decomposable in invariant subspaces of A , each of them corresponding to a group of eigenvalues with the same real part.

Definition 2. Equations

$$\frac{dy_j}{dt} = A_j(t) y_j, \quad j = 1, 2$$

are called kinematically similar if there is an one-to-one correspondence between the sets of their solutions

$$y_1(t) = Q(t) y_2(t)$$

$Q(t)$, $t > 0$ being a uniformly bounded operator-function with uniformly bounded inverse.

Obviously, any two kinematically similar equations have the same set of corresponding exponents. If one of them is exponentially decomposable, so is the other. In Hilbert spaces each equation is exponentially decomposable if inequalities (2.2) hold for some (not necessarily, admissible) decomposition of the identical operator that is if it splits exponentially.

3. Quasi-diagonalization of the perturbed equation

Let (2.1) be exponentially decomposable with respect to decomposition (2.3). Consider the perturbed equation

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)x \quad (3.1)$$

the integral norm of operator $B(t)$ being bounded by a small $\delta > 0$. We want to find an operator $C(t)$ which commutes with projectors P_k , and also makes the equation

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + C(t)x \quad (3.2)$$

kinematically similar to equation (3.1). In this section we show that such operator exists and can be found if we know solution of a certain nonlinear differential equation. In the next section we show that this equation has a solution if $\{B\}$ is small enough and can be found by a simple iteration method. This means that the property of being exponentially decomposable is stable with respect to perturbations with small enough integral norm.

We begin with the known construction (Daleckiy, Yu., Krein, M.(1974)) which yields the above mentioned nonlinear integral equation.

The kinematical similarity of equations (3.1) and (3.2) means that Q in the definition of similarity is related to operators $A(t)$, $B(t)$ and $C(t)$:

$$\frac{dQ}{dt} = [A(t) + B(t)]Q(t) - Q(t)[A(t) + C(t)] \quad (3.3)$$

We have to find a quasi-diagonal operator $C(t)$

$$C(t) = \sum_k P_k C(t) P_k$$

such that equation (3.3) has a solution $Q(t)$ which is bounded together with its inverse operator $Q^{-1}(t)$. To fulfill these requirements we put $Q(t) = I + S(t)$ and demand $\|S(t)\| < d < 1$.

According to (3.3) we can write

$$\frac{dS}{dt} = A(t)S(t) - S(t)A(t) + F(t) \quad (3.4)$$

where

$$F(t) = B(t)[I + S(t)] - [I + S(t)]C(t) \quad (3.5)$$

It is easy to check that in the case when $F(t)$ is bounded and also satisfies the condition

$$\sum_k P_k F(t) P_k = 0 \quad (3.6)$$

a solution of equation (3.4) is given by expression

$$S(t) = \sum_{s,k;s < k} \int_0^t P_s U(t, \tau) F(\tau) U(\tau, t) P_s d\tau - \sum_{s,k;s > k} \int_t^\infty P_s U(t, \tau) F(\tau) U(\tau, t) P_k d\tau \quad (3.7)$$

$U(t, \tau) = U(t)U^{-1}(\tau)$ being the evolution operator of non-perturbed equation (1.2). The integrands in (3.7) decrease exponentially as $|t - \tau| \rightarrow \infty$ since

$$\begin{aligned} & \|P_s U(t, \tau)\| \cdot \|U(\tau, t) P_k\| = \\ & = \|U(t) P_s U^{-1}(\tau)\| \cdot \|U(\tau) P_k U^{-1}(t)\| \leq N_s N_k e^{(\beta_s - \alpha_k)(t - \tau)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

which in turn follows from (2.5). Therefore the integrals in (3.7) exist and one may differentiate them under the integral sign. Notice that any solution of (3.7) has the property

$$\sum_k P_k S(t) P_k = 0 \quad (3.9)$$

It follows from (3.5) that condition (3.6) can be rewritten as

$$\sum_k P_k [I + S(t)] P_k = \sum_k P_k [I + S(t)] C(t) P_k$$

The latter equality as well as (3.7) become identities if $C(t)$ is chosen as follows

$$C(t) = \sum_k P_k B(t) [I + S(t)] P_k$$

This choice yields

$$F(t) = \sum_{k,s,k \neq s} P_s [I - S(t)] B(t) [I + S(t)] P_k \quad (3.10)$$

Substituting this expression into (3.7) we obtain

$$\begin{aligned} S(t) = L[S](t) \equiv & \sum_{s,k;s < k} \int_0^t P_s U(t, \tau) [I - S(\tau)] B(\tau) [I + S(\tau)] U(\tau, t) P_k d\tau - \\ & \sum_{s,k;s > k} \int_t^\infty P_s U(t, \tau) [I - S(\tau)] B(\tau) [I + S(\tau)] U(\tau, t) P_k d\tau \end{aligned} \quad (3.11)$$

This integral equation is the key to the problem of quasi-diagonalization of perturbed equation (3.1).

4. Existence and uniqueness of solution of the integral equation

In this section we show that equation (3.11) has a unique solution with small norm if $\{B\}$ is small enough.

Lemma 1. *If for some $\delta > 0$, the inequality $\{B\} < \delta$ is fulfilled. Then*

$$\|J_i(t)\| \leq 3\delta, \quad i = 1, 2 \quad (4.1)$$

where

$$J_1(t) = \int_a^t e^{\tau-t} B(\tau) d\tau \quad \text{and} \quad J_2(t) = \int_t^\infty e^{t-\tau} B(\tau) d\tau \quad (4.2)$$

Proof. Suppose $a = -\infty$. Taking any number $0 < h < 1$, we represent J_1 as

$$J_1(t) = \sum_{k=-\infty}^{-1} J_1^k(t) \quad \text{where} \quad J_1^k \equiv \int_{t+kh}^{t+(k+1)h} e^{\tau-t} B(\tau) d\tau \quad (4.3)$$

Integration by parts yields

$$J_1^k = e^{(k+1)h} \int_{t+kh}^{t+(k+1)h} B(\tau) d\tau - \int_{t+kh}^{t+(k+1)h} e^{\tau-t} \int_{t+kh}^{\tau} B(\sigma) d\sigma d\tau$$

Consequently

$$\begin{aligned} \|J_1^k\| &\leq e^{(k+1)h} \left\| \int_{t+kh}^{t+(k+1)h} B(\tau) d\tau \right\| + \int_{t+kh}^{t+(k+1)h} e^{\tau-t} \left\| \int_{t+kh}^{\tau} B(\sigma) d\sigma \right\| d\tau \leq \\ &\delta \left\{ e^{(k+1)h} + \int_{t+kh}^{t+(k+1)h} e^{\tau-t} d\tau \right\} = \delta (2e^{(k+1)h} + e^{kh}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

and hence

$$\|J_1\| \leq \delta \left(\frac{1}{1-e^{-h}} + 1 \right)$$

Choosing $1 > h > \ln 2$ we obtain (4.1) for $i = 1$. The case $i = 2$ is similar.

If $a \neq -\infty$, (4.1) remains valid. We omit the proof.

Let us introduce a metric space $K_{q,Q}$, $q > 0$, $Q > 0$ which consists of all operator-functions $S(t)$ such that

$$\|S(t)\| \leq q, \quad \left\| \frac{dS}{dt}(t) \right\| \leq Q, \quad t \geq 0 \quad (4.5)$$

Define distance $\rho(S_1, S_2)$ as

$$\rho(S_1, S_2) = |S_2 - S_1| + \left| \frac{dS_2}{dt} - \frac{dS_1}{dt} \right|$$

where

$$|S| = \sup_{t \geq 0} \|S(t)\|$$

Our next step is to investigate continuity properties of the operator $L(S)$ introduced by (3.11). The following lemma shows that under certain conditions operator $L(S)$ maps $K_{q,Q}$ into itself, and its square L^2 is a contracting operator.

Lemma 2. Suppose equation (2.1) is exponentially decomposable. Let $A(t)$ and $B(t)$ be bounded:

$$|A(t)| \leq M_A, \quad |B(t)| \leq M_B, \quad t \geq 0 \quad (4.6)$$

and also $\{B\}$ be bounded by $\delta > 0$. Then, for each value of q ($0 < q < 1$), there are three numbers $Q > 0$, $C_1 > 0$ and $C_2 > 0$ independent of δ , such that

$$|L[S]| < C_1\delta, \quad \left| \frac{dL[S]}{dt} \right| < 2M_A C_1\delta + \frac{Q}{2}, \quad (S \in K_{q,Q}) \quad (4.7)$$

and

$$\rho(L^2[S_2], L^2[S_1]) < C_2\delta\rho(S_2, S_1) \quad S_1 \in K_{q,Q}, \quad S_2 \in K_{q,Q} \quad (4.8)$$

We prove the statement of the lemma choosing

$$Q = 2M_B(1+q)^2P, \quad P \equiv \sum_{s,k;s \neq k} P_{s,k}, \quad P_{s,k} \equiv \|P_s\| \cdot \|P_k\| \quad (4.9)$$

Proof. To obtain (4.7) and (4.8) as well as several others inequalities, we introduce the operators

$$Z_{s,k}[H_1, H_2](t) = \int_0^t P_s U(t, \tau) H_1(\tau) B(\tau) H_2(\tau) U(\tau, t) P_k \quad (s < k),$$

$$Z_{s,k}[H_1, H_2](t) = - \int_t^\infty P_s U(t, \tau) H_1(\tau) B(\tau) H_2(\tau) U(\tau, t) d\tau P_k \quad (s > k) \quad (4.10)$$

and

$$Z[H_1, H_2] = \sum_{s,k;s \neq k} Z_{s,k}[H_1, H_2] \quad (4.11)$$

Obviously,

$$L[S](t) = Z[I - S, I + S] \quad (4.12)$$

There are two useful relations:

$$\frac{dZ[H_1, H_2]}{dt} = A(t)Z[H_1, H_2] - Z[H_1, H_2]A + \sum_{s,k;s \neq k} P_s H_1 B H_2 P_k \quad (4.13)$$

and

$$|Z[H_1, H_2]| \leq 3\delta \left\{ [C(1 + 2M_A) + P] \cdot |H_1| \cdot |H_2| + C \left(|H_1| \left| \frac{dH_2}{dt} \right| + |H_2| \left| \frac{dH_1}{dt} \right| \right) \right\} \quad (4.14)$$

where

$$C \equiv \sum_{s,k;s \neq k} C_{s,k}, \quad C_{s,k} = P_{s,k} \frac{N_s N_k}{\beta_s - \alpha_k} \quad (4.15)$$

The first of these relations is an immediate consequence of identities

$$\frac{dU(t, \tau)}{dt} = A(t)U(t, \tau) \quad \text{and} \quad \frac{dU(\tau, t)}{dt} = -U(\tau, t)A(t)$$

To prove (4.14) we transform as follows the operators $Z_{s,k}$ in (4.10). In the case $s < k$ we replace $B(\tau)$ by its representation

$$B(\tau) = J(\tau) + \frac{dJ}{d\tau}(\tau) \quad \text{where} \quad J(t) = \int_0^t e^{\tau-t} B(\tau) d\tau;$$

and get rid of derivative $\frac{dJ(\tau)}{d\tau}$ by integrating by parts. To estimate the obtained expression we use Lemma 1 and inequality (3.8). The case $s > k$ is similar.

To obtain (4.14) we just make summation over all $(s, k), s \neq k$.

To estimate the expressions

$$L(S), \quad \frac{dL[S]}{dt}, \quad L[S_2] - L[S_1] \quad \text{and} \quad \frac{dL[S_2]}{dt} - \frac{dL[S_1]}{dt}, \quad S, S_1, S_2 \in K_{q,Q}$$

we use another inequality:

$$\left| \frac{dZ[H_1, H_2]}{dt} \right| \leq 2M_A |Z[H_1, H_2]| + M_B P |H_1| \cdot |H_2| \quad (4.16)$$

As a simple consequence of (4.14), we obtain

$$|L(S)| \leq 3\delta \{ [P + (1 + 2M_B)(1 + q)^2 + 2C(1 + q)Q] \} \equiv C_1 \delta \quad (4.17)$$

This proves the first inequality in (4.7). To prove the second one we use (4.16) and obtain

$$\left| \frac{dL[S]}{dt} \right| \leq 2M_A |L[S]| + M_B (1 + q)^2 P \leq 2M_A C_1 \delta + \frac{1}{2} Q$$

Thus, (4.7) is proved. We see that L maps the metric space $K_{q,Q}$ into itself.

