УСТОЙЧИВОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ РАССЕЯНИЯ В КЛАССЕ ГЛАДКИХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Д. Ш. Лундина, С. А. Маркин

В работах [1—3] были получены оценки, устанавливающие, с какой точностью можно восстановить нормированные собственные функции и потенциал по неполным данным рассеяния. В настоящей работе, накладывая дополнительные ограничения на гладкость потенциалов, мы улучшим эти оценки.

Рассмотрим оператор Штурма—Лиувилля

$$ly = y''(x) - q(x)y(x) \quad (0 \leqslant x < \infty)$$

с вещественным потенциалом $q(x)$, имеющим n непрерывных и суммируемых на полуоси $(0, \infty)$ производных.

Обозначим через I оператор интегрирования,

$$If(x) = \int\limits_x^\infty f(t)dt.$$

Нетрудно проверить, что при сделанных предположениях функции $[lI]^k q(x)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ существуют, непрерывны и суммируемы на полуоси $(0, \infty)$.

Пусть $\alpha_0(x)$, $\alpha_n(x)$ — произвольные неотрицательные невозрастающие ограниченные и суммируемые на полуоси $(0, \infty)$ функции. Обозначим через $V\{\alpha_0(x), \alpha_n(x)\}$ множество всех операторов Штурма—Лиувилля, удовлетворяющих условиям

$$\text{а)} \int\limits_x^\infty |q(t)|\,dt \leqslant \alpha_0(x);$$

$$\text{б)} \int\limits_x^\infty |[lI]^n q(t)|\,dt \leqslant \alpha_n(x).$$

Основные результаты настоящей работы состоят в следующем.

Пусть операторы l_1 и l_2 принадлежат классу $V\{\alpha_0(x), \alpha_n(x)\}$ и данные рассеяния двух краевых задач, порождаемых этими операторами, совпадают при всех $\lambda^2 < N^2$, причем $N > \max\{4\alpha_0(0), n^2\}$.

Тогда справедливы неравенства:

$$|q_1(x) - q_2(x)| \leqslant \frac{34 \cdot 2^{3n}\alpha_n(0)M^2(0)}{N^{n-1}}\left[1 + \frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right],$$

$$|u_1(x, \mu) - u_2(x, \mu)|^2 \leqslant \frac{2^{4n+9}\alpha_n^2(0)M^6(0)}{N^{2n+1}}\left[1 + \frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]^2 \times$$

$$\times\left[\frac{25}{N} + \left(1 + \frac{\hat{\alpha}_n(0)}{\alpha_n(0)}\right)2^{11-2n} + \frac{\hat{\alpha}_0(0)}{N}(24 + 2^{11-2n})\right],$$

где $u_j(x, \mu)$ $(j = 1, 2)$ — нормированные собственные функции рассматриваемых краевых задач, $\mu \in (0, N)$, а константа $M(0)$ грубо оценивается так:

$$M(0) \leqslant \exp\{\int\limits_0^\infty \alpha_0(t)dt\}.$$

Заметим, что аналогичные оценки могут быть получены, когда данные рассеяния не совпадают, а мало отличаются при $|\lambda| < N$.

1. Оценка разности функций рассеяния

Пусть $e(x, \lambda)$ — решение уравнения Штурма—Лиувилля

$$y'' - q(x)y + \lambda^2 y = 0, \tag{1.1}$$

которое при $x \to \infty$ ведет себя, как $e^{i\lambda x}$, а $Z_l(x)$ — решение уравнения

$$y'' - |q(x)|\,y = 0, \tag{1.2}$$

которое при $x \to \infty$ стремится к 1.

Положим

$$M(x) = \sup_{x \leqslant t < \infty}\ \operatorname{Sup}_{l \in V\{\alpha_0(x), \alpha_n(x)\}} Z_l(t). \tag{1.3}$$

Как известно, $M(x) \leqslant \exp\{\int_x^\infty \alpha_0(t)dt\}$ (см. например [1]). Обозначим еще

$$\hat{\alpha}_k(x) = \int_x^\infty \alpha_k(t)dt. \tag{1.4}$$

Лемма 1. *При всех вещественных* λ

$$|e(x, \lambda)| \leqslant M(x), \tag{1.5}$$

а при $|\lambda| > 4\alpha_0(0)$

$$|e(x, \lambda)| \leqslant \frac{4}{3}, \tag{1.6}$$

$$|\dot{e}(0, \lambda)| \leqslant \frac{5\hat{\alpha}_0(0)}{|\lambda|} M(0), \tag{1.7}$$

где точка над $e(x, \lambda)$ *означает дифференцирование по переменной* λ.