To prove the remaining inequality of Lemma 2, we use the subtraction identity

$$Z[H'_1, H'_2](t) - Z[H_1, H_2](t) = Z[H'_1 - H_1, H'_2](t) + Z[H_1, H'_2 - H_2](t)$$

which is valid for all bilinear forms, so:

$$L[S_2] - L[S_1] = Z[I - S_2, S_2 - S_1] - Z[S_2 - S_1, I + S_1] \quad (4.18)$$

To estimate the right hand side of (4.18), we use (4.14) and conclude

$$|Z[S_1 - S_2, I + S_2]| \leq$$

$$3\delta \left\{ [P + (1 + 2M_A)C]|S_1 - S_2|(1 + q) + C \left[Q|S_1 - S_2| + (1 + q) \left| \frac{dS_1}{dt} - \frac{dS_2}{dt} \right| \right] \right\}$$

Obviously the same estimate is true for the second sum. Therefore

$$|L[S_2] - L[S_1]| \leq c_{11}|S_2 - S_1| + c_{12} \left| \frac{dS_2}{dt} - \frac{dS_1}{dt} \right| \quad (4.19)$$

where

$$c_{11} = 6\delta [CQ + (P + C(1 + q + 2M_A)(1 + q))], \quad c_{12} = 6\delta(1 + q) \quad (4.20)$$

Our next step is to estimate the difference of the derivatives

$$\frac{dL[S_2]}{d\tau} - \frac{dL[S_1]}{d\tau}$$

According to (4.16)

$$\left| \frac{dL[S_2]}{dt} - \frac{dL[S_1]}{dt} \right| \leq 2M_A |L[S_2] - L[S_1]| + 2M_B P(1 + q) |S_2 - S_1| \quad (4.21)$$

If we eliminate in this relation $|L[S_2] - L[S_1]|$ and use (4.19) we obtain

$$\left| \frac{dL[S_2]}{dt} - \frac{dL[S_1]}{dt} \right| \leq c_{21}|S_2 - S_1| + c_{22} \left| \frac{dS_2}{d\tau} - \frac{dS_1}{d\tau} \right| \quad (4.22)$$

where

$$c_{21} = 2M_B P(1 + q) + 2M_A c_{11}, \quad c_{22} = 2M_A c_{12} \quad (4.23)$$

Thus for any $S_1, S_2 \in K_{q,Q}$ one has

$$\rho(L[S_2], L[S_1]) \leq (c_{11} + c_{12} + c_{21} + c_{22})\rho(S_2, S_1) \quad (4.24)$$

To estimate

$$|L^2[S_2] - L^2[S_1]| \quad \text{and} \quad \left| \frac{dL^2}{dt}[S_2] - \frac{dL^2}{dt}[S_1] \right|$$

we put $L[S_i]$ instead of S_i , ($i = 1, 2$) in inequalities (4.19) and (4.22) and eliminate $|L[S_2] - L[S_1]|$ and $\left| \frac{dL[S_2]}{dt} - \frac{dL[S_1]}{dt} \right|$ once more using these two inequalities. We obtain

$$|L^2[S_2] - L^2[S_1]| \leq A_{11}|S_2 - S_1| + A_{12} \left| \frac{dS_2}{dt} - \frac{dS_1}{dt} \right| \quad (4.25)$$

and

$$\left| \frac{dL^2}{dt}[S_2] - \frac{dL^2}{dt}[S_1] \right| \leq A_{21}|S_2 - S_1| + A_{22} \left| \frac{dS_2}{dt} - \frac{dS_1}{dt} \right| \quad (4.26)$$

where

$$A_{ij} = \sum_{l=1}^2 c_{1l}c_{lj}, \quad i, j = 1, 2 \quad (4.27)$$

According to this equation, (4.20) and (4.23) each A_{ij} ($i, j = 1, 2$) is less than $\text{const} \cdot \delta$.

Now we have

$$\rho(L^2[S_2], L^2[S_1]) \leq (A_{11} + A_{12} + A_{21} + A_{22})\rho(S_2, S_1) \equiv C_2\delta \quad (4.28)$$

We have proved (4.8) and finished the proof of Lemma 2.

Lemma 2 together with the contraction principle shows that integral equation (3.10) has unique solution in $K_{q,Q}$ if integral norm of $B(t)$ is sufficiently small. Together with reasoning of the previous section this yields

Theorem 1. Let equation (2.1) with bounded operator $A(t)$ be exponentially decomposable and the norm of $B(t)$ be bounded by M_B . Then, for any fixed non-perturbed equation (2.1), there exists $\delta > 0$, which depends on M_B only, with the property: if the integral norm of $B(t)$ is less than δ then there exists a mapping

$$x(t) = [I + S(t)]y(t)$$

that transforms (3.1) into kinematically similar quasi-diagonal equation

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) + \sum_{k=1}^n P_k B(t) [I + S(t)] P_k] y \quad (4.29)$$

The integral norm of the perturbation in this equation becomes arbitrarily small as δ approaches zero.

Operator-function $S(t)$ is a solution of nonlinear integral equation (3.10) and can be found by iteration method. Moreover, the inequalities

$$|S| \leq C_1\delta, \quad \text{and} \quad \left| \frac{dS}{dt} \right| \leq Q \quad (4.30)$$

hold.

5. Stability of Bohl exponents

In this section we show that the Bohl exponents are stable with respect to perturbations with small integral norm. More precisely this is stated in

Lemma 3. Let $A(t)$ and $B(t)$ be bounded on positive axis. Then, for any $\epsilon > 0$, there exists $\delta > 0$ such that Bohl exponents \hat{k}_g and \hat{k}'_g of (3.1) satisfy

$$\hat{k}_g \leq k_g + \epsilon \quad \text{and} \quad \hat{k}'_g \geq k'_g - \epsilon \quad (5.1)$$

if $\{B\} < \delta$.

Proof. By the hypothesis the evolutionary operator $U(t, s) = U(t)U^{-1}(s)$ of equation (2.1) satisfies the inequality

$$\|U(t, s)\| \leq Ne^{\beta(t-s)}, \quad s \leq t \quad (5.2)$$

for any $\beta > k_g$ and some $N > 0$, which depends on β . Denote by $V(t, s)$ the evolutionary operator of (3.1). It satisfies the equation

$$\frac{dV(t, s)}{dt} - A(t)V(t, s) = B(t, s)V(t, s)$$

and, consequently,

$$V(t, s) = U(t, s) + \int_s^t U(t, \tau)B(\tau)V(\tau, s)d\tau \quad (5.3)$$

To estimate the last integral we integrate by parts and obtain

$$\int_s^t U(t, \tau)B(\tau)V(\tau, s)d\tau = J(t, s)V(t, s) - \int_s^t U(t, \tau)\{[-A(\tau) + I]J(\tau, s) - J(\tau, s)[A(\tau) + B(\tau)]\}V(\tau, s)d\tau$$

where

$$J(t, s) = \int_s^t e^{t-\tau}B(\tau)d\tau$$

According to Lemma 1 one may write $\|J(t, s)\| \leq 3\delta$. Therefore, (5.3) and (5.2) yield

$$\|V(t, s)\| \leq Ne^{\beta(t-s)} + 3\delta\|V(t, s)\| + 3N\delta(1 + 2M_A + M_B) \int_s^t e^{\beta(t-\tau)}\|V(t, \tau)\|d\tau$$

with arbitrary $M_A > |A|$ and $M_B > |B|$.

Since δ can be made arbitrarily small we obtain

$$\|V(t, s)\| < 2N[e^{\beta(t-s)} + 3\delta(1 + 2M_A + M_B) \int_s^t e^{\beta(t-\tau)}\|V(\tau, s)\|d\tau]$$

or

$$\phi(t) < 2N[e^{-3\beta s} + \delta(1 + 2M_A + M_B) \int_s^t \phi(\tau)d\tau] \equiv c_1 e^{-\beta s} + c_2 \delta \int_s^t \phi(\tau)d\tau \quad (5.4)$$

where

$$\phi(t) = e^{-\beta t}\|V(t, s)\|$$

and constants c_1 and c_2 are independent of δ . As is well known, the last inequality means that

$$\phi(t) \leq c_1 e^{-\beta s} e^{c_2 \delta(t-s)}$$

Returning to the operator $V(t, s)$, we rewrite this relation as follows

$$\|V(t, s)\| \leq c_1 e^{(\beta + c_2 \delta)(t-s)}$$

This means

$$\hat{k}_g \leq \beta + c_2 \delta$$

The first inequality in (5.1) is a consequence of this relation because β is any number greater than k_g . The second inequality concerning the lower Bohl exponent can be proved similarly.

Let us draw an important consequence of this Lemma. The non-perturbed equation and quasi-diagonalized perturbed one have the same set of subspaces in which they are exponentially decomposable. Therefore the Lemma is applicable to each of these subspaces; as a result we obtain

Theorem 2. Let equation (2.1) with a bounded operator $A(t)$ be exponentially decomposable in subspaces $X_l = P_l X$, $l = 1, 2, \dots, n$ and $B(t)$ be bounded by M_B . Then, for any $\epsilon > 0$, there exists a δ such that Bohl exponents $\hat{k}'_g(P_k)$ and $\hat{k}(P_k)$ of (3.1) obey the inequalities

$$k'_g(P_k) - \epsilon \leq \hat{k}'_g(P_k) \leq \hat{k}(P_k) \leq k_g(P_k) + \epsilon$$

as soon as $\{B\} < \delta$. δ depends only on equation (2.1) and numbers M_B and ϵ .

The theorem shows that equation (4.29) exponentially decomposes in subspaces X_k and its Bohl exponents are ordered in the same way as those of (2.1) if the integral norm of $B(t)$ is small enough. In particular, the Lyapunov and the Bohl exponents attain their greatest values in subspace $X_n = P_n X$

6. Calculation of Lyapunov and Bohl exponents

According to Theorem 1, perturbed equation (3.1) is kinematically similar to (4.29), if B is bounded and has sufficiently small integral norm. Therefore equation (3.1) can be decomposed into a system of separate equations in subspaces $X_k = P_k X$, $k = 1, 2, \dots, n$ defined by the non-perturbed equation. As is stated in Theorem 2, the Lyapunov exponent of (4.29) is attained in the subspace X_n . Thus, the upper Bohl and Lyapunov exponents of perturbed equation (3.1) coincide with the respective exponents of the equation

$$\frac{dy_n}{dt} = A(t)y_n + P_n B(t)[I - S(t)]y_n, \quad y_n \in X_n \quad (6.1)$$

We will use a more simple decomposition

$$I = P'_1 + P'_2, \quad P'_1 = P_1 + P_2 + \dots + P_{n-1}, \quad P'_2 = P_n$$

We resort to matrix notation and write, for instance, A_{ij} instead of $P'_i A P'_j$. The second of equations (6.1) may be written as follows:

$$\frac{dy_2}{dt} = [A_{22}(t) + B_{22}(t) + B_{21}(t)S_{12}(t)]y_2$$

The term $B_{22}(t)S_{22}(t)$ is not present because $S_{22}(t) = 0$. Consider an important particular case:

(i) subspace $X_2 = P_2 X$ is one-dimensional.

In this case we easily find the solution and obtain the following expressions for the both exponents

$$k = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{Re}\{A_{22}(\tau) + B_{22}(\tau) + B_{21}(\tau)S_{12}(\tau)\} d\tau \quad (6.2)$$

$$k_g = \overline{\lim}_{t, s \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_s^{s+t} \operatorname{Re}\{A_{22}(\tau) + B_{22}(\tau) + B_{21}(\tau)S_{12}(\tau)\} d\tau \quad (6.3)$$

We will use the following consequence of these formulas.

Lemma 4. Let \tilde{k} and \tilde{k}_g be defined by relations (6.2) and (6.3) in which S_{12} is replaced by its approximation \tilde{S}_{12} . Then the estimates

$$|k - \tilde{k}| \leq 2\delta\rho(S_{12}, \tilde{S}_{12}), \quad |k_g - \tilde{k}_g| \leq 2\delta\rho(S_{12}, \tilde{S}_{12}) \quad (6.4)$$

are true.

Proof. We have

$$|k - \tilde{k}| \leq \sup_t \left\{ \frac{1}{t} \left| \int_0^t B_{21}(\tau)[S_{12}(\tau) - \tilde{S}_{12}(\tau)] d\tau \right| \right\},$$

Now (6.4) can be obtained just by integration by parts and then using the same technique as in the proof of lemma 1.

In order to find approximate values of Lyapunov and Bohl exponents it remains to find some approximate $\tilde{S}_{12}(t)$. This can be done by an iteration method beginning with any function $S_{12}^0 \in K_{q,Q}$ and using (3.11). The latter can be rewritten as a system of two separate equations. We need just one of them

$$S_{12}(t) = L[S_{12}](t) \equiv \int_{\tau < t} U_{11}(t, \tau)[P_1 - S_{12}(\tau)]B(\tau)[P_2 + S_{12}(\tau)]U_{22}(\tau, t) d\tau$$

A more convenient equivalent form of the last equation is

$$S_{12} = L[S_{12}] = \int_0^t U_{11}(t, \tau)[B_{12}(\tau) - S_{12}(\tau)B_{22}(\tau) + B_{11}(\tau)S_{12}(\tau) - S_{12}(\tau)B_{21}(\tau)S_{12}(\tau)]U_{22}(\tau, t) d\tau \quad (6.5)$$

Define the successive approximations

$$S_{12}^0 = 0, \quad S_{12}^k = L[S_{12}^{k-1}], \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.6)$$

According to Lemma 2 we can write

$$\rho(S_{12}, S_{12}^{m+2}) = \rho(L^2[S_{12}], L^2[S_{12}^m]) \leq C_2 \delta \rho(S_{12}, S_{12}^m)$$

Hence

$$\rho(S_{12}, S_{12}^{2m}) \leq C_2^m \delta^m \rho(S_{12}, 0) \quad \text{and} \quad \rho(S_{12}, S_{12}^{2m-1}) \leq C_2^{m-1} \delta^{m-1} \rho(S_{12}, S_{12}^1) \quad (6.7)$$

According to the same Lemma the operator-functions S_{12} and $S_{12}^0 \equiv 0$ both belong to $K_{q,Q}$ and, consequently,

$$\rho(S_{12}, 0) = |S_{12}| \leq q + Q$$

In order to estimate $\rho(S_{12}, S_{12}^1)$ we represent it as

$$\rho(L[S_{12}], L[0]) \equiv |L[S_{12}] - L[0]| + \left| \frac{dL[S_{12}]}{dt} - \frac{dL[S_{12}^1]}{dt} \right|$$

and use (4.21). We obtain

$$\rho(S_{12}, S_{12}^1) \leq |L[S_{12}] - L[0]| + 2M_A |L[S_{12}] - L[0]| + 2M_B P(1+q) |S_{12}|$$

By (4.7) the right hand side of this inequality is less than

$$2C_1 \delta [1 + 2M_A + M_B P(1+q)]$$

So,

$$\rho(S_{12}, S_{12}^1) \leq C_3 \delta \quad \text{where} \quad C_3 = 2C_1(1 + 2M_A + M_B P(1+q)) \quad (6.8)$$

Now we can rewrite (6.7)

$$\rho(S_{12}, S_{12}^{2m}) \leq C_2^m \delta^m (q + Q) \quad \text{and} \quad \rho(S_{12}, S_{12}^{2m-1}) \leq C_3 C_2^{m-1} \delta^m \quad (6.9)$$

We have proved

Theorem 3. If the Lyapunov exponent and upper Bohl exponents are calculated by substituting the approximates S_{12}^{2m-1} or S_{12}^{2m} in (6.2) and (6.3) instead of S_{12} , then the resulting errors are less than

$$F C_2^{m-1} \delta^m, \quad F \equiv \max\{C_2(q+Q), C_3\}.$$

Coefficients C_1, C_2 and C_3 are given by (4.15), (4.15), and (6.8).

We see that there is no guaranteed gain in accuracy when we pass from an odd approximates to the next one.