Доказательство. Функции $Z_l(x)$, $e(x, \lambda)$ удовлетворяют интегральным уравнениям

$$Z_l(x) = 1 + \int_x^\infty (t - x)\,|q(t)|\,Z_l(t)dt, \tag{1.8}$$

$$e(x, \lambda) = e^{i\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q(t)e(t, \lambda)dt, \tag{1.9}$$

которые могут быть решены методом последовательных приближений. Так как

$$\left|\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q(t)\right| \leqslant (t-x)\,|q(t)|,$$

то каждая итерация уравнения (1.9) мажорируется соответствующей итерацией уравнения (1.8), откуда и следует неравенство (1.5). Далее, из уравнения (1.9), находим

$$\sup_{x \leqslant t < \infty} |e(t, \lambda)| \leqslant 1 + \frac{\alpha_0(x)}{|\lambda|} \sup_{x \leqslant t < \infty} |e(t, \lambda)|,$$

откуда при $|\lambda| > 4\alpha_0(0)$ приходим к неравенству (1.6).

Дифференцируя (1.9) по λ и полагая

$$m(x, \lambda) = \dot{e}(x, \lambda) - ixe^{i\lambda x}, \tag{1.10}$$

получим

$$m(x, \lambda) = \int_x^\infty \frac{(t-x)\cos\lambda(t-x)}{\lambda} q(t)e(t, \lambda)dt -$$

$$- \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda^2} q(t)e(t, \lambda)dt + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} itq(t)e^{i\lambda t}dt +$$

$$+ \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q(t)m(t, \lambda)dt.$$

Следовательно, при $|\lambda| > 4\alpha_0(0)$

$$\max_{x \leqslant t < \infty} |m(t, \lambda)| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left\{\frac{11}{3}\hat{\alpha}_0(x) + x\alpha_0(x)\right\} + \frac{\alpha_0(x)}{|\lambda|} \sup_{x \leqslant t < \infty} |m(t, \lambda)|,$$

откуда

$$\sup_{x \leqslant t < \infty} |m(t, \lambda)| \leqslant \frac{4}{3|\lambda|}\left\{\frac{11}{3}\hat{\alpha}_0(x) + x\alpha_0(x)\right\}.$$

Из этого неравенства и формулы (1.10) следует, что

$$|\dot{e}(x, \lambda)| \leqslant x + \frac{4}{3|\lambda|}\left\{\frac{11}{3}\hat{\alpha}_0(x) + x\alpha_0(x)\right\}.$$

Полагая $x = 0$ и учитывая, что $M(0) \geqslant 1$, получим отсюда неравенство (1.7). Лемма доказана.

Лемма 2. *Если $l \in V\{\alpha_0(x), \alpha_n(x)\}$, то решение $e(x, \lambda)$ представимо в виде*

$$e(x, \lambda) = e^{i\lambda x}\left[1 + \frac{u_1(x)}{i\lambda} + \ldots + \frac{u_n(x)}{(i\lambda)^n}\right] + \frac{v_{n+1}(x, \lambda)}{(i\lambda)^{n+1}}, \tag{1.11}$$

причем при всех λ

$$|v_{n+1}(x, \lambda)| \leqslant \frac{\alpha_n(x)M(x)}{2^n}, \tag{1.12}$$

а при $|\lambda| > 4\alpha_0(0)$

$$|v_{n+1}(x, \lambda)| \leqslant \frac{4}{3}\frac{\alpha_n(x)}{2^n}, \tag{1.13}$$

$$|\dot{v}_{n+1}(0, \lambda)| \leqslant \frac{M(0)}{2^n}\left[\hat{\alpha}_n(0) + \frac{4}{3|\lambda|}\alpha_n(0)\right]. \tag{1.14}$$

Доказательство. Подставляя правую часть формулы (1.11) в уравнение (1.1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered} 2u_1'(x) - q(x) = 0, \\ 2u_2'(x) + l[u_1(x)] = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \\ 2u_n'(x) + l[u_{n-1}(x)] = 0, \\ l[v_{n+1}(x, \lambda)] + \lambda^2 v_{n+1}(x, \lambda) + i\lambda e^{i\lambda x} l[u_n(x)] = 0. \end{gathered} \tag{1.15}$$

Интегрируя эту систему, получим

$$u_k(x) = -\frac{1}{2^k} I[lI]^{k-1} q(x),$$

а функция $v_{n+1}(x, \lambda)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$v_{n+1}(x, \lambda) = -i\int_x^\infty \sin\lambda(t-x)e^{i\lambda t}\, l[u_n(t)]dt + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q(t)v_{n+1}(t, \lambda)dt. \tag{1.16}$$