For instance, if we want to obtain an approximate value of k with the error less than $C_3 C_2 \delta^2$ we can use the approximate formula

$$k = K^1 \quad (6.10)$$

where

$$K^1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left\{ \int_0^t \operatorname{Re} |A_{22}(\tau) + B_{22}(\tau) + B_{21}(\tau) \int_0^\tau U_{11}(\tau, \tau') B_{12}(\tau') U_{22}(\tau', \tau) d\tau'| d\tau \right\} \quad (6.11)$$

7. Calculation of Lyapunov and Bohl exponents in some particular cases. Two examples

In this section we obtain some convenient approximate formulas for Lyapunov and Bohl exponents. To avoid cumbersome expressions and simplify the statements of obtained results we use symbols $O(\delta)$ and $O_1(\delta)$. We shall write below

$$u(t) = O(\delta) \quad \text{and} \quad v(t) = O_1(\delta) \quad (7.1)$$

in order to denote that there is an independent of δ constant M such that

$$|u(t)| \leq M\delta, \quad |v(t)| \leq M\delta, \quad \left| \frac{dv}{dt} \right| \leq M\delta$$

For instance, according to Lemmas 1-2 we can write

$$\|J_1(t)\| = O(\delta); \quad L[S] = O(\delta),$$

$$\text{and } \rho(L^2[S_2], L^2[S_1]) = \rho(S_2, S_1)O(\delta) \quad (S_1, S_2 \in K_{q,q})$$

Approximate equality (6.10)) can be rewritten as

$$k = K^1 + O(\delta^2)$$

We will say that the last relation has the second order of accuracy. To raise the order of accuracy to the third one we have to make two more steps in the iteration process (6.6). This may result in very cumbersome expressions.

In the one-dimensional subspace X_2 the operator $U_{22}(t) = P_2 U(t) P_2$ takes the form

$$U_{22}(t) = \exp \left\{ \int_0^t \lambda(\tau) d\tau \right\} P_2$$

$\lambda(t)$ being a scalar function. Therefore (6.5) can be rewritten as

$$S_{12} = L[S_{12}] =$$

$$\int_0^t V_{11}(t, \tau) [B_{12}(\tau) - S_{12}(\tau) B_{22}(\tau) + B_{11}(\tau) S_{12}(\tau) - S_{12}(\tau) B_{21}(\tau) S_{12}(\tau)] d\tau \quad (7.2)$$

where

$$V_{11}(t, \tau) \equiv U_{11}(t, \tau) U_{22}(\tau, t) = U_{11}(t, \tau) \exp \left\{ - \int_\tau^t \lambda(\sigma) d\sigma \right\} \quad (7.3)$$

We are going to derive two simple expressions for the Lyapunov and Bohl exponents having the third order of accuracy. According to Lemma 4 and Theorem 3 it suffices to this end to evaluate

$$S_{12}^3 \equiv Z_{12}[I - S_{12}^2, I + S_{12}^2] \quad (7.4)$$

with the second order of accuracy. Since $S_{12} = O(\delta)$ the expression $Z_{12}[S_{12}^2, S_{12}^2]$ is equal to $O(\delta^2)$. By (4.16) the same expression is equal also to $O_1(\delta^2)$. Therefore one can write

$$S_{12}^3 = Z_{12}[I, I] - Z_{12}[S_{12}^2, I] + Z_{12}[I, S_{12}^2] + O_1(\delta^2) \quad (7.5)$$

This representation of S_{12}^3 may be made still simpler because any term of order $O(\delta^2)$ in S_{12}^2 generates in S_{12}^3 a term of order $O_1(\delta^2)$. Therefore one may drop all such terms in S_{12}^2 and among them the term $Z_{12}[S_{11}^1, S_{11}^1]$ when substituting S_{12}^2 in (7.5). Let us use this observation, when assumption (i) is fulfilled and, in addition,

(ii) Perturbation $B(t)$ is a quasi-scalar operator $B(t) = b(t)B$, integral norm of the scalar function $b(t)$ is less than δ , and B is a constant operator.

We show that

$$k = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \operatorname{Re} \left\{ A_{22}(\tau) + B_{22}(\tau) - \frac{1}{2} B_{21}(\tau) [A_{\lambda}(\tau) J_{11}^2(\tau) + J_{11}(\tau) A_{\lambda}(\tau) J_{11}(\tau)] B_{12} \right\} d\tau + O(\delta^3) \quad (7.6)$$

where the operators $J_{11}(\tau)$ and $A_{\lambda}(\tau)$ are defined by the relations

$$J_{11}(t) \equiv \int_0^t V_{11}(t, \tau) b(\tau) d\tau \quad (7.7)$$

and

$$A_{\lambda}(\tau) \equiv A(\tau) - \lambda(\tau)$$

The functions $J_{11}(t)$ and $V_{11}(t, \tau)$ have two obvious properties

$$\frac{dV_{11}(t, \tau)}{dt} = A_{\lambda}(t) V_{11}(t, \tau), \quad \frac{dV_{11}(t, \tau)}{d\tau} = -V_{11}(t, \tau) A_{\lambda}(\tau) \quad (7.8)$$

and

$$\frac{dJ_{11}(t)}{dt} = b(t) + A_{\lambda}(t) J_{11}(t) \quad (7.9)$$

By repeating the argument used in the proof of Lemma 1 one can easily see that $J_{11}(t) = O(\delta)$. So according to (6.5)

$$S_{12}(t) = \int_0^t b(\tau) V_{11}(t, \tau) [B_{12} - S_{12}(\tau) B_{22} + B_{11} S_{12}(\tau)] d\tau + O_1(\delta^2)$$

or

$$S_{12}(t) = J_{11}(t)B_{12} - \int_0^t V_{11}(t, \tau)b(\tau)S_{12}(\tau)d\tau B_{22} + \int_0^t V_{11}(t, \tau)B_{11}b(\tau)S_{12}(\tau)d\tau + O_1(\delta^2) \quad (7.10)$$

Let us calculate S_{12}^1 and S_{12}^2 . According to (7.2) and (7.7) we have

$$S_{12}^1(t) = L[S_{12}^0(t)] = L[0] = J_{11}(t)B_{12}$$

and by (7.10)

$$S_{12}^2(t) = L[J_{11}(t)B_{12}] = J_{11}(t)B_{12} - Y_1(t)B_{12}B_{22} + B_{11}Y_2(t)B_{12} + O_1(\delta^2) \quad (7.11)$$

where

$$Y_1 \equiv \int_0^t V_{11}(t, \tau)b(\tau)J_{11}(\tau)d\tau B_{12}$$

and

$$Y_2 \equiv \int_0^t V_{11}(t, \tau)B_{11}b(\tau)J_{11}(\tau)d\tau$$

To find the order of these integrals we will transform them. As a starting point we take identity

$$\frac{d}{dt}J_{11}^2(t) = \frac{dJ_{11}(t)}{dt}J_{11}(t) + J_{11}(t)\frac{dJ_{11}(t)}{dt}$$

and substitute the derivative by its expression (7.9). We obtain

$$\frac{d}{dt}J_{11}^2(t) = 2b(t)J_{11}(t) + A_\lambda(t)J_{11}^2(t) + J_{11}(t)A_\lambda(t)J_{11}(t)$$

Thus

$$b(t)J_{11}(t) = \frac{1}{2}\frac{dJ_{11}^2(t)}{dt} - \frac{1}{2}[A_\lambda(t)J_{11}^2(t) + J_{11}(t)A_\lambda(t)J_{11}(t)] \quad (7.12)$$

Now the integral Y_2 takes the form

$$Y_2 = \frac{1}{2}\int_0^t V_{11}(t, \tau)B_{11}\frac{dJ_{11}^2(\tau)}{d\tau}d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t V_{11}(t, \tau)B_{11}[A_\lambda(\tau)J_{11}^2(\tau) + J_{11}(\tau)A_\lambda(\tau)J_{11}(\tau)]d\tau$$

The first term is equal to

$$\frac{1}{2}B_{11}J_{11}^2(t) + \frac{1}{2}\int_0^t V_{11}(\tau)A_\lambda J_{11}^2(\tau)d\tau$$

The both remaining integrals in the last two relations are of the order $O_1(\delta^2)$. Thus

$$Y_2 = \frac{1}{2} B_{11} J_{11}^2(t) + O_1(\delta^2)$$

Similarly

$$Y_1 = \frac{1}{2} J_{11}^2(t) B_{12} + O_1(\delta^2)$$

Relation (7.11) takes the form

$$S_{12}^2(t) = J_{11}(t) B_{12} - \frac{1}{2} J_{11}^2(t) B_{12} B_{22} + \frac{1}{2} B_{11} J_{11}^2(t) B_{12} + O_1(\delta^2) \quad (7.13)$$

According to this relation $S_{12}^2(t) = J_{11}(t) B_{12} + O(\delta^2)$. Therefore

$$S_{12}^3 = L[J_{11}(t) B_{12}] + O_1(\delta^2) = S_{12}^2(t) + O_1(\delta^2)$$

In other words we can replace $S_{12}^2(t)$ by $S_{12}^3(t)$ in the left hand side of relation (7.13).

To calculate Lyapunov exponent we have to calculate the integral

$$\begin{aligned} \int_0^t b(\tau) S_{12}^3(\tau) d\tau &= \int_0^t b(\tau) J_{11}(\tau) d\tau B_{12} - \frac{1}{2} \int_0^t b(\tau) J_{11}^2(\tau) d\tau B_{12} B_{22} + \\ &\quad \frac{1}{2} B_{11} \int_0^t b(\tau) J_{11}^2(\tau) d\tau B_{12} + O(\delta^3) \end{aligned}$$

To this end we will use two identities: (7.12) and a similar identity

$$b(t) J_{11}^2(t) = \frac{1}{3} \frac{d}{dt} J_{11}^3(t) - \frac{1}{3} [A_\lambda(t) J_{11}^3(t) + J_{11}(t) A_\lambda(t) J_{11}^2(t) + J_{11}^2(t) A_\lambda(t) J_{11}(t)]$$

They yield

$$\int_0^t b(\tau) J_{11}(\tau) d\tau = \frac{1}{2} J_{11}^2(t) - \frac{1}{2} \int_0^t [A_\lambda(\tau) J_{11}^2(\tau) + J_{11}(\tau) A_\lambda(\tau) J_{11}(\tau)] d\tau$$

and

$$\begin{aligned} \int_0^t b(\tau) J_{11}^2(\tau) d\tau &= \\ \frac{1}{3} J_{11}^3(t) - \frac{1}{3} \int_0^t [A_\lambda(\tau) J_{11}^3(\tau) + J_{11}(\tau) A_\lambda(\tau) J_{11}^2(\tau) + J_{11}^2(\tau) A_\lambda(\tau) J_{11}(\tau)] d\tau \end{aligned}$$

The first terms in these two relations vanish after dividing them by t and passing to limit $t \rightarrow \infty$. The same procedure applied to the integral in the second relation reduces it to a third order constant $O(\delta^3)$, and we obtain expression (7.6) for the Lyapunov exponent.

In a similar way we find:

$$k_g = \overline{\lim}_{t,s \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \left\{ \int_s^{s+t} \operatorname{Re} \left\{ A_{22}(\tau) + B_{22}(\tau) - \frac{1}{2} B_{21} [A_\lambda(\tau) J_{11}^2(\tau) + \right. \right.$$

$$J_{11}(\tau)A_{\lambda}(\tau)]J_{11}(\tau)]B_{12}\}d\tau\} + O(\delta^3) \quad (7.14)$$

In order to obtain the Lyapunov exponent or the upper Bohl exponent with the first order accuracy in the case when the assumption (i)-(ii) is fulfilled, one needs just B_{22} among all entries forming B . In other words, one has to find the Lyapunov exponent of the equation which is the projection of perturbed equation (3.1) on the (one-dimensional) invariant subspace of the non-perturbed equation with the biggest Bohl exponent.

Example. The following example was first considered in [1]. Plasma-beam instability may be described by a system of two differential equations:

$$\frac{dE}{dt} - ik_0 b(t)E = -i[1 + \rho_0 b(t)]\Phi, \quad \frac{d^2\Phi}{dt^2} = \frac{1}{2}E \quad (7.15)$$

where t is the space coordinate, $E = E(t)$ and $\Phi = \Phi(t)$ are functions representing the electromagnetic field amplitude and the state of the beam, respectively. The function $b(t)$ describes plasma non-uniformity and is assumed to have integral norm small enough.