Последнее уравнение, очевидно, имеет решение, и так как

$$|v_{n+1}(x, \lambda)| \leqslant \int_x^\infty |l[u_n(t)]|\, dt + \int_x^\infty (t-x)|q(t)|\, |v_{n+1}(t, \lambda)|\, dt,$$

$$\int_x^\infty |l[u_n(t)]|\, dt \leqslant \frac{\alpha_n(x)}{2^n},$$

то при всех λ

$$|v_{n+1}(x, \lambda)| \leqslant \frac{\alpha_n(x)M(x)}{2^n},$$

а при $|\lambda| > 4\alpha_0(0)$

$$|v_{n+1}(x, \lambda)| \leqslant \frac{4}{3}\frac{\alpha_n(x)}{2^n}.$$

Тем самым неравенства (1.12), (1.13) доказаны. Далее, дифференцируя уравнение (1.16) по λ, получим

$$\dot{v}_{n+1}(x, \lambda) = \int_x^\infty \frac{\sin \lambda(t-x)}{\lambda} q(t)\dot{v}_{n+1}(t, \lambda)dt +$$

$$+ \int_x^\infty \left[\frac{(t-x)\cos \lambda(t-x)}{\lambda} - \frac{\sin \lambda(t-x)}{\lambda^2}\right] q(t)v_{n+1}(t, \lambda)dt -$$

$$-i\int_x^\infty [(t-x)\cos \lambda(t-x)e^{i\lambda t} + it\sin \lambda(t-x)e^{i\lambda t}]\, l[u_n(t)]\, dt,$$

откуда при $|\lambda| > 4\alpha_0(0)$

$$|\dot{v}_{n+1}(x, \lambda)| \leqslant \frac{\hat{\alpha}_n(0)}{2^{n-1}} + \frac{4}{3|\lambda|}\cdot\frac{\alpha_n(0)}{2^{n-1}}\int_x^\infty (t-x)|q(t)|\,dt +$$

$$+ \int_x^\infty (t-x)|q(t)||\dot{v}_{n+1}(t, \lambda)|\,dt.$$

Итерируя это неравенство, находим

$$|\dot{v}_{n+1}(x, \lambda)| \leqslant \frac{\hat{\alpha}_n(0)}{2^{n-1}} M(x) + \frac{4\alpha_n(0)}{3\cdot 2^{n-1}|\lambda|}[M(x) - 1)],$$

где функция $M(x)$ определена формулой (1.3). Полагая здесь $x = 0$, получим неравенство (1.14). Лемма доказана.

Пусть $l_j \in V\{\alpha_0(x), \alpha_n(x)\}$ $(j = 1, 2)$.

Рассмотрим краевые задачи

$$l_j y + \lambda^2 y = 0,$$
$$y(0) = 0.$$

Как известно, нормированные собственные функции непрерывного спектра такой задачи выражаются через решения $e_j(x, \lambda)$ следующим образом:

$$u_j(x, \lambda) = e_j(x, \lambda) - S_j(-\lambda)e_j(x, -\lambda), \tag{1.17}$$

где функция рассеяния $S_j(\lambda)$ имеет вид

$$S_j(\lambda) = \frac{e_j(0, -\lambda)}{e_j(0, \lambda)}. \tag{1.18}$$

Предположим, что при $|\lambda| < N$

$$S_2(\lambda) = S_1(\lambda). \tag{1.19}$$

Используя принадлежность операторов l_j множеству $V\{\alpha_0(x), \alpha_n(x)\}$, оценим разность функций рассеяния при $|\lambda| > N$.

Лемма 3. *Если $l_j \in V\{\alpha_0(x), \alpha_n(x)\}$ $(j = 1, 2)$ и функции рассеяния, соответствующие этим операторам, совпадают при $|\lambda| < N$, то при $|\lambda| > N > 4\alpha_0(0)$*

$$|S_2(\lambda) - S_1(\lambda)| \leqslant \frac{18\cdot 2^{n+1}\alpha_n(0)M^2(0)}{|\lambda|\, N^n}\left[1 + \frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]. \tag{1.20}$$

Если же $|\lambda| > N > \max\{4\alpha_0(0),\ n^2\}$, *то*

$$|\dot S_2(\lambda)-S_1(\lambda)| \leqslant \frac{9\cdot 2^{n+7}\alpha_n(0)M^2(0)\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]}{|\lambda|^2\ N^{n-1}}\left\{1+\frac{\hat\alpha_n(0)}{\alpha_n(0)}+\frac{\hat\alpha_0(0)}{N}\right\}. \qquad (1.21)$$

Доказательство. Так как

$$S_j(\lambda) = \frac{e_j(0,\ -\lambda)}{e_j(0,\ \lambda)},$$

то при $|\lambda| < N$

$$e_2(0,\ \lambda)e_1(0,\ -\lambda) - e_1(0,\ \lambda)e_2(0,\ -\lambda) = 0.$$

Пользуясь формулой (1.11), перепишем это равенство, выделяя члены, не содержащие $v_{n+1}^{(j)}(0,\ \pm\lambda)$:

$$P_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) + T\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0, \qquad (1.22)$$

где

$P_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ — нечетный многочлен степени $(2n-1)$ относительно $\frac{1}{\lambda}$; а

$$T\left(\frac{1}{\lambda}\right) = A\left(\frac{1}{\lambda}\right) - A\left(-\frac{1}{\lambda}\right), \qquad (1.23)$$

$$A\left(\frac{1}{\lambda}\right) = e_2(0,\ \lambda)\frac{v_{n+1}^{(1)}(0,\ -\lambda)}{(-i\lambda)^{n+1}} + \frac{v_{n+1}^{(2)}(0,\ \lambda)}{(i\lambda)^{n+1}}\left[e_1(0,\ -\lambda) - \frac{v_{n+1}^{(1)}(0,\ -\lambda)}{(-i\lambda)^{n+1}}\right].$$

В силу неравенств (1.5), (1.12), при $|\lambda| < N$

$$\left|(i\lambda)^{2n+2}T\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right| \leqslant \frac{4\alpha_n(0)M^2(0)}{2^n}N^{n+1}\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]. \qquad (1.24)$$

Положим

$$P_{2n+1}(\lambda) = (i\lambda)^{2n+2}\ P_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right). \qquad (1.25)$$

Многочлен $P_{2n+1}(\lambda)$ имеет вид

$$P_{2n+1}(\lambda) = c_{2n+1}(i\lambda)^{2n+1} + c_{2n-1}(i\lambda)^{2n-1} + \ldots + c_3(i\lambda)^3. \qquad (1.26)$$

Из формулы (1.22) и неравенства (1.25) следует, что при $|\lambda| < N$

$$|P_{2n+1}(\lambda)| \leqslant \frac{4\alpha_n(0)M^2(0)}{2n}N^{n+1}\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right] = C_N.$$

Отсюда, согласно известному неравенству Бернштейна [4], получим при $|\lambda| > N$

$$|P_{2n+1}(\lambda)| \leqslant \frac{C_N\,|\lambda|^{2n+1}2^{2n+1}}{N^{2n+1}} \qquad (1.27)$$

и, следовательно, в силу (1.25), при $|\lambda| > N$ выполняется неравенство

$$\left|P_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right| \leqslant \frac{8\cdot 2^n\alpha_n(0)M^2(0)}{|\lambda|\,N^n}\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]. \qquad (1.28)$$

Кроме того, как следует из (1.23), (1.5), (1.12), при $|\lambda| > N$

$$\left|T\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right| \leqslant \frac{4\alpha_n(0)M^2(0)}{2^n\,|\lambda|^{n+1}}\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]. \qquad (1.29)$$

Итак,

$$S_2(\lambda)-S_1(\lambda)=\frac{P_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+T\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{e_1(0,\ \lambda)\ e_2(0,\ \lambda)}, \tag{1.30}$$

где функции $P_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, $T\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ при $|\lambda|>N$ оцениваются неравенствами (1.28), (1.29).

Как легко видеть, при $|\lambda|>4\alpha_0(0)$

$$|e(0,\ \lambda)|\geqslant\frac{2}{3}. \tag{1.31}$$

Используя оценки (1.28), (1.29), (1.31), из формулы (1.30) получим неравенство (1.20), которое требовалось доказать.

Оценим теперь $\dot S_2(\lambda)-\dot S_1(\lambda)$, для чего продифференцируем (1. 30):

$$\dot S_2(\lambda)-\dot S_1(\lambda)=\frac{\dot P_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+\dot T\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{e_1(0,\ \lambda)\ e_2(0,\ \lambda)}+$$

$$+[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]\frac{\dot e_1(0,\ -\lambda)e_2(0,\ -\lambda)+e_1(0,\ -\lambda)\dot e_2(0,\ -\lambda)}{e_1(0,\ \lambda)\ e_2(0,\ \lambda)}. \tag{1.32}$$

Оценивая $\dot P_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)$, воспользуемся известным неравенством Маркова: если полином $P(x)$ степени n на интервале $-1\leqslant x\leqslant 1$ удовлетворяет неравенству

$$|P(x)|\leqslant C,$$

то при тех же x

$$|P'(x)|\leqslant Cn^2.$$

Поэтому на основании (1.28) заключаем, что при $|\lambda|>N$

$$\left|\dot P_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right|\leqslant\frac{8\cdot 2^n(2n-1)^2\alpha_n(0)M^2(0)}{|\lambda|^2\ N^n}\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]. \tag{1.33}$$

Далее, дифференцируя (1.23) и учитывая неравенства (1.5), (1.7), (1.13), (1.14), находим при $|\lambda|>N>4\alpha_0(0)$

$$\left|T\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right|\leqslant\frac{16\alpha_n(0)M^2(0)}{2^n\,|\lambda|^{n+1}}\left\{\frac{\dot\alpha_n(0)}{\alpha_n(0)}+\frac{\frac{n+1}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}\,\hat\alpha_0(0)}{N}\right\}. \tag{1.34}$$

Используя оценки (1.33), (1.34), (1.20), (1.5), (1.7), (1.31), из формулы (1.32) при $|\lambda|>N>\max\{4\alpha_0(0),\ n^2\}$ получим неравенство (1.21), которое требовалось доказать.