The non-perturbed equation i.e. (7.15) with $b \equiv 0$, has a constant operator A . The corresponding characteristic equation is $\lambda^3 = -i/2$. It has three roots

$$\lambda_1 = \frac{-\sqrt{3}-i}{2^{4/3}}, \quad \lambda_2 = \frac{i}{2^{1/3}}, \quad \lambda_3 = \frac{\sqrt{3}-i}{2^{4/3}},$$

all with different real parts. The perturbation operator depends on a scalar function. Thus both conditions (i) and (ii) are satisfied and to calculate the Lyapunov exponent one may use (7.14). Equation (7.15) takes the form

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} x + b(t) \left\{ \frac{i}{3} k_0 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \rho_0 \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix} \right\} x$$

in the basis that makes the non-perturbed operator diagonal. This means that

$$A_{22} = (\lambda_3), \quad B_{22} = \left(\frac{i}{3} k_0 + \frac{1}{3} \rho_0 \lambda_3 \right), \quad B_{21} = \left(\frac{i}{3} k_0 + \frac{1}{3} \rho_0 \lambda_1 \quad \frac{i}{3} k_0 + \frac{1}{3} \rho_0 \lambda_2 \right), \\ A_{11} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \lambda = \lambda_3, \quad B_{12} = \left(\frac{i}{3} k_0 + \frac{1}{3} \rho_0 \lambda_3 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (7.16)$$

and

$$U_{11}(t, \tau) = \exp \left\{ \int_{\tau}^t A_{11}(\tau) d\tau \right\} = \exp \left\{ \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} \right\}$$

Thus, according to (7.10) and (7.7)

$$V_{11}(t, \tau) = \exp \left\{ \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_3 \end{vmatrix} (t - \tau) \right\}, \\ J_{11}(t) = \int_0^t \exp \left\{ \begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_3 \end{vmatrix} (t - \tau) \right\} b(\tau) d\tau = \begin{vmatrix} J_1(t) & 0 \\ 0 & J_2(t) \end{vmatrix} \quad (7.17)$$

where

$$J_j = \int_0^t \exp\{\Lambda_j(t-\tau)\} b(\tau) d\tau, \quad \Lambda_j = \lambda_k - \lambda_3, \quad j = 1, 2$$

Substitution (7.16) and (7.17) in (7.6) yields:

$$k = \operatorname{Re} \lambda_3 - \frac{1}{9} \operatorname{Re} \{ (ik_0 + \rho_0 \lambda_3) \sum_{j=1}^2 \Lambda_j (ik_0 + \rho_0 \lambda_j) \Omega_j \}$$

where

$$\Omega_j \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t J_j^2(\tau) d\tau + O(\delta^3)$$

Averaging Theorem. Consider the equation

$$\frac{dx(s)}{ds} = \epsilon a(s)x \quad (7.18)$$

ϵ being a small parameter. We assume that the coefficient $a(s)$ can be averaged, i.e. the limit

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_s^{s+S} a(s') ds' = \bar{a} \quad (7.19)$$

exists and does not depend on s , and the expression under the limit sign approaches its limit uniformly with respect to all positive s . Notice that any almost periodic function has this property. Now we introduce "slow time" $t = \epsilon s$ and make (7.18) acquire the form of equation (1.2)

$$\frac{dx}{dt} = \bar{a}x + B(t)x$$

where

$$B(t) = a\left(\frac{t}{\epsilon}\right) - \bar{a}$$

The integral norm $\{B\}$ is small. Indeed, for any $t \geq 0$ and $0 \leq t_0 \leq 1$, we have

$$\begin{aligned} \int_t^{t+t_0} B(t') dt' &= \int_t^{t+t_0} \left[a\left(\frac{t'}{\epsilon}\right) - \bar{a} \right] dt' = \epsilon \int_s^{s+t_0 \epsilon^{-1}} [a(s') - \bar{a}] ds' = \\ &= t_0 \left[\frac{1}{t_0 \epsilon^{-1}} \int_s^{s+t_0 \epsilon^{-1}} a(s') ds' - \bar{a} \right] \end{aligned}$$

By (7.19) the last expression approaches zero as $\epsilon \rightarrow 0$. We denote it by δ

Thus, the results of this paper can be applied to equations of the form (7.18). Theorems 1 and 2 lead to

Theorem 4. If the coefficient $A(s)$ of finite dimensional equation (7.18) is bounded and ϵ is small enough then the equation

$$\frac{dx}{dt} = \bar{a}x \quad (7.20)$$

exponentially decomposes in the same subspaces as averaged equation (7.20).

The Bohl exponents of these two equations in each of these subspaces are closely related to each other. The difference between the Bohl exponents of equation (6.10) and the real parts of the corresponding eigen-values of the operator \bar{a} approaches zero as $O(\delta)$.

8. Discussion

Let us replace the assumption that the perturbation $B(t)$ is integrally small by a stronger one, namely, Banach norm of $B(t)$ is small. In this case the integral operator $L[S]$ (see (3.11)) is a contracting operator (Daleckiy, Krein 1974). This means that the rate of convergence of approximations $S^n(t)$ doubles. For instance, substitution of S_{12}^1 for S_{12} in formula (6.11) yields an approximate value of Lyapunov exponent, which has the third order of accuracy, while the same formula in general case guarantees only second order of accuracy.

If, on the contrary, we waive the assumption (i) then the considered problem becomes much more complicated. Consider, for instance finite-dimensional equation (1.1) with a constant matrix coefficient A . Even a small perturbation may cause phenomena similar to the parametric resonance. This happens in the case when the operator A has two eigenvalues with the same real part and the perturbation $B(t)$ has a harmonic term, which frequency is equal to the difference of these two eigenvalues.

The invariant subspace corresponding to the eigenvalues with the biggest real part is called the senior subspace. All others are called junior subspaces. We have shown in this paper that to find the Lyapunov and Bohl exponents of the perturbed equation it suffices to investigate only the senior subspace if the integral norm of the perturbation is small enough. Theorems 1 and 2 of the paper reduces the considered problem to the case when all eigenvalues of the operator A are imaginary. This problem is not solved except when the perturbation is periodical and small enough. To avoid these difficulties we have assumed that the senior subspace is one-dimensional.

REFERENCES

1. Bliokh K.Yu and Lyubarskii M.G. Influence of longitudinal variation in plasma density on the growth Rate of beam-plasma instability. // Plasma Physics Reports. - 1999. - 25. - P. 420-425.
2. Bodine I., Sigrun, Sacker J. Robert A new approach in asymptotic diagonalization of linear differential systems. // Dynam. Diff.Eq. - 2000. - 12. - P. 229-245.
3. Daleckiy Yu., Krein M. Stability of solutions of differential equations in Banach space. Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, R.I. - 1974. - 534 p.

4. Fröman N., Fröman P.O. Phase-integral calculation of quantal matrix elements without the use of wavefunctions. // *Mathematical Phys.* – 1977. – 18. – P. 903-906.
5. Gihman I.I. Concerning a theorem of N.N. Bogolyubov. // *Ukrain. Mat. J.* – 1952. – 4. – P. 4215-4219.
6. Heading J. Global phase-integral methods. // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – 1977. – 30. – P. 281-302.
7. Hsieh P.F., Xie F. On asymptotic diagonalization of linear ordinary differential equations. // *Dynam. Contin. Discrete Impuls. Systems* – 1998. – 4. – P. 351-377.
8. Murdock, J. A. *Perturbations. Theory and methods.* – Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.
9. Olver F.W.J. Connection formulas for second-order differential equations having an arbitrary number of turning points of arbitrary multiplicities. // *SIAM J. Math. Anal.* – 1977. – 8. – P. 673-700.
10. Yakubovich V.A., Starzhinskii, V.M. *Linear differential equations with periodic coefficients.* Vol 1, Vol 2. – Halsted Press (John Wiley & Sons) New York-Toronto. – 1975.

Функциональная модель Нады–Фояша для
ограниченных операторов

О. В. Розуменко

Харьковский национальный университет, Украина

Осуществляется построение функциональной модели для произвольного ограниченного, не обязательно сжимающего, оператора T , действующего в гильбертовом пространстве H . Эта модель является аналогом функциональной модели Б. Секефальви-Нады и Ч. Фояша.

2000 *Mathematics Subject Classification* 47A45.

Функциональная модель для оператора сжатия T ($\|T\| \leq 1$), действующего в гильбертовом пространстве H , впервые была построена Б. Секефальви-Надем и Ч. Фояшем [2]. Построение функциональной модели, которая представляет собой оператор умножения на независимую переменную в специальном пространстве функций, основано на спектральном разложении унитарного оператора U , причем U является дилатацией сжатия T ($P_H U^n|_H = T^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$). Различные функциональные реализации такой модели были получены также Б. С. Павловым [6] и Л. де Бранжем – Дж. Ровняком [7].

Попытки построения функциональных моделей для произвольных ограниченных операторов T наталкивались на существенные трудности, причем одна из основных проблем здесь состоит в том, что дилатация U является J -унитарным оператором, $U^*JU = UJU^* = J$ (J -инволюция), для которого, вообще говоря, спектральные разложения отсутствуют. Тем не менее в работе В. А. Золотарёва [1] была получена функциональная модель произвольного ограниченного оператора, которая обобщает известную модель Б. С. Павлова [4, 5]. В данной работе, основываясь на результатах [1], получена функциональная модель любого ограниченного оператора T (сжимаемость которого не предполагается), являющаяся аналогом функциональной модели Б. Секефальви-Нады и Ч. Фояша [2].

1. Напомним, что через $[H, H]$ принято обозначать множество всех ограниченных линейных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H . Рассмотрим ограниченный оператор T в гильбертовом пространстве H .

Совокупность

$$\Delta = \left(J_E, H \oplus E, V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}, H \oplus F, J_F \right), \quad (1)$$

назовем [1] унитарным метрическим узлом (унитарным расширением), если оператор $V = \begin{bmatrix} T & \Phi \\ \Psi & K \end{bmatrix}$, отображающий ортогональную сумму гильбертовых пространств $H \oplus E$ в $H \oplus F$, удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} V^* \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_F \end{bmatrix} V &= \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_E \end{bmatrix}, \\ V \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_E \end{bmatrix} V^* &= \begin{bmatrix} I_H & 0 \\ 0 & J_F \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2)$$

где J_E и J_F — самосопряженные операторы в E и F соответственно, причем $J_E^2 = I_E$ и $J_F^2 = I_F$. Прежде всего отметим [1], что для любого ограниченного оператора T в H можно построить соответствующие элементы узла Δ (1), чтобы выполнялись условия (2). Так как операторы J_E и J_F являются инволюциями, $J_E^2 = I_E$, $J_F^2 = I_F$, то $J_E = Q_E^+ - Q_E^-$, $J_F = Q_F^+ - Q_F^-$, где Q_E^\pm , Q_F^\pm — ортопроекторы, для которых $Q_E^+ Q_E^- = Q_F^+ Q_F^- = 0$. Напомним [2], что оператор $U \in [G, G]$ называется дилатацией оператора $T \in [H, H]$, если $G \supseteq H$, и

$$T^n h = P_H U^n h \quad (\forall h \in H, \forall n \in \mathbb{Z}_+), \quad (3)$$

где P_H — ортопроектор на H . Дилатация U называется унитарной (изометрической), если оператор U обладает унитарностью (изометричностью) в G .

Через $l_M^2(E)$ обозначим гильбертово пространство вектор-функций $u(k)$ дискретного аргумента $k \in M$, где M — подмножество в \mathbb{Z} , $M \subseteq \mathbb{Z}$, со значениями в гильбертовом пространстве E , $u(k) \in E$ для всех $k \in M$ таких, что

$$\sum_{k \in M} \|u(k)\|_E^2 < \infty.$$

Рассмотрим далее гильбертово пространство

$$G = l_{\mathbb{Z}_-}^2(E) \oplus H \oplus l_{\mathbb{Z}_+}^2(F) \quad (4)$$

вектор-функций $f = (u(k); h; v(k)) \in G$ с естественной структурой ортогональной суммы гильбертовых пространств, где: $u(k) \in l_{\mathbb{Z}_-}^2(E) = \sum_{-\infty}^{-1} \oplus E$, $h \in H$, а $v(k) \in l_{\mathbb{Z}_+}^2(F) = \sum_0^{\infty} \oplus F$. Определим в G индефинитную, вообще говоря, J -метрику, $\langle J \cdot, \cdot \rangle$, где

$$Jf = (J_E u(k); h; J_F v(k)).$$

Зададим в G оператор U ,

$$Uf = (P_- u(k-1); \Phi u(-1) + Th; \bar{v}(k)), \quad (5)$$

где: P_- — оператор сужения на \mathbb{Z}_- , а функция $\bar{v}(k)$ из $l^2_{\mathbb{Z}_+}(F)$ равна, $\bar{v}(0) = Ku(-1) + \Psi h$, $\bar{v}(k) = v(k-1)$ при $k > 0$. Легко видеть, что из узловых соотношений (2) для Δ немедленно следует, что оператор U (5) унитарен (J -унитарен) в J -метрике, то есть

$$U^*JU = J, \quad UJU^* = J. \quad (6)$$

Кроме того, очевидно, что расширение U (5) обладает дилатационным свойством (3) по отношению к основному оператору T узла Δ (1).

Теорема 1. Произвольный оператор $T \in [H, H]$ обладает дилатацией U (5) в G (4), которая является J -унитарным (6) оператором.

Подпространства $D_- = l^2_{\mathbb{Z}_-}(E)$ и $D_+ = l^2_{\mathbb{Z}_+}(F)$ являются соответственно приходящим и уходящим подпространствами дилатации U (5) в смысле Лакса-Филлипса [3], а именно справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} 1) & \quad D_+ \perp D_-; \\ 2) & \quad U^k D_+ \subseteq D_+, \quad k \in \mathbb{Z}_+; \\ 3) & \quad (U^*)^s D_- \subseteq D_-, \quad s \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (7)$$

II. Односторонний сдвиг, который индуцирует оператор U (5) на D_+ , а U^* , соответственно, на D_- , естественно продолжить до двустороннего сдвига. В гильбертовом пространстве

$$l^2_{\mathbb{Z}}(F) = \sum_{-\infty}^{\infty} \oplus F \quad (8)$$

зададим метрику J_F (которую можно рассматривать как естественное продолжение J -метрики с подпространства D_+) $\langle J_F \cdot, \cdot \rangle$,

$$(J_F v)(k) = J_F v(k),$$

где $v(k) \in l^2_{\mathbb{Z}}(F)$. Введем в $l^2_{\mathbb{Z}}(F)$ оператор трансляции

$$(U_F v)(k) = v(k-1), \quad v(k) \in l^2_{\mathbb{Z}}(F), \quad (9)$$

который будет унитарным как в метрике Гильберта $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространства $l^2_{\mathbb{Z}}(F)$, так и в J_F метрике $\langle J_F \cdot, \cdot \rangle$. Аналогичным образом, в пространстве $l^2_{\mathbb{Z}}(E)$ зададим J_E метрику и соответствующий оператор сдвига U_E ,

$$(U_E u)(k) = u(k-1), \quad (10)$$

где $u(k) \in l^2_{\mathbb{Z}}(E)$.

В дальнейшем через P_+ и P_- будем обозначать соответствующие ортопроекторы (в пространствах $G, l^2_{\mathbb{Z}}(F), l^2_{\mathbb{Z}}(E)$) на надлежащее уходящее D_+ и приходящее D_- подпространства.

III. Связывая асимптотическое поведение трансляций U_F, U_E и оператора дилатации U , зададим волновые операторы W_{\pm} , —

$$\begin{aligned} W_- &= s - \lim_{n \rightarrow \infty} U^n P_- U_E^{-n} \quad (l^2_{\mathbb{Z}}(E) \rightarrow G); \\ W_+ &= s - \lim_{n \rightarrow \infty} U^{-n} P_+ U_F^n \quad (l^2_{\mathbb{Z}}(F) \rightarrow G); \end{aligned} \quad (11)$$

при этом $U^{-1} = JU^*J$, в силу (6). Корректность введенных операторов W_{\pm} очевидна, ибо $G \cap l^2_{\mathbb{Z}}(E) \supseteq D_-$, $G \cap l^2_{\mathbb{Z}}(F) \supseteq D_+$. Ясно, что

$$W_- P_- = P_-, \quad W_+ P_+ = P_+. \quad (12)$$

Кроме того, имеют место соотношения сплетаемости:

$$W_- U_E = U W_-, \quad W_+ U_F = U W_+. \quad (13)$$

Основным вопросом для W_{\pm} является вопрос о существовании пределов (11). Рассмотрим допредельное выражение в (11) для W_- ,

$$f_n = U^n P_- U_E^{-n} u \quad (u \in l^2_{\mathbb{Z}}(E), n \geq 1). \quad (14)$$

В работе [1] получена следующая формула:

$$f_{n+k} - f_n = \sum_{s=n+1}^{n+k} U^s P_{-1} U_E^{-s} u, \quad (15)$$

где $n, k \in \mathbb{Z}_+$, а $u \in l^2_{\mathbb{Z}}(E)$.

Теорема 2. [1] Предположим, что оператор T является сжатием, $\|T\| \leq 1$. Тогда волновые операторы W_{\mp} (11) существуют и являются изометриями из $l^2_{\mathbb{Z}}$ в пространство G , при этом выполняются соотношения (12) и (13).

В общей ситуации, когда сжимаемость T не предполагается, из (15) следует, что

$$\|f_{n+k} - f_n\| \leq \sum_{n+1}^{n+k} \|U^s\| \cdot \|u(s-1)\|. \quad (16)$$

Воспользуемся далее этой оценкой для того, чтобы найти достаточные условия (по сути выделение классов функций u), которые гарантировали бы фундаментальность в пространстве G (4) последовательности f_n (14).

Выделим в пространстве $l^2_{\mathbb{Z}}(E)$ такое линейное многообразие функций u , что

$$\sum_{s=0}^{\infty} \|u(s)\| a^s < \infty, \quad (17_+)$$

где $a = \|U\| \geq 1$.

Введем весовую последовательность

$$\beta_s^+ = \beta_s^+(c) = \begin{cases} 1; & s \in \mathbb{Z}_-; \\ c^s; & s \in \mathbb{Z}_+; \end{cases} \quad (18_+)$$

где $c \geq 1$ и определим гильбертово пространство

$$l_{\mathbb{Z}}^2(E, \beta^+) = \left\{ u(k) \in E : k \in \mathbb{Z}; \sum_{-\infty}^{\infty} \|u(s)\|^2 \beta_s^+ = \|u\|_{\beta^+}^2 < \infty \right\}. \quad (19_+)$$

Пусть $u \in l_{\mathbb{Z}}^2(E, \beta^+(c))$ (19₊), где $c > a^2$ ($a = \|U\| \geq 1$), тогда [1] для функций u из $l_{\mathbb{Z}}^2(E, \beta^+(c))$ предел $W_- u$ (11) существует.

Применяя аналогичные соображения, относящиеся к существованию оператора W_+ (11), мы получим, что в пространстве $l_{\mathbb{Z}}^2(F)$ необходимо выделить такое многообразие вектор-функций v , для которых имеет место

$$\sum_{s=-\infty}^{-1} \|v(s)\| b^{|s|} < \infty, \quad (17_-)$$

где $b = \|U^{-1}\|$. Рассмотрим теперь (аналогично (18₊)) весовую последовательность на левой полуоси \mathbb{Z}_- , —

$$\beta_s^- = \beta_s^-(d) = \begin{cases} d^{|s|}; & s \in \mathbb{Z}_-; \\ 1; & s \in \mathbb{Z}_+; \end{cases} \quad (18_-)$$

где $d \geq 1$, и определим гильбертово пространство

$$l_{\mathbb{Z}}^2(F, \beta^-) = \left\{ v(k) \in F : k \in \mathbb{Z}; \sum_{-\infty}^{\infty} \|v(s)\|^2 \beta_s^- = \|v\|_{\beta^-}^2 < \infty \right\}. \quad (19_-)$$

Второй волновой оператор W_+ (11) будет существовать как сильный предел на векторах из пространства $l_{\mathbb{Z}}^2(F, \beta^-(d))$ (19₋), где $d > b^2$ ($b = \|U^{-1}\| \geq 1$) [1].

Имеют место [1] соотношения

$$\begin{aligned} \langle JW_+ v, W_+ v' \rangle_G &= \langle J_F v, v' \rangle_{l_{\mathbb{Z}}^2(F)}; \\ \langle JW_- u, W_- u' \rangle_G &= \langle J_E u, u' \rangle_{l_{\mathbb{Z}}^2(E)} \end{aligned} \quad (20)$$

для любых $u, u' \in l_{\mathbb{Z}}^2(E, \beta^+)$ (19₊) и $v, v' \in l_{\mathbb{Z}}^2(F, \beta^-)$ (19₋).

Теорема 3. [1] Волновые операторы W_- и W_+ (11), действующие соответственно из $l_{\mathbb{Z}}^2(E, \beta^+)$ (19₊) и из $l_{\mathbb{Z}}^2(F, \beta^-)$ (19₋) (где $c > a$, $d > b$, причем $a = \|U\|$, $b = \|U^{-1}\|$) в пространство G , (4) существуют и обладают J -изометричностью (20), при этом имеют место соотношения (12) и (13).

IV. Следуя традиционной [3, 4, 5] схеме, по волновым операторам W_{\pm} (11) зададим оператор рассеяния

$$S = W_+^{[-1]} W_- \quad (l_{\mathbb{Z}}^2(E, \beta^+) \rightarrow l_{\mathbb{Z}}^2(F, \beta^-)), \quad (21)$$

при этом $W_+^{[-1]} = P_{l_{\mathbb{Z}}^2(F, \beta^-)} J W_+^* J$ в силу (20), где $P_{l_{\mathbb{Z}}^2(F, \beta^-)}$ — ортопроектор в $l_{\mathbb{Z}}^2(F)$ на подпространство $l_{\mathbb{Z}}^2(F, \beta^-)$. Существенно, что для $W_+^{[-1]}$ имеет место представление, аналогичное (11).

Теорема 4. [1] Оператор $W_+^{[-1]}$ является сильным пределом,

$$W_+^{[-1]} = s - \lim_{n \rightarrow \infty} U_F^{-n} P_+ U^n. \quad (22)$$

Аналогично (13) для $W_+^{[-1]}$ из формулы (22) следует, что

$$W_+^{[-1]} U = U_F W_+^{[-1]}. \quad (23)$$

Поэтому [1] S -оператор (21) сплетает трансляции

$$S U_E = U_F S. \quad (24)$$

Кроме того, из (12) следует [1], что

$$P_+ S P_- = 0. \quad (25)$$

Таким образом,

$$S l_{\mathbb{Z}-}^2(E) \subseteq l_{\mathbb{Z}-}^2(F, \beta^-).$$

Теорема 5. Ограниченный (сжимающий в случае $\|T\| \leq 1$) оператор рассеяния S (21) обладает трансляционной инвариантностью (24) и удовлетворяет соотношению (25).

V. Рассмотрим теперь отображение B_{NF_+} из $l_{\mathbb{Z}}^2(E, \beta^+) + l_{\mathbb{Z}}^2(F, \beta^-)$ в пространство G (4), задаваемое формулой

$$\begin{aligned} B_{NF_+} g &= B_{NF_+} \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix} = (W_- - W_+ S) g_+ + W_+ g_- = \\ &= \begin{bmatrix} W_- - W_+ S & W_+ \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $g_+ \in l_{\mathbb{Z}}^2(E, \beta^+)$, $g_- \in l_{\mathbb{Z}}^2(F, \beta^-)$.

Прообраз подпространства D_+ при отображении B_{NF_+} , в силу (12), имеет вид

$$\hat{D}_+(F) = \begin{pmatrix} 0 \\ l_{\mathbb{Z}_+}^2(F) \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Найдем прообраз подпространства D_- . Так как

$$B_p \tau \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix} = B_{NF_+} \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix},$$

где $B_p = \begin{pmatrix} W_- & W_+ \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [1]$; $\tau = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S & I \end{bmatrix}$, получаем

$$\hat{D}_-(E) = \begin{pmatrix} l^2_{\mathbb{Z}_-}(E) \\ Sl^2_{\mathbb{Z}_-}(E) \end{pmatrix}. \quad (28)$$

Очевидно, что

$$\|B_{NF_+} g\|_G^2 = \left\langle \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_+^* W_+ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix} \right\rangle_{l^2}, \quad (29)$$

где

$$W_{11} = W_-^* W_- - W_-^* W_+ S - S^* W_+^* W_- + S^* W_+^* W_+ S;$$

$$W_{12} = W_-^* W_+ - S^* W_+^* W_+;$$

$$W_{21} = W_+^* W_- - W_+^* W_+ S.$$

Поэтому естественно определить гильбертово пространство

$$l^2_\beta(W_{NF_+}) = \left\{ g = \begin{pmatrix} g_+ \\ g_- \end{pmatrix} : g_+ \in l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^+), \right. \\ \left. g_- \in l^2_{\mathbb{Z}}(F, \beta^-); \langle W_{NF_+} g, g \rangle_{l^2} < \infty \right\}, \quad (30)$$

где W_{NF_+} , в силу (29), имеет вид

$$W_{NF_+} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_+^* W_+ \end{bmatrix}. \quad (31)$$

Вычислим блоки оператора W_{NF_+} (31), воспользовавшись следующими формулами [1]:

$$W_-^* W_- = I + 2(W_-^* Q^- W_- - Q_E^-);$$

$$W_+^* W_- = S + 2(W_+^* Q^- W_- - Q_F^- S);$$

$$W_-^* W_+ = S^* + 2(W_-^* Q^- W_+ - S^* Q_F^-);$$

$$W_+^* W_+ = I + 2(W_+^* Q^- W_+ - Q_F^-).$$

Тогда

$$W_{11} = I - S^* S + 2[(W_-^* - S^* W_+^*) Q^- (W_- - W_+ S) + \\ + S^* Q_F^- S - Q_E^-];$$

$$W_{12} = (W_-^* - S^* W_+^*) Q^- W_+;$$

$$W_{21} = W_+^* Q^- (W_- - W_+ S).$$

Поэтому оператор W_{NF_+} (31) можно записать в виде

$$W_{NF_+} = \begin{bmatrix} I - S^* S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

где

$$W_{11} = (W_-^* - S^* W_+^*) Q^- (W_- - W_+ S) + S^* Q_F^- S - Q_E^-; \quad (33)$$

$$W_{22} = W_+^* Q^- W_+ - Q_F^-,$$

который в случае сжатия T ($Q^- = Q_F^- = Q_E^- = 0$) имеет традиционный вид [2]:

$$W_{NF_+} = \begin{bmatrix} I - S^* S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}. \quad (34)$$

Из соотношений сплетаемости (13) следует, что дилатация U на векторах $B_{NF_+} g$ (26) и, значит, на всем пространстве $l_\beta^2(W_{NF_+})$ (30) действует трансляционным образом —

$$\hat{U}g = \begin{pmatrix} U_E g_+ \\ U_F g_- \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Очевидно, что в силу структуры пространства дилатации G (4) и вида $D_-(E)$ (28), $D_+(F)$ (27) в пространстве $l_\beta^2(W_{NF_+})$ (30) исходное пространство H изоморфно,

$$\hat{H}_{NF}^+ = l_\beta^2(W_{NF_+}) \ominus \left(\begin{matrix} l_{\mathbb{Z}_-}^2(E) \\ l_{\mathbb{Z}_+}^2(F) + S l_{\mathbb{Z}_-}^2(E) \end{matrix} \right), \quad (36)$$

поэтому оператор T реализуется в \hat{H}_{NF}^+ посредством сдвига,

$$\hat{T}g = P_{\hat{H}_{NF}^+} \begin{bmatrix} U_E & 0 \\ 0 & U_F \end{bmatrix} g \quad \forall g \in \hat{H}_{NF}^+. \quad (37)$$

Теорема 6. Основной оператор T простого унитарного метрического узла Δ , действующий в гильбертовом пространстве H , и его J -унитарная дилатация U (5) в G (4) унитарно эквивалентны трансляционной модели \hat{T} (37) в \hat{H}_{NF}^+ (36) и \hat{U} (35) в гильбертовом пространстве $l_\beta^2(W_{NF_+})$ (30) соответственно.

Отметим, что в случае сжатия T ($\|T\| \leq 1$) мы приходим к известной [2] модельной реализации Б. Секефальви-Надя и Ч. Фояша, так как

$$l_\beta^2(W_{NF_+}) = l^2 \left(\begin{bmatrix} I - S^* S & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \right)$$

в силу (34).

VI. Каждой вектор-функции $u(k) \in l^2_{\mathbb{Z}}(E)$ сопоставим при помощи преобразования Фурье \mathcal{F} вектор-функцию $u(\theta) \in L^2_{\mathbb{T}}(E)$,

$$u(\theta) = \mathcal{F}(u(k)) = \sum_{-\infty}^{\infty} u(k) e^{ik\theta}. \quad (38)$$

При этом сходимость ряда (38) понимается в топологии пространства $L^2_{\mathbb{T}}(E)$ -функций, заданных и измеримых на единичной окружности \mathbb{T} ($\theta \in [0, 2\pi]$), со значениями в гильбертовом пространстве E , квадрат E -нормы которых суммируем.