Лемма 4. *Если выполнены условия леммы 3, то при* $|\lambda|>N$

$$S_2(\lambda)-S_1(\lambda)=\frac{\frac{c_{2n+1}}{i\lambda}+R_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+T\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{e_1(0,\ \lambda)\ e_2(0,\ \lambda)}, \tag{1.35}$$

где

$$|c_{2n+1}|\leqslant\frac{8\cdot 2^n\alpha_n(0)M^2(0)}{N^n}\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right], \tag{1.36}$$

$$\left|R_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+T\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right|\leqslant\frac{21}{4}\,\frac{2^{3n}\alpha_n(0)M^2(0)}{|\lambda|^3\ N^{n-2}}\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]. \tag{1.37}$$

Доказательство. Как было показано в предыдущей лемме,

$$S_2(\lambda)-S_1(\lambda)=\frac{P_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+T\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{e_1(0,\ \lambda)\,e_2(0,\ \lambda)}.$$

Положим

$$P_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{c_{2n+1}}{i\lambda}+R_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Из неравенства (1.27) следует, что

$$|c_{2n+1}|\leqslant\frac{8\quad 2^n\alpha_n(0)M^2(0)}{N^n}\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right],$$

откуда, учитывая оценку (1.24), находим, что при $|\lambda|<N$

$$|\lambda|^{2n+2}\left|R_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right|\leqslant 4\cdot 2^n\quad N^{n+1}\alpha_n(0)M^2(0)\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]\left[2+\frac{1}{2^n}\right].$$

Применяя неравенство Бернштейна и (1.29), приходим при $|\lambda|>N$ к неравенству (1.37), которое требовалось доказать.

2. Оценка разности потенциалов

Пусть по-прежнему l_j $(j=1,\ 2)$ — операторы Штурма—Лиувилля, принадлежащие классу $V\{\alpha_0(x),\ \alpha_n(x)\}$, и данные рассеяния двух краевых задач, порождаемых этими операторами, совпадают при $\lambda^2<N^2$.

Как показано в работе [2],

$$-\int\limits_x^\infty[q_1(t)-q_2(t)]dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}[S_2(\lambda)-S_1(\lambda)]e_1(x,\ \lambda)e_2(x,\ \lambda)d\lambda. \tag{2.1}$$

Следующая лемма дает удобное для дальнейшего представление функции $e_1(x,\ \lambda)e_2(x,\ \lambda)$.

Лемма 5. *Если* $l_j\in\dot V\{\alpha_0(x),\ \alpha_n(x)\}$ $(j=1,\ 2)$, *то*

$$e_1(x,\ \lambda)e_2(x,\ \lambda)=e^{2i\lambda x}+\int\limits_x^\infty Q(t)e^{2i\lambda t}dt+r(x,\ \lambda), \tag{2.2}$$

где

$$Q(x)=\int\limits_x^\infty[q_1(t)+q_2(t)]dx;\ |Q(x)|\leqslant 2\alpha_0(x), \tag{2.3}$$

а функция $r(x,\ \lambda)$ *при* $|\lambda|>4\alpha_0(0)$ *оценивается неравенствами*

$$|r(x,\ \lambda)|\leqslant\frac{28}{9}\cdot\frac{\alpha_0^2(x)}{|\lambda|^2}, \tag{2.4}$$

$$|r'(x,\ \lambda)|\leqslant\frac{56}{9}\frac{\alpha_0^2(x)}{|\lambda|}. \tag{2.5}$$

(Штрих над функцией $r(x,\ \lambda)$ *означает дифференцирование по* x*).*

Доказательство. Представим решение $e_j(x,\ \lambda)$ $(j=1,\ 2)$ в виде

$$e_j(x,\ \lambda)=e^{i\lambda x}\oplus\int\limits_x^\infty\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}q_j(t)e^{i\lambda t}dt+$$

$$+\int\limits_x^\infty\frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda}q_j(t)[e_j(t,\ \lambda)-e^{i\lambda t}]dt.$$

Тогда, как легко видеть, справедлива формула (2.2), где

$$r(x, \lambda) = [e_1(x, \lambda) - e^{i\lambda x}][e_2(x, \lambda) - e^{i\lambda x}] + $$
$$+ e^{i\lambda x}\left\{\int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q_1(t)[e_1(t, \lambda) - e^{i\lambda t}]dt + \right.$$
$$\left. + \int_x^\infty \frac{\sin\lambda(t-x)}{\lambda} q_2(t)[e_2(t, \lambda) - e^{i\lambda t}]dt\right\}. \tag{2.6}$$

Так как при $|\lambda| > 4\alpha_0(0)$

$$|e_j(x, \lambda) - e^{i\lambda x}| \leqslant \frac{4}{3|\lambda|}\alpha_0(x),$$

то неравенство (2.4) следует непосредственно из (2.6). Дифференцируя (2.6) по x и замечая, что при $|\lambda| > 4\alpha_0(0)$

$$|e'(x, \lambda) - i\lambda e^{i\lambda x}| \leqslant \frac{4}{3}\alpha_0(x),$$

получим неравенство (2.5). Лемма доказана.