Преобразование Фурье \mathcal{F} (38) отображает естественным образом $l^2_{\mathbb{Z}_+}(E)$ в пространстве Харди $H^2_+(E)$, которое образуют E -значные функции из $L^2_{\mathbb{T}}(E)$, имеющие голоморфное продолжение в круг $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Аналогичным образом, $l^2_{\mathbb{Z}_-}(E)$ переходит в пространство Харди $H^2_-(E)$ -голоморфных функций, отвечающих внешности круга \mathbf{D} ($|z| > 1$), при этом очевидно, что

$$L^2_{\mathbb{T}}(E) = H^2_+(E) \oplus H^2_-(E).$$

Обратимся теперь к гильбертову пространству $l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^+)$ (19₊) и разложим каждую функцию $u(k)$ из этого пространства на две ортогональные компоненты, $u(k) = u_-(k) + u_+(k)$, при этом $\text{supp } u_{\pm} \subseteq \mathbb{Z}_{\pm}$. Очевидно, что $u_-(\theta)$ -Фурье-образ $u_-(k)$ голоморфно продолжаем в области $\{z : |z| > 1\}$, что же касается $u_+(\theta) = \mathcal{F}(u_+(k))$, то ряд

$$\sum_0^{\infty} u(k) r^k e^{ik\theta}$$

будет сходиться в метрике $L^2_{\mathbb{T}}(E)$ при $0 \leq r \leq \sqrt{c}$. Таким образом, функции $u_+(\theta)$ и $u_-(\theta)$ имеют общую область голоморфности—кольцо вне круга \mathbf{D}

$$\mathbf{T}_{(1,c)} = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \sqrt{c}\}. \quad (39)$$

Обозначим $H^2_{\mathbf{T}_{(1,c)}}(E)$ гильбертово пространство Харди голоморфных в кольце $\mathbf{T}_{(1,c)}$ (39) E -значных функций, квадраты E -норм которых суммируем на границе \mathbf{T} (то есть на окружностях $|z| = 1$ и $|z| = \sqrt{c}$). Таким образом, $\mathcal{F}l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^+) = H^2_{\mathbf{T}_{(1,c)}}(E)$.

Аналогичным образом, раскладывая каждую функцию $v(k)$ из пространства $l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^-)$ (19₋) на ортогональные компоненты $v(k) = v_+(k) + v_-(k)$, где $\text{supp } v_{\pm}(k) \subseteq \mathbb{Z}_{\pm}$, и осуществляя преобразование Фурье \mathcal{F} (38) получим, что Фурье-образ $v_+(\theta) = \mathcal{F}v_+(k)$ имеет аналитическое продолжение в круг $\mathbf{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, а $v_-(\theta) = \mathcal{F}v_-(k)$, соответственно, продолжается в область $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{d}\}$. Следовательно в этом случае мы приходим к кольцу

$$\mathbf{T}(1,d) = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \sqrt{d}\}, \quad (40)$$

где $d \geq 1$. В отличие от пространства $H^2_{T(1,c)}(E)$ функции $v_{\pm}(\theta)$ не имеют общей области голоморфности и значит $\mathcal{F}l^2_{\mathbb{Z}}(F, \beta^-) = L^2_{T(1,d)}(F)$; где гильбертово пространство $L^2_{T(1,d)}(F)$ состоит из функций $v(\theta)$, которые обладают ортогональным разложением $v(\theta) = v_+(\theta) \oplus v_-(\theta)$, причем $v_+(\theta)$ и $v_-(\theta)$ голоморфно продолжаемы внутрь и вне кольца $T(1, d)$ (40) соответственно. Топология в $L^2_{T(1,d)}$ задается L^2 метрикой на окружностях $|z| = 1$ для $v_+(\theta)$ и на $|z| = \sqrt{d}$ для $v_-(\theta)$ соответственно. По сути

$$L^2_{T(1,d)}(F) = H^2_+(F) \oplus H^2_-(F, d), \quad (41)$$

где $H^2_+(F)$ и $H^2_-(F, d)$ представляют собой классы Харди, отвечающие областям \mathbf{D} и $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{d}\}$.

Естественно, что для пространства Харди $H^2_{T(1,c)}$ голоморфных в кольце (39) функций справедливо ортогональное разложение

$$H^2_{T(1,c)}(E) = H^2_{+T(1,c)}(E) \oplus H^2_{-T(1,c)}(E),$$

где $H^2_{\pm T(1,c)}(E)$ представляют классы Харди функций из $H^2_{T(1,c)}(E)$, голоморфно продолжаемых во внутренность \mathbf{D} кольца $T(1, c)$ (40) и внешность $\{z \in \mathbb{C} : |z| > \sqrt{c}\}$.

Отметим, что для класса Харди $H^2_{T(1,c)}(E)$ будет иметь место

$$\inf_{1 < r < \sqrt{c}} \int_0^{2\pi} \|u(re^{i\theta})\|_E^2 d\theta < \infty, \quad \sup_{1 < r < \sqrt{c}} \int_0^{2\pi} \|u(re^{i\theta})\|_E^2 d\theta < \infty. \quad (42)$$

Следующий результат [1] устанавливает, во что переходит оператор рассеяния S (21) после преобразования Фурье \mathcal{F} (38).

Теорема 7. Для любой функции $u(k) \in l^2_{\mathbb{Z}}(E, \beta^+)$ оператор рассеяния S (21) после преобразования Фурье \mathcal{F} (38) переходит в оператор умножения на характеристическую функцию $S_{\Delta}(e^{i\theta}) = K + \Psi(e^{i\theta}I - T)^{-1}\Phi$ узла Δ —

$$\mathcal{F}(Su(k)) = S_{\Delta}(e^{i\theta})u(\theta), \quad (43)$$

где $\mathcal{F}(u(k)) = u(\theta)$.

В дальнейшем, чтобы не загромождать индексацию, через P_+ и P_- будем обозначать ортопроекторы в пространствах $H^2_{T(1,c)}$ и $L^2_{T(1,d)}(F)H^2$ на подпространства Харди функций, аналитически продолжаемых внутрь кольца (39), (40) и вне кольца (39), (40) соответственно; через S_{Δ} — характеристическую функцию $S_{\Delta}(e^{i\theta})$.

Обратимся теперь к нахождению Фурье-образов блоков ядра W_{NF_+} (32), используя следующие выражения [1]:

$$\mathcal{F}\left((W_-^* Q^- W_- - Q_E^-)u(k)\right) = \left\{S_{\Delta}^* Q_F^- P_+ S_{\Delta} - Q_E^-\right\} P_+ u(\theta);$$

$$\mathcal{F}\left((W_+^*Q^-W_- - Q_F^-S)u(k)\right) = J_F\left\{Q_F^-P_-S_\Delta - S_\Delta P_-Q_E^-\right\}u(\theta); \quad (44)$$

$$\mathcal{F}\left((W_-^*Q^-W_+ - S^*Q_F^-)v(k)\right) = \left\{S_\Delta^*P_-Q_F^- - Q_E^-P_-S_\Delta^*\right\}J_Fv(\theta);$$

$$\mathcal{F}\left((W_+^*Q^-W_+ - Q_F^-)v(k)\right) = J_F\left\{S_\Delta Q_E^-P_-S_\Delta^* - Q_F^-\right\}J_FP_-v(\theta). \quad (45)$$

Суммируя эти формулы нетрудно найти

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(W_{11}u(k)) &= \left[S_\Delta^*Q_F^-S_\Delta - Q_E^- + (I + \right. \\ &\quad \left.+ S_\Delta^*J_FS_\Delta)Q_E^-P_-(I + S_\Delta^*J_FS_\Delta)\right]u(\theta) = \widetilde{W}_{11}(\theta)u(\theta); \\ \mathcal{F}(W_{21}u(k)) &= \left[-J_FS_\Delta P_-Q_E^-(I + S_\Delta^*J_FS_\Delta)\right]u(\theta) = \\ &= \widetilde{W}_{21}(\theta)u(\theta); \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(W_{12}v(k)) &= \left[-(I + S_\Delta^*J_FS_\Delta)Q_E^-P_-S_\Delta^*J_F\right]v(\theta) = \\ &= \widetilde{W}_{12}(\theta)v(\theta); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(W_{22}v(k)) &= \left[J_F\{S_\Delta Q_E^-P_-S_\Delta^* - Q_F^-\}J_FP_-\right]v(\theta) = \\ &= \widetilde{W}_{22}(\theta)v(\theta). \end{aligned}$$

Теорема 8. Преобразование Фурье \mathcal{F} (38) действие оператора W_{NF_+} (32) переводит в оператор умножения на оператор-функцию $W_{NF_+}(e^{i\theta})$:

$$\mathcal{F}(W_{NF_+}g(k)) = W_{NF_+}(e^{i\theta})g(\theta), \quad (46)$$

где $g \in l_\beta^2(W_{NF_+})$, $g(\theta) \in H_{T(1,c)}(E) + L_{T(1,d)}(F)$. Оператор-функция $W_{NF_+}(e^{i\theta})$ при этом имеет вид

$$W_{NF_+}(e^{i\theta}) = \begin{bmatrix} I - S_\Delta^*S_\Delta & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \widetilde{W}_{11} & \widetilde{W}_{12} \\ \widetilde{W}_{21} & \widetilde{W}_{22} \end{bmatrix}, \quad (47)$$

где S_Δ — характеристическая функция узла Δ и \widetilde{W}_{11} , \widetilde{W}_{21} , \widetilde{W}_{12} , \widetilde{W}_{22} из (45).

Очевидно, что преобразование Фурье \mathcal{F} (38) отображает гильбертово пространство $l_\beta^2(W_{NF_+})$ (30) в пространство

$$\begin{aligned} L_{(c,d)}^2(W_{NF_+}) &= \left\{g(\theta) = \begin{pmatrix} g_+(\theta) \\ g_-(\theta) \end{pmatrix} : g_+(\theta) \in H_{T(1,c)}^2(E), \right. \\ &\quad \left. g_-(\theta) \in L_{T(1,d)}^2(F); \int_0^{2\pi} \langle W_{NF_+}(e^{i\theta})g(\theta), g(\theta) \rangle d\theta < \infty \right\}, \end{aligned} \quad (48)$$

где $W_{NF_+}(e^{i\theta})$ имеет вид (47). Далее, в силу (34), очевидно, что дилатация U в пространстве $L^2_{(c,d)}(W_{NF_+})$ (48) будет реализовываться оператором умножения на независимую переменную,

$$(\tilde{U}g)(\theta) = e^{i\theta}g(\theta). \quad (49)$$

Пространство \tilde{H}_{NF}^+ (36) в этом случае будет иметь вид

$$\tilde{H}_{NF}^+ = L^2_{(c,d)}(W_{NF_+}) \ominus \left[\begin{array}{c} H_-^2(E) \\ H_+^2(F) + S_\Delta H_-^2(E) \end{array} \right]. \quad (50)$$

Оператор T в \tilde{H}_{NF}^+ будет иметь вид

$$(\tilde{T}g)(\theta) = P_{\tilde{H}} e^{i\theta}g(\theta) \quad \forall g(\theta) \in \tilde{H}. \quad (51)$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 9. Основной оператор T простого унитарного метрического узла Δ , действующий в гильбертовом пространстве H , и его J -унитарная дилатация U (5) в G (4) унитарно эквивалентны функциональной модели \tilde{T} (51) в \tilde{H}_{NF}^+ (50) и \tilde{U} (49) в гильбертовом пространстве $L^2_{(c,d)}(W_{NF_+})$ (48) соответственно.

В случае сжатия T ($Q_E^- = Q_F^- = 0$) отсутствует второе слагаемое у $W_{NF_+}(e^{i\theta})$ (47), что и приводит к хорошо известной функциональной модели Б. Секефальви-Надя и Ч. Фояша [2].

VII. Предположим, что S_Δ — J -внутренняя функция, то есть

$$J_E = S_\Delta^* J_F S_\Delta, \quad (52)$$

тогда легко видеть, что

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{11} &= S_\Delta^* Q_F^- S_\Delta - Q_E^-; \\ \tilde{W}_{12} &= \tilde{W}_{21} = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Теорема 10. Пусть характеристическая функция узла Δ S_Δ — J -внутренняя функция. Преобразование Фурье \mathcal{F} (38) действие оператора W_{NF_+} (32) переводит в оператор умножения на оператор-функцию $W_{NF_+}(e^{i\theta})$ (46). Оператор-функция $W_{NF_+}(e^{i\theta})$ при этом имеет вид

$$W_{NF_+}(e^{i\theta}) = \begin{bmatrix} I - S_\Delta^* S_\Delta & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} \tilde{W}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{W}_{22} \end{bmatrix}, \quad (54)$$

где \tilde{W}_{11} из (53), \tilde{W}_{22} из (45).

Очевидно, что преобразование Фурье \mathcal{F} (38) отображает гильбертово пространство $l_\beta^2(W_{NF_+})$ (30) в пространство $L^2_{(c,d)}(W_{NF_+})$ (48), где $W_{NF_+}(e^{i\theta})$ имеет вид (54).

Пространство \tilde{H}_{NF}^+ (50) в этом случае имеет вид

$$\tilde{H}_{NF}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \in L_{(c,d)}^2(W_{NF+}) : \right. \\ \left. (I - 2Q_E^- P_-) S_\Delta^* J_F f_2^- \in H_+^2(E); \right. \\ \left. f_2 + 2J_F \{S_\Delta Q_E^- P_- S_\Delta^* - Q_F^-\} J_F f_2^- \in H_-^2(F) \right\}, \quad (55)$$

где $f_2^- = P_- f_2$.

Теорема 11. Если характеристическая функция узла Δ S_Δ — J -внутренняя функция, основной оператор T простого унитарного метрического узла Δ , действующий в гильбертовом пространстве H , и его J -унитарная дилатация U (5) в G (4) унитарно эквивалентны функциональной модели \tilde{T} (51) в \tilde{H}_{NF}^+ (55) и \tilde{U} (49) в гильбертовом пространстве $L_{(c,d)}^2(W_{NF+})$ (48) соответственно.

Автор выражает благодарность В. А. Золотарёву за научное руководство и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Золотарев В. А. Функциональная модель ограниченного оператора. // Математическая физика, анализ, геометрия, — 2001. — Т. 8, вып. 2. — С. 36 — 59.
2. Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М: Мир, — 1970. — 431 с.
3. Лакс П. Д., Филлипс Р. С. Теория рассеяния. М: Мир, — 1971. — 312 с.
4. Павлов Б. С. Спектральный анализ диссипативного оператора Шредингера в терминах функциональной модели. // Итоги науки и техн. Сер. Совр. мат. фундам. направления, ВИНТИ, — 1991. — Т. 65. — С. 95-163.
5. Золотарев В. А. Временные конусы и функциональная модель на римановой поверхности. // Матем. сб., — 1990. — Т. 181, 7. — С. 965-995.
6. Павлов Б. С. Теория дилатаций и спектральный анализ несамосопряженных дифференциальных операторов. // М.: Мат. программирование и смежные вопросы. Теория операторов в линейных пространствах. (Седьмая Зимняя школа) Дрогобыч, /1974/, — 1976. — С. 3-69.
7. De Branges L., Rovnyak J. Canonical models in quantum scattering theory. // New-York, Wiley: Perturb. Theory and Appl. in Quant. Mech., — 1966. — Pp. 295-392.

Канонические, N -экстремальные и главные решения
обобщенной интерполяционной задачи для
стильтесовских функций

Ю.М. Дюкарев

Харьковский национальный университет, Украина

В этой статье введены и исследованы канонические, N -экстремальные и главные решения обобщенной интерполяционной задачи для стилтесовских оператор-функций. Доказано, что множество канонических решений первого (второго) рода совпадает со множеством N -экстремальных решений первого (второго) рода. Изучены главные решения обобщенной интерполяционной задачи и для них получены явные формулы.

2000 *Mathematics Subject Classification* 47A57, 42A82.

Введение

Пусть G_1, G_2 - сепарабельные и H - конечномерное гильбертовы пространства. Пусть символ $\{G_1, G_2\}$ обозначает множество всех ограниченных линейных операторов, действующих из G_1 в G_2 , символ $\{G_1, G_1\}_H$ - множество ограниченных эрмитовых операторов в G_1 , символ $\{G_1, G_1\}_\geq$ - множество ограниченных эрмитовых неотрицательных операторов в G_1 , а символ $\{G_1, G_1\}_>$ - множество ограниченных и ограниченно обратимых эрмитовых неотрицательных операторов в G_1 .

Пусть даны операторы $K_1 \in \{G_1, G_1\}_\geq$, $K_2 \in \{G_2, G_2\}_\geq$, $L_1, L_2 \in \{G_2, G_1\}$, $v_1 \in \{H, G_1\}$, $u_2 \in \{H, G_2\}$, удовлетворяющие *основному тождеству*

$$L_2 K_2 - K_1 L_1 = v_1 u_2^*. \quad (1)$$

И пусть, далее,

$$T_1 = L_2 L_1^*, T_2 = L_1^* L_2, v_2 = L_1^* v_1, u_1 = L_2 u_2. \quad (2)$$

Введем обозначения $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$, $\mathbb{R}_- = \{t \in \mathbb{R} : t < 0\}$, $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$, $\mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : \Im z < 0\}$, $\mathbb{C}_\pm = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{C}_-$.

Будем считать, что в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ мероморфны обе оператор-функции (о.ф.) $R_{T_1}(z) = (I - zT_1)^{-1}$, $R_{T_2}(z) = (I - zT_2)^{-1}$. Множество особых точек о.ф. R_{T_1} и R_{T_2} в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ обозначим символом \mathcal{Z} . И пусть $\bar{\mathcal{Z}} = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in \mathcal{Z}\}$.

Непосредственно из определений следует, что $(\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup Z\})$

$$T_1 L_2 = L_2 T_2, T_2 L_1^* = L_1^* T_1, R_{T_1}(z) L_2 = L_2 R_{T_2}(z), R_{T_2}(z) L_1^* = L_1^* R_{T_1}(z). \quad (3)$$

Пусть даны монотонно возрастающая о.ф. $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \{H, H\}_H$, $\gamma \in \{H, H\}_\geq$, $F \in \{H, G_2\}$, $W_1 \in \{G_1, G_1\}_\geq$, $W_2 \in \{G_2, G_2\}_\geq$.

Перечисленные выше объекты $\{\sigma, \gamma, F, W_1, W_2\}$ называются *решением задачи о согласованном интегральном представлении*, если операторы K_1 , K_2 и u_2 , участвующие в основном тождестве (1), допускают следующие представления

$$\begin{aligned} K_r &= \int_0^\infty R_{T_r}(t) v_r t^{r-1} d\sigma(t) v_r^* R_{T_r}^*(t) + W_r + (r-1) F F^*, \quad r = 1, 2, \\ u_2 &= - \int_0^\infty R_{T_2}(t) v_2 d\sigma(t) + F \gamma^{1/2} \end{aligned} \quad (4)$$

и выполнены условия

$$W_1 L_1 = 0, L_2 W_2 = 0, L_2 F = v_1 \gamma^{1/2}, \int_0^\infty (1+t)^{-1} d\sigma(t) - \text{существует.}$$

Все интегралы понимаем в слабом смысле. Можем считать, не изменяя значений интегралов, что о.ф. σ удовлетворяет следующим условиям нормировки: $\sigma(t)$ непрерывна слева при $t \in (0, +\infty)$ и $\sigma(0) = 0$. Всюду в этой работе будем предполагать выполненными эти условия нормировки.

Определение 1. Пусть оператор γ и о.ф. σ участвуют в интегральных представлениях (4). О.ф.

$$s(z) = \gamma + \int_0^\infty (t-z)^{-1} d\sigma(t) \quad (5)$$

называется *ассоциированной с задачей о представлении (4)*.

Задачу (4) о согласованных интегральных представлениях мы будем называть обобщенной интерполяционной задачей, а о.ф. s вида (5) – решениями обобщенной интерполяционной задачи (4). Ясно, что s определена и голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и $s : \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+ \rightarrow \{H, H\}$. По формуле обращения Стильтеса соответствие между о.ф. s и оператором γ и нормированной о.ф. σ является взаимно однозначным. Поэтому мы можем ограничиться описанием множества ассоциированных о.ф. вида (5), которое обозначим символом \mathcal{F} .

Мы будем рассматривать вполне неопределенную задачу о согласованном интегральном представлении, когда $K_1 \in \{G_1, G_1\}_>$, $K_2 \in \{G_2, G_2\}_>$ и $vx = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Рассмотрим две о.ф.

$$\begin{aligned} U_1(z) &= \begin{bmatrix} \alpha_1(z) & \beta_1(z) \\ \gamma_1(z) & \delta_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + z v_2^* R_{T_2}^*(z) K_2^{-1} u_2 & -z v_1^* R_{T_1}^*(z) K_1^{-1} v_1 \\ u_2^* R_{T_2}^*(z) K_2^{-1} u_2 & I - z u_1^* R_{T_1}^*(z) K_1^{-1} v_1 \end{bmatrix}, \\ U_2(z) &= \begin{bmatrix} I + z v_2^* R_{T_2}^*(z) K_2^{-1} u_2 & -z v_1^* R_{T_1}^*(z) K_1^{-1} v_1 \\ u_2^* R_{T_2}^*(z) K_2^{-1} u_2 & I - z u_1^* R_{T_1}^*(z) K_1^{-1} v_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $R_{T_r^*}(z) = (I - zT_r^*)^{-1}$, $r = 1, 2$. Ясно, что о.ф. U_1 и U_2 голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \bar{\mathbb{Z}}\}$ и $U_1, U_2 : \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \bar{\mathbb{Z}}\} \rightarrow \{H \oplus H, H \oplus H\}$. Разбиение на блоки в (6) понимаем в соответствии с представлением $H \oplus H$.

О.ф. U_1 называется *резольвентной матрицей*. Множество \mathcal{F} описывается (см. [1]) с помощью системы ОМН ($r = 1, 2$)

$$\left[I \quad \bar{z}^{r-1} s^*(z) \right] \frac{U_r^{-1*}(z) J U_r^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ z^{r-1} s(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{z \cup \bar{z}\}. \quad (7)$$

Определение 2. Пара $\text{col}[p(z) \ q(z)]$, мероморфных в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ о.ф., принимающих значения в $\{H, H\}$, называется *стильесовской*, если для нее существует дискретное в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ множество точек \mathcal{D}_{pq} такое, что

$$1. \quad p^*(z)p(z) + q^*(z)q(z) > 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{D}_{pq}\}.$$

$$2. \quad [p^*(z), q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \mathcal{D}_{pq}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & -iI \\ iI & 0 \end{bmatrix}.$$

$$3. \quad [p^*(z), \bar{z}q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ zq(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \mathcal{D}_{pq}.$$

Можно доказать, что в этом определении условие 3 можно заменить эквивалентным условием

$$3'. \quad [p^*(z), q^*(z)] J_\pi \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad \Re z < 0, \quad z \notin \mathcal{D}_{pq}, \quad J_\pi = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix}.$$

На множестве пар введем отношение эквивалентности: пары $\text{col}[p_1(z) \ q_1(z)]$ и $\text{col}[p_2(z) \ q_2(z)]$ называются эквивалентными, если существует мероморфная и мероморфно обратимая в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ о.ф. $Q(z)$, принимающая значения в $\{H, H\}$, такая, что $p_1(z) = p_2(z)Q(z)$ и $q_1(z) = q_2(z)Q(z)$. Множество классов эквивалентности стильесовских пар обозначим через \mathcal{S}_∞ .

Множество \mathcal{F} можно описать и в терминах дробно-линейных преобразований (см. [1]). А именно, формула

$$s(z) = \{\gamma_1(z)p(z) + \delta_1(z)q(z)\} \cdot \{\alpha_1(z)p(z) + \beta_1(z)q(z)\}^{-1} \quad (8)$$

устанавливает биективное соответствие между \mathcal{F} и \mathcal{S}_∞ .

Канонические и N-экстремальные решения

Пусть операторы $p_1, q_1 \in \{H, H\}$ таковы, что

$$p_1^* p_1 + q_1^* q_1 > 0, \quad p_1^* q_1 = q_1^* p_1 \geq 0. \quad (9)$$

При любой мероморфной и мероморфно обратимой в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ о.ф. $Q_1(z)$ пара

$$\text{col}[p(z) \ q(z)] = \text{col}[p_1 \ q_1] Q_1(z), \quad (10)$$

является стилтьесовской. Пары вида (10) называются *каноническими стилтьесовскими парами первого рода*.

Пусть операторы $p_2, q_2 \in \{H, H\}$ таковы, что

$$p_2^* p_2 + q_2^* q_2 > 0, \quad p_2^* q_2 = q_2^* p_2 \leq 0. \quad (11)$$

При любой мероморфной и мероморфно обратимой в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ о.ф. $Q_2(z)$ пара

$$\text{col}[p(z) \ q(z)] = \text{col}[p_2 \ z^{-1} q_2] Q_2(z), \quad (12)$$

является стилтьесовской. Пары вида (12) называются *каноническими стилтьесовскими парами второго рода*.

Если в классе эквивалентности стилтьесовских пар хотя бы одна пара оказалась канонической первого (соотв. второго) рода, то все пары из этого класса будут каноническими первого (соотв. второго) рода.

Определение 3. О.ф. $s \in \mathcal{F}$ называется *каноническим решением первого (второго) рода*, если стилтьесовская пара в ее представлении (8) является парой первого (второго) рода.

Для скалярной проблемы моментов Стильеса канонические решения первого и второго рода были рассмотрены в статье [2]. Мы вводим и исследуем канонические решения для обобщенной интерполяционной задачи (4).

Определение 4. О.ф. $s \in \mathcal{F}$ называется *N-экстремальным решением первого (второго) рода*, если неравенство (7) обращается в равенство при $r = 1$ ($r = 2$) для некоторого $z_0 \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{Z \cup \bar{Z}\}$.

Теорема 1. Если о.ф. $s \in \mathcal{F}$ является N-экстремальным решением первого (второго) рода, то неравенство (7) обращается в равенство при $r = 1$ ($r = 2$) для всех $z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{Z \cup \bar{Z}\}$.

Доказательство. Пусть $s \in \mathcal{F}$ и является N-экстремальным решением первого рода. Пара $\text{col}[p(z), q(z)] = U_1^{-1}(z) \text{col}[I, s(z)]$ является стилтьесовской, т.к. s удовлетворяет системе ОМН (7). Поэтому в точке z_0 , участвующей в определении 4, имеем

$$[p^*(z_0), q^*(z_0)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z_0) \\ q(z_0) \end{bmatrix} = [I \ s^*(z_0)] \frac{U_1^{-1*}(z_0) J U_1^{-1}(z_0)}{i(\bar{z}_0 - z_0)} \begin{bmatrix} I \\ s(z_0) \end{bmatrix} = 0.$$

По принципу максимума для стилтьесовских пар (см. [3]) отсюда следует, что пара $\text{col}[p(z), q(z)]$ является канонической стилтьесовской парой первого рода. Теперь, с учетом (9) и (10), имеем

$$\begin{aligned} [I \ s^*(z)] \frac{U_1^{-1*}(z) J U_1^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ s(z) \end{bmatrix} &= [p^*(z), q^*(z)] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \\ &= Q^*(z) [p_1^*, q_1^*] \frac{J}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} Q(z) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, неравенство (7) при $r = 1$ обращается в равенство во всех точках $z \in \mathbb{C}_\pm$ за исключением некоторого дискретного множества точек.

Отсюда и из непрерывности следует, что (7) обращается в равенство во всех точках $z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{Z \cup \bar{Z}\}$. Теорема доказана для случая $r = 1$. При $r = 2$ доказательство проводится аналогичным образом. \square

Теорема 2. *О.ф. $s \in \mathcal{F}$ является каноническим решением первого (второго) рода тогда и только тогда, когда она является N -экстремальным решением первого (второго) рода.*

Доказательство. Необходимость. Пусть о.ф. $s \in \mathcal{F}$ является каноническим решением первого рода. Тогда она допускает представление (8), в котором участвует каноническая стилтьесовская пара вида (10). Поэтому

$$\begin{aligned} & [I \ s^*(z)] \frac{U_1^{-1*}(z) J U_1^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} I \\ s(z) \end{bmatrix} \\ &= \{\alpha_1(z)p_1 + \beta_1(z)q_1\}^{-1*} [p_1^* \alpha_1^*(z) + q_1^* \beta_1^*(z) \quad p_1^* \gamma_1^*(z) + q_1^* \delta_1^*(z)] \\ &\times \frac{U_1^{-1*}(z) J U_1^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} \begin{bmatrix} \alpha_1(z)p_1 + \beta_1(z)q_1 \\ \gamma_1(z)p_1 + \delta_1(z)q_1 \end{bmatrix} \{\alpha_1(z)p_1 + \beta_1(z)q_1\}^{-1} \\ &= \{\alpha_1(z)p_1 + \beta_1(z)q_1\}^{-1*} [p_1^* \ q_1^*] U_1^*(z) \frac{U_1^{-1*}(z) J U_1^{-1}(z)}{i(\bar{z} - z)} U_1(z) \begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} \\ &\times \{\alpha_1(z)p_1 + \beta_1(z)q_1\}^{-1} = \{\alpha_1(z)p_1 + \beta_1(z)q_1\}^{-1*} \\ &\times \frac{-p_1^* q_1 + q_1^* p_1}{\bar{z} - z} \{\alpha_1(z)p_1 + \beta_1(z)q_1\}^{-1} = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}_\pm \setminus \{Z \cup \bar{Z}\}. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из (9). Таким образом, s является N -экстремальным решением первого рода.