Следующая теорема дает равномерную оценку разности потенциалов в классе операторов $V\{\alpha_0(x), \alpha_n(x)\}$.

Теорема 1. *Если данные рассеяния двух краевых задач, порождаемых операторами l_1, l_2, принадлежащими классу $V\{(\alpha_0(x), \alpha_n(x)\}$, совпадают при $\lambda^2 < N^2$ и $N > 4\alpha_0(0)$, то*

$$|q_1(x) - q_2(x)| \leqslant \frac{34 \quad 2^{3n}\alpha_n(0)M^2(0)}{N^{n-1}}\left[1 + \frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]. \tag{2.7}$$

Доказательство. Подставляя в формулу (2.1) выражение (2.2) и полагая

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N} [S_2(\lambda) - S_1(\lambda)]e^{2i\lambda x}d\lambda, \tag{2.8}$$

получим

$$-\int_x^\infty [q_1(t) - q_2(t)]dt = \Phi(x) + \int_x^\infty \Phi(t)Q(t)dt + \frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N} [S_2(\lambda) - S_1(\lambda)]r(x, \lambda)d\lambda. \tag{2.9}$$

Дифференцируя это соотношение, находим

$$q_1(x) - q_2(x) = \Phi'(x) - \Phi(x)Q(x) + \frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N} [S_2(\lambda) - S_1(\lambda)]r'(x, \lambda)d\lambda. \tag{2.10}$$

Оценим правую часть этого равенства.

В силу (1.35), функция $\Phi(x)$ представима в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|>N} \frac{\frac{c_{2n+1}}{i\lambda} + R_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) + T\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{e_1(0, \lambda)e_2(0, \lambda)} e^{2i\lambda x}d\lambda. \tag{2.11}$$

Как легко видеть,

$$\frac{1}{e_1(0, \lambda)e_2(0, \lambda)} = 1 - \frac{R(\lambda)}{e_1(0, \lambda)e_2(0, \lambda)}, \tag{2.12}$$

где

$$R(\lambda) = e_1(0, \lambda)e_2(0, \lambda) - 1 = [e_1(0, \lambda) - 1][e_2(0, \lambda) - 1] +$$
$$+ e_1(0, \lambda) - 1 + e_2(0, \lambda) - 1.$$

Так как при $|\lambda| > 4\alpha_0(0)$

$$|e_j(0, \lambda) - 1| \leqslant \frac{4}{3}\frac{\alpha_0(0)}{|\lambda|},$$

то

$$|R(\lambda)| \leqslant \frac{28}{9}\frac{\alpha_0(0)}{|\lambda|}. \tag{2.13}$$

Перепишем равенство (2.11) в следующем виде:

$$\Phi(x) = \frac{c_{2n+1}}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{e^{2i\lambda x}}{i\lambda}d\lambda - \frac{c_{2n+1}}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{R(\lambda)e^{2i\lambda x}}{i\lambda e_1(0, \lambda)e_2(0, \lambda)}d\lambda + \frac{1}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{R_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+T\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{e_1(0, \lambda)e_2(0, \lambda)}e^{2i\lambda x}d\lambda. \tag{2.14}$$

Отсюда, в силу неравенств (1.36), (1.37), (2.13), (1.31), следует, что при $N > 4\alpha_0(0)$

$$|\Phi(x)| \leqslant \frac{12\cdot 2^{3n}\alpha_n(0)M^2(0)}{N^n}\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]. \tag{2.15}$$

Оценим $\Phi'(x)$. Дифференцируя (2.14), получим

$$\Phi'(x) = \frac{4c_{2n+1}N}{\pi}\cdot\frac{\sin 2Nx}{2Nx} - \frac{2c_{2n+1}}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{R(\lambda)e^{2i\lambda x}}{e_1(0, \lambda)e_2(0, \lambda)}d\lambda + \frac{2}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{R_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+T\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{e_1(0, \lambda)e_2(0, \lambda)}i\lambda e^{2i\lambda x}d\lambda. \tag{2.16}$$

В силу (2.12) и (2.2),

$$R(\lambda) = -\frac{Q(0)}{2i\lambda} + \frac{1}{2i\lambda}\int\limits_0^\infty[q_1(x)+q_2(x)]e^{2i\lambda x}dx + r(0, \lambda).$$

Подставляя это выражение в (2.16), будем иметь

$$\Phi'(x) = \frac{4c_{2n+1}N}{\pi}\cdot\frac{\sin 2Nx}{2Nx} + \frac{c_{2n+1}Q(0)}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{e^{2i\lambda x}}{i\lambda}d\lambda - \frac{c_{2n+1}}{\pi}\int\limits_0^\infty[q_1(t)+q_2(t)]dt\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{e^{2i\lambda(x+t)}}{i\lambda}d\lambda - \frac{2c_{2n+1}}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}r(0, \lambda)e^{2i\lambda x}d\lambda + \frac{2c_{2n+1}}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{R^2(\lambda)e^{2i\lambda x}}{e_1(0, \lambda)e_2(0, \lambda)}d\lambda + \frac{2}{\pi}\int\limits_{|\lambda|>N}\frac{R_{2n-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right)+T\left(\frac{1}{\lambda}\right)}{e_1(0, \lambda)e_2(0, \lambda)}i\lambda e^{2i\lambda x}d\lambda.$$

Отсюда, в силу неравенств (1.36), (2.4), (2.13), (2.17), (1.31), следует, что при $N > 4\alpha_0(0)$

$$|\Phi'(x)| \leqslant \frac{25\cdot 2^{3n}\alpha_n(0)M^2(0)}{N^{n-1}}\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]. \tag{2.}$$

Возвращаясь к формуле (2.10) и учитывая (2.17), (2.15), (2.5), получим при $N > 4\alpha_0(0)$

$$|q_1(x) - q_2(x)| \leqslant \frac{34\cdot 2^{3n}\alpha_n(0)M^2(0)}{N^{n-1}}\left[1+\frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right],$$

теорема доказана.

3. Оценка разности собственных функций

В работе [3] была получена формула

$$[e_1(x, \mu) - e_2(x, \mu)]^2 = \frac{1}{2\pi}\int_x^\infty [q_1(t) - q_2(t)]\,dt \int_{|\lambda|>N} \frac{S_2(\lambda) - S_1(\lambda)}{\lambda^2 - \mu^2} \times$$

$$\times [e_1(x, \lambda) e_2(x, \lambda) e_1(t, \mu) e_2(t, \mu) - e_1(x, \mu) e_2(x, \mu) e_1(t, \lambda) e_2(t, \lambda)]\,d\lambda, \quad (3.1)$$

справедливая при $\mu \in (0, N)$.

Полученные в предыдущих параграфах неравенства (1.20), (1.5), (1.6) позволяют заключить, что при $N > 4\alpha_0(0)$

$$|e_1(x, \mu) - e_2(x, \mu)|^2 \leqslant \frac{2^{n+7}}{\pi} \frac{\alpha_n(0) M^4(0)\left[1 + \frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]}{N^{n+2}\left(1 - \frac{\mu^2}{N^2}\right)} \int_0^\infty |q_1(t) - q_2(t)|\,dt. \quad (3.2)$$

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то при* $N > \max\{4\alpha_0(0), n^2\}$

$$\int_0^\infty |q_1(x) - q_2(x)|\,dx \leqslant \frac{2^{3n}\alpha_n(0) M^2(0)}{N^{n-1}}\left[1 + \frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right] \times$$

$$\times \left[\frac{25}{N} + \left(1 + \frac{\hat{\alpha}_n(0)}{\alpha_n(0)}\right) 2^{11-2n} + \frac{\hat{\alpha}_0(0)}{N}(24 + 2^{11-2n})\right]. \quad (3.3)$$

Доказательство. Интегрируя (2.10) по полуоси $(0, \infty)$, находим

$$\int_0^\infty |q_1(x) - q_2(x)|\,dx \leqslant \int_0^\infty |\Phi'(x)|\,dx + \int_0^\infty |\Phi(x)|\,|Q(x)|\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dx \int_{|\lambda|>N} |S_2(\lambda) - S_1(\lambda)|\,|r'(x, \lambda)|\,d\lambda = I_1 + I_2 + I_3. \quad (3.4)$$

Последние два интеграла при $N > 4\alpha_0(0)$ легко оцениваются с помощью неравенств (2.15), (1.20), (2.5):

$$I_2 \leqslant \frac{24 \cdot 2^{3n}\alpha_n(0) M^2(0)}{N^n} \hat{\alpha}_0(0)\left[1 + \frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right], \quad (3.5)$$

$$I_3 \leqslant \frac{56 \cdot 2^{n+1}\alpha_n(0) M^2(0)}{\pi N^n} \hat{\alpha}_0(0)\left[1 + \frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]. \quad (3.6)$$

Для оценки I_1 преобразуем формулу (2.8). Интегрируя один раз по частям, получим

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2i\pi x}\int_{|\lambda|>N} [\dot{S}_2(\lambda) - \dot{S}_1(\lambda)]\,e^{2i\lambda x}\,d\lambda,$$

откуда

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2i\pi x^2}\int_{|\lambda|>N} [\dot{S}_2(\lambda) - \dot{S}_1(\lambda)]\,e^{2i\lambda x}\,d\lambda -$$

$$-\frac{1}{\pi x}\int_{|\lambda|>N} [\dot{S}_2(\lambda) - \dot{S}_1(\lambda)]\,\lambda e^{2i\lambda x}\,d\lambda. \quad (3.7)$$