Достаточность. Пусть о.ф. $s \in \mathcal{F}$ является N -экстремальным решением первого рода. При доказательстве теоремы 1 было показано, что пара $\text{col}[p(z), q(z)] = U_1^{-1}(z) \text{col}[I, s(z)]$ является канонической стилтьесовской парой первого рода, т.е. $\text{col}[p_1, q_1] Q(z) = U_1^{-1}(z) \text{col}[I, s(z)]$. Отсюда непосредственно следует, что

$$s(z) = \{\gamma_1(z)p_1 + \delta_1(z)q_1\} \cdot \{\alpha_1(z)p_1 + \beta_1(z)q_1\}^{-1},$$

т.е. что s является каноническим решением первого рода. Теорема доказана для канонических и N -экстремальных решений первого рода. Для второго рода доказательства проводятся аналогичным образом. \square

Главные решения

Легко видеть, что каждая из пар $\text{col} [I \ 0]$ и $\text{col} [0 \ I]$ является канонической стилтьесовской парой и первого и второго рода. Подставляя эти пары в дробно-линейное преобразование (8), получим два главных решения обобщенной интерполяционной задачи

$$s_F(z) = \gamma_1(z) \alpha_1^{-1}(z) \in \mathcal{F}, \quad s_K(z) = \delta_1(z) \beta_1^{-1}(z) \in \mathcal{F}. \quad (13)$$

Каждое из этих решений является каноническим решением и первого и второго рода. Решение s_F называется решением Фридрихса, а решение s_K — решением Крейна. Для случая скалярной проблемы моментов такие термины были предложены в статье [3]. Мы вводим и изучаем решения Фридрихса и Крейна для обобщенной интерполяционной задачи (4).

Теорема 3. Решения Фридрихса и Крейна допускают представления

$$s_F(z) = u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}u_2, \quad s_K(z) = \{v_1^*(L_2K_2L_2^* - zK_1)^{-1}v_1\}^{-1}. \quad (14)$$

Доказательство. Из равенства

$$s_F(z) = u_2^*K_2^{-1/2}(I - zK_2^{-1/2}L_1^*K_1L_1K_2^{-1/2})^{-1}K_2^{-1/2}u_2$$

и свойств резольвенты неотрицательных эрмитовых операторов следует, что $s_F(z)$ из (14) определена и голоморфна в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Далее имеем

$$\begin{aligned} & u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}u_2 \cdot \alpha_1(z) \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}u_2\{I + zv_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2\} \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}\{K_2(I - zT_2^*) + zu_2v_2^*\}R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}\{K_2(I - zT_2^*) + zu_2v_1^*L_1\}R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}\{K_2(I - zT_2^*) + z(K_2L_2^* - L_1^*K_1)L_1\}R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 \\ &= u_2^*(K_2 - zL_1^*K_1L_1)^{-1}\{K_2 - zL_1^*K_1L_1\}R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 \\ &= u_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}u_2 = \gamma_1(z). \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств первое вытекает из (6), третье — из (2), четвертое — из (1), пятое — из (2), седьмое — (6). Таким образом, $s_F(z) = \gamma_1(z)\alpha_1^{-1}(z) = u_2^*\{K_2 - zL_1^*K_1L_1\}^{-1}u_2$. Первое из равенств (14) доказано. Второе из равенств (14) доказывается аналогичным образом. \square

Теорема 4. Пусть дана обобщенная вполне неопределенная интерполяционная задача (4) и \mathcal{F} обозначает множество ее решений. И пусть, далее, s_F и s_K — главные решения задачи (4). Тогда о.ф. $\{s_K(z) - s_F(z)\}^{-1}$ определена и голоморфна $\mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_+ \cup \mathcal{Z} \cup \bar{\mathcal{Z}}\}$ и

$$1. \{s_K(z) - s_F(z)\}^{-1} = -zv_1^*R_{T_1^*}(z)K_1^{-1}R_{T_1}(z)v_1 + z^2v_2^*R_{T_2^*}(z)K_2^{-1}R_{T_2}(z)v_2, \quad (15)$$

$$2. s_K(x) > s_F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}, \quad s_K(x) \geq s_F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_-, \quad (16)$$

$$3. s_F(x) \leq s(x) \leq s_K(x), \quad \forall s \in \mathcal{F}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_-. \quad (17)$$

Доказательство. 1. Пусть $x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}$. Непосредственные вычисления с использованием (1), (2) и (3) приводят к равенству $J - U_1(x)JU_1^*(x) = 0$. Но тогда (см. [5]) и $J - U_1^*(x)JU_1(x) = 0$. Отсюда и из (6) следует, что

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1^*(x)\gamma_1(x) + \gamma_1^*(x)\alpha_1(x) & -\alpha_1^*(x)\delta_1(x) + \gamma_1^*(x)\beta_1(x) \\ -\beta_1^*(x)\gamma_1(x) + \delta_1^*(x)\alpha_1(x) & -\beta_1^*(x)\delta_1(x) + \delta_1^*(x)\beta_1(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Таким образом, $-\beta_1^*(x)\gamma_1(x) + \delta_1^*(x)\alpha_1(x) = I$. В силу (14) $s_K(x) = s_M^*(x)$. Поэтому

$$\begin{aligned} s_K(x) - s_F(x) &= \beta_1^{-1*}(x)\delta_1^*(x) - \gamma_1(x)\alpha_1^{-1}(x) \\ &= \beta_1^{-1*}(x)\{\delta_1^*(x)\alpha_1(x) - \beta_1^*(x)\gamma_1(x)\}\alpha_1^{-1}(x) = \beta_1^{-1*}(x)\alpha_1^{-1}(x). \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1} &= \alpha_1(x)\beta_1^*(x) \\ &= -x\{I + xv_2^*R_{T_2^*}(x)K_2^{-1}u_2\}\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 + xv_2^*R_{T_2^*}(x)K_2^{-1}(-L_1^*K_1 + K_2L_2^*)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2^*}(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad + xv_2^*R_{T_2^*}(x)L_2^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2^*}(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad + xv_1^*L_1L_2^*R_{T_1^*}(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2^*}(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad + xv_1^*T_1^*R_{T_1^*}(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*[I - xT_1^* + xT_1^*]R_{T_1^*}(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 \\ &\quad - xv_2^*R_{T_2^*}(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*R_{T_1^*}(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2^*}(x)K_2^{-1}L_1^*R_{T_1}(x)v_1\} \\ &= -x\{v_1^*R_{T_1^*}(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2^*}(x)K_2^{-1}R_{T_2}(x)v_2\}. \end{aligned}$$

В этой цепочке равенств второе равенство следует из (6), третье – из (1), пятое, шестое и девятое – из (2) и (3). Таким образом, при $x < 0$

$$\{s_K(x) - s_F(x)\}^{-1} = -x\{v_1^*R_{T_1^*}(x)K_1^{-1}R_{T_1}(x)v_1 - xv_2^*R_{T_2^*}(x)K_2^{-1}R_{T_2}(x)v_2\}.$$

Отсюда, в силу аналитичности, следует (15).

2. Первое из неравенств в (16) следует из (15). Второе из неравенств (16) получается продолжением по непрерывности первого из неравенств (16) в точки $x \in \mathbb{R}_- \cap \mathcal{Z}$.

3. Пусть о.ф. $s \in \mathcal{F}$. Тогда она допускает представление (8) с некоторой стилтесовской парой $\text{col}[p \ q]$. Пусть $x \in \mathbb{R}_- \setminus \{\mathcal{D}_{pq} \cup \mathcal{Z}\}$. Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} s_M(x) - s(x) &= \delta_1(x)\beta_1^{-1}(x) - \{\gamma_1(x)p(x) + \delta_1(x)q(x)\} \cdot \{\alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x)\}^{-1} \\ &= \beta_1^{-1*}(x)\delta_1^*(x) - \{\gamma_1(x)p(x) + \delta_1(x)q(x)\} \cdot \{\alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x)\}^{-1} \\ &= \beta_1^{-1*}(x)\{[\delta_1^*(x)\alpha_1(x) - \beta_1^*(x)\gamma_1(x)]p(x) + [\delta_1^*(x)\beta_1(x) - \beta_1^*(x)\delta_1(x)]q(x)\} \\ &\quad \times \{\alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x)\}^{-1} = \beta_1^{-1*}(x)p(x)\{\alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x)\}^{-1}. \end{aligned}$$

(x).

В этой цепочке равенств второе равенство следует из эрмитовости $s_M(x)$, а последнее – из (18). Окончательно

$$s_M(x) - s(x) = \beta_1^{-1*}(x)p(x) \{ \alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x) \}^{-1}.$$

Таким образом, разность $s_M(x) - s(x)$ представлена в виде дробно-линейного преобразования, матрица которого

$$\tilde{U}(x) = \begin{bmatrix} \alpha_1(x) & \beta_1(x) \\ \beta_1^{-1*}(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что её J_π -форма имеет вид

$$\tilde{U}^*(x)J_\pi\tilde{U}(x) - J_\pi = \begin{bmatrix} \beta_1^{-1}(x)[\beta_1(x)\alpha_1^*(x) + \alpha_1(x)\beta_1^*(x)]\beta_1^{-1*}(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Непосредственные вычисления с использованием (1), (2) и (3) приводят к следующему выражению для J_π -формы м.ф. U_1

$$\begin{aligned} U_1(x)J_\pi U_1^*(x) - J_\pi &= \begin{bmatrix} \alpha_1(x)\beta_1^*(x) + \beta_1(x)\alpha_1^*(x) & -I + \alpha_1(x)\delta_1^*(x) + \beta_1(x)\gamma_1^*(x) \\ -I + \gamma_1(x)\beta_1^*(x) + \delta_1(x)\alpha_1^*(x) & \gamma_1(x)\delta_1^*(x) + \delta_1(x)\gamma_1^*(x) \end{bmatrix} \\ &= -2x \begin{bmatrix} v_1^* \\ u_1^* \end{bmatrix} R_{T_1^*}(x)K_1^{-1}R_{T_1^*}^*(x)[v_1, u_1] \\ &\quad + 2 \begin{bmatrix} xv_2^* \\ u_2^* \end{bmatrix} R_{T_2^*}(x)K_2^{-1}R_{T_2^*}^*(x)[xv_2, u_2], \quad x \in \mathbb{R}_- \setminus \mathcal{Z}. \end{aligned}$$

(1),

Следовательно, $U_1(x)J_\pi U_1^*(x) - J_\pi \geq 0$, т.е. $\beta_1(x)\alpha_1^*(x) + \alpha_1(x)\beta_1^*(x) \geq 0$. Отсюда и из (19) имеем $\tilde{U}^*(x)J_\pi\tilde{U}(x) \geq J_\pi$. С учетом этого неравенства получаем

2).

$$\begin{aligned} &[p^*(x)\alpha_1^*(x) + q^*(x)\beta_1^*(x), p^*(x)\beta_1^{-1}(x)]J_\pi \begin{bmatrix} \alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x) \\ \beta_1^{-1*}(x)p(x) \end{bmatrix} \\ &= [p^*(x), q^*(x)] \begin{bmatrix} \alpha_1^*(x) & \beta_1^{-1}(x) \\ \beta_1^*(x) & 0 \end{bmatrix} J_\pi \begin{bmatrix} \alpha_1(x) & \beta_1(x) \\ \beta_1^{-1*}(x) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \\ &= [p^*(x), q^*(x)]\tilde{U}^*(x)J_\pi\tilde{U}(x) \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \geq [p^*(x), q^*(x)]J_\pi \begin{bmatrix} p(x) \\ q(x) \end{bmatrix} \geq 0. \end{aligned}$$

(16)

3) в

рой

ость

Последнее неравенство вытекает из определения 2. Таким образом

$$[p^*(x)\alpha_1^*(x) + q^*(x)\beta_1^*(x), p^*(x)\beta_1^{-1}(x)]J_\pi \begin{bmatrix} \alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x) \\ \beta_1^{-1*}(x)p(x) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Умножим это неравенство справа на оператор $\{\alpha_1(x)p(x) + \beta_1(x)q(x)\}^{-1}$, а слева – на сопряженный оператор. Получим

x}}

-1.

$$[I, s_M^*(x) - s^*(x)]J_\pi \begin{bmatrix} I \\ s_M(x) - s(x) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Или, учитывая вид J_π ,

$$s_M^*(x) - s^*(x) + s_M(x) - s(x) \geq 0.$$

О.ф. s_M и s принадлежат \mathcal{F} и, следовательно, допускают представления вида (5). Откуда следует, что $s_M(x)$ и $s(x)$ эрмитовы. Но тогда из последнего неравенства следует, что $s_M(x) \geq s(x)$. Это неравенство продолжается в точки $x \in \mathbb{R}_- \cap \mathcal{D}_{pq} \cap \mathcal{Z}$ по непрерывности. Неравенство $s_F(x) \leq s(x)$ доказывается аналогичным образом. \square

ЛИТЕРАТУРА

1. Дюкарев Ю.М. Общая схема решения интерполяционных задач в классе Стильтеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. 1. // Математическая физика, анализ, геометрия. – 1999. – Т.6, 1/2. – С. 30-54.
2. Кац И.С., Нудельман А.А. // Сильная проблема моментов Стильтеса. – Алгебра и анализ. – 1996. – Т.8, 6. – С. 26-56.
3. Дюкарев Ю.М. Принцип максимума для стильтесовских пар аналитических матриц-функций. // Вісник Харківського національного університету. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – 2002. – 542. – С. 35-41.
4. Simon B. The classical moment problem as a self-adjoint finite difference operator // Advances in mathematics. – 1998. – 137. – P. 82-203.
5. Потапов В.П. Дробно-линейные преобразования матриц, в: Исследования по теории операторов и их приложениям (изд. В.А. Марченко). – К.: Наук. думка, 1979. – С. 75-97.