Далее, согласно (2.17),

$$I_1 = \int_0^{\infty} |\Phi'(x)|\, dx \leqslant \frac{25 \cdot 2^{3n} \alpha_n(0) M^2(0)}{N^n} \left[1 + \frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right] + \int_{\frac{1}{N}}^{\infty} |\Phi'(x)|\, dx. \quad (3.8)$$

Интегрируя (3.7) по полуоси $\left(\frac{1}{N}, \infty\right)$ и применяя неравенство Коши — Буняковского и равенство Парсеваля, получим

$$\int_{\frac{1}{N}}^{\infty} |\Phi'(x)\, dx \leqslant \frac{N}{2\pi} \int_{|\lambda| > N} |\dot{S}_2(\lambda) - \dot{S}_1(\lambda)|\, d\lambda + \sqrt{\frac{2N}{\pi} \int_{|\lambda| > N} |\dot{S}_2(\lambda) - \dot{S}_1(\lambda)|^2 \lambda^2\, d\lambda}. \quad (3.9)$$

Отсюда, в силу оценки (1.21), следует, что при $N > \max\{4\alpha_0(0), n^2\}$ справедливо неравенство

$$\int_{\frac{1}{N}}^{\infty} |\Phi'(x)| dx \leqslant \frac{9 \cdot 2^{n+7} \alpha_n(0) M^2(0) \left[1 + \frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]}{N^{n-1}} \left\{1 + \frac{\hat{\alpha}_n(0)}{\alpha_n(0)} + \frac{\hat{\alpha}_0(0)}{N}\right\} \left[\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right]. \quad (3.10)$$

Используя неравенства (3.5), (3.6), (3.8) и (3.10), будем иметь

$$\int_0^{\infty} |q_1(t) - q_2(t)|\, dt \leqslant \frac{2^{3n} \alpha_n(0) M^2(0) \left[1 + \frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]}{N^{n-1}} \times$$

$$\times \left[\frac{25}{N} + \left(1 + \frac{\hat{\alpha}_n(0)}{\alpha_n(0)}\right) 2^{-2n} \cdot A + \frac{\hat{\alpha}_0(0)}{N} \left\{24 + \left(A + \frac{112}{\pi}\right) 2^{-2n}\right\}\right],$$

где

$$A = 9 \cdot 2^7 \left[\frac{1}{\pi} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\right] \leqslant 2^{11}. \quad (3.11)$$

Оценка (3.3) является непосредственным следствием этого неравенства.

Пусть, как и раньше, $u_j(x, \mu)$ $(j = 1, 2)$ — нормированные собственные функции двух рассматриваемых краевых задач. Так как при $\mu \in (0, N)$

$$S_1(-\mu) = S_2(-\mu),$$

то в силу (1.17)

$$|u_1(x, \mu) - u_2(x, \mu)| \leqslant 2\, |e_1(x, \mu) - e_2(x, \mu)|. \quad (3.12)$$

Теорема 3. *Пусть l_j $(j = 1, 2)$ — операторы, принадлежащие классу $V\{\alpha_0(x), \alpha_n(x)\}$, и данные рассеяния двух краевых задач, порождаемых этими операторами, совпадают при всех $\lambda^2 < N^2$. Если $N > \max\{4\alpha_0(0), n^2\}$, то нормированные собственные функции этих краевых задач $u_j(x, \mu)$ при всех $\mu \in (0, N)$ удовлетворяют неравенству*

$$|u_1(x, \mu) - u_2(x, \mu)|^2 \leqslant \frac{2^{4n+9} \alpha_n^2(0) M^6(0) \left[1 + \frac{\alpha_n(0)}{(2N)^{n+1}}\right]^2}{N^{2n+1}} \times$$

$$\times \left[\frac{25}{N} + \left(1 + \frac{\hat{\alpha}_n(0)}{\alpha_n(0)}\right) 2^{11-2n} + \frac{\hat{\alpha}_0(0)}{N} (24 + 2^{11-2n})\right]. \quad (3.13)$$

Эта теорема следует из неравенств (3.12), (3.11), (3.2).

Заметим, что, подобно тому, как это делалось в работе [3], можно получить оценку разности нормированных собственных функций и в метрике пространства $L^2(0, \infty)$.

В заключение выражаем глубокую благодарность В. А. Марченко за руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Марченко. Устойчивость обратной задачи теории рассеяния. «Матем. сб.», 77 (119), 139—162, 1968.

2. Д. Ш. Лундина, В. А. Марченко. Уточнение неравенств, характеризующих устойчивость обратной задачи теории рассеяния. «Матем. сб.», 78 (120): 4, 475—484, 1969.

3. Д. Ш. Лундина. О точности восстановления собственных функций по неполным данным рассеяния. «Математическая физика и функциональный анализ», вып. 1. ФТИНТ АН УССР, 72—82, 1969.

4. С. Н. Бернштейн. Экстремальные свойства полиномов, ОНТИ, 1937.

Поступила 20 апреля 1970 г